Благодерний Артём 3 группа 8 в списке

Из 7 и 9 задач составить двойственную и записать решение.

Задача 7

$-x_1+4x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leq 12 \\ -x_1+2x_2 \geq -4 \\ x_1+x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

$12y_1-4y_2+y_3 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1-y_2+y_3 \geq -1 \\ 3y_1+2y_2+y_3 = 4 \end{cases}$$

$y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3 \leq 0$

Перейдем к каноническому виду:

$-x_1+4x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=12 \\ -x_1+2x_2-x_4=-4 \\ x_1+x_2-x_5=1 \end{cases}$$

$\frac{36}{7} \geq x_1 \geq 0$
$4 \geq x_2 \geq -1$
$x_3 \geq 0$
$x_4 \geq 0$
$x_5 \geq 0$

$d^* = \begin{pmatrix} \frac{36}{7} \\ 4 \end{pmatrix}$

$d_* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$12y_1-4y_2+y_3+\frac{36}{7}w_1+4w_2 -$

$-(-v_2) \to min$

$12y_1-4y_2+y_3+\frac{36}{7}w_1+4w_2+v_2 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1-y_2+y_3+w_1-v_1=-1 \\ 3y_1+2y_2+y_3+w_2-v_2=4 \\ y_1-v_3=0 \\ -y_2-v_4=0 \\ -y_3-v_5=0 \end{cases}$$

$w_i \geq 0 \quad v_j \geq 0 \quad i=\overline{1,2} \quad j=\overline{1,5}$

Ранее было получено решение $x=(0,4,0,12,3)$

$J_Б=\{2,4,5\}$

$A'_Б u = c$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = -1 - (2 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} < 0 \quad x_1 = d_* \ +$

$\Delta_3 = 0 - (1 \ 0 \ 0)\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} < 0 \quad x_3 = d_* \ +$

Исходя из алгоритма построения плана двойственной задачи:

$y_1 = \frac{4}{3} \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0$

$w_1 = 0 \quad w_2 = 0$

$v_1 = \left(\frac{11}{3}\right) \quad v_2 = (0) \quad v_3 = \left(\frac{4}{3}\right) \quad v_4 = 0 \quad v_5 = 0$

Теперь по min:

$-x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$

$12y_1 - 4y_2 + y_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \le -1 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \end{cases}$$

$y_1 \le 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$

Перейдём к каноническому виду:

$x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$0 \le x_1 \le \frac{36}{7}$

$-1 \le x_2 \le 4$

$0 \le x_3$

$0 \le x_4$

$0 \le x_5$

$12y_1 - 4y_1 + y_3 + \frac{36}{7}w_1 + 4w_2 - v_2 \to min$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + w_1 - v_1 = 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + w_2 - v_2 = -4 \\ y_1 - v_3 = 0 \\ y_2 - v_4 = 0 \\ y_3 - v_5 = 0 \end{cases}$$

$w_i \geq 0 \quad v_j \geq 0 \quad i = \overline{1,2} \quad j = \overline{1,5}$

Ранее было получено решение $x = (2, -1, 11, 0, 0)$

$J_Б = \{1, 2, 3\}$

$A'_Б u = c$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\Delta_4 = 0 - (0\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{5}{3} < 0 \Rightarrow x_4 = d_* \ +$

$\Delta_5 = 0 - (0\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x_5 = d_* \ +$

Исходя из алгоритма построения плана двойственной задачи:

$y_1 = 0 \quad y_2 = -\frac{5}{3} \quad y_3 = -\frac{2}{3}$

$w_1 = 0 \quad w_2 = 0 \quad v = \left(0\ 0\ 0\ \frac{5}{3}\ \frac{2}{3}\right).$

Задача

$2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -8 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$-2 \le x_1 \le 3$
$1 \le x_2 \le 4$
$0 \le x_3 \le 6$
$-2 \le x_4 \le 4$
$0 \le x_5 \le 5$

Двойственная

$-8y_1 + 2y_2 + y_3 + 2v_1 + v_2 + 2v_4 +$

$+ 3w_1 + 4w_2 + 6w_3 + 4w_4 + 5w_5 \to min$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 + w_1 - v_1 = 2 \\ y_2 + w_2 - v_2 = 1 \\ -2y_1 + y_3 + w_3 - v_3 = 1 \\ 3y_1 - y_2 + w_4 - v_4 = -3 \\ -2y_3 + w_5 - v_5 = 1 \end{cases}$$

$w_i, v_i \ge 0 \quad i = \overline{1,5}$

Ранее был получен план:

$x = (3, \frac{5}{3}, 5, -\frac{1}{3}, 5) \quad J_B = \{2, 3, 4\} \quad u = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = \frac{10}{3} > 0 \quad \Delta_5 = \frac{5}{3} > 0$

Исходя из алгоритма построения плана двойственной задачи:

$y_1 = -\frac{2}{3} \quad y_2 = 1 \quad y_3 = -\frac{1}{3}$

$w = (\frac{10}{3}, 0, 0, 0, \frac{5}{3})$

$v = (0, 0, 0, 0, 0)$