Благодарный Артём 3 группа 8 в списке

$3(8+14) \bmod 50 + 1 = 17$

$$\begin{cases} I(y) = \int_0^b (y_x'^2 + y^2 - 4y\sin x)\,dx \\ y(0) = 0 \\ y(b) = d_2 \end{cases}$$

1) Условие Эйлера: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_x} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 4\sin x$

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_x} = (2y'_x)'_x = 2y''_{x^2}$

$2y - 4\sin x - 2y''_{x^2} = 0$

$y''_{x^2} - y + 2\sin x = 0$

$y''_{x^2} - y = -2\sin x$

$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

$y_{o.o.} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad y_r = a\sin x + b\cos x \quad y_r' = a\cos x - b\sin x$

$y_r'' = -a\sin x - b\cos x$

$-a\sin x - b\cos x - a\sin x - b\cos x = -2\sin x$

$a = 1$

$\bar{y}_r = \sin x$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(b) = C_1 e^b + C_2 e^{-b} + \sin b = d_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_2(e^{-b} - e^b) = d_2 - \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2 = \dfrac{d_2 - \sin b}{e^{-b} - e^{b}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \dfrac{\sin d - d_2}{e^{-b} - e^{b}} \\ c_2 = \dfrac{d_2 - \sin b}{e^{-b} - e^{b}} \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{\sin b - d_2}{e^{-b} - e^{b}}\right) \cdot e^{x} + \left(\frac{d_2 - \sin b}{e^{-b} - e^{b}}\right) e^{-x} + \sin x$$

2) Условие Лежандра - Клепша

$$\frac{\partial^2 F}{\partial {y'_x}^2} = 2 > 0$$

3) Уравнение Якоби

$h(0) = 0 \quad a(x) = 2 \quad b(x) = 0 \quad c(x) = 0 - 2 = -2$

$2 \cdot h''_{x^2} - 2h = 0$

$h''_{x^2} - h = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$h(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow h = c_1(e^{x} - e^{-x})$

При $c_1 \neq 0$: $e^{x} - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ при $c_1 \neq 0$ и $b \neq 0$, то нигде на отрезке $[0; b]$ в нуль не обращается $\Rightarrow$ выполнено условие Якоби $\Rightarrow$ экстремаль $y(x) = \left(\frac{\sin b - d_2}{e^{-b} - e^{b}}\right) e^{x} + \left(\frac{d_2 - \sin b}{e^{-b} - e^{b}}\right) e^{-x} + \sin(x)$ - слабая минималь