

Лабораторная работа №4

Благодарный Артём

5 октября, 2025

Задача 1

Имеется $m = 7$ кандидатов. Дана матрица коэффициентов компетентности (оценок близости мнений) $K = (k_{ij})$ размера 7×7 (строка i — оценки, выставленные кандидатом i другим кандидатам j):

$$K = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,70 & 0,90 & 0,70 & 0,80 & 0,70 & 0,80 \\ 0,60 & 0,90 & 0,70 & 0,80 & 0,70 & 0,90 & 0,70 \\ 0,80 & 0,60 & 0,95 & 0,60 & 0,80 & 0,80 & 0,70 \\ 0,70 & 0,90 & 0,50 & 0,90 & 0,80 & 0,90 & 0,50 \\ 0,90 & 0,70 & 0,60 & 0,70 & 0,90 & 0,70 & 0,80 \\ 0,80 & 0,90 & 0,60 & 0,90 & 0,60 & 0,90 & 0,60 \\ 0,50 & 0,60 & 0,80 & 0,80 & 0,70 & 0,70 & 0,90 \end{pmatrix}.$$

Решение

По алгоритму для каждого кандидата j вычисляется средний коэффициент компетентности, оценённый всеми кандидатами:

$$\bar{k}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m k_{ij}, \quad j = 1, \dots, 7.$$

Вычисления дают (с точностью до 6 знаков):

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \frac{0,95 + 0,60 + 0,80 + 0,70 + 0,90 + 0,80 + 0,50}{7} = 0,750000, \\ \bar{k}_2 &= \frac{0,70 + 0,90 + 0,60 + 0,90 + 0,70 + 0,90 + 0,60}{7} \approx 0,75714286, \\ \bar{k}_3 &= \frac{0,90 + 0,70 + 0,95 + 0,50 + 0,60 + 0,60 + 0,80}{7} \approx 0,72142857, \\ \bar{k}_4 &= \frac{0,70 + 0,80 + 0,60 + 0,90 + 0,70 + 0,90 + 0,80}{7} \approx 0,77142857, \\ \bar{k}_5 &= \frac{0,80 + 0,70 + 0,80 + 0,80 + 0,90 + 0,60 + 0,70}{7} \approx 0,75714286, \\ \bar{k}_6 &= \frac{0,70 + 0,90 + 0,80 + 0,90 + 0,70 + 0,90 + 0,70}{7} = 0,80000000, \\ \bar{k}_7 &= \frac{0,80 + 0,70 + 0,70 + 0,50 + 0,80 + 0,60 + 0,90}{7} \approx 0,71428571. \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{k} \approx (0,7500, 0,7571429, 0,7214286, 0,7714286, 0,7571429, 0,8000, 0,7142857).$$

Условие отбора: кандидат j отбирается, если $\bar{k}_j \geq \delta$.

Порог $\delta = 0,6$. Поскольку все значения \bar{k}_j выше 0,6, по данному критерию **все 7 кандидатов отобраны**:

Отобранные кандидаты: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

В алгоритме дана формула суммарной дисперсии

$$D(k) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (k_i - k_{ij})^2,$$

где k_i — средний коэффициент компетентности для i -го кандидата (т.е. среднее по строке i):

$$k_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Сначала вычислим средние по строкам k_i :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{0,95 + 0,70 + 0,90 + 0,70 + 0,80 + 0,70 + 0,80}{7} \approx 0,79285714, \\ k_2 &= \frac{0,60 + 0,90 + 0,70 + 0,80 + 0,70 + 0,90 + 0,70}{7} \approx 0,75714286, \\ k_3 &= \frac{0,80 + 0,60 + 0,95 + 0,60 + 0,80 + 0,80 + 0,70}{7} \approx 0,75000000, \\ k_4 &= \frac{0,70 + 0,90 + 0,50 + 0,90 + 0,80 + 0,90 + 0,50}{7} \approx 0,74285714, \\ k_5 &= \frac{0,90 + 0,70 + 0,60 + 0,70 + 0,90 + 0,70 + 0,80}{7} \approx 0,75714286, \\ k_6 &= \frac{0,80 + 0,90 + 0,60 + 0,90 + 0,60 + 0,90 + 0,60}{7} \approx 0,75714286, \\ k_7 &= \frac{0,50 + 0,60 + 0,80 + 0,80 + 0,70 + 0,70 + 0,90}{7} \approx 0,71428571. \end{aligned}$$

Теперь подставляем в формулу $D(k)$. После прямого суммирования всех квадратов отклонений получаем (с точностью до 8 знаков):

$$D(k) \approx 0,01539359.$$

Величина $D(k)$ характеризует рассеяние (несогласованность) в оценках компетентности экспертов (по определению алгоритма). Чем ближе $D(k)$ к нулю, тем выше единодушие.

Значение $D(k) \approx 0,0154$ — достаточно малое, поэтому по критерию данного алгоритма можно заключить, что мнения (оценки компетентности) кандидатов относительно друг друга демонстрируют **высокую согласованность**. В сочетании с тем, что все средние столбцовые оценки \bar{k}_j превосходят порог $\delta = 0,6$, это даёт основание для отбора **всех семи кандидатов** в группу экспертов при данном пороге.

Задача 2

Условие

Дано 5 экспертов и 7 факторов e_1, \dots, e_7 . Матрица рангов (строка = эксперт, столбец = фактор):

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \\ 4 & 2,5 & 2,5 & 6 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5,5 & 7 & 5,5 & 1 \\ 5 & 2,5 & 2,5 & 4 & 6,5 & 6,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя метод непосредственного ранжирования, построить рейтинговый ряд факторов e . Определить дисперсию для оценивания единодушия экспертов.

Решение

Для каждого эксперта должно выполняться

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Проверка сумм строк:

$$\sum_j r_{1j} = 28, \quad \sum_j r_{2j} = 28, \quad \dots, \quad \sum_j r_{5j} = 28.$$

Условие выполнено (каждый эксперт использовал ранги корректно, связанные ранги уже учтены в исходных данных).

В таблице есть связанные ранги (например, 2,5), они уже заданы как средние ранги — дополнительных преобразований не требуется.

Средний ранг каждого фактора

$$\bar{r}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{ij}, \quad j = 1, \dots, 7.$$

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \frac{5 + 4 + 4 + 4 + 5}{5} = 4,4, \\ \bar{r}_2 &= \frac{2 + 2,5 + 3 + 2 + 2,5}{5} = 2,4, \\ \bar{r}_3 &= \frac{3 + 2,5 + 2 + 3 + 2,5}{5} = 2,6, \\ \bar{r}_4 &= \frac{4 + 6 + 6 + 5,5 + 4}{5} = 5,1, \\ \bar{r}_5 &= \frac{7 + 7 + 7 + 7 + 6,5}{5} = 6,9, \\ \bar{r}_6 &= \frac{6 + 5 + 5 + 5,5 + 6,5}{5} = 5,6, \\ \bar{r}_7 &= \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1}{5} = 1,0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{r} = (4,4, 2,4, 2,6, 5,1, 6,9, 5,6, 1,0).$$

Ранги сортируем по возрастанию среднего ранга (меньшее значение = более высокий приоритет).

Порядок факторов по убыванию приоритета:

$$e_7 \succ e_2 \succ e_3 \succ e_1 \succ e_4 \succ e_6 \succ e_5.$$

(То есть лучший — e_7 с $\bar{r}_7 = 1,0$, наихудший — e_5 с $\bar{r}_5 = 6,9$.)

По алгоритму дисперсия определяется как

$$D(r) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{r}_j - r_{ij})^2.$$

Вычислим сумму квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 (\bar{r}_j - r_{ij})^2 = S.$$

Подставляя значения, получаем

$$S \approx 8,700.$$

Тогда

$$D(r) = \frac{S}{mn} = \frac{8,700}{5 \cdot 7} \approx 0,2485714286.$$

Величина $D(r)$ характеризует степень расхождения мнений экспертов. Чем ближе $D(r)$ к нулю, тем более единодушны мнения.

Значение:

$$D(r) \approx 0,24857.$$

Это означает умеренное рассеяние мнений. Конкретно:

- Факторы e_7, e_2, e_3 имеют явно лучшие (меньшие) средние ранги и меньшую вариативность — высокая согласованность по их приоритету.
- Факторы e_4, e_6, e_5 находятся в зоне меньшего приоритета и демонстрируют большие расхождения (в частности e_5 — наихудший по средней оценке).

Задача 3

условие

Даны три матрицы парных сравнений (каждая 6×6) от экспертов Э1, Э2, Э3. Элементы матриц принимают значения 1 (который предпочитает $e_k \succ e_j$), 0 (эквивалентность) или -1 ($e_k \prec e_j$).

Эксперт 1 (Э1)

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эксперт 2 (Э2)

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эксперт 3 (Э3)

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число экспертов $m = 3$, число факторов $n = 6$. Порог $\delta = 0,5$. Используя метод парных сравнений, построить рейтинговый ряд факторов e . Определить дисперсию. Порог равен $\frac{1}{2}$.

Решение

Вычисляем среднюю матрицу

$$\bar{B} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m B^{(i)}.$$

Прямым усреднением получаем (в дробном виде и с округлением до трёх знаков):

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{1}{3}(B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & -0.333 & 0.333 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 1.000 & -1.000 & 1.000 \\ -1.000 & -0.333 & 0 & -1.000 & 0.333 & 1.000 \\ -1.000 & -1.000 & 1.000 & 0 & -0.333 & 0.333 \\ -0.333 & 1.000 & -0.333 & 0.333 & 0 & 0.333 \\ -1.000 & -1.000 & -1.000 & -0.333 & -0.333 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Правило преобразования:

$$b'_{kj} = \begin{cases} 1, & b_{kj} \geq \delta, \\ 0, & |b_{kj}| < \delta, \\ -1, & b_{kj} \leq -\delta. \end{cases}$$

Порог $\delta = 0,5$. Применяя правило к \bar{B} получаем матрицу явных предпочтений B' :

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Замечание: именно сравниваем элементы \bar{b}_{kj} с $\pm 0,5$; элементы с абсолютной величиной меньше 0.5 интерпретируются как «эквивалентность».)

Для каждого фактора e_k подсчитываем сумму элементов его строки $s_k = \sum_{j=1}^n b'_{kj}$. Чем больше s_k , тем выше ранг фактора.

Суммы строк матрицы B' :

$$s = (3, 1, -1, -1, 1, -3).$$

Упорядочим факторы по убыванию суммы:

$$e_1 (s_1 = 3) \succ e_2 (s_2 = 1) = e_5 (s_5 = 1) \succ e_3 (s_3 = -1) = e_4 (s_4 = -1) \succ e_6 (s_6 = -3).$$

Запишем рейтинговый ряд, учитывая равенства:

$$\boxed{e_1 \succ (e_2 \sim e_5) \succ (e_3 \sim e_4) \succ e_6}.$$

(Если требуется строгий порядок, можно разбирать равенства дополнительными критериями, например, по сумме абсолютных значений элементов строки или по исходным средним \bar{b}_{kj} .)

Формула, заданная в алгоритме:

$$D(b) = \frac{1}{m n^2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{b}_{kj} - b_{kj}^{(i)})^2,$$

где \bar{b}_{kj} — элемент средней матрицы \bar{B} , $b_{kj}^{(i)}$ — элемент матрицы i -го эксперта.

Подставляя значения (прямое суммирование квадратов отклонений по всем трем экспертам и всем парам), получаем

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\bar{b}_{kj} - b_{kj}^{(i)})^2 = 37\frac{1}{3} = \frac{112}{3}.$$

Тогда

$$D(b) = \frac{\frac{112}{3}}{m n^2} = \frac{112/3}{3 \cdot 6^2} = \frac{112}{3} \cdot \frac{1}{108} = \frac{112}{324} \approx 0,3456790123.$$

Округлённо:

$$D(b) \approx 0,34568.$$

- Средняя матрица \bar{B} отражает компромиссные предпочтения экспертов; её затем порогуюем при $\delta = 0,5$.
- Рейтинг факторов по сумме строк матрицы явных предпочтений B' :

$$e_1 \succ (e_2 \sim e_5) \succ (e_3 \sim e_4) \succ e_6.$$

То есть наибольшие предпочтения — у фактора e_1 , наименьшие — у e_6 ; факторы (e_2, e_5) и (e_3, e_4) образуют пары с равными суммами и потому равнозначны в данном упрощённом рейтинге.

- Дисперсия $D(b) \approx 0,34568$ характеризует степень разногласий между экспертами: чем меньше $D(b)$, тем сильнее единодушие. Наблюдаемое значение указывает на умеренный уровень расхождений в мнениях (не крайне высокий разброс, но и не очень малое расхождение).