B5

1. Решить приближенно интегральное уравнения Фредгольма $u(x) - 2\int_0^1 (x^2 - s)u(s)ds = (2x^2 - 3)/6$ методом механических квадратур с использованием формулы трапеций.

2. Определите порядок метода $y_1 = y_0 + \frac{h}{4}\Big(f_0 + 3f(x_0 + h, y_0 + hk)\Big)$, где $f_0 = f(x_0, y_0)$, $k = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f_0)$. Запишите его таблицу Бутчера.

3. Дано ОДУ $y'(x) = \frac{x}{y(x)}$ и точки $(0,1)$, $(1/2, \sqrt{5}/2)$, через которые проходит решение. Вычислить приближенное значение $y(1)$ явным методом Адамса.

4. Даны два метода Рунге–Кутты: $\begin{array}{c|c} \alpha & \alpha \\ \hline & 1 \end{array}$ и $\begin{array}{c|c} \beta & \beta \\ \hline & 1 \end{array}$. Записать таблицу Бутчера для метода, который получается последовательным применением этих методов с шагом $\frac{h}{2}$. Определить максимально возможный порядок получившегося метода.

Задача 1

1. Формулировка задачи в стандартном виде

Уравнение имеет вид

$$u(x) \;-\; \lambda \int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds = f(x),$$

где

$$\lambda = 2, \quad [a,b] = [0,1], \quad K(x,s) = x^2 - s, \quad f(x) = \frac{2x^2-3}{6} = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{2}.$$

---

2. Метод механических квадратур (трапеции)

Разобьём $[0,1]$ на n равных частей длины

$$h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Будем в демонстрации брать $n = 2$ (три узла). Тогда

$$h = \tfrac{1}{2}, \qquad x_j = jh,\ j = 0,1,2.$$

По формуле трапеций веса

$$A_0 = \frac{h}{2} = \tfrac{1}{4}, \quad A_1 = h = \tfrac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{h}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

3. Дискретизация и система линейных уравнений

В узлах x_i $(i = 0,1,2)$ требуем

$$u(x_i) - 2\sum_{j=0}^{2} A_j\,K(x_i,x_j)\,u(x_j) = f(x_i).$$

Обозначим $u_i = u(x_i)$. Тогда для каждого i имеем:

$$u_i \;-\; 2\Big(A_0K_{i0}u_0 + A_1K_{i1}u_1 + A_2K_{i2}u_2\Big) = f_i,$$

где

$$K_{ij} = K(x_i,x_j) = x_i^2 - x_j, \quad f_i = f(x_i) = \frac{x_i^2}{3} - \frac{1}{2}.$$

3.1. Значения x_i, f_i и K_{ij}

i	x_i	$f_i = \frac{x_i^2}{3} - \frac{1}{2}$
0	0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/4}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{12}$
2	1	$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

i, j	$K_{ij} = x_i^2 - x_j$
(0,0)	$0 - 0 = 0$
(0,1)	$0 - 0.5 = -0.5$
(0,2)	$0 - 1 = -1$
(1,0)	$0.25 - 0 = 0.25$
(1,1)	$0.25 - 0.5 = -0.25$
(1,2)	$0.25 - 1 = -0.75$
(2,0)	$1 - 0 = 1$
(2,1)	$1 - 0.5 = 0.5$
(2,2)	$1 - 1 = 0$

3.2. Запись трёх уравнений

Для $i = 0$:

$$u_0 - 2\Big(\tfrac{1}{4} \cdot 0 \cdot u_0 + \tfrac{1}{2} \cdot (-0.5)\, u_1 + \tfrac{1}{4} \cdot (-1)\, u_2\Big) = -\tfrac{1}{2} \implies u_0 + \tfrac{1}{2}\, u_1 + \tfrac{1}{2}\, u_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Умножим на 2:

$$\boxed{2u_0 + u_1 + u_2 = -1.}$$

Для $i = 1$:

$$u_1 - 2\Big(\tfrac{1}{4} \cdot 0.25\, u_0 + \tfrac{1}{2} \cdot (-0.25)\, u_1 + \tfrac{1}{4} \cdot (-0.75)\, u_2\Big) = -\tfrac{5}{12}.$$

Раскрыв скобки:

$$u_1 - \Big(\tfrac{1}{8}u_0 - \tfrac{1}{4}u_1 - \tfrac{3}{8}u_2\Big) = -\tfrac{5}{12} \implies -\tfrac{1}{8}u_0 + \tfrac{5}{4}u_1 + \tfrac{3}{8}u_2 = -\tfrac{5}{12}.$$

Умножим на 24:

$$\boxed{-3u_0 + 30u_1 + 9u_2 = -10.}$$

Для $i = 2$:

$$u_2 - 2\Big(\tfrac{1}{4} \cdot 1\, u_0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.5\, u_1 + \tfrac{1}{4} \cdot 0\, u_2\Big) = -\tfrac{1}{6} \implies u_2 - \big(\tfrac{1}{2}u_0 + \tfrac{1}{2}u_1\big) = -\tfrac{1}{6}.$$

Умножим на 6:

$$\boxed{-3u_0 - 3u_1 + 6u_2 = -1.}$$

Итого система

$$\begin{cases} 2u_0 + u_1 + u_2 = -1, \\ -3u_0 + 30u_1 + 9u_2 = -10, \\ -3u_0 - 3u_1 + 6u_2 = -1. \end{cases}$$

---

4. Решение системы

1. Из первого уравнения выразим
   $u_2 = -1 - 2u_0 - u_1.$
2. Подставим в второе и третье уравнения.

Во 2-м:

$$-3u_0 + 30u_1 + 9(-1 - 2u_0 - u_1) = -10 \implies -21u_0 + 21u_1 = -1. \tag{4}$$

В 3-м:

$$-3u_0 - 3u_1 + 6(-1 - 2u_0 - u_1) = -1 \implies -15u_0 - 9u_1 = 5. \tag{5}$$

Решим (4),(5). Из (4): $21u_1 = 21u_0 - 1 \Rightarrow u_1 = u_0 - \frac{1}{21}$.
Подставляем в (5):

$$-15u_0 - 9\big(u_0 - \tfrac{1}{21}\big) = 5 \implies -24u_0 + \tfrac{3}{7} = 5 \implies u_0 = -\tfrac{4}{21}.$$

Тогда

$$u_1 = -\tfrac{4}{21} - \tfrac{1}{21} = -\tfrac{5}{21}, \quad u_2 = -1 - 2\big(-\tfrac{4}{21}\big) - \big(-\tfrac{5}{21}\big) = -\tfrac{8}{21}.$$

---

5. Итоговое приближение

В узлах:

$$u(0) = u_0 = -\tfrac{4}{21}, \quad u\big(\tfrac{1}{2}\big) = u_1 = -\tfrac{5}{21}, \quad u(1) = u_2 = -\tfrac{8}{21}.$$

По методу Нистрёма (классический «обратный» вариант механических квадратур) приближённое решение на всём отрезке:

$$\boxed{u(x) \approx f(x) \ + \ 2\sum_{j=0}^{2} A_j \, (x^2 - x_j) \, u_j \ = \ -\frac{4}{21} \, (x^2 + 1).}$$

Задача 2

Данный метод является явным методом Рунге–Кутты с тремя стадиями. Его формула:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}\left(f_0 + 3 \cdot f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k)\right),$$

где:

- $f_0 = f(x_0, y_0)$,
- $k = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0)$.

Таблица Бутчера

Метод можно представить в виде таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Здесь:

- c_i — значения аргумента x для каждой стадии,
- a_{ij} — коэффициенты для вычисления промежуточных значений,
- b_j — веса для линейной комбинации стадий при вычислении y_1.

Определение порядка метода

Чтобы определить порядок метода, проверим условия порядка:

1. **Условие первого порядка**: $\sum b_j = 1$
   - $\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} = 1$ — выполнено.
2. **Условие второго порядка**: $\sum b_j c_j = \frac{1}{2}$
   - $\frac{1}{4} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$ — не выполнено.

Поскольку второе условие не выполнено, метод имеет **первый порядок точности**.

Вывод

- **Таблица Бутчера**:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

- **Порядок метода**: 1 (первый).

Этот метод является явным методом Рунге–Кутты с тремя стадиями и первым порядком точности.

Задача 3

1. Постановка задачи

Нужно примерно найти

$$y(1)$$

для ОДУ

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$

при известных значениях решения в точках

$$(x_0, y_0) = (0, 1), \quad (x_1, y_1) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Будем использовать **явный двухшаговый метод Адамса–Башфорта** (Adams–Bashforth 2):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,\bigl(3\,f_n - f_{n-1}\bigr),$$

где $f_k = f(x_k, y_k)$.

2. Определение параметров

1. **Шаг интегрирования**

$$h = x_1 - x_0 = \tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{2}.$$

2. **Сетка**

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = x_1 + h = 1.$$

3. **Надо найти**
   $y_2 \approx y(1).$

3. Вычисление значений f

Функция правой части:

$$f(x,y)=\frac{x}{y}.$$

- При $(x_0,y_0)=(0,1)$:

$$f_0=f(x_0,y_0)=\frac{0}{1}=0.$$

- При $(x_1,y_1)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$:

$$f_1=f\Big(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

4. Формула метода Адамса–Башфорта

Для $n=1$ (переход от x_1 к x_2) имеем:

$$\boxed{y_2=y_1+\frac{h}{2}\left(3\,f_1-f_0\right)}.$$

Подставляем:

$$y_2=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2}\Big(3\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}-0\Big)=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\,\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

5. Алгебраическое упрощение

1. Первое слагаемое:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{20}.$$

2. Второе слагаемое:

$$\frac{1}{4}\,\frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{20}.$$

3. Суммируем:

$$y_2 = \frac{10\sqrt{5}}{20} + \frac{3\sqrt{5}}{20} = \frac{13\sqrt{5}}{20}.$$

---

6. Численная оценка

$$\sqrt{5} \approx 2.236067977, \quad y_2 = \frac{13\sqrt{5}}{20} \approx \frac{13 \times 2.236067977}{20} \approx \frac{29.0688837}{20} \approx 1.4534442.$$

Задача 4

Даны два одностадийных метода Рунге–Кутты (оба второго порядка) с шагом h:

1. Метод M_1 с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \alpha \\ \hline & 1 \end{array}$$

   т. е.

$$k_1 = f\big(t_n + \alpha h,\ y_n + \alpha h\, k_1\big), \qquad y_{n+1} = y_n + h\, k_1.$$

2. Метод M_2 с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|c} \beta & \beta \\ \hline & 1 \end{array}$$

   т. е.

$$k_1' = f\big(t_n + \beta h,\ y_n + \beta h\, k_1'\big), \qquad y_{n+1} = y_n + h\, k_1'.$$

Нужно получить единую формулировку «композитного» метода, который получается **последовательным** применением M_1 и M_2 на полушаге $h/2$, и определить его **максимальный порядок**.

Шаг 1. Механика последовательного применения

Пусть мы хотим сделать шаг от (t_n, y_n) до (t_{n+1}, y_{n+1}), где $t_{n+1} = t_n + h$.

1. **Первый полушаг**: применяем M_1 с шагом $\frac{h}{2}$.
   - Стадия

$$K_1 = f\Big(t_n + \alpha \cdot \frac{h}{2},\ y_n + \alpha \frac{h}{2}\, K_1\Big).$$

   - Промежуточное приближение

$$y^* \ =\ y_n + \frac{h}{2}\, K_1, \qquad t^* = t_n + \frac{h}{2}.$$

2. **Второй полушаг**: применяем M_2 с тем же шагом $\frac{h}{2}$, но уже к y^* в точке t^*.
   - Стадия

$$K_2 = f\Big(t^* + \beta \cdot \frac{h}{2},\ y^* + \beta \frac{h}{2}\, K_2\Big) \ =\ f\Big(t_n + \tfrac{1+\beta}{2}\, h,\ y_n + \tfrac{h}{2}\, K_1 + \beta \frac{h}{2}\, K_2\Big).$$

   - Окончательное приближение

$$y_{n+1} = y^* + \frac{h}{2}\, K_2 = y_n + \frac{h}{2}\, K_1 + \frac{h}{2}\, K_2.$$

Итого у метода две «внутренние» стадии K_1 и K_2.

Шаг 2. Таблица Бутчера композитного метода

Обозначим общий шаг как h.

Коэффициенты вводятся так, чтобы

$$t\text{-координаты}: \quad c_i h = \text{аргумент времени в } f, \qquad y\text{-аргументы}: \quad y_n + h\sum_j a_{ij}K_j,$$

и

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_i b_i\,K_i.$$

Из механики вычислений:

1. **Стадия 1** (K_1):

$$c_1 h = \alpha\frac{h}{2} \implies c_1 = \frac{\alpha}{2},$$

$$y\text{-аргумент} = y_n + \frac{h}{2}\,\alpha\,K_1 = y_n + h\Big(\frac{\alpha}{2}\,K_1 + 0\cdot K_2\Big) \implies a_{11} = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{12} = 0.$$

2. **Стадия 2** (K_2):

$$c_2 h = \frac{1+\beta}{2}\,h \implies c_2 = \frac{1+\beta}{2},$$

$$y\text{-аргумент} = y_n + \frac{h}{2}\,K_1 + \frac{h}{2}\,\beta\,K_2 = y_n + h\Big(\tfrac{1}{2}\,K_1 + \tfrac{\beta}{2}\,K_2\Big) \implies a_{21} = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = \frac{\beta}{2}.$$

Таким образом, **таблица Бутчера** композитного метода:

$$\begin{array}{c|cc}
c_1 = \dfrac{\alpha}{2} & a_{11} = \dfrac{\alpha}{2} & a_{12} = 0 \\
c_2 = \dfrac{1+\beta}{2} & a_{21} = \dfrac{1}{2} & a_{22} = \dfrac{\beta}{2} \\
\hline
 & b_1 = \dfrac{1}{2} & b_2 = \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

Шаг 3. Определение порядка метода

Для явного двух-стадийного РК порядка p коэффициенты должны удовлетворять ряду условий порядка. Проверим их по порядкам.

Порядок 1

$$b_1 + b_2 = 1: \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ \checkmark$$

Значит метод как минимум 1-го порядка.

Порядок 2

Нужна дополнительная условие

$$b_1\,c_1 + b_2\,c_2 = \frac{1}{2}.$$

Подставляем:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\beta}{2}=\frac{\alpha+(1+\beta)}{4}=\frac{\alpha+\beta+1}{4}\overset{!}{=}\frac{1}{2}\implies\alpha+\beta+1=2\implies\boxed{\alpha+\beta=1.}$$

При этом условии метод имеет **точность как минимум второго порядка**.

Порядок 3

Надо дополнительно две уравнения:

1. $b_1c_1^2+b_2c_2^2=\frac{1}{3}$.
2. $b_1(a_{11}c_1+a_{12}c_2)+b_2(a_{21}c_1+a_{22}c_2)=\frac{1}{6}$.

Если подставить все наши a_{ij},b_i,c_i и воспользоваться $\beta=1-\alpha$ (из условия порядка 2), получится система на α. Её решение не существует (система противоречива), то есть третьего порядка метод **не достигает**.

Вывод

1. **Butcher-таблица** композита (две стадии):

$$\begin{array}{c|cc} \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{1+\beta}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2. **Условие на второй порядок**:

$$\alpha+\beta=1.$$

3. **Максимальный порядок** получившегося метода равен **2**.