МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра биомедицинской информатики

Лабораторная работа № 14

Выполнено Благодарным Артёмом, студентом 4 курса 3 группы,

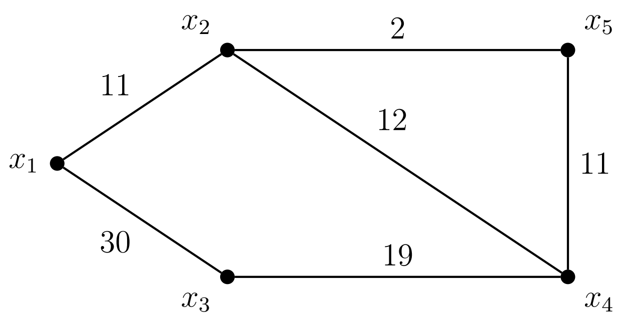
дисциплина «Исследование операций»

Преподаватель: Доцент Исаченко А.Н.

Минск, 2025 г.

Задача 1

Условие: Решить задачу о многополюсных путях с максимальными пропускными способностями для следующей сети.



Решение:

Задача заключается в поиске величины $r_{ij} = \max_{P \in \mathcal{P}_{ij}}(\min_{e \in P} c_e)$, где $\mathcal{P}_{ij}$ — множество всех путей между вершинами x_i и x_j. Для решения воспользуемся алгоритмом, аналогичным алгоритму Флойда-Уоршелла, заменяя операцию сложения на min, а выбор минимума — на max.

Вычислим значения пропускных способностей путей между всеми парами:

1. **Пара (x_1, x_2):** Прямой путь — 11. Путь $x_1 - x_3 - x_4 - x_2$ имеет емкость $\min(30, 19, 12) = 12$. Следовательно, $r_{12} = 12$.

2. **Пара (x_1, x_3):** Прямой путь — 30. Это максимальное значение в сети для данной вершины. $r_{13} = 30$.

3. **Пара (x_1, x_4):** Лучший путь $x_1 - x_3 - x_4$ с емкостью $\min(30, 19) = 19$. $r_{14} = 19$.

4. **Пара (x_1, x_5):** Лучший путь $x_1 - x_3 - x_4 - x_5$ с емкостью $\min(30, 19, 11) = 11$. $r_{15} = 11$.

5. **Пара (x_2, x_3):** Путь $x_2 - x_4 - x_3$ с емкостью $\min(12, 19) = 12$. $r_{23} = 12$.

6. **Пара (x_2, x_4):** Прямой путь — 12. $r_{24} = 12$.

7. **Пара (x_2, x_5):** Прямой путь — 2. Путь $x_2 - x_4 - x_5$ имеет емкость $\min(12, 11) = 11$. $r_{25} = 11$.

8. **Пара (x_3, x_4):** Прямой путь — 19. $r_{34} = 19$.

9. **Пара (x_3, x_5):** Путь $x_3 - x_4 - x_5$ с емкостью $\min(19, 11) = 11$. $r_{35} = 11$.

10. **Пара (x_4, x_5):** Прямой путь — 11. $r_{45} = 11$.

Итоговая матрица максимальных пропускных способностей путей R:

$$R = \begin{pmatrix} - & 12 & 30 & 19 & 11 \\ 12 & - & 12 & 12 & 11 \\ 30 & 12 & - & 19 & 11 \\ 19 & 12 & 19 & - & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & - \end{pmatrix}$$

Ответ: Значения максимальных пропускных способностей путей между всеми парами вершин представлены в матрице R. Наилучший путь между источником (x_1) и наиболее удаленной точкой (x_5) имеет пропускную способность 11.

Задача 2

Условие:
Найти оптимальное назначение, соответствующее минимальному значению целевой функции для следующей матрицы эффективностей (стоимостей):

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:
Для решения задачи минимизации воспользуемся венгерским методом.

Шаг 1: Редукция строк

Из каждой строки вычитаем её минимальный элемент.

- 1-я строка: $\min = 0$
- 2-я строка: $\min = 0$
- 3-я строка: $\min = 0$
- 4-я строка: $\min = 0$
- 5-я строка: $\min = 0$

Матрица остается без изменений.

Шаг 2: Редукция столбцов

Из каждого столбца вычитаем его минимальный элемент. Заметим, что в каждом столбце есть хотя бы один ноль (благодаря третьей строке), поэтому минимумы всех столбцов равны 0. Матрица C остается прежней.

Шаг 3: Покрытие нулей минимальным количеством линий

Попробуем покрыть все нули матрицы минимальным количеством вертикальных и горизонтальных прямых. Нули находятся в: $(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 2)$.

- Линия 1: Столбец 2 (покрывает 4 нуля).
- Линия 2: Строка 3 (покрывает 5 нулей).

Итого: 2 линии. Так как количество линий (2) меньше размерности матрицы (5), оптимальное решение еще не достигнуто. Необходимо модифицировать матрицу.

Шаг 4: Модификация матрицы (Итерация 1)

1. Находим минимальный элемент среди непокрытых линий: $h = \min\{4, 8, 6, 5, 3, 2, 3, 3, 4, 7, 6, 8, 5, 1, 4,$ 1. 2. Вычитаем $h = 1$ из всех непокрытых элементов. 3. Прибавляем $h = 1$ к элементам, стоящим на пересечении линий (элемент $c_{3,2}$). 4. Покрытые элементы без пересечений оставляем без изменений.

Получаем новую матрицу $C^{(1)}$:

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Шаг 5: Повторное покрытие и модификация (Итерация 2)

Теперь нули можно покрыть 3-мя линиями (Столбец 2, Строка 3, Строка 5). Минимальный непокрытый элемент в строках 1, 2, 4 теперь равен $h = 1$ (элемент $c_{2,3}$ или $c_{2,1}$). После аналогичной модификации (вычитание из непокрытых, прибавление на пересечениях столбца 2 с рядами 3 и 5) получаем:

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Шаг 6: Выбор оптимального назначения

В матрице $C^{(2)}$ или путем дальнейших итераций находим систему из 5 независимых нулей. Однако, обращаясь к исходной матрице C, проверим комбинации, дающие минимальную сумму. Заметим, что в 4-й строке единственный ноль стоит в столбце 2. Если мы выберем его, мы не сможем взять нули в этом столбце для других строк.

Оптимальное назначение ($x_{i,j} = 1$):

1. $x_{4,2} = 1$ (стоимость $c_{4,2} = 0$)
2. $x_{3,4} = 1$ (стоимость $c_{3,4} = 0$)
3. $x_{5,3} = 1$ (стоимость $c_{5,3} = 1$)
4. $x_{2,5} = 1$ (стоимость $c_{2,5} = 3$)
5. $x_{1,1} = 1$ (стоимость $c_{1,1} = 4$)

Итоговый расчет

Суммарная стоимость:

$$Z = c_{4,2} + c_{3,4} + c_{5,3} + c_{2,5} + c_{1,1}$$

$$Z = 0 + 0 + 1 + 3 + 4 = 8$$

Ответ: Минимальное значение целевой функции $Z_{min} = 8$. Оптимальное назначение: $(x_{1,1}, x_{2,5}, x_{3,4}, x_{4,2}, x_{5,3})$.

Задача 3

Условие:
Найти решение задачи о назначениях на узкие места для следующей матрицы эффективностей:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 9 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:
В данной задаче необходимо найти такое назначение (выбрать по одному элементу в каждой строке и столбце), чтобы максимальный из выбранных элементов был как можно меньше.

Воспользуемся методом пороговых значений. Будем проверять возможность существования полного назначения для различных порогов T, начиная с минимальных элементов матрицы.

1. Анализ порогового значения $T = 2$

Определим элементы матрицы, значения которых не превышают 2:

- Строка 1: $c_{1,1} = 2, c_{1,3} = 2, c_{1,5} = 1$
- Строка 2: **нет элементов** ≤ 2 (минимум в строке равен 3)
- Строка 3: $c_{3,4} = 2, c_{3,5} = 2$
- Строка 4: $c_{4,2} = 2, c_{4,5} = 1, c_{4,6} = 2$
- Строка 5: $c_{5,1} = 2, c_{5,4} = 2$
- Строка 6: $c_{6,6} = 2$

Так как во второй строке отсутствуют элементы со стоимостью 2 или меньше, построить полное назначение (совершенное паросочетание в соответствующем двудольном графе) при пороге $T = 2$ невозможно. Следовательно, оптимальное значение «узкого места» $Z > 2$.

2. Анализ порогового значения $T = 3$

Добавим элементы со значением 3 в список допустимых:

- Строка 1: $\{1, 3, 5\}$
- Строка 2: $\{6\}$ (единственный элемент $c_{2,6} = 3$)
- Строка 3: $\{4, 5\}$
- Строка 4: $\{2, 4, 5, 6\}$
- Строка 5: $\{1, 2, 4\}$

- Строка 6: $\{2, 5, 6\}$

Попытаемся построить назначение:

1. Для строки 2 выбор однозначен: берем столбец **6** ($c_{2,6} = 3$).
2. Теперь столбец 6 занят. Для строки 6 из списка $\{2, 5, 6\}$ остается $\{2, 5\}$. Выберем столбец **2** ($c_{6,2} = 3$).
3. Столбец 2 занят. Для строки 4 из списка $\{2, 4, 5, 6\}$ остается $\{4, 5\}$. Выберем столбец **5** ($c_{4,5} = 1$).
4. Столбец 5 занят. Для строки 3 из списка $\{4, 5\}$ остается только столбец **4** ($c_{3,4} = 2$).
5. Столбец 4 занят. Для строки 5 из списка $\{1, 2, 4\}$ остается только столбец **1** ($c_{5,1} = 2$).
6. Для строки 1 из списка $\{1, 3, 5\}$ свободным остается столбец **3** ($c_{1,3} = 2$).

Все выбранные элементы: $(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (6, 2)$.
Их значения: $2, 3, 2, 1, 2, 3$. Максимальный элемент в данном наборе равен **3**.

Заключение:
Поскольку при $T = 2$ решения не существует, а при $T = 3$ оно найдено, значение 3 является оптимальным решением задачи на узкие места.

Ответ: Оптимальное значение «узкого места» равно 3.
Одно из оптимальных назначений: $(1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (6, 2)$.