Благодарин Артём 3 группа 3 курс 8 в списке

$(3(8+7) \bmod 50)+1 = 46$

$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \rightarrow extr$

$2x_3^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2 - 1 \leq 0$

Обобщённая функция Лагранжа:

$F(x,\lambda) = \lambda_0(x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + \lambda(2x_3^2 + 3x_1^2 +$
$+ 6x_2^2 - 1)$

Неотрицательность: $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda \geq 0$

Стационарность:

$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,\lambda) = \lambda_0(2x_1 - 4x_2 - 2x_3) + \lambda(6x_1) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x,\lambda) = \lambda_0(8x_2 - 4x_1 - 2x_3) + \lambda(12x_2) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_3}(x,\lambda) = \lambda_0(-2x_1 - 2x_2) + \lambda(4x_3) = 0$

Дополняющая нежёсткость: $\lambda(2x_3^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2 - 1) = 0$

При $\lambda_0 = 0$:

$6x_1\lambda = 0$ (1)

$12x_2\lambda = 0$ (2)

$4x_3\lambda = 0$ (3)

$\lambda(2x_3^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2 - 1) = 0$ (4)

$\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и при этом $\lambda = 0 \Rightarrow$ противоречие, что $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ одновременно $\Rightarrow$ переходим к классическому правилу:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6\lambda x_1 = 0 \\ 8x_2 - 4x_1 - 2x_3 + 12\lambda x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4\lambda x_3 = 0 \\ \lambda(2x_3^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2 - 1)\lambda = 0 \end{cases}$$

Получаем решения системы - планы:

$(0, 0, 0, 0)$ (1)
$(-1/3 \ \ -1/6 \ \ -1/2 \ \ 1/2)$ (2)
$(-1/3 \ \ -1/6 \ \ 1/2 \ \ -1/2)$ (3)
$(-1/3 \ \ 1/3 \ \ 0 \ \ -1)$ (4)
$(1/3 \ \ -1/3 \ \ 0 \ \ -1)$ (5)
$(1/3 \ \ 1/6 \ \ -1/2 \ \ -1/2)$ (6)
$(1/3 \ \ 1/6 \ \ 1/2 \ \ 1/2)$ (7)

Первый план $(0, 0, 0, 0)$:

g неактивно $\Rightarrow$ ограничений на l нет

Второй - седьмой план:

g активна $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} l = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x} = (6x_1 \ \ 12x_2 \ \ 4x_3)$

2) $(-2 \ \ -2 \ \ -2) \Rightarrow l_1 + l_2 + l_3 = 0$
3) $(-2 \ \ -2 \ \ 2) \Rightarrow l_1 + l_2 - l_3 = 0$
4) $(-2 \ \ 4 \ \ 0) \Rightarrow l_1 - 2l_2 = 0$
5) $(2 \ \ -4 \ \ 0) \Rightarrow l_1 - 2l_2 = 0$
6) $(2 \ \ 2 \ \ -2) \Rightarrow l_1 + l_2 - l_3 = 0$
7) $(2 \ \ 2 \ \ 2) \Rightarrow l_1 + l_2 + l_3 = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = 2l_1^2 + 8l_2^2 - 8l_1l_2 - 4l_3l_1 - 4l_3l_2 =$$

$$= 2(l_1 - 2l_2)^2 - 4l_3(l_1 + l_2) > 0$$

1) $(0,0,0,0)$: Виконується не $\forall l \Rightarrow$ не extr

2) $(-\frac{1}{3}\ -\frac{1}{6}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})$:

$2(l_1 - 2l_2)^2 + 4l_3^2 > 0 \Rightarrow (2)$ – т.к. $\lambda = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \min$

3) $(-\frac{1}{3}\ -\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2})$:

$$2(l_1 - 2l_2)^2 - 4l_3^2 = 2\left((l_1 - 2l_2)^2 - l_3^2\right) - 2l_3^2 =$$

$$= 2(l_1 - 2l_2 - l_3)(l_1 - 2l_3 + l_3) - 2l_3^2 = [l_1 = l_3 - l_2] =$$

$$= 2(-3l_2)(2l_3 - 3l_2) - 2l_3^2 = -6l_2(2l_3 - 3l_2) - 2l_3^2 =$$

$$= -12l_2l_3 + 18l_2^2 - 2l_3^2 = -2(l_3^2 + 6l_2l_3 - 9l_2^2)$$

Виконується не $\forall l \Rightarrow$ не extr

4) $(-\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3}\ \ 0\ -1)$

$-4l_3(l_1 + l_2) = [l_1 = 2l_2] = -12l_3l_2 \Rightarrow$

> 0 виконується не $\forall l \Rightarrow$ не extr

5) $(\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ \ 0\ -1)$

аналогічно 4) не виконується $\forall l \Rightarrow$ не extr

6) $(\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{6}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2})$

аналогічно 3) не виконується $\forall l \Rightarrow$ не extr

7) $(1/3 \quad 1/6 \quad 1/2 \quad 1/2)$

аналогично 4) выполняется $\forall i \Rightarrow$

т.к. $\lambda = \frac{1}{2} > 0$, то план яв. локально оптимальным-минимумом по теореме 4 (достаточное условие оптимальн.)

$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$