

# Лабораторная работа №4

Благодарный Артём

5 октября, 2025

## Задача 1

Имеется  $m = 7$  кандидатов. Данна матрица коэффициентов компетентности (оценок близости мнений)  $K = (k_{ij})$  размера  $7 \times 7$  (строка  $i$  — оценки, выставленные кандидатом  $i$  другим кандидатам  $j$ ):

$$K = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,70 & 0,90 & 0,70 & 0,80 & 0,70 & 0,80 \\ 0,60 & 0,90 & 0,70 & 0,80 & 0,70 & 0,90 & 0,70 \\ 0,80 & 0,60 & 0,95 & 0,60 & 0,80 & 0,80 & 0,70 \\ 0,70 & 0,90 & 0,50 & 0,90 & 0,80 & 0,90 & 0,50 \\ 0,90 & 0,70 & 0,60 & 0,70 & 0,90 & 0,70 & 0,80 \\ 0,80 & 0,90 & 0,60 & 0,90 & 0,60 & 0,90 & 0,60 \\ 0,50 & 0,60 & 0,80 & 0,80 & 0,70 & 0,70 & 0,90 \end{pmatrix}.$$

## Решение

По алгоритму для каждого кандидата  $j$  вычисляется средний коэффициент компетентности, оценённый всеми кандидатами:

$$\bar{k}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m k_{ij}, \quad j = 1, \dots, 7.$$

Вычисления дают (с точностью до 6 знаков):

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \frac{0,95 + 0,60 + 0,80 + 0,70 + 0,90 + 0,80 + 0,50}{7} = 0,750000, \\ \bar{k}_2 &= \frac{0,70 + 0,90 + 0,60 + 0,90 + 0,70 + 0,90 + 0,60}{7} \approx 0,75714286, \\ \bar{k}_3 &= \frac{0,90 + 0,70 + 0,95 + 0,50 + 0,60 + 0,60 + 0,80}{7} \approx 0,72142857, \\ \bar{k}_4 &= \frac{0,70 + 0,80 + 0,60 + 0,90 + 0,70 + 0,90 + 0,80}{7} \approx 0,77142857, \\ \bar{k}_5 &= \frac{0,80 + 0,70 + 0,80 + 0,80 + 0,90 + 0,60 + 0,70}{7} \approx 0,75714286, \\ \bar{k}_6 &= \frac{0,70 + 0,90 + 0,80 + 0,90 + 0,70 + 0,90 + 0,70}{7} = 0,80000000, \\ \bar{k}_7 &= \frac{0,80 + 0,70 + 0,70 + 0,50 + 0,80 + 0,60 + 0,90}{7} \approx 0,71428571. \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{k} \approx (0,7500, 0,7571429, 0,7214286, 0,7714286, 0,7571429, 0,8000, 0,7142857).$$

Условие отбора: кандидат  $j$  отбирается, если  $\bar{k}_j \geq \delta$ .

Порог  $\delta = 0,6$ . Поскольку все значения  $\bar{k}_j$  выше 0,6, по данному критерию **все 7 кандидатов отобраны**:

Отобранные кандидаты:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

В алгоритме дана формула суммарной дисперсии

$$D(k) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (k_i - k_{ij})^2,$$

где  $k_i$  — средний коэффициент компетентности для  $i$ -го кандидата (т. е. среднее по строке  $i$ ):

$$k_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Сначала вычислим средние по строкам  $k_i$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{0,95 + 0,70 + 0,90 + 0,70 + 0,80 + 0,70 + 0,80}{7} \approx 0,79285714, \\ k_2 &= \frac{0,60 + 0,90 + 0,70 + 0,80 + 0,70 + 0,90 + 0,70}{7} \approx 0,75714286, \\ k_3 &= \frac{0,80 + 0,60 + 0,95 + 0,60 + 0,80 + 0,80 + 0,70}{7} \approx 0,75000000, \\ k_4 &= \frac{0,70 + 0,90 + 0,50 + 0,90 + 0,80 + 0,90 + 0,50}{7} \approx 0,74285714, \\ k_5 &= \frac{0,90 + 0,70 + 0,60 + 0,70 + 0,90 + 0,70 + 0,80}{7} \approx 0,75714286, \\ k_6 &= \frac{0,80 + 0,90 + 0,60 + 0,90 + 0,60 + 0,90 + 0,60}{7} \approx 0,75714286, \\ k_7 &= \frac{0,50 + 0,60 + 0,80 + 0,80 + 0,70 + 0,70 + 0,90}{7} \approx 0,71428571. \end{aligned}$$

Теперь подставляем в формулу  $D(k)$ . После прямого суммирования всех квадратов отклонений получаем (с точностью до 8 знаков):

$$D(k) \approx 0,01539359.$$

Величина  $D(k)$  характеризует рассеяние (несогласованность) в оценках компетентности экспертов (по определению алгоритма). Чем ближе  $D(k)$  к нулю, тем выше единодушие.

Значение  $D(k) \approx 0,0154$  — достаточно малое, поэтому по критерию данного алгоритма можно заключить, что мнения (оценки компетентности) кандидатов относительно друг друга демонстрируют **высокую согласованность**. В сочетании с тем, что все средние столбцовые оценки  $\bar{k}_j$  превосходят порог  $\delta = 0,6$ , это даёт основание для отбора **всех семи кандидатов** в группу экспертов при данном пороге.

## Задача 2

### Условие

Дано 5 экспертов и 7 факторов  $e_1, \dots, e_7$ . Матрица рангов (строка = эксперт, столбец = фактор):

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \\ 4 & 2,5 & 2,5 & 6 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5,5 & 7 & 5,5 & 1 \\ 5 & 2,5 & 2,5 & 4 & 6,5 & 6,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя метод непосредственного ранжирования, построить рейтинговый ряд факторов  $e$ . Определить дисперсию для оценивания единодушия экспертов.

### Решение

Для каждого эксперта должно выполняться

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Проверка сумм строк:

$$\sum_j r_{1j} = 28, \quad \sum_j r_{2j} = 28, \quad \dots, \quad \sum_j r_{5j} = 28.$$

Условие выполнено (каждый эксперт использовал ранги корректно, связанные ранги уже учтены в исходных данных).

В таблице есть связанные ранги (например, 2,5), они уже заданы как средние ранги — дополнительных преобразований не требуется.

Средний ранг каждого фактора

$$\bar{r}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{ij}, \quad j = 1, \dots, 7.$$

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \frac{5 + 4 + 4 + 4 + 5}{5} = 4,4, \\ \bar{r}_2 &= \frac{2 + 2,5 + 3 + 2 + 2,5}{5} = 2,4, \\ \bar{r}_3 &= \frac{3 + 2,5 + 2 + 3 + 2,5}{5} = 2,6, \\ \bar{r}_4 &= \frac{4 + 6 + 6 + 5,5 + 4}{5} = 5,1, \\ \bar{r}_5 &= \frac{7 + 7 + 7 + 7 + 6,5}{5} = 6,9, \\ \bar{r}_6 &= \frac{6 + 5 + 5 + 5,5 + 6,5}{5} = 5,6, \\ \bar{r}_7 &= \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1}{5} = 1,0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{r} = (4,4, 2,4, 2,6, 5,1, 6,9, 5,6, 1,0).$$

Ранги сортируем по возрастанию среднего ранга (меньшее значение = более высокий приоритет).

Порядок факторов по убыванию приоритета:

$$e_7 \succ e_2 \succ e_3 \succ e_1 \succ e_4 \succ e_6 \succ e_5.$$

(То есть лучший —  $e_7$  с  $\bar{r}_7 = 1,0$ , наихудший —  $e_5$  с  $\bar{r}_5 = 6,9$ .)

По алгоритму дисперсия определяется как

$$D(r) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{r}_j - r_{ij})^2.$$

Вычислим сумму квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 (\bar{r}_j - r_{ij})^2 = S.$$

Подставляя значения, получаем

$$S \approx 8,700.$$

Тогда

$$D(r) = \frac{S}{mn} = \frac{8,700}{5 \cdot 7} \approx 0,2485714286.$$

Величина  $D(r)$  характеризует степень расхождения мнений экспертов. Чем ближе  $D(r)$  к нулю, тем более единодушны мнения.

Значение:

$$D(r) \approx 0,24857.$$

Это означает умеренное рассеяние мнений. Конкретно:

- Факторы  $e_7, e_2, e_3$  имеют явно лучшие (меньшие) средние ранги и меньшую вариативность — высокая согласованность по их приоритету.
- Факторы  $e_4, e_6, e_5$  находятся в зоне меньшего приоритета и демонстрируют большие расхождения (в частности  $e_5$  — наихудший по средней оценке).

## Задача 3

### условие

Даны три матрицы парных сравнений (каждая  $6 \times 6$ ) от экспертов Э1, Э2, Э3. Элементы матриц принимают значения 1 (который предпочитает  $e_k \succ e_j$ ), 0 (эквивалентность) или  $-1$  ( $e_k \prec e_j$ ).

### Эксперт 1 (Э1)

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Эксперт 2 (Э2)

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Эксперт 3 (Э3)

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число экспертов  $m = 3$ , число факторов  $n = 6$ . Порог  $\delta = 0,5$ . Используя метод парных сравнений, построить рейтинговый ряд факторов е. Определить дисперсию. Порог равен  $\frac{1}{2}$ .

### Решение

Вычисляем среднюю матрицу

$$\bar{B} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m B^{(i)}.$$

Прямым усреднением получаем (в дробном виде и с округлением до трёх знаков):

$$\begin{aligned}
\bar{B} &= \frac{1}{3}(B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 0 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & -0.333 & 0.333 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 1.000 & -1.000 & 1.000 \\ -1.000 & -0.333 & 0 & -1.000 & 0.333 & 1.000 \\ -1.000 & -1.000 & 1.000 & 0 & -0.333 & 0.333 \\ -0.333 & 1.000 & -0.333 & 0.333 & 0 & 0.333 \\ -1.000 & -1.000 & -1.000 & -0.333 & -0.333 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Правило преобразования:

$$b'_{kj} = \begin{cases} 1, & b_{kj} \geq \delta, \\ 0, & |b_{kj}| < \delta, \\ -1, & b_{kj} \leq -\delta. \end{cases}$$

Порог  $\delta = 0,5$ . Применяя правило к  $\bar{B}$  получаем матрицу явных предпочтений  $B'$ :

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Замечание: именно сравниваем элементы  $\bar{b}_{kj}$  с  $\pm 0,5$ ; элементы с абсолютной величиной меньше 0.5 интерпретируются как «эквивалентность».)

Для каждого фактора  $e_k$  подсчитываем сумму элементов его строки  $s_k = \sum_{j=1}^n b'_{kj}$ . Чем больше  $s_k$ , тем выше ранг фактора.

Суммы строк матрицы  $B'$ :

$$s = (3, 1, -1, -1, 1, -3).$$

Упорядочим факторы по убыванию суммы:

$$e_1 (s_1 = 3) \succ e_2 (s_2 = 1) = e_5 (s_5 = 1) \succ e_3 (s_3 = -1) = e_4 (s_4 = -1) \succ e_6 (s_6 = -3).$$

Запишем рейтинговый ряд, учитывая равенства:

$$\boxed{e_1 \succ (e_2 \sim e_5) \succ (e_3 \sim e_4) \succ e_6}.$$

(Если требуется строгий порядок, можно разбирать равенства дополнительными критериями, например, по сумме абсолютных значений элементов строки или по исходным средним  $\bar{b}_{kj}$ .)

Формула, заданная в алгоритме:

$$D(b) = \frac{1}{mn^2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{b}_{kj} - b_{kj}^{(i)})^2,$$

где  $\bar{b}_{kj}$  — элемент средней матрицы  $\bar{B}$ ,  $b_{kj}^{(i)}$  — элемент матрицы  $i$ -го эксперта.

Подставляя значения (прямое суммирование квадратов отклонений по всем трем экспертам и всем парам), получаем

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\bar{b}_{kj} - b_{kj}^{(i)})^2 = 37\frac{1}{3} = \frac{112}{3}.$$

Тогда

$$D(b) = \frac{\frac{112}{3}}{mn^2} = \frac{112/3}{3 \cdot 6^2} = \frac{112}{3} \cdot \frac{1}{108} = \frac{112}{324} \approx 0,3456790123.$$

Округлённо:

$$D(b) \approx 0,34568.$$

- Средняя матрица  $\bar{B}$  отражает компромиссные предпочтения экспертов; её затем порогуем при  $\delta = 0,5$ .
- Рейтинг факторов по сумме строк матрицы явных предпочтений  $B'$ :

$$e_1 \succ (e_2 \sim e_5) \succ (e_3 \sim e_4) \succ e_6.$$

То есть наибольшие предпочтения — у фактора  $e_1$ , наименьшие — у  $e_6$ ; факторы  $(e_2, e_5)$  и  $(e_3, e_4)$  образуют пары с равными суммами и потому равнозначны в данном упрощённом рейтинге.

- Дисперсия  $D(b) \approx 0,34568$  характеризует степень разногласий между экспертами: чем меньше  $D(b)$ , тем сильнее единодушие. Наблюдаемое значение указывает на умеренный уровень расхождений в мнениях (не крайне высокий разброс, но и не очень малое расхождение).