БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра компьютерных технологий и систем

ПРАКТИКУМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Методические указания и задания для самостоятельных и лабораторных работ

В шести частях

Часть 1

МИНСК
2024

УДК 517.95(075.8)(076.5)
ББК 22.161.6я73-5
Д14

А в т о р ы:
В. В. Дайняк, И. С. Козловская,
Е. С. Чеб, А. Г. Каркоцкий

Рекомендовано советом
факультета прикладной математики и информатики
31 октября 2023 г., протокол № 5

Р е ц е н з е н т
доктор педагогических наук наук *В. В. Казаченок*

Дайняк, В. В.
Д 14 Практикум по дифференциальным уравнениям в частных производных : метод. указания и задания для самостоят. и лаб. работ. В 6 ч. Ч. 1/ В. В. Дайняк [и др.]. – Минск: БГУ, 2024. – 55 с.

В первой части издания рассматривается приведение уравнений в частных производных к каноническому виду методом характеристик и решение задачи Коши для гиперболических уравнений, заданных на плоскости. Приводятся примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы, выполнения лабораторных работ с привлечением системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Предназначено для студентов математических специальностей.

УДК 517.95(075.8)(076.5)
ББК 22.161.6я73-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Круг вопросов, относящихся к дифференциальным уравнениям с частными производными и их приложениям, чрезвычайно широк. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет дифференциальных уравнений с частными производными. Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу, и хотя постановка задач для дифференциальных уравнений с частными производными, будучи тесно связанной с изучением физических проблем, имеет специфические черты, следует отметить, что предмет "Дифференциальные уравнения с частными производными" является важной составляющей общего математического образования.

Цель учебной дисциплины – получение студентами навыков математического моделирования физических процессов с использованием уравнений с частными производными, формирование основ математического мышления, изучение алгоритмов исследования разрешимости прикладных задач.

Основными задачами дисциплины являются:

- освоение методов решения и исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными;
- освоение методов математического моделирования естественнонаучных процессов.

Освоение учебной дисциплины "Дифференциальные уравнения с частными производными" должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специальных компетенций:

- владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации, Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;
- решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;
- решать математические задачи и строить логические цепочки утверждений;
- применять основы дифференциального и интегрального исчис-

ления, демонстрировать способность применения математического анализа к исследованию алгоритмов;

- применять базовые принципы построения математических моделей и выполнять их анализ в типовых задачах организационного управления и естественно-интеллектуальной активности человека, использовать системы искусственного интеллекта на практике;
- решать уравнения в частных производных и выполнять их исследование в различных приложениях, интерпретировать полученные решения при исследовании естественно-научных процессов.

В результате изучения дисциплины студенты должны
знать:

- классификацию и методы приведения к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными;
- методы решения и обоснования корректности задачи Коши для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности;
- постановку и методы решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типов;
- постановку и методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа;

уметь:

- приводить к каноническому виду уравнения второго порядка;
- решать задачу Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;
- решать смешанные задачи для уравнений колебания струны и теплопроводности;
- решать краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона;

владеть:

- методами математического моделирования;;
- основными методами исследования задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными;
- основными методами исследования граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными

- навыками самообразования и способами использования аппарата дифференциальных уравнений с частными производными для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Учебные материалы к каждой теме включают теоретический материал, необходимый для выполнения работ, примеры решения конкретных задач по теме. Приведен список литературы, которую рекомендуется использовать при выполнении работ.

Методические указания рекомендуется использовать для самостоятельного изучения соответствующих разделов и организации лабораторного практикума по дисциплине "Дифференциальные уравнения с частными производными".

ТЕМА 1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка:

$$\begin{aligned} a_{11}(x,y)u_{xx} + 2\,a_{12}(x,y)\,u_{xy} + a_{22}(x,y)\,u_{yy}+ \\ +b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f. \end{aligned} \tag{1}$$

Определение 1. Линия $\varphi(x,y) = C$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется характеристикой уравнения (1), если функция $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ есть решение дифференциального уравнения первого порядка

$$a_{11}\,(\varphi_x)^2 - 2\,a_{12}\,\varphi_x\,\varphi_y + a_{22}\,(\varphi_y)^2 = 0. \tag{2}$$

Здесь C – произвольная константа.

В случае двух независимых переменных x, y уравнение (2) можно свести к эквивалентному ему дифференциальному уравнению с обыкновенными производными

$$a_{11}(x,y)\,(dy)^2 - 2\,a_{12}(x,y)\,dy\,dx + a_{22}(x,y)\,(dx)^2 = 0. \tag{3}$$

Отсюда получаем новое, эквивалентное определению 1, определение характеристик для уравнения (1).

Определение 2. Обыкновенное дифференциальное уравнение (3) называется *характеристическим,* а его решения – интегральные кривые

$$\varphi(x,y) = C_1, \;\; \psi(x,y) = C_2$$

называются *характеристиками* для уравнения (1).

Для упрощения уравнения (1) сделаем следующую замену переменных:

$$\xi = \varphi(x,y), \;\; \eta = \psi(x,y), \tag{4}$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – функции, имеющие непрерывные частные производные первого и второго порядков, причём якобиан

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате данной замены частные производные первого порядка функции $u(x,y) = v(\xi,\eta)$ определяются следующим образом:

$$u_x = v_\xi\,\xi_x + v_\eta\,\eta_x \quad u_y = v_\xi\,\xi_y + v_\eta\,\eta_y,$$

а частные производные второго порядка –

$$\begin{aligned}
u_{xx} =& v_{\xi\xi}\,(\xi_x)^2 + 2\,v_{\xi\eta}\,\xi_x\,\eta_x + v_{\eta\eta}\,(\eta_x)^2 + v_\xi\,\xi_{xx} + v_\eta\,\eta_{xx},\\
u_{xy} =& v_{\xi\xi}\,\xi_x\,\xi_y + v_{\xi\eta}\,\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} =& v_{\xi\xi}\,(\xi_y)^2 + 2\,v_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\,(\eta_y)^2 + v_\xi\,\xi_{yy} + v_\eta\,\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Подставляем значения частных производных в уравнение (1) и получаем уравнение

$$\begin{gathered}
\alpha(x,y)\,v_{\xi\xi} + 2\,\beta(x,y)\,v_{\xi\eta} + \gamma(x,y)\,v_{\eta\eta} +\\
+\bar{b}_1(x,y)\,v_\xi + \bar{b}_2(x,y)\,v_\eta + c(x,y)\,v + f = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где новые коэффициенты

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y) =& a_{11}\,\xi_x^2 + 2\,a_{12}\,\xi_x\,\xi_y + a_{22}\,\xi_y^2,\\
\beta(x,y) =& a_{11}\,\xi_x\,\eta_x + a_{12}\,(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + a_{22}\,\xi_y\,\eta_y,\\
\gamma(x,y) =& a_{11}\,\eta_x^2 + 2\,a_{12}\,\eta_x\eta_y + a_{22}\,{\eta_y}^2,\\
\bar{b}_1(x,y) =& a_{11}\,\xi_{xx} + 2\,a_{12}\,\xi_{xy} + a_{22}\,\xi_{yy} + b_1\,\xi_x + b_2\,\xi_y,\\
\bar{b}_2(x,y) =& a_{11}\,\eta_{xx} + 2\,a_{12}\,\eta_{xy} + a_{22}\,\eta_{yy} + b_1\,\eta_x + b_2\,\eta_y.
\end{aligned}$$

В зависимости от знака *дискриминанта* $D = a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}$ уравнение (1) приводится к одному из следующих видов, называемых *каноническими.*

1. При $D > 0$ уравнение (1) называется уравнением *гиперболического типа* и с помощью замены (4) приводится к виду

$$v_{\xi\eta} = \Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta).$$

В этом случае коэффициенты $\alpha(x,y) = 0, \gamma(x,y) = 0$. Иногда удобнее пользоваться *второй канонической формой* гиперболического уравнения

$$w_{z_1z_1} - w_{z_2z_2} = \Phi_1(z_1,z_2,w,w_{z_1},w_{z_2}),$$

которая получается из первой заменой переменных

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\xi + \eta\right), \quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\xi - \eta\right),$$

$$u(x,y) = v(\xi,\eta) = w(z_1,z_2).$$

2. При $D=0$ уравнение (1) называется уравнением *параболического типа* и с помощью замены $\xi=\varphi(x,y)$, а $\eta(x,y)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция и такая, что якобиан

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

приводится к виду

$$v_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta).$$

В этом случае коэффициенты $\alpha(x,y)=0, \beta(x,y)=0$.

3. При $D<0$ уравнение (1) называется уравнением *эллиптического типа.* Уравнение (2) при $D<0$ имеет комплексно-сопряжённые решения

$$\varphi(x,y) \pm \boldsymbol{i}\,\psi(x,y) = C.$$

Заменой переменных (4) уравнение (1) приводится к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta).$$

В этом случае коэффициенты $\beta(x,y)=0, \alpha(x,y)=\gamma(x,y)$.

Задача 1. Привести уравнение

$$u_{xy} + u_{yy} - u_x - 10u + 4x = 0$$

к каноническому виду.

Решение. Так как $D = a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = 1/4 > 0$, то уравнение гиперболического типа.

Для приведения данного уравнения к каноническому виду составим характеристическое уравнение

$$-dydx + (dx)^2 = 0.$$

Это уравнение распадается на два

$$dx = 0, \quad -dy + dx = 0.$$

Решениями этих уравнений будут два семейства характеристик

$$x = C_1, \quad -y + x = C_2.$$

Тогда замена имеет вид:

$$\xi = x, \quad \eta = -y + x.$$

Вычисляем производные.

$$\begin{array}{l|l}
-1 & u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \\
0 & u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\eta, \\
0 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
1 & u_{yy} = u_{\eta\eta}, \\
1 & u_{xy} = -u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta}.
\end{array}$$

Подставляем в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты при старших производных:

$$\begin{aligned}
u_{\xi\xi}: &\quad 0, \\
u_{\eta\eta}: &\quad -1 + 1 = 0, \\
u_{\xi\eta}: &\quad -1.
\end{aligned}$$

Тогда имеем

$$-u_{\xi\eta} - u_\xi - u_\eta - 10u + 4(\xi - \eta) = 0.$$

В результате имеем второй канонический вид уравнения гиперболического типа.

$$u_{\xi\eta} + u_\xi + u_\eta + 10u - 4(\xi - \eta) = 0.$$

З а д а ч а 2. Привести уравнение

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$$

к каноническому виду.

Решение. Так как $D = a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} = 0$, то уравнение параболического типа.

Для приведения данного уравнения к каноническому виду составим характеристическое уравнение

$$(dy)^2 + 6\, dydx + 9\,(dx)^2 = 0.$$

В результате имеет одно уравнение

$$(dy + 3dx)^2 = 0$$

или

$$dy + 3dx = 0.$$

Решением этого уравнения будет семейство характеристик

$$y + 3x = C_1.$$

Делаем замену

$$\xi = y + 3x, \quad \eta = x,$$

где x – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что якобиан

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычисляем производные.

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 3u_\xi + u_\eta, \\ 0 & u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi, \\ 1 & u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ 9 & u_{yy} = u_{\xi\xi}, \\ -6 & u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi}. \end{array}$$

Подставляем в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты при старших производных:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi}: &\quad 9 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 0, \\ u_{\xi\eta}: &\quad 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 0, \\ u_{\eta\eta}: &\quad 1 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

В результате имеем канонический вид уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = 0.$$

Задача 3. Привести уравнение

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_y + u = 0$$

к каноническому виду.

Решение. Так как $D = a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = 16 - 20 < 0$, то заданное уравнение эллиптического типа.

Для приведения данного уравнения к каноническому виду составим характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 4dydx + 5(dx)^2 = 0, \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + 5 = 0, \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = 2 + i, \quad \frac{dy}{dx} = 2 - i.$$

Решениями будут комплекснозначные функции

$$\varphi(x, y) = y - (2 + i)x = C_1, \quad \psi(x, y) = y - (2 - i)x = C_2.$$

Замена переменных в этом случае будет

$$\xi = \operatorname{Re}\varphi(x, y) = y - 2x, \quad \eta = \operatorname{Im}\varphi(x, y) = -x,$$

Вычисляем производные.

$$\begin{array}{c|l} 0 & u_x = -2u_\xi - u_\eta, \\ 0 & u_y = u_\xi, \\ 1 & u_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ 4 & u_{xy} = -2u_{\xi\xi} - u_{\eta\xi}, \\ 5 & u_{yy} = u_{\xi\xi}. \end{array}$$

Подставляем в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты при старших производных:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi}: &\quad 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1, \\ u_{\xi\eta}: &\quad 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 0, \\ u_{\eta\eta}: &\quad 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

В результате имеем канонический вид уравнения эллиптического типа.

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\eta = 0.$$

Задача 4. Привести уравнение

$$(1 + x^2)^2\, u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)\, u_x = 0$$

к каноническому виду.

Решение. Вычислим дискриминант уравнения $D = a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = -(1+x^2)^2$. Дискриминант уравнения отрицателен для всех значений переменной x. Следовательно, данное уравнение имеет эллиптический тип. Составим характеристическое уравнение

$$(1 + x^2)^2\,(dy)^2 + (dx)^2 = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$dy = \frac{-i}{(1 + x^2)^2}\,dx = 0, \quad dy = \frac{i}{(1 + x^2)^2}\,dx = 0.$$

Заметим, что второе уравнение является сопряженным к первому. Поэтому рассмотрим общий интеграл одного из них

$$\varphi(x, y) = y + i \cdot \operatorname{arctg} x = C_1 + i\,C_2.$$

Выполним замену переменных,

$$\xi = y, \quad \eta = \operatorname{arctg} x$$

и пересчитаем производные

$$\begin{array}{l|l}
2x(1 + x^2) & u_x = \dfrac{1}{1 + x^2}u_\eta, \\
0 & u_y = u_\xi, \\
(1 + x^2)^2 & u_{xx} = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2}u_{\eta\eta} - \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}u_\eta, \\
1 & u_{yy} = u_{\xi\xi}.
\end{array}$$

Подставляем в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты при старших производных:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &: 1, \\ u_{\xi\eta} &: 0, \\ u_{\eta\eta} &: 1. \end{aligned}$$

Канонический вид сходного уравнения следующий:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Задача 5. Привести уравнение

$$u_{xx} + x\,u_{yy} = 0$$

к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется.

Решение. Так как $D = a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} = -x$, то при $x < 0$ уравнение гиперболично, при $x > 0$ — эллиптично, а при $x = 0$ — параболично, причём, в последнем случае уравнение уже имеет канонический вид

$$u_{xx} = 0.$$

Для приведения данного уравнения к каноническому виду при $x \neq 0$ составим прежде всего характеристическое уравнение

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0.$$

При $x < 0$ это уравнение распадается на два

$$dy = \sqrt{-x}\, dx,\; dy = -\sqrt{-x}\, dx.$$

Решениями этих уравнений в области гиперболичности $x < 0$ рассматриваемого уравнения будут следующие действительные семейства характеристик

$$\frac{3}{2}\, y + \left(\sqrt{-x}\right)^3 = C_1, \quad \frac{3}{2}\, y - \left(\sqrt{-x}\right)^3 = C_2.$$

В этом случае замена примет вид

$$\xi = \frac{3}{2}\, y + \left(\sqrt{-x}\right)^3, \quad \eta = \frac{3}{2}\, y - \left(\sqrt{-x}\right)^3.$$

Тогда коэффициенты

$$\alpha(x, y) = \gamma(x, y) = 0.$$

Более того,

$$\xi_x = -\frac{3}{2}\sqrt{-x},\; \eta_x = \frac{3}{2}\sqrt{-x},\; \xi_y = \eta_y = \frac{3}{2},\; \xi_{xx} = \frac{3}{4\sqrt{-x}},\; \eta_{xx} = -\frac{3}{4\sqrt{-x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta(x, y) = \frac{9}{2}\, x,\; \bar{b}_1 = \frac{3}{4\sqrt{-x}},\; \bar{b}_2 = -\frac{3}{4\sqrt{-x}},\; c = 0,\; f = 0.$$

Кроме того, из выражений для ξ и η следует, что

$$\left(\sqrt{-x}\right)^3 = \frac{1}{2}\,(\xi - \eta).$$

Подставляем полученные коэффициенты в уравнение (5).В результате получаем уравнение

$$9\,x\,v_{\xi\eta}+\frac{3}{4\,\sqrt{-x}}\,v_\xi-\frac{3}{4\,\sqrt{-x}}\,v_\eta=0.$$

Делим это уравнение на $9\,x$ и приходим к уравнению

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{12\,\left(\sqrt{-x}\right)^3}\,v_\xi+\frac{1}{12\,\left(\sqrt{-x}\right)^3}\,v_\eta=0,$$

которое равносильно следующему уравнению

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{6\,\left(\xi-\eta\right)}\,v_\xi+\frac{1}{6\,\left(\xi-\eta\right)}\,v_\eta=0,$$

из которого приходим к уравнению

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\,(v_\xi-v_\eta)=0,\,\xi>\eta.$$

Для получения второй канонической формы гиперболического уравнения надо воспользоваться заменой переменных

$$z_1=\frac{\xi+\eta}{2},\,z_2=\frac{\xi-\eta}{2}.$$

Тогда

$$v_\xi=w_{z_1}\,z_{1\xi}+w_{z_2}\,\,z_{2\xi}=\frac{1}{2}\,w_{z_1}+\frac{1}{2}\,w_{z_2};$$

$$v_\eta=\partial_{z_1}w\,z_{1\eta}+w_{z_2}\,z_{2\eta}=\frac{1}{2}\,w_{z_1}-\frac{1}{2}\,w_{z_2};$$

$$v_{\xi\eta}=\left(w_{z_1z_2}\,z_{1\eta}+w_{z_1}\,z_{2\eta}\right)\,z_{1\xi}+w_{z_1}\,z_{1\xi\eta}+\left(w_{z_1}\,z_{1\eta}+w_{z_2z_2}\,z_{2\eta}\right)\,z_{2\xi}+w_{z_2}\,z_{2\xi\eta}=$$

$$=w_{z_1z_1}\,z_{1\xi}\,z_{1\eta}+w_{z_1}\,\left(z_{1\xi}\,z_{2\eta}+z_{1\eta}\,z_{2\xi}\right)+w_{z_2z_2}\,z_{2\xi}\,z_{2\eta}=\frac{1}{4}\,w_{z_1z_1}-\frac{1}{4}\,w_{z_2z_2};$$

$$w_\xi-w_\eta=w_{z_2},\,\xi-\eta=2\,z_2.$$

В итоге получаем уравнение

$$\frac{1}{4}\,w_{z_1z_1}-\frac{1}{4}\,w_{z_2z_2}-\frac{1}{12\,z_2}\,w_{z_2}=0,$$

которое равносильно следующему уравнению

$$u_{z_1 z_1} - u_{z_2 z_2} - \frac{1}{3\,z_2}\,u_{z_2} = 0.$$

Рассмотрим теперь случай эллиптичности $x > 0$. В этой области характеристическое уравнение распадается на следующие уравнения

$$dy = \boldsymbol{i}\,\sqrt{x}\,dx,\; dy = -\boldsymbol{i}\,\sqrt{x}\,dx.$$

Следовательно, решениями их будут семейство характеристик

$$\varphi(x,y) = \frac{3}{2}\,y - \boldsymbol{i}\,\sqrt{x^3} = C_1,$$

$$\overline{\varphi}(x,y) = \frac{3}{2}\,y + \boldsymbol{i}\,\sqrt{x^3} = C_2.$$

Таким образом, замена переменных в этом случае будет

$$\xi = \operatorname{Re}\varphi(x,y) = \frac{3}{2}\,y,\; \eta = \operatorname{Im}\varphi(x,y) = -\sqrt{x^3}.$$

Отсюда получаем, что

$$\xi = 0,\; \xi_y = \frac{3}{2};\;\; \eta = -\frac{3}{2}\,\sqrt{x},\; \eta_y = 0.$$

Тогда коэффициенты

$$\beta(x,y) = 0,\, \alpha(x,y) = \gamma(x,y) = \frac{9}{4}\,x,$$

$$\overline{b}_1 = \xi_{xx} + x\,\xi = 0,$$

$$\overline{b}_2 = \eta_{xx} + x\,\eta = -\frac{3}{4\sqrt{x}},$$

$$c = 0,\, f = 0.$$

Подставляем данные коэффициенты в уравнение (5) и получаем уравнение

$$\frac{9}{4}\,x\,v_{\xi\xi} + \frac{9}{4}\,x\,v_{\eta\eta} - \frac{3}{4\sqrt{x}}\,v_\eta = 0.$$

Разделив на $(9/4)\,x$, получаем уравнение

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}\,v_\eta = 0,$$

а поскольку $\sqrt{x^3} = -\eta$, то придём к уравнению

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\,\eta}\,v_\eta = 0,\ \eta < 0.$$

З а д а ч а 6. Привести к каноническому виду уравнение

$$y^2\,u_{xx} + 2\,xy\,u_y + x^2\,y = 0.$$

Решение. Так как $D = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$, то, следовательно, данное уравнение параболично всюду. Для приведения его к каноническому виду составим характеристическое уравнение

$$y^2(dy)^2 - 2\,xy\,dy\,dx + x^2(dx)^2 = 0.$$

Интегрирование этого уравнения определяет лишь одно семейство характеристик

$$\frac{x^2 - y^2}{2} = C.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi = \frac{x^2 - y^2}{2},$$

а η – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что якобиан $\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$. Примем $\eta = y$. Тогда соответствующие частные производные $\xi = x$, $\xi_y = -y$, $\xi_{xx} = 1$, $\xi_y = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\eta_y = 1$, $\eta_{xx} = \eta_y = \eta = 0$. В этом случае $\alpha(x,y) = 0$, $\gamma(x,y) = 0$, $\overline{a}_{22} = x^2$, $\overline{b}_1 = y^2 - x^2$, $\overline{b}_2 = 0$. Следовательно, исходное уравнение перепишется следующим образом:

$$x^2\,u_{\eta\eta} + (y^2 - x^2)\,u_\xi = 0.$$

Из выражений для ξ и η получаем, что $y^2 - x^2 = -2\,\xi$, $y^2 = \eta^2$, $x^2 = 2\,\xi + \eta^2$. Подставляем значения $y^2 - x^2$ и x^2 в уравнение и придём к уравнению

$$v_{\eta\eta} - \frac{2\,\xi}{2\,\xi + \eta^2}\,v_\xi = 0.$$

Замечание 1. Если уравнение (1) – линейное и его коэффициенты постоянные, то после преобразования к новым переменным в каждом случае получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

1. $v_{\xi\eta} + a\, v_\xi + b\, v_\eta + c\, v = 0$;
2. $v_{\eta_\eta} + a\, v_\xi + b\, v_\eta + c\, v = 0$;
3. $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + a\, v_\xi + b\, v_\eta + c\, v = 0$.

Эти уравнения можно ещё упростить путём введения новой искомой функции $w : v = e^{\lambda\xi + \mu\eta}\, w$, где постоянные λ и μ выбраны специальным образом. Тогда уравнения будут приведены к виду

$$\begin{aligned} &1. w_{\xi\eta} + c_1\, w = 0; \\ &2. w_{\eta\eta} + a_1\, w_\xi = 0; \\ &3. w_{\xi\xi} + w_\xi + c_1\, w = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

ЗАДАНИЯ

Задания 1.1 – 1.24. Привести к одному из канонических видов следующие уравнения:

1.1 $2\, u_{xy} - 4\, u_{yy} + u_x - 2\, u_y + u = x$.

1.2 $u_{xy} + 2\, u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$.

1.3 $2\, u_{xx} + 2\, u_{xy} + u_{yy} + 4\, u_x + 4u_y + u = 0$.

1.4 $u_{xx} + 2\, u_{xy} + u_{yy} + 3\, u_x - 5u_y + 4u = y$.

1.5 $3u_{xx} + u_{xy} + 3\, u_x + u_y - u = -y$.

1.6 $5u_{xx} + 16\, u_{xy} + 16\, u_{yy} + 24\, u_x + 32\, u_y + 64\, u = 0$.

1.7 $u_{xx} - 2\, u_{xy} + u_{yy} - 3\, u_x + 12\, u_y + 27\, u = 0$.

1.8 $2\, u_{xx} + 3\, u_{xy} + u_{yy} + 7\, u_x + 4\, u_y - 2\, u = 0$.

1.9 $u_{xx} + u_{xy} - 2\, u_{yy} - 3\, u_x - 15\, u_y + 27\, u = 0$.

1.10 $9\, u_{xx} - 6\, u_{xy} + u_{yy} + 10\, u_x - 15\, u_y + 50u = 2\, y - x$.

1.11 $u_{xx} + 4\, u_{xy} + u_{yy} + 10\, u_x + 42\, u_y = -2\,(x + y)$.

1.12 $u_{xx} + 4\, u_{xy} + 13\, u_{yy} + 3\, u_x + 24\, u_y - 9\, u = -9\,(x + y)$.

1.13 $a\, u_{xx} + 4\, a\, u_{xy} + a\, u_{yy} + b\, u_x + c\, u_y + u = 0$.

1.14 $u_{xx} - 4\, u_{xy} - 5\, u_{yy} - 3\, u_x + u_y + u = 0$.

1.15 $u_{xx} - 6\, u_{xy} + 7\, u_{yy} - u_x + u_y - u = 0$.

1.16 $u_{xx} - 5\, u_{xy} + 6\, u_{yy} - 2\, u_x + 3\, u_y - 4\, u = 0$.

1.17 $u_{xx} - 2\, u_{xy} + 3\, u_{yy} - 4\, u_x - 5\, u_y = 0$.

1.18 $u_{xx} - 8\,u_{xy} + 7\,u_{yy} + u_x - u_y = 0.$

1.19 $u_{xx} - 4\,u_{xy} + 4\,u_{yy} + 3\,u_x - 2\,u_y - u = 0.$

1.20 $u_{xx} - 8\,u_{xy} + 16\,u_{yy} + u_x - u_y - u = 0.$

1.21 $u_{xx} - 4\,u_{xy} + 3\,u_{yy} + u_x + u_y + u = 0.$

1.22 $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = 0.$

1.23 $u_{xx} - 7\,u_{xy} + 6\,u_{yy} + u_x - 4\,u_y - 2\,u = 0.$

1.24 $u_{xx} - u_{xy} + 2\,u_{yy} + u_x - 2\,u_y - u = 0.$

Задания 1.25 – 1.45. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1.25 $u_{xx} + 2\,\sin x\,u_{xy} - \cos 2\,x\,u_{yy} + \cos x\,u_y = 0.$

1.26 $x\,u_{xx} + y\,u_{yy} + 2\,u_x + 2\,u_y = 0.$

1.27 $x\,u_{xx} + 2\,x\,u_{xy} + (x-1)\,u_{yy} = 0.$

1.28 $e^{2\,x}\,u_{xx} + 2\,e^{x+y}\,u_{xy} + e^{2\,y}\,u_{yy} - x\,u = 0.$

1.29 $u_{xx} - 2\,\sin x\,u_{xy} - \cos^2 x\,u_{yy} - \cos x\,u_y = 0.$

1.30 $x\,y^2\,u_{xx} - 2\,x^2 y\,u_{xy} + x^3\,u_{yy} - y^2\,u_x = 0.$

1.31 $x^2\,u_{xx} + 2\,xy\,u_{xy} + y^2\,u_{yy} - 2\,y\,u_x + y\,e^{y/x} = 0.$

1.32 $(1+x^2)\,u_{xx} + u_{yy} + 2\,x(1+x^2)\,u_x = 0.$

1.33 $u_{xx} - 2\,\cos x\,u_{xy} - (3+\sin^2 x)\,u_{yy} - y\,u_y = 0.$

1.34 $\sin^2 x\,u_{xx} - 2\,y\,\sin x\,u_{xy} + y^2\,u_{yy} = 0.$

1.35 $(1+x^2)\,u_{xx} + (1+y^2)\,u_{yy} + x\,u_x + y\,u_y = 0.$

1.36 $y^2\,u_{xx} + 2\,x\,u_{xy} + 2\,x^2\,u_{yy} + y\,u_y = 0.$

1.37 $x^2\,u_{xx} + 2\,xy\,u_{xy} + y^2\,u_{yy} = 0.$

1.38 $y^2 u_{xx} + x^2\,u_{yy} = 0.$

1.39 $x^2\,u_{xx} + y^2\,u_{yy} = 0.$

1.40 $x^2\,u_{xx} + 2\,xy\,u_{xy} - 3\,y^2\,u_{yy} - 2\,x\,u_x + 4y\,u_y + 16x^4 u = 0.$

1.41 $e^{2x}\,u_{xx} + 2e^{x+y}\,u_{xy} + e^{2y}\,u_{yy} - x\,u_y = 0.$

1.42 $u_{xx} - 2\sin x\,u_{xy} + (2-\cos^2 x)\,u_{yy} = 0.$

1.43 $y^2\,u_{xx} + 2\,y\,u_{xy} + u_{yy} = 0.$

1.44 $x^2\,u_{xx} - 2\,x\,u_{xy} + u_{yy} = 0.$

1.45 $u_{xx} + 2(1+2x)\,u_{xy} + 4x(1+x)\,u_{yy} = 0.$

Задания 1.46 – 1.66. Привести к каноническому виду следующие уравнения в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

1.46 $u_{xx} + x\,u_{yy} = 0.$

1.47 $2\,u_{xx} + y\,u_{yy} = 0.$

1.48 $xu_{xx} + y\,u_{yy} = 0.$

1.49 $u_{xx} + xy\,u_{yy} = 0.$

1.50 $\operatorname{sign} y\,u_{xx} + 2\,u_{xy} + \ u_{yy} = 0.$

1.51 $u_{xx} + 2\,u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y)\,u_{yy} = 0.$

1.52 $\operatorname{sign} y\,u_{xx} + 2\,u_{xy} + \operatorname{sign} x\,u_{yy} = 0.$

1.53 $x\,u_{xx} + u_{yy} = 0.$

1.54 $y\,u_{xx} + u_{yy} = 0.$

1.55 $u_{xx} - x\,u_{yy} = 0.$

1.56 $u_{xx} - y\,u_{yy} = 0.$

1.57 $y\,u_{xx} + x\,u_{yy} = 0.$

1.58 $x\,u_{xx} - y\,u_{yy} = 0.$

1.59 $y\,u_{xx} - x\,u_{yy} = 0.$

1.60 $u_{xx} - xy\,u_{yy} = 0.$

1.61 $xy\,u_{xx} + u_{yy} = 0.$

1.62 $xy\,u_{xx} - u_{yy} = 0.$

1.63 $u_{xx} + 2\,u_{xy} + \operatorname{sign} y\,u_{yy} = 0.$

1.64 $(1+x^2)u_{xx} + y\,u_{xy} + u_y = 0.$

1.65 $(1+y^2)u_{xx} + x\,u_{xy} + x^2 u_x + u_y = 0.$

1.66 $(1+y)u_{xx} + x\,u_{xy} + u_y = 0.$

ТЕМА 2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i} + cu + f = 0 \ \ (a_{ij} = a_{ji}), \tag{7}$$

где a, b, c, f являются функциями x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j, \quad \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n.)$$

Данную квадратичную форму приводим к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Выписываем преобразование, осуществляющее этот процесс:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \ldots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Матрицей данного преобразования будет

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \ \ |\,A\,| \neq 0.$$

Находим матрицу B замены переменной по закону $B = (A^T)^{-1}$ и далее производим замену переменных

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В результате получим канонический вид

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\, u_{y_k y_k} + g(y_1, \ldots, y_n, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}) = 0$$

уравнения (7). Здесь коэффициенты $b_k = -1,\ 0,\ 1$, будут совпадать с коэффициентами при μ_k в каноническом виде квадратичной формы. С учётом этого получаем классификацию:

Определение 1. Уравнение (7) относится к

1) *гиперболическому типу,* если все коэффициенты $b_k \neq 0$ и имеют разные знаки,

2)*эллиптическому типу,* если все $b_k = 1$,

3) *параболическому типу,* если хотя бы один из коэффициентов $b_k = 0$.

Задача 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xy} - 2\,u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}\,u_y + u_z = 0.$$

Решение. Квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1\,\xi_2 - 2\,\xi_1\,\xi_3 + \xi_2\,\xi_3.$$

Приведём её к каноническому виду. С этой целью сделаем замену:

$$\begin{cases} \nu_1 = \xi_1 + \xi_2; \\ \nu_2 = \xi_1 - \xi_2; \\ \nu_3 = \xi_3. \end{cases}$$

Тогда квадратичная форма перепишется следующим образом:

$$Q = \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \left(\nu_1 + \nu_2\right)\nu_3 + \frac{1}{2}\left(\nu_1 - \nu_2\right)\nu_3 + 2\,\nu_3^2 - 2\,\nu_3^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1 - \nu_3\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\nu_2 + 3\,\nu_3\right)^2 + 2\,\nu_3^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2,$$

где

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}\left(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3\right); \\ \mu_2 = \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \xi_2 + 3\,\xi_3\right); \\ \mu_3 = \sqrt{2}\,\xi_3. \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 и получаем, что

$$\begin{cases} \xi_1 = \mu_1 + \mu_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\xi_3; \\ \xi_2 = -\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{2}\,\mu_3; \\ \xi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mu_3. \end{cases}$$

Матрица перехода от ξ_k к μ_k будет

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \text{ а } B = \left(A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда замена переменных будет следующей:

$$\begin{cases} y_1 = x + y; \\ y_2 = x - y; \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(- x + 2\,y + z\right). \end{cases}$$

Запишем производные первого порядка:

$$u_x = u_{y_1}\,y_{1x} + u_{y_2}\,y_{2x} + u_{y_3}\,y_{3x} = u_{y_1} + u_{y_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,u_{y_3},$$

$$u_y = u_{y_1}\,y_{1y} + u_{y_2}\,y_{2y} + u_{y_3}\,y_{3y} = u_{y_1} - u_{y_2} + \sqrt{2}\,u_{y_3},$$

$$u_z = u_{zy_1} + u_{zy_2} + u_{zy_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,u_{y_3}.$$

Таким образом, исходное уравнение можно записать в следующем каноническом виде:

$$u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} + u_{y_3y_3} + \frac{3}{2}\,u_{y_1} + \frac{1}{2}\,u_{y_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,u_{y_3} = 0.$$

З а д а ч а 2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения дифференциального уравнение в частных производных, используя средства системы Mathematica

$$u_{x_1x_1} + 2\,u_{x_1x_2} - 2\,u_{x_1x_3} + u_{x_3x_3} + u_{x_1} - u_{x_2} + 0.5\,u = 1.$$

Введём исходные данные в Wolfram:

$$\boldsymbol{a_{11} = 1;}$$
$$\boldsymbol{a_{12} = 2;}$$
$$\boldsymbol{a_{13} = -2;}$$
$$\boldsymbol{a_{22} = 0;}$$
$$\boldsymbol{a_{23} = 0;}$$
$$\boldsymbol{a_{33} = 1;}$$
$$\boldsymbol{b_1 = 1;}$$
$$\boldsymbol{b_2 = -1;}$$
$$\boldsymbol{b_3 = 0;}$$
$$\boldsymbol{c = 0.5;}$$
$$\boldsymbol{f = 1;}$$

По заданным коэффициентам составим уравнение:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a_{11} * \partial_{x_1,x_1} u\,[x_1,x_2,x_3] + a_{12}\partial_{x_1,x_2} u\,[x_1,x_2,x_3] +}\\
&\boldsymbol{a_{13} * \partial_{x_1,x_3} u\,[x_1,x_2,x_3] + a_{22} * \partial_{x_2,x_2} u\,[x_1,x_2,x_3] +}\\
&\boldsymbol{a_{23} * \partial_{x_2,x_3} u\,[x_1,x_2,x_3] + a_{33} * \partial_{x_3,x_3} u\,[x_1,x_2,x_3] +}\\
&\boldsymbol{b_1 * \partial_{x_1} u\,[x_1,x_2,x_3] + b_2 * \partial_{x_2} u\,[x_1,x_2,x_3] + b_3 * \partial_{x_3} u\,[x_1,x_2,x_3] +}\\
&\boldsymbol{c * u\,[x_1,x_2,x_3] == f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0.5\,u\,[x_1,x_2,x_3] + u^{(0,0,2)}\,[x_1,x_2,x_3] - u^{(0,1,0)}\,[x_1,x_2,x_3] +\\
+u^{(1,0,0)}\,[x_1,x_2,x_3] - 2u^{(1,0,1)}\,[x_1,x_2,x_3] +\\
+2\,u^{(1,1,0)}\,[x_1,x_2,x_3] + u^{(2,0,0)}\,[x_1,x_2,x_3] == 1
\end{aligned}$$

Используя коэффициенты полученного уравнения, выпишем квадратичную форму:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{kv0[t1_,t2_,\,t3_]} = \boldsymbol{a_{11}} * \mathbf{t1^2} + \boldsymbol{a_{12}} * \mathbf{t1} * \mathbf{t2} + \boldsymbol{a_{13}} * \mathbf{t1} * \mathbf{t3} +\\
&\boldsymbol{a_{22}} * \mathbf{t2^2} + \boldsymbol{a_{23}} * \mathbf{t2} * \mathbf{t3} + \boldsymbol{a_{33}} * \mathbf{t3^2};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Print\,[kv0\,[\boldsymbol{t_1,t_2,t_3}]]}$$

$$t_1^2 + 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + t_3^2$$

Приведём квадратичную форму к каноническому виду:

$$t_1^2 + 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + t_3^2 = t_1^2 + 2t_1(t_2 - t_3) + t_3^2 =$$
$$t_1^2 + 2t_1(t_2 - t_3) + (t_2 - t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2 + t_3^2 =$$
$$= (t_1 + t_2 - t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2 + t_3^2 = \tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2$$

Выпишем соответствующую замену переменных и выполним проверку полученного канонического вида квадратичной формы:

```
τ1 = t1 + t2 − t3;
τ2 = t2 − t3;
τ3 = t3;
kv[τ1_,τ2_,τ3_]:=τ1^2 − τ2^2 + τ3^2;
Print [ExpandAll [FunctionExpand [kv [τ1,τ2,τ3]]]]
```

Выпишем коэффициенты канонического вида квадратичной формы:

```
Coef = Coefficient[kv[τ1, τ2,τ3],{τ1,τ2,τ3},{2,2,2}]
```

$\{1, -1,1\}$

Выпишем соответствующие матрицы преобразований:

```
matC = {{1,1, − 1},{0,1, − 1},{0,0,1}};
Print[MatrixForm[matC]];
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
matB = Inverse[matC];
Print[MatrixForm[matB]];
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$t_1 = \tau_1 - \tau_2;$
$t_2 = \tau_2 + \tau_3;$
$t_3 = \tau_3;$
matBt = Transpose[matB];
Print[MatrixForm[matBt]];

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём выражение новых переменных, через старые переменные:

y = {y1,y2,y3};
x = {x1,x2,x3};

Print[MatrixForm[y]==MatrixForm[matBt.x]];

$$\begin{pmatrix} \mathrm{y1} \\ \mathrm{y2} \\ \mathrm{y3} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \mathrm{x1} \\ -\mathrm{x1} + \mathrm{x2} \\ \mathrm{x2} + \mathrm{x3} \end{pmatrix}$$

Выразим новые переменные через старые и вычислим младшие производные:

Clear[y];
Clear[x];
y1 = x_1;
y2 = $-x_1 + x_2$;
y3 = $x_2 + x_3$;

$$\boldsymbol{u_{\mathrm{x1}} = \partial_{x_1}\mathrm{y1} * \partial_{y_1} u\,[y_1,y_2,y_3] + \partial_{x_1}\mathrm{y2} * \partial_{y_2} u\,[y_1,y_2,y_3] +}$$
$$\boldsymbol{\partial_{x_1}\mathrm{y3} * \partial_{y_3} u\,[y_1,y_2,y_3]\,;}$$
$$\boldsymbol{u_{\mathrm{x2}} = \partial_{x_2}\mathrm{y1} * \partial_{y_1} u\,[y_1,y_2,y_3] + \partial_{x_2}\mathrm{y2} * \partial_{y_2} u\,[y_1,y_2,y_3] +}$$
$$\boldsymbol{\partial_{x_2}\mathrm{y3} * \partial_{y_3} u\,[y_1,y_2,y_3]\,;}$$
$$\boldsymbol{u_{\mathrm{x3}} = \partial_{x_3}\mathrm{y1} * \partial_{y_1} u\,[y_1,y_2,y_3] + \partial_{x_3}\mathrm{y2} * \partial_{y_2} u\,[y_1,y_2,y_3] +}$$
$$\boldsymbol{\partial_{x_3}\mathrm{y3} * \partial_{y_3} u\,[y_1,y_2,y_3]\,;}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}\,[\text{"}u_{x_1} = \text{"},u_{\mathrm{x1}}]\,;}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}\,[\text{"}u_{x_2} = \text{"},u_{\mathrm{x2}}]\,;}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}\,[\text{"}u_{x_3} = \text{"},u_{\mathrm{x3}}]\,;}$$

$$u_{x_1} = \; - u^{(0,1,0)}\,[y_1,y_2,y_3] + u^{(1,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3]$$

$$u_{x_2} = u^{(0,0,1)}\,[y_1,y_2,y_3] + u^{(0,1,0)}\,[y_1,y_2,y_3]$$

$$u_{x_3} = u^{(0,0,1)}\,[y_1,y_2,y_3]$$

Выпишем канонический вид исходного уравнения:

$$\boldsymbol{\mathrm{Coef}[[1]] * \partial_{y_1,y_1} u\,[y_1,y_2,y_3] + \mathrm{Coef}[[2]] * \partial_{y_2,y_2} u\,[y_1,y_2,y_3] +}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Coef}[[3]] * \partial_{y_3,y_3} u\,[y_1,y_2,y_3] + b_1 * u_{\mathrm{x1}} + b_2 * u_{\mathrm{x2}} + b_3 * u_{\mathrm{x3}} +}$$
$$\boldsymbol{c * u\,[y_1,y_2,y_3] == f}$$
$$0.5u\,[y_1,y_2,y_3] - u^{(0,0,1)}\,[y_1,y_2,y_3] + u^{(0,0,2)}\,[y_1,y_2,y_3] - 2u^{(0,1,0)}\,[y_1,y_2,y_3] -$$
$$-u^{(0,2,0)}\,[y_1,y_2,y_3] + u^{(1,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3] + u^{(2,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3] == 1$$

Опишем процесс избавления от младших производных. Введем в расмотрение новую функцию по формуле $u = v(y_1,y_2,y_3)e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3}$. После чего подставим это представление в полученный канонический вид:

$$\boldsymbol{\mathrm{result[u\_]{:=}}0.5u - \partial_{y_3} u + \partial_{y_3,y_3} u - 2\partial_{y_2} u - \partial_{y_2,y_2} u + \partial_{y_1} u + \partial_{y_1,y_1} u == 1}$$
$$\boldsymbol{u = \mathrm{Exp}\,[\alpha_1 * y_1 + \alpha_2 * y_2 + \alpha_3 * y_3] * v\,[y_1,y_2,y_3]\,;}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print[FullSimplify[result}[u]]]}$$

$$e^{y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3}((0.5\ +\alpha_1\,(1.\ +1.\alpha_1)+(-2.-1.\alpha_2)\,\alpha_2+$$
$$\alpha_3\,(-1.+1.\alpha_3))\,v\,[y_1,y_2,y_3]+(-1.+2.\alpha_3)\,v^{(0,0,1)}\,[y_1,y_2,y_3]+$$
$$+\,1.v^{(0,0,2)}\,[y_1,y_2,y_3]+(-2.-2.\alpha_2)\,v^{(0,1,0)}\,[y_1,y_2,y_3]-$$
$$-\,1.v^{(0,2,0)}\,[y_1,y_2,y_3]+(1.\ +2.\alpha_1)\,v^{(1,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3]+$$
$$+\,1.v^{(2,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3])==1.$$

Найдём те значения переменных α_1, α_2, α_3, при которых младшие производные обращаются в ноль:

$$\mathbf{Transform[\alpha1\_,\alpha2\_,\alpha3\_]=}$$
$$\mathbf{(0.5\ +\alpha1(1\ +\alpha1)+(-2-\alpha2)\alpha2+\alpha3(-1+\alpha3))v\,[y_1,y_2,y_3]+}$$
$$\mathbf{(-1+2\alpha3)v^{(0,0,1)}\,[y_1,y_2,y_3]+v^{(0,0,2)}\,[y_1,y_2,y_3]+}$$
$$\mathbf{(-2-2\alpha2)v^{(0,1,0)}\,[y_1,y_2,y_3]-v^{(0,2,0)}\,[y_1,y_2,y_3]+}$$
$$\mathbf{(1\ +2\alpha1)v^{(1,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3]+v^{(2,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3]==}$$
$$\mathbf{e^{-(y_1\alpha1+y_2\alpha2+y_3\alpha3)};}$$
$$\mathbf{Solve\,[-1+2\alpha_3{==}0\&\&-2-2\alpha_2{==}0\&\&1\ +2\alpha_1{==}0,\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}]}$$

$$\left\{\left\{\alpha_1\to-\frac{1}{2},\alpha_2\to-1,\alpha_3\to\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Выпишем уравнение, учитывая замену и определённые α_1, α_2 и α_3:

$$\mathbf{Print[FullSimplify[Transform[-0.5,-1,0.5]]];}$$

$$0.\ +\ 1.v\,[y_1,y_2,y_3]\ +\ v^{(0,0,2)}\,[y_1,y_2,y_3]\ +\ v^{(2,0,0)}\,[y_1,y_2,y_3]\ ==\ e^{0.5y_1+y_2-0.5y_3}+v^{(0,2,0)}\,[y_1,y_2,y_3]$$

ЗАДАНИЯ

Задания 2.1 – 2.31. Привести к каноническому виду и упростить следующие уравнения:

2.1 $u_{xx}-4\,u_{xy}+2\,u_{xz}+4\,u_{yy}+u_{zz}+3\,u_x=0.$

2.2 $u_{xy}+u_{xz}+u_{yz}-u_{xy}=0.$

2.3 $3\,u_{xy}-2\,u_{xz}-u_{yz}-u=0.$

2.4 $u_{xx} + 3\,u_{yy} + 3\,u_{zz} - 2\,u_{xy} - 2\,u_{xz} - 2\,u_{yz} - 8\,u = 0.$

2.5 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6\,u_{xy} + 2\,u_{xz} + 2\,u_{yz} + 2\,u_x + 2\,u_y + 2\,u_z + 4\,u = 0.$

2.6 $2\,u_{xx} + 5\,u_{yy} + 2\,u_{zz} - 6\,u_{xy} - 4\,u_{xz} + 6\,u_{yz} - 3\,u + y - 2\,z = 0.$

2.7 $3\,u_{yy} - 2\,u_{xy} - 2\,u_{yz} + 4\,u = 0.$

2.8 $u_{xx} + 4\,u_{yy} + u_{zz} + 4\,u_{xy} + 2\,u_x + 4\,u_{yz} + 2\,u = 0.$

2.9 $u_{xx} + 4\,u_{yy} + 9\,u_{zz} + 4\,u_{xy} + 6\,u_{xz} + 12\,u_{yz} - 2\,u_x - 4\,u_y - 6\,u_z = 0.$

2.10 $2\,u_{xy} - u_{xz} + 2\,u_{yz} - u = 0.$

2.11 $u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0.$

2.12 $u_{xy} - 2\,u_{xz} + u_{yz} + u_x + u_y = 0.$

2.13 $u_{xy} - u_{zz} + u_x - u_y = 0.$

2.14 $u_{xx} + 2\,u_{xy} - 2\,u_{xz} + 2\,u_{yy} + 6\,u_{zz} = 0.$

2.15 $4\,u_{xx} - 4\,u_{xy} - 2\,u_{yz} + u_y + u_z = 0.$

2.16 $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$

2.17 $u_{xx} + 2\,u_{xy} - 2\,u_{xz} + 2\,u_{yy} + 2\,u_{zz} = 0.$

2.18 $u_{xx} + 2\,u_{xy} - 4\,u_{xz} - 6\,u_{yz} - u_{zz} = 0.$

2.19 $u_{xx} + 2\,u_{xy} + 2\,u_{yy} + 2\,u_{yz} + 2\,u_{yt} + 2\,u_{zz} + 3\,u_{tt} = 0.$

2.20 $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2\,u_{zt} + 2\,u_{tt} = 0.$

2.21 $u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u_z + u = 0.$

2.22 $u_{xy} + u_{yz} + 2\,u_x - 3\,u_y + 4\,u_z - u = 0.$

2.23 $u_{xx} + u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

2.24 $u_{yy} - 2\,u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

2.25 $u_{xx} - 2\,u_{xy} - 2\,u_{xz} + u_x + u_y + 2\,u_z + u = 0.$

2.26 $u_{xx} - u_{zz} - 2\,u_{xy} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

2.27 $2\,u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2\,u_{xy} + 2\,u_x + u_y + u_z + 4\,u = 0.$

2.28 $2\,u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2\,u_{xy} + 2\,u_x - u_y + u_z + u = 0.$

2.29 $3\,u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2\,u_{xy} + 2\,u_{xz} + 2\,u_x + 2\,u_y + 2\,u_z = 0.$

2.30 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2\,u_{xy} + 2\,u_{xz} - 2\,u_{yz} + 2\,u_x - u_z + u = 0.$

2.31 $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2\,u_{xt} + u_{xz} + u_{yt} - 2\,u_{yz} = 0.$

ТЕМА 3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка:

$$a_{11}(x,y)u_{xx}+2\,a_{12}(x,y)\,u_{xy}+a_{22}(x,y)\,u_y+b_1u_x+b_2\,u_y+c\,u+f=0, \quad (8)$$

коэффициенты которого непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют условию $|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{22}| \neq 0$.

Определение 1. Функция $u = u(x,y)$ называется *решением уравнения* (8), если она принадлежит классу $C^{(2)}(D)$ и удовлетворяет уравнению (8). Множество всех решений уравнения (8) называется его *общим решением.*

Для нахождения общего решения можно воспользоваться методом характеристик для приведения уравнения к более простому виду, которое легко интегрируется.

Задача 1. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy}(x,y)=0.$$

Решение. Введем в рассмотрение новую функцию $v(x,y) = u_x(x,y)$. Тогда уравнение примет вид $v_y(x,y) = 0$. Проинтегрируем полученное уравнение по переменной y при каждом фиксированном x. Получим $v(x,y) = u_x(x,y) = f_1(x)$. А теперь проинтегрируем по переменной x:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} f_1(s)\,ds+g(y),$$

В силу произвольности функции $f_1(x)$, вводя для интеграла от нее новое обозначение $f(x)$, общее решение запишется в виде

$$u(x,y)=f(x)+g(y),$$

где f, g – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Задача 2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy}(x,y)=F(x,y).$$

Решение. Интегрируя уравнение по предложенной выше схеме сначала по переменной y, а затем по x, получим общее решение вида

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} F(\tau,s)\,d\tau\,ds.$$

З а д а ч а 3. Найти общее решение уравнений

$$1) u_{xy}(x,y) + x\,u_x = 0, \quad 2) u_{xy}(x,y) + y\,u_x(x,y) = 0.$$

Решение. Введем неизвестную функцию $v(x,y) = u_x(x,y)$. Тогда первое уравнение представимо в виде

$$v_y + x\,v = 0.$$

Проинтегрируем его по переменной y как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$v = e^{-xy} f(x) = u_x.$$

Теперь уравнение интегрируем по переменной x

$$u(x,y) = g(y) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-sy} f(s)\,ds.$$

Второе уравнение для функции v можно записать так

$$v_y + y\,v = 0.$$

После интегрирования уравнения по переменной y будем иметь

$$v = e^{-y^2/2} f_1(x) = u_x.$$

Тогда

$$u(x,y) = g(y) + e^{-y^2/2} f(x).$$

З а д а ч а 4. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy}(x,y) + y\,u_x(x,y) + x\,u_y(x,y) + xy\,u(x,y) = 0.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\Big(u_x + x\,u\Big)_y + y\Big(u_x + x\,u\Big) = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x,y) = u_x + x\,u.$$

Исходное уравнение примет вид

$$v_y + y\,v = 0.$$

Такое уравнение мы интегрировали выше

$$v(x,y) = e^{-y^2/2} f(x).$$

Возвращаясь к функции u

$$u_x(x,y) + x\,u(x,y) = e^{-y^2/2}\,f(x),$$

получим неоднородное линейное уравнение первого порядка. Его решение

$$u(x,y) = e^{-x^2/2}\Big(g(y) + e^{-y^2/2}\int\limits_{x_0}^{x} e^{s^2/2} f(s)\,ds\Big).$$

З а д а ч а 5. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy}(x,y) - 2\,u_x(x,y) - 3\,u_y(x,y) + 6\,u(x,y) = 2\,e^{x+y}.$$

Решение. Это уравнение гиперболического типа в каноническом виде, содержащее младшие производные. Перейдем к новой функции $v(x,y)$ сделав замену $u(x,y) = v(x,y)\,e^{3x+2y}$. После пересчета производных, получим уравнение

$$v_{xy}(x,y) = 2e^{x+y} \cdot e^{-3x-2y}.$$

Это уравнение мы уже интегрировали. Поэтому

$$v(x,y) = f(x) + g(y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} e^{-2\tau - s}\,d\tau\,ds,$$

или
$$v(x,y) = f(x) + g(y) - e^{-2x-y}.$$
Возвращаясь к функции u, получим общее решение исходного уравнения
$$u(x,y) = -e^{x+y} + \Big(f(x) + g(y)\Big)e^{3x+2y}.$$

З а д а ч а 6. Найти общее решение уравнения
$$x^2\, u_{xy}(x,y) + 2x\, u_y(x,y) = 0, \quad x \neq 0.$$

Решение. Заданное уравнение можно привести к виду
$$\Big(x^2\, u_y\Big)_x = 0.$$

Проинтегрируем уравнение по переменной x при каждом значении переменной y. Получим уравнение:
$$x^2\, u_y = f_1(y),$$

где $f_1(y)$ – произвольная функция от переменной y. Интегрируя теперь полученное уравнение по переменной y, найдем
$$u(x,y) = \frac{1}{x^2} f(y) + g(x).$$

З а д а ч а 7. Найти общее решение уравнения
$$x^2\, u_{xx} - 2xy\, u_{xy} + y^2\, u_{yy} + x\, u_x + y\, u_y = 0.$$

Решение. Для коэффициентов уравнения должно выполняться условие $|x^2| + |xy| + |y^2| \neq 0$. Потому уравнение не задано в начале координат.

Если $x = 0$, $y \neq 0$, то уравнение имеет вид $y^2\, u_{yy} + y\, u_y$ или
$$u_{yy} + \frac{1}{y} u_y = 0.$$

Это уравнение параболического типа. Обозначив через $v(x,y) = u_y(x,y)$, получим промежуточное уравнение $v_y + \frac{1}{y}\, v = 0$, решение которого запишется в виде $v = \dfrac{f(x)}{y}$. Возвращаясь к замене, имеем

$u_y = \dfrac{f(x)}{y}$. Интегрируя его, получим решение исходного уравнения для нашего случая

$$u(x,y) = -\frac{f(x)}{y^2}) + g(x).$$

Если $x \neq 0$, $y = 0$, то уравнение имеет вид $y^2\, u_{yy} + y\, u_y$ или

$$u_{yy} + \frac{1}{y} u_y = 0.$$

Это уравнение параболического типа. Обозначив через $v(x,y) = u_y(x,y)$, получим промежуточное уравнение $v_y + \frac{1}{y} v = 0$, решение которого запишется в виде $v = \dfrac{f(x)}{y}$. Возвращаясь к замене, имеем $u_y = \dfrac{f(x)}{y}$. Интегрируя его, получим решение исходного уравнения для нашего случая

$$u(x,y) = -\frac{f(x)}{y^2}) + g(x).$$

Пусть $x, y \neq 0$. Поскольку дискриминант уравнения $D = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$, то уравнение является уравнение гиперболического типа. Приведем его методом характеристик к каноническому виду. Выпишем соответствующее характеристическое уравнение

$$x^2\,(dy)^2 + 2\,xydxdy + y^2\,(dx)^2 = 0.$$

Откуда $x\,dy + y\,dx = 0$. Общий интеграл этого уравнения $xy = C_1$. Поэтому в качестве замены выберем

$$\xi = xy, \quad \eta = x.$$

Заметим, что при сделанных предположения на переменные x и y замена является невырожденной. Данная замена приводит уравнение к каноническому виду

$$\eta\, u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

Для того, чтобы решить это уравнение, сделаем замену $v(\xi,\eta) = u_\eta$. В результате получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными: $\eta\, v_\eta + v = 0$, в котором переменная ξ рассматривается как параметр. Его решение имеет вид: $v(\xi,\eta) = \dfrac{f(\xi)}{\eta}$, где f – произвольная функция. Возвращаясь к исходной функции u, интегрируем уравнение $u_\eta = \dfrac{f(\xi)}{\eta}$. Получим

$$u(\xi,\eta) = f(\xi)\ln\eta + g(\xi).$$

В полученном равенстве вернемся к старым переменным. В результате получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x,y) = f(xy)\ln x + g(xy).$$

Задача 8. Рассмотрим общее решение уравнения Эйлера–Дарбу

$$u_{xy} - \frac{\alpha\, u_x - \beta\, u_y}{x-y} = 0$$

при нецелых значения α и β.

Решение. Будем искать частное решение уравнения в виде произведения двух функций $X(x)Y(y)$. После подстановки в исходное уравнение и разделения переменных получим тождество

$$x + \beta\frac{X(x)}{X'(x)} = y + \alpha\frac{Y(y)}{Y'(y)} = \lambda,$$

где λ – некоторая постоянная. Решая каждое уравнение в отдельности, получим

$$X(x) = C_1(\lambda)(x-\lambda)^{-\beta}, \quad Y(y) = C_2(\lambda)(y-\lambda)^{-\alpha},$$

где $y < \lambda < x$. Учитывая линейность уравнения, решением будет

$$u_1(x,y) = \int\limits_y^x f(\lambda)(\lambda)(x-\lambda)^{-\beta}(y-\lambda)^{-\alpha}\, d\lambda, \alpha < 1,\ \beta < 1.$$

Второе частное решение имеет вид

$$u_2(x,y) = (x-y)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_y^x g(\lambda)(\lambda)(x-\lambda)^{\beta-1}(y-\lambda)^{\alpha-1}\, d\lambda, \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Тогда сумма $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ представляет общее решение уравнения Эйлера–Дарбу, содержащее две произвольные функции f и g. После линейной замены переменных $\lambda = tx + (1-t)y$ решение примет вид

$$u(x,y) = (x-y)^{\alpha-\beta} \int\limits_0^1 f(y-(x-y)\,t)t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 g(y-(x-y)\,t)\,t^{\beta-1}\,(1-t)^{\alpha-1}\,dt,$$

$0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta \neq 1$.

ЗАДАНИЯ

Задания 3.1 – 3.25. Найти общее решение каждого из указанных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 0$.

3.2 $3u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 1$.

3.3 $3u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - u_y = y$.

3.4 $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \dfrac{5}{16}u = y$.

3.5 $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$.

3.6 $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \dfrac{1}{16}u = 16x\exp\left(-\dfrac{x+y}{16}\right)$.

3.7 $u_{xx} - u_{yy} + 5u_x + 3u_y + 4u = 0$.

3.8 $u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0$.

3.9 $u_{xx} + 10u_{xy} + 21u_{yy} - u_x + u_y = 0$.

3.10 $u_{xx} + 8u_{xy} + 15u_{yy} + u_x + 3u_y = y + 5x$.

3.11 $u_{xx} - 8u_{xy} + 15u_{yy} - u_x + 3u_y = 0$.

3.12 $u_{xx} + 10u_{xy} + 24u_{yy} + u_x + 4u_y = y - 4x$.

3.13 $u_{xx} + 12u_{xy} + 35u_{yy} + u_x + 5u_y = y - 7x$.

3.14 $u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + u_y = y + x$.

3.15 $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = y - 4x$.

3.16 $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - 4u_y = y + x.$

3.17 $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 8u_x - 2u_y = y - 4x.$

3.18 $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 2y - x.$

3.19 $u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = y + 4x.$

3.20 $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0.$

3.21 $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0.$

3.22 $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = y + 2x.$

3.23 $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x.$

3.24 $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y = -4e^{5x+1,5y}.$

3.25 $u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = y + 6x.$

Задания 3.26 – 3.50. В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнений:

3.26 $yu_{xx} - (y - x)u_{xy} - xu_{yy} = 0.$

3.27 $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 1.$

3.28 $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} + u_x + (1 + \cos x - \sin x)u_y = 0.$

3.29 $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (1 + \cos x + \sin x)u_y = 0.$

3.30 $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

3.31 $yu_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \dfrac{y}{x}u_x + \dfrac{2x}{1 + 2y}(u_x + 2xu_y) = 0.$

3.32 $yu_{xx} - (x + y)u_{xy} + xu_{yy} - \dfrac{x + y}{x - y}(u_x - u_y) = 0.$

3.33 $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0.$

3.34 $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x + 2)u_y = 0.$

3.35 $4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0.$

3.36 $yu_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \dfrac{y}{xy}u_x + \dfrac{2x}{1 + 2y}(u_x + 2xu_y) = 0.$

3.37 $xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y = x(y + x^2).$

3.38 $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 1.$

3.39 $(x^2 - 1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2 - 1)u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0.$

3.40 $u_{xy} + xu_x - u = -\cos y.$

3.41 $\big(u_x+u\big)_y+x\big(u_x+u\big)=-x^2y.$

3.42 $u_{xy}+xu_x+2yu_y+2xyu=0.$

3.43 $u_{xy}+u_x+yu_y+(y-1)u=0.$

3.44 $u_{xx}+u_{xy}+(2x-y)u_x+yu_y-2y(y-x)u=0.$

3.45 $u_{xy}+xu_x+u_y+(x-1)u=0.$

3.46 $u_{xy}+xu_x+2yu_y+2xyu=0.$

3.47 $y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}-xu_x-yu_y=0.$

3.48 $u_{xx}+2u_{xy}+\cos^2 xu_{yy}-\operatorname{ctg}x(u_x+u_y)=0.$

3.49 $3x^2u_{xx}-5xyu_{xy}+2y^2xu_{yy}+3xu_x+2yu_y=y.$

3.50 $3x^2u_{xx}-5xyu_{xy}+2y^2xu_{yy}+3xu_x+2yu_y=2x^4y^5.$

Задания 3.51 – 3.61. Найти общее решение уравнений, приводимых к уравнению Эйлера–Дарбу:

3.51 $(x^2-y^4)\,u_{xx}+2xy\,u_{xy}+y^2\,u_{yy}+\dfrac{1}{3}(x\,u_x+y\,u_y)=0.$

3.52 $x^2\,u_{xx}-y^2\,u_{yy}+x\,u_x-y\,u_y+\dfrac{24x^2}{25(1-x^2)}\,u=0.$

3.53 $u_{xx}-e^{2x}\,u_{yy}-2\,u_x+\dfrac{1}{3}\,e^xu_y-u=0.$

3.54 $x\sqrt{x}\,u_{xx}-\sqrt{x}\,u_{yy}+\dfrac{7}{8}\sqrt{x}\,u_x+\dfrac{1}{8}\,u_y=0.$

3.55 $x\sqrt{x}\,u_{xx}-\sqrt{x}\,u_{yy}+\dfrac{7}{8}\sqrt{x}\,u_x+\dfrac{1}{8}\,u_y=0.$

3.56 $y\,u_{xx}+2x\,u_{xy}+y\,u_{yy}-\dfrac{y\,u_x+x\,u_y}{\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{y}{x^2-y^2}\,u=0.$

3.57 $u_{xy}+\dfrac{8}{3}\dfrac{u_x}{x-y}-\dfrac{7}{4}\dfrac{u_y}{x-y}=0.$

3.58 $u_{xy}-\dfrac{7}{6}\dfrac{u_x}{x-y}-\dfrac{2}{5}\dfrac{u_y}{x-y}=0.$

3.59 $u_{xy}+\dfrac{1}{4}\dfrac{u_x}{x-y}+\dfrac{1}{3}\dfrac{u_y}{x-y}=0.$

3.60 $u_{xy}-\dfrac{7}{8}\dfrac{u_x}{x-y}+\dfrac{5}{4}\dfrac{u_y}{x-y}=0.$

3.61 $u_{xy}-\dfrac{3}{2}\dfrac{u_x}{x-y}+\dfrac{1}{2}\dfrac{u_y}{x-y}=0.$

ТЕМА 4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

В области $D \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка:

$$\begin{aligned} a_{11}(x,y)u_{xx} + 2\,a_{12}(x,y)\,u_{xy} + a_{22}(x,y)\,u_y + \\ + b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f(x,y), \end{aligned} \tag{9}$$

коэффициенты которого непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют условию $|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| \neq 0$. На кривой Γ, принадлежащей замыканию $\overline{D}$ области D, заданной уравнением $y = l(x)$, зададим условия Коши

$$u\Big|_{y=l(x)} = \varphi(x), \quad u_y\Big|_{y=l(x)} = \psi(x). \tag{10}$$

О п р е д е л е н и е 1. Функция $u = u(x,y)$ называется *решением задачи Коши* (9)–(10), если она принадлежит классу $C^{(2)}(D\backslash\Gamma) \cap C^1(\overline{D})$ и удовлетворяет уравнению (9) и условию (10).

Если в каждой точке кривой Γ направление оси y не является касательным к кривой Γ и касательное направление не является характеристическим, то в области D, ограниченной характеристиками, уравнения (9), проходящими через концы кривой Γ, при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (9), правой части f и данных Коши φ и ψ существует единственное решение задачи Коши (9)–(10). Если удается проинтегрировать уравнение (9), то задача Коши может быть решена в явном виде.

З а д а ч а 1. Методом характеристик решить задачу Коши

$$\begin{aligned} &u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0, \\ &u(x,0) = 2x^2, \quad u_y(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Решение. Данное уравнение является уравнением гиперболического типа. Методом характеристик с помощью замены $\xi = y - x$, $\eta = y + 3x$ приведем его к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + 4\,u_\eta = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$u(\xi,\eta) = f(\eta)e^{-4\xi} + g(\xi),$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем решение в виде

$$u(x,y) = f(y+3x)e^{4(x-y)} + g(y-x),$$

где f, g – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции. Посчитаем значение $u(x,y)$ при $y=0$, получим $f(3x)e^{4x}+g(-x) = 2x^2$. Вычислим производную от $u(x,y)$ по переменной y

$$f'(y+3x)\,e^{4(x-y)} - 4\,f(y+3x)\,e^{4(x-y)} + g'(y-x),$$

где $f'(y+3x)$, $g'(y-x)$ – производные от функций f и g соответственно по их аргументах. Тогда при $y=0$ второе условие запишется в виде $f'(3x)\,e^{4x} - 4\,f(3x)\,e^{4x} + g'(-x) = 0$.

Таким образом, для определения функций f, g получим систему уравнений

$$\begin{cases} f(3x)e^{4x} + g(-x) = 2x^2, \\ f'(3x)\,e^{4x} - 4\,f(3x)\,e^{4x} + g'(-x) = 0. \end{cases}$$

Для решения системы продифференцируем первое уравнение по переменной x: $3f'(3x)e^{4x} + 4f(3x)e^{4x} - g'(-x) = 4x$, и сложим его со вторым уравнение системы. Получим уравнение первого порядка $4f'(3x)e^{4x} = 4x$. С помощью замены переменной $s = 3x$ перепишем его в виде

$$f'(s) = \frac{1}{3}\,s\,e^{-\frac{4}{3}s},$$

После его интегрирования получим выражение для функции f

$$f(s) = -\frac{1}{16}\,e^{-\frac{4}{3}s}(4s+3) + C,$$

где C – произвольная постоянная. Выражаем из первого уравнения функцию g. Имеем

$$g(x) = 2x^2 - f(-3x)e^{-4x} = 2x^2 - \frac{3}{4}\,x + \frac{3}{16} - Ce^{-4x}.$$

Подставим общий вид найденных функций в решение. После упрощения получим решение поставленной задачи Коши.

$$u(x,y) = -\frac{1}{16}\,e^{-\frac{16}{3}y}\,(4y+12x+3) + 2(y-x)^2 - \frac{3}{4}\,(y-x) + \frac{3}{16}.$$

Задача 2. Решить задачу Коши методом характеристик и определить область ее единственности

$$x\,u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad x > 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad u_y(x,0) = 0.$$

Решение. В указанной области задания уравнения оно является уравнением гиперболического типа, $D = 0 - (-x) = x > 0$. Выпишем характеристическое уравнение $x(dy)^2 - (dx)^2 = 0$. Оно распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения вида

$$\sqrt{x}\,dy - dx = 0, \quad \sqrt{x}\,dy + dx = 0$$

с общими интегралами $y + 2\sqrt{x} = C_1$, $y - 2\sqrt{x} = C_2$.

Определим область единственности решения задачи Коши: характеристики $y+2\sqrt{x} = 0, y-2\sqrt{x} = 0$ проходят через кривую Γ, заданную уравнением $y = 0$, и границу области $x = 0$ и выделяют подобласть $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |y| <\}$, в которой существует единственное решение задачи Коши. Найдем это решение.

Выполним в исходном уравнении замену переменных

$$\xi = y + 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - 2\sqrt{x}.$$

Получим уравнение в каноническом виде $u_{\xi\eta} = 0$, которое имеет общее решение $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ или в переменных x, y

$$u(x,y) = f(y + 2\sqrt{x}) + g(y - 2\sqrt{x}).$$

Используя начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f(2\sqrt{x}) + g(-2\sqrt{x}) = x, \\ f'(2\sqrt{x}) + g'(-2\sqrt{x}) = 0. \end{cases}$$

Как и в предыдущей задаче, продифференцируем первое уравнение по переменной x: $x^{-1/2}f'(2\sqrt{x}) - x^{-1/2}g'(-2\sqrt{x}) = 1$, затем умножим обе части уравнения на $\sqrt{x}$, получим $f'(2\sqrt{x}) + g'(-2\sqrt{x}) = \sqrt{x}$. Сложим его со вторым уравнением системы. Имеем $f'(2\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ или $f'(z) = \frac{1}{4}\,z$, где $z = 2\sqrt{x}$. Интегрируя последнее уравнение по переменной z, получим $f(z) = \frac{1}{8}\,z^2 + C$, где C – произвольная постоянная. Тогда $g(-2\sqrt{x}) = x - f(-2\sqrt{x}) = x - \frac{1}{2}\,x - C$ или $g(s) = \frac{1}{8}\,s^2 - C$, где $s = -2\sqrt{x}$. Теперь можно записать решение задачи Коши

$$u(x,y) = \frac{1}{8}\,(y + 2\sqrt{x})^2 + C + \frac{1}{8}\,(y - 2\sqrt{x})^2 - C = x + \frac{1}{4}\,y^2.$$

Задача 3. Найти максимальную область $D \subset \mathbb{R}^2$, которой решение уравнения

$$-u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

однозначно определяется условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\varphi(x) \in C^2(0,1)$, $\psi(x) \in C^1(0,1)$.

Решение. то уравнение является уравнением гиперболического типа, которое заменой переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ приводится к виду $u_{\xi\eta} = 0$. Запишем решения уравнения в виде

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y),$$

где f и g – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда в области

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x - y < 1,\ 0 < x + y < 1\},$$

ограниченной характеристиками, проходящими через концы кривой $\Gamma = \{y = 0, 0 < x < 1\}$, задача Коши однозначно разрешима.

Задача 4. Решить задачу Коши методом характеристик.

$$\begin{aligned} &4y^2\, u_{xx} - 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} + \frac{2y}{1+y^2}(2u_x + u_y) = 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x). \end{aligned}$$

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду методом характеристик. Характеристическое уравнение:

$$4y^2(dy)^2 + 2(1-y^2)dydx - (dx)^2 = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.$$

Вычисляя общие интегралы полученных уравнений, находим замену переменных

$$\xi = x - \frac{2}{3}y^3, \quad \eta = x + 2y.$$

Тогда

$$
\begin{array}{l|l}
-\dfrac{4y}{1+y^2} & u_x = u_\xi + u_\eta, \\
\dfrac{2y}{1+y^2} & u_y = -2y^2 u_\xi + 2u_\eta, \\
4y^2 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
2(1-y) & u_{xy} = -2y^2\, u_{\xi\xi} - 2(y^2-1)\, u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}, \\
-1 & u_{yy} = 4y^4\, u_{\xi\xi} - 8y^2\, u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} - 4y\, u_\xi.
\end{array}
$$

Вычислим коэффициенты при производных

$$
\begin{aligned}
&u_{\xi\eta}:\ 2(1-y^2)\cdot 2(1-y^2) = 2(1-y^2)^2,\\
&u_\xi:\ -\frac{4y}{1+y^2} + 4y - \frac{4y^3}{1+y^2} = 0,\\
&u_\eta:\ -\frac{4y}{1+y^2} + \frac{4y}{1+y^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, канонический вид уравнения $u_{\xi\eta} = 0$. Его решение $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ или

$$
u(xy) = f\big(x - \frac{2}{3}\, y^3\big) + g(x - 2y).
$$

Из первого начального условия имеем уравнение $f(x) + g(x) = \varphi(x)$. Вычислим производную по переменной y от решения $u_y = f'\big(x - \frac{2}{3}\, y^3\big)\times$ $\times 2y^2 + 2g'(x + 2y)$. Вычисляя значение производной в точке $y = 0$, получим $2\, g'(x) = \psi(x)$. Таким образом, получим систему вида

$$
\begin{cases}
f(x) + g(x) = \varphi(x),\\
g'(x) = \frac{1}{2}\, \psi(x).
\end{cases}
$$

Интегрируя последнее уравнение системы, находим

$$
g(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \psi(s\, ds,
$$

а из первого уравнения

$$
f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \psi(s\, ds.
$$

В итоге решение задачи Коши примет вид

$$u(x,y) = \varphi\big(x - \frac{2}{3}\,y^3\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}\,y^3}^{x+2y} \psi(s\,ds.$$

З а д а ч а 5. Решить задачу Коши методом характеристик

$$\begin{aligned} &7\,u_{xx} - 2\,u_{xy} - 5\,u_{yy} - 12\,u_x + 12\,u_y = 0,\\ &L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x\},\ \mathbf{l} - \text{ нормаль к } L,\ \ (\mathbf{l}, \mathbf{e}_y) > 0,\\ &u\big|_L = 0, \quad u_l\big|_L = -\sqrt{2}e^{2x}. \end{aligned}$$

Решение. Заменой переменных $\xi = y + x$, $\eta = y - \frac{5}{7}x$ приведем уравнение к каноническом виду

$$u_{\xi\eta} - u_\eta = 0.$$

Его решение имеет вид

$$u(\xi,\eta) = e^\xi f(\eta) + g(\xi).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$u(x,y) = e^{y+x} f\big(y - \frac{5}{7}x\big) + g(y+x).$$

Перейдем к удовлетворению решения начальным условиям. Вектор нормали к кривой L имеет координаты $(-1,1)$. Вычислим производную по направлению l:

$$\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора l, $\cos\alpha = -1/\sqrt{2}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{2}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y},$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{y+x} f\big(y - \frac{5}{7}x\big) - \frac{5}{7}\,e^{y+x} f'\big(y - \frac{5}{7}x\big) + g'(y+x)\Big) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{y+x}f\big(y-\frac{5}{7}x\big)+e^{y+x}f'\big(y-\frac{5}{7}x\big)+g'(y+x)\Big).$$

После упрощения, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{12}{7\sqrt{2}}e^{y+x}f'\big(y-\frac{5}{7}x\big).$$

Теперь начальные условия примут вид

$$u\Big|_L=e^{2x}\,f\big(\frac{2}{7}\,x\big)+g(2x)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=\frac{12}{7\sqrt{2}}\,e^{2x}f'\big(\frac{2}{7}\,x\big)=-\sqrt{2}e^{2x}.$$

Откуда $f'\big(\frac{2}{7}\,x\big)=-\frac{7}{6}$. Тогда после интегрирования уравнения по переменной $z=\frac{2}{7}\,x$ определяется функция

$$f(z)=-\frac{7}{6}\,z+C,$$

где C – произвольная постоянная. Подставим f в первое уравнение и выразим g

$$g(z)=\frac{1}{6}\,z\,e^{z}-C\,e^{z}.$$

Подставляя в решение найденные функции f и g, получим решение задачи Коши

$$u(x,y)=e^{y+x}\Big(-\frac{5}{7}\,y+\frac{5}{6}\,x+C\Big)+x\,\frac{1}{6}\,e^{y+x}+y\,\frac{1}{6}\,e^{y+x}-Ce^{y+x}=e^{y+x}(x-y).$$

Задача 6. Решить задачу Коши методом характеристик, используя систему Mathematica

$$\begin{aligned}&u_{xx}-u_{yy}-2\,u_x-2\,u_y=4(x+y),\\&u(x,0)=-x,\quad u_y(x,0)=x-1.\end{aligned}$$

Решение. Сначала приведем уравнение к каноническому виду, используя систему Mathematica.

Введём исходные данные систему:

$$\boldsymbol{a_{11} = 1;}$$
$$\boldsymbol{a_{12} = 0;}$$
$$\boldsymbol{a_{22} = -1;}$$
$$\boldsymbol{b_1 = -2;}$$
$$\boldsymbol{b_2 = -2;}$$
$$\boldsymbol{c = 0;}$$
$$\boldsymbol{f = 4 * (y + x);}$$

По коэффициентам построим уравнение в частных производных:

$$\boldsymbol{a_{11} * \partial_{x,x} u[x,y] + a_{12} \partial_{x,y} u[x,y] + a_{22} * \partial_{y,y} u[x,y] + b_1 * \partial_x u[x,y] + b_2 * \partial_y u[x,y] + c * u[x,y] == f}$$

$$-2u^{(0,1)}[x,y] - u^{(0,2)}[x,y] - 2u^{(1,0)}[x,y] + u^{(2,0)}[x,y] == 4(x+y)$$

Вычислим дискрименант уравнения для определения типа уравнения:

$$\boldsymbol{d = {a_{12}}^2 - 4 * a_{11} * a_{22} // \mathrm{Simplify}}$$

$$(4)$$

Найдём дифференциальные уравнения характеристик:

$$\boldsymbol{t_1 = \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)_1 = \frac{a_{12} + \sqrt{d}}{2 * a_{11}} // \mathrm{PowerExpand} // \mathrm{Simplify}}$$

$$(1)$$

$$\boldsymbol{t_2 = \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)_2 = \frac{a_{12} - \sqrt{d}}{2 * a_{11}} // \mathrm{PowerExpand} // \mathrm{Simplify}}$$

$$(-1)$$

Проинтегрируем полученные уравнения и найдем их первые интегралы:

$$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\int dy == \int 1\, dx + \mathrm{c1}, \mathrm{c1}] // \mathrm{Simplify}}$$

$$\{\{\mathrm{c1} \to -x + y\}\}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\int dy == \int -1\, dx + \mathrm{c2}, \mathrm{c2}] // \mathrm{Simplify}}$$

$\{\{\mathrm{c2} \to x + y\}\}$

Выпишем замену переменных:

$\boldsymbol{\xi = y - x;}$

$\boldsymbol{\eta = y + x;}$

Проверим условие невырожденности:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \partial_x\xi & \partial_y\xi \\ \partial_x\eta & \partial_y\eta \end{pmatrix};}$$

$$\mathbf{Print[MatrixForm[}\boldsymbol{A}\mathbf{]];}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Det}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right] \neq \mathbf{0}$$

True

Вычислим коэффициенты уравнения по новым переменным:

$$\boldsymbol{\bar{a}_{11} = \mathrm{Simplify}\left[\mathrm{PowerExpand}\left[a_{11} * (\partial_x\xi)^2 + a_{12} * \partial_x\xi\partial_y\xi + \right.\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.\left. + a_{22} * (\partial_y\xi)^2\right]\right];}$$
$$\boldsymbol{\bar{a}_{12} = \mathrm{Simplify}[\mathrm{PowerExpand}[2 * a_{11} * \partial_x\xi\partial_x\eta +}$$
$$\boldsymbol{+ a_{12} * (\partial_x\xi\partial_y\eta + \partial_y\xi\partial_x\eta) + 2 * a_{22} * \partial_y\xi\partial_y\eta]];}$$
$$\boldsymbol{\bar{a}_{22} = \mathrm{Simplify}\left[\mathrm{PowerExpand}\left[a_{11} * (\partial_x\eta)^2 + a_{12} * \partial_x\eta\partial_y\eta + \right.\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.\left. + a_{22} * (\partial_y\eta)^2\right]\right];}$$
$$\boldsymbol{\bar{b}_1 = \mathrm{Simplify}[\mathrm{PowerExpand}[a_{11} * \partial_{x,x}\xi + a_{12} * \partial_{x,y}\xi + a_{22} * \partial_{y,y}\xi +}$$
$$\boldsymbol{+ b_1 * \partial_x\xi + b_2 * \partial_y\xi]];}$$
$$\boldsymbol{\bar{b}_2 = \mathrm{Simplify}[\mathrm{PowerExpand}[a_{11} * \partial_{x,x}\eta + a_{12} * \partial_{x,y}\eta + a_{22} * \partial_{y,y}\eta +}$$
$$\boldsymbol{+ b_1 * \partial_x\eta + b_2 * \partial_y\eta]];}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{Print}[\text{"}\bar{a}_{11} = \text{"}, \bar{a}_{11}];}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}[\text{"}\bar{a}_{12} = \text{"}, \bar{a}_{12}];}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}[\text{"}\bar{a}_{22} = \text{"}, \bar{a}_{22}];}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}\left[\text{"}\bar{b}_1 = \text{"}, \bar{b}_1\right];}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{Print}\left[\text{"}\bar{b}_2 = \text{"}, \bar{b}_2\right];}$$

$\bar{a}_{11} = 0$
$\bar{a}_{12} = \ -4$
$\bar{a}_{22} = 0$
$\bar{b}_1 = 0$
$\bar{b}_2 = \ -4$

Выразим старые переменные x и y, учитывая невырожденную замену:

Solve[ξ==ξ0&&η==η0,{x,y}]

$$\left\{\left\{x \to \frac{\eta 0 - \xi 0}{2}, y \to \frac{\eta 0 + \xi 0}{2}\right\}\right\}$$

Выпишем канонический вид:

Clear[ξ];
Clear[η];
$\boldsymbol{x = \frac{\eta - \xi}{2};}$
$\boldsymbol{y = \frac{\eta + \xi}{2};}$
FullSimplify $\left[\bar{a}_{11}\partial_{\xi,\eta}u[\xi,\eta] + \bar{a}_{12}\partial_{\xi,\eta}u[\xi,\eta] + \bar{a}_{22}\partial_{\xi,\eta}u[\xi,\eta] + \right.$
$\left. + \bar{b}_1\partial_{\xi}u[\xi,\eta] + \bar{b}_2\partial_{\eta}u[\xi,\eta] + c * u[\xi,\eta] == f\right]$

$$\eta + u^{(0,1)}[\xi,\eta] + u^{(1,1)}[\xi,\eta] == 0$$

Построим общее решение уравнения:

DSolve$[\bar{a}_{11}\partial_{\xi,\eta}u[\xi,\eta] + \bar{a}_{12}\partial_{\xi,\eta}u[\xi,\eta] + \bar{a}_{22}\partial_{\xi,\eta}u[\xi,\eta] +$
$+ \bar{b}_1\partial_{\xi}u[\xi,\eta] + \bar{b}_2\partial_{\eta}u[\xi,\eta] + c * u[\xi,\eta] == f, u[\xi,\eta], \{\xi,\eta\}]$

Отсюда общее решение строится следующим образом:

$$u(\xi,\eta) = C_2(\xi) + \int\limits_1^{\eta} -e^{-\xi}(e^{\xi}K(1) - C_1(K(1))dK(1) =$$

$$= C_2(\xi) + \int\limits_1^{\eta} -K(1)dK(1) + e^{-\xi}\underbrace{\int\limits_1^{\eta} -C_1(K(1))dK(1)}_{C_1(\eta)} =$$

$$= C_2(\xi) - \frac{\eta^2}{2} + e^{-\xi}C_1(\eta)$$

Вернёмся к исходным переменным:

f1 = f;
Clear[f];
u[x_,y_]:=Exp[$-\xi[x,y]$] * $f[\eta[x,y]] + g[\xi[x,y]] - \frac{\eta[x,y]^2}{2}$;
Print[“u[x, y] = ”, $u[x,y]$];

u[x, y] = $-\frac{1}{2}(x+y)^2 + e^{x-y}f[x+y] + g[-x+y]$

Найдём производную общего решения по переменной y:

Print [“∂_y u[x, y] = ”,$\partial_y u[x,y]$]

∂_y u[x, y] = $-x - y - e^{x-y}f[x+y] + e^{x-y}f'[x+y] + g'[-x+y]$

Введём параметры из начальных условий задачи Коши:

φ[x_]:=$-x$;
ψ[x_]:=$x - 1$;
y0 = 0;

Объявим функцию и её производную, и выведем их значения в точке y_0:

$$u_1[\mathrm{x\_,y\_}]{:=}u[x,y];$$
$$u_2[\mathrm{x\_,y\_}]{:=}-x-y-e^{x-y}f[x+y]+e^{x-y}f'[x+y]+g'[-x+y];$$
$$\mathrm{Print}\,[\text{“u(x, y0) = “}, u_1[x,\mathrm{y0}], \text{“ = “}, \varphi[x]]\,;$$
$$\mathrm{Print}\,[\text{“}u_y\text{(x, y0) = “}, u_2[x,\mathrm{y0}], \text{“ = “}, \psi[x]]\,;$$

$$\mathrm{u(x,\ y0)} = -\tfrac{x^2}{2}+e^x f[x]+g[-x] = -x$$
$$\partial_y \mathrm{u(x,\ y0)} = -x-e^x f[x]+e^x f'[x]+g'[-x] = -1+x$$

Продифференцируем первое уравнение:

$$\mathrm{Print}\left[\partial_x\left(-\frac{x^2}{2}+e^x f[x]+g[-x]\right), \text{“ = “}, \partial_x(-x)\right]$$
$$-x+e^x f[x]+e^x f'[x]-g'[-x] = -1$$

Сложим полученное после дифференцирования уравнение со вторым уравнением системы, введём замену $x = z$ и найдем решение соответственного дифференциального уравнения:

$$\mathrm{DSolve}\left[\{-2*z+2*\mathrm{Exp}[z]*f'[z]{==}z-2\}\,,f,z\right]$$

$$\left\{\left\{f\to \mathrm{Function}\left[\{z\},\frac{1}{2}e^{-z}(-1-3z)+c_1\right]\right\}\right\}$$

Объявим функцию f и функцию g, выразив ее из первого уравнения:

$$f[\mathrm{z\_}]{:=}\frac{1}{2}e^{-z}(-1-3z)+c_1;$$
$$g[\mathrm{z\_}]{:=}z+\frac{z^2}{2}-\mathrm{Exp}[-z]*f[-z];$$
$$\mathrm{Print}[\text{“f[z] = ”}, f[z]];$$
$$\mathrm{Print}[\text{“g[z] = ”}, g[z]];$$

$$\mathrm{f[z]} = \tfrac{1}{2}e^{-z}(-1-3z)+c_1$$
$$\mathrm{g[z]} = z+\tfrac{z^2}{2}-e^{-z}\left(\tfrac{1}{2}e^{z}(-1+3z)+c_1\right)$$

Выпишем решение задачи Коши:

Print["u[x, y] = ", Simplify[$u[x,y]$]]

u[x, y] = $\frac{1}{2}e^{-2y}\left(-1-3x-3y+e^{2y}(1+x-y-4xy)\right)$

Осуществим проверку полученного решения:

$$\boldsymbol{u[\mathrm{x\_,y\_}]:=\frac{1}{2}e^{-2y}\left(-1-3x-3y+e^{2y}(1+x-y-4xy)\right);}$$

Print ["∂_y u[x, y] = ",$\partial_y u[x,y]$]

$$\partial_y \text{ u[x, y]} = -e^{-2y}\left(-1-3x-3y+e^{2y}(1+x-y-4xy)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-2y}\left(-3+e^{2y}(-1-4x)+2e^{2y}(1+x-y-4xy)\right)$$

$$\boldsymbol{u_2[\mathrm{x\_,y\_}]:= -e^{-2y}\left(-1-3x-3y+e^{2y}(1+x-y-4xy)\right)+}$$
$$\boldsymbol{+\frac{1}{2}e^{-2y}\left(-3+e^{2y}(-1-4x)+2e^{2y}(1+x-y-4xy)\right);}$$

Print[FullSimplify[$u[x$,y0]]," = ",$\varphi[x]$]

$-x = -x$

Print [FullSimplify [$u_2[x$,y0]] ," = ",$\psi[x]$]

$-1+x = -1+x$

Print [FullSimplify [$a_{11}*\partial_{x,x}u[x,y]+a_{12}\partial_{x,y}u[x,y]+a_{22}*\partial_{y,y}u[x,y]+$
$+b_1*\partial_x u[x,y]+b_2*\partial_y u[x,y]+c*u[x,y]$] ," = ", f1] ;

$4(x+y) = 4(x+y)$

Проверка осуществлена успешно, следовательно решение получено верно.

ЗАДАНИЯ

Задания 4.1 – 4.24. Решить задачи Коши на плоскости

4.1 $y\,u_{xx}+(x-y)\,u_{xy}+x\,u_{yy}+u_x+u_y=0, \quad 0<x<y,$
$u(0,y)=0, \quad u_x(0,y)=y^7.$

4.2 $y\,u_{xx}+(x-y)\,u_{xy}-x\,u_{yy}-u_x+u_y=0, \quad x+y>0,$
$u(x,0)=x^6, \quad u_y(x,0)=3x^5.$

4.3 $y\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + x\,u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y < x,\ x \in \mathbb{R},$
$u(0,y) = y^4, \quad u_x(0,y) = -2y^3.$

4.4 $y\,u_{xx} - y^2\,u_{yy} - y\,u_y = 0, \quad y > 0,\ x \in \mathbb{R},$
$u(x,1) = 0, \quad u_y(x,1) = 3x^2.$

4.5 $x^2\,u_{xx} - y^2\,u_{yy} + x\,u_x - y\,u_y = 0, \quad y > 1,\ x > 1,$
$u(x,1) = \operatorname{ch} x, \quad u_x(x,1) = \sqrt{x}.$

4.6 $x\,u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{1}{2}\,u_x = 0, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R},$
$u(x,1) = 0, \quad u_y(x,1) = e^{-\sqrt{x}}.$

4.7 $x\,u_{xx} - y\,u_{yy} + \dfrac{1}{2}\,(u_x - u_y) = 0, \quad x > 1,\ y > 1,$
$u(1,y) = 2\cos(\sqrt{y})e^{1-\sqrt{y}}, \quad u_y(x,1) = \cos(\sqrt{y})e^{1-\sqrt{y}}.$

4.8 $x\,u_{xx} - y\,u_{yy} + \dfrac{1}{2}\,(u_x - u_y) = 0, \quad x > 1,\ y > 1,$
$u(x,1) = e^{-\sqrt{x}}, \quad u_y(x,1) = 3x.$

4.9 $u_{xx} - 2\cos x + y\,u_{xy} - \sin^2 x\,u_{yy} - u_x + (1 + \sin x + \cos x)u_y = 0,$
$u(0,y) = e^y, \quad u_x(0,y) = e^y.$

4.10 $x\,u_{xx} - y\,u_{yy} + \big(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\big)\,u_x - \big(\sqrt{y} - \dfrac{1}{2}\big)\,u_y = 0,$
$u(1,y) = 2\operatorname{sh}\sqrt{y}, \quad u_x(1,y) = 0,\ x > 0,\ y > 0,.$

4.11 $x\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + y\,u_{yy} = 0, \quad 0 < x < y,$
$u(0,y) = -y, \quad u_x(0,y) = 1.$

4.12 $x\,u_{xx} + (x-y)\,u_{xy} - x\,u_{yy} - \dfrac{3}{2}\,(u_x - u_y) = 0,$
$u(x,0) = 2x\sqrt{x}, \quad u_y(x,0) = 2\sqrt{x},\ -x < y < x < \ x > 0.$

4.13 $x\,u_{xx} - u_{yy} - \dfrac{1}{2}\,u_x = 0, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R},$
$u(x,0) = 4x, \quad u_y(x,0) = 1.$

4.14 $x\,u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{3}{2}\,u_x = 0, \quad x > 1,\ y \in \mathbb{R},$
$u(1,y) = 4 + y^2, \quad u_x(1,y) = \dfrac{1}{2}(4 - y^2).$

4.15 $u_{xx} - \operatorname{sh} x\,u_{yy} - \operatorname{cth} x\,u_x - 2\operatorname{th}^2 x\,u = 0, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R},$
$u(x,0) = 1, \quad u_y(x,0) = 3\operatorname{ch} x.$

4.16 $x\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + y\,u_{yy} = 0, \quad x > 0,$

$u\big(x, \dfrac{1}{x}\big) = x^3, \quad u_x\big(x, \dfrac{1}{x}\big) = 2x^2.$

4.17 $u_{xx} + 2(1+2x)\,u_{xy} + 4x(1+x)\,u_{yy} + 2\,u_y = 0, \quad y \in \mathbb{R},$

$u(0,y) = y, \quad u_x(0,y) = 2.$

4.18 $u_{xx} + 2\cos x\,u_{xy} - \sin^2 x\,u_{yy} - \sin x\,u_y = 0, \quad y \in \mathbb{R},$

$u(x, \sin x) = x + \cos x, \quad u_y(x, \sin x) = \sin x.$

4.19 $u_{xx} - 2\sin x\,u_{xy} - (3 + \cos^2 x\,u_{yy} - \cos x\,u_y = 0, \quad y \in \mathbb{R},$

$u(x, \cos x) = \sin x, \quad u_y(x, \cos x) = \dfrac{1}{2}\,e^x.$

4.20 $e^y\,u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad y \in \mathbb{R},$

$u(x,0) = -\dfrac{x^2}{2}, \quad u_y(x,0) = -\sin x.$

4.21 $u_{xx} - 2\sin x\,u_{xy} - (3 + \cos^2 x)\,u_{yy} +$

$+\,u_x + (2 - \sin x - \cos x)\,u_y = 0,$

$u(x, \cos x) = 0, \quad u_y(x, \cos x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos x.$

4.22 $u_{xx} + 2\sin x\,u_{xy} - \cos^2 x\,u_{yy} + u_x + (1 + \sin x + \cos x)\,u_y = 0,$

$u(x, -\cos x) = 1 + 2\sin x, \quad u_y(x, -\cos x) = \sin x.$

4.23 $u_{xx} + 2\cos x\,u_{xy} - \sin^2 x\,u_{yy} + u_x + (1 + \cos x - \sin x)\,u_y = 0,$

$u(x, \sin x) = \cos x, \quad u_y(x, \sin x) = \sin x.$

4.24 $e^y\,u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}, \quad y \in \mathbb{R},$

$u(x,0) = \sin x, \quad u_y(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Задания 4.25 – 4.33. Решить задачи Коши на плоскости

4.25 $7\,u_{xx} - 2\,u_{xy} - 5\,u_{yy} - 12\,u_x + 12\,u_y = 0,$

$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -2x\},\ \mathbf{l} -$ нормаль к $L, \mathbf{l} = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y,$

$u\big|_L = xe^{-x}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-x}.$

4.26 $3\,u_{xx} - u_{xy} - 2\,u_{yy} + 2\sqrt{3}\,u_x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,u_y - u = 0,$

$L = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \dfrac{x}{3}\Big\},\ \mathbf{l} -$ нормаль к $L,\ (\mathbf{l},\mathbf{e}_y) > 0,$

$u\big|_L = xe^{-x}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-x}.$

4.27 $7\,u_{xx}-2\,u_{xy}-5\,u_{yy}-12\,u_x+12\,u_y=0,$

$L=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=\dfrac{x}{3}\Big\},$ $\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $(\mathbf{l},\mathbf{e}_y)>0,$

$u\big|_L=\sqrt{10}x^2e^{-\frac{x}{\sqrt3}},\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=\Big(\dfrac{x^2}{\sqrt3}+\dfrac{14x}{3}\Big)\,e^{-\frac{x}{\sqrt3}}.$

4.28 $u_{xx}+2\,u_{xy}-8\,u_{yy}-4\,u_x+2\,u_y+3\,u=0,$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=4x\},$ $\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $(\mathbf{l},\mathbf{e}_y)>0,$

$u\big|_L=9xe^{3x},\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=-\dfrac{4}{17}\,(3x+1)\,e^{3x}.$

4.29 $u_{xx}+2\,u_{xy}-8\,u_{yy}-4\,u_x+2\,u_y+3\,u=0,$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=-5x\},$ $\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $\mathbf{l}=\mathbf{e}_x-5\mathbf{e}_y,$

$u\big|_L=6x^2,\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=-\dfrac{12x}{26}.$

4.30 $y\,u_{xx}+2x\,u_{xy}+y\,u_{yy}-u_y=0,\ x>|y|,\ y\in\mathbb{R},$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2=4(x-1),\ 1<x<2\},$

$\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $(\mathbf{l},\mathbf{e}_x)<0,$

$u\big|_L=2x\big(2x-x-\dfrac{x^3}{3}\big),\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=\dfrac{2(3x^2-4x+2)}{\sqrt{x}}.$

4.31 $y\,u_{xx}+2x\,u_{xy}+y\,u_{yy}-u_y=0,\ x>|y|,\ y\in\mathbb{R},$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2+x^2=2,\ 1<x<\sqrt2\},$

$\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $\mathbf{l}=x\,\mathbf{e}_x+y\,\mathbf{e}_y,$

$u\big|_L=\sqrt2x\big(x^2-1\big)^{\frac32},\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=4x\big(x^2-1\big)^{\frac32}.$

4.32 $y\,u_{xx}+2x\,u_{xy}+y\,u_{yy}-u_y=0,\ x>|y|,\ y\in\mathbb{R},$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=0,\ x>0\},$

$\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $\mathbf{l}=\mathbf{e}_x+3\sqrt7\,\mathbf{e}_y,$

$u\big|_L=8x^4,\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=4x^3.$

4.33 $x^2\,u_{xx}-y^2\,u_{yy}=0,\ x>0,\ y>0,$

$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy=-1,\ x>0\},$

$\mathbf{l}-$ нормаль к $L,$ $\mathbf{l}=\mathbf{e}_y,$

$u\big|_L=x^2+1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=\dfrac{x(x^2+1)}{2}.$

Список литературы

Бицадзе, А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики /А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. — 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 688 с.

Владимиров, В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 288 с.

Горюнов, А.Ф. Методы математической физики в примерах и задачах. В 2 т. Т II. / А.Ф. Горюнов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 722 с.

Емельянов, В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач : учебное пособие для вузов / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 216 с. —- Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/156410.

Козловская, И. С. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальностей 1-31 03 04 «Информатика», 1-98 01 01«Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление специальности 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» / И. С. Козловская ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2021. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/257012.

Палин, В. В. Методы математической физики. Лекционный курс: учебное пособие для вузов, для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям /В. В. Палин, Е. В. Радкевич; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 2-е изд., испр. и доп. — М.: Юрайт, 2021. – 222 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Дайняк Виктор Владимирович
Козловская Инесса Станиславовна
Чеб Елена Сергеевна и др.

ПРАКТИКУМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Методические указания и задания для самостоятельных и лабораторных работ

В шести частях

Часть 1

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Е. С. Чеб*

Подписано в печать 25.01.2024. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,38. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.