Вопрос 1. Вывод уравнения колебаний струны

1. Физическая модель и допущения

Рассматривается тонкая упругая нить (струна) длиной l. Для построения математической модели введем следующие допущения:

- **Малость отклонений:** Струна совершает малые поперечные колебания в одной плоскости (x, u). Углы наклона касательной к оси Ox малы, следовательно, $\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x$, а $\cos\alpha \approx 1$.

- **Абсолютная гибкость:** Струна не оказывает сопротивления изгибу, сила натяжения $\vec{T}$ всегда направлена по касательной к профилю струны.

- **Закон Гука:** Растяжение струны пренебрежимо мало, поэтому модуль силы натяжения $T(x, t)$ можно считать постоянным вдоль струны при малых колебаниях.

2. Применение второго закона Ньютона

Рассмотрим малый элемент струны на отрезке $[x, x + \Delta x]$. Пусть ρ — линейная плотность струны, $u(x, t)$ — отклонение точки x в момент t. Согласно второму закону Ньютона ($\vec{F} = m\vec{a}$), для проекций на ось Ou имеем:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_T + F_{ext} \tag{1}$$

где F_T — проекция сил натяжения, F_{ext} — внешние силы.

Масса элемента: $\Delta m = \int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)d\xi \approx \rho\Delta x$.

Силы натяжения действуют на концах отрезка: в точке x сила $-T(x, t)\sin\alpha_1$, в точке $x + \Delta x$ сила $T(x + \Delta x, t)\sin\alpha_2$. Так как для малых углов $\sin\alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$, суммарная проекция сил натяжения:

$$F_T = T(x + \Delta x, t)\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T(x, t)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \tag{2}$$

Пусть $f(x, t)$ — плотность внешней силы. Тогда $F_{ext} = f(x, t)\Delta x$.

3. Переход к дифференциальному уравнению

Записываем уравнение баланса сил:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}\right) + f(x, t)\Delta x \tag{3}$$

Разделим на Δx и устремим $\Delta x \to 0$:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} + f(x, t) \tag{4}$$

По определению производной:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{5}$$

4. Канонический вид

Разделив на ρ и введя обозначение $a^2 = \frac{T}{\rho}$ (где a — скорость распространения волны), получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}(x,t) \tag{6}$$

где $\tilde{f} = f/\rho$. Это и есть неоднородное волновое уравнение, описывающее колебания струны.

Вопрос 2. Постановка краевых задач для волнового уравнения

Математическая модель процесса (например, колебания струны) считается полной, если задано не только уравнение внутри области, но и состояние системы в начальный момент времени, а также режим на границах.

1. Общее уравнение

Рассмотрим функцию $u(x,t)$, описывающую отклонение в точке $x \in [0,l]$ в момент времени $t > 0$. Неоднородное волновое уравнение имеет вид:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{7}$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$ — физический параметр (скорость), $f(x,t)$ — внешнее воздействие.

2. Начальные условия (Задача Коши)

Определяют состояние системы в момент $t = 0$. Для уравнения второго порядка по времени необходимо два условия:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & \text{(начальное отклонение)} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{(начальная скорость)} \end{cases} \tag{8}$$

3. Граничные (краевые) условия

Описывают физический режим на концах струны ($x = 0$ и $x = l$). В теории ММФ выделяют три основных типа:

I. Граничные условия первого рода (Дирихле) Задают закон движения концов струны. Если концы закреплены неподвижно:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{9}$$

В общем случае: $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$.

II. Граничные условия второго рода (Неймана) Задают значения производной по координате, что физически соответствует воздействию силы на концы. Если концы свободны (сила натяжения в проекции равна нулю):

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0 \tag{10}$$

В общем случае:

$$T u_x|_{x=0} = \nu_1(t) \tag{11}$$

III. Граничные условия третьего рода (Робена) Описывают упругое закрепление концов (по закону Гука). Например, если конец закреплен пружиной с жесткостью k:

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + hu)|_{x=l} = 0 \tag{12}$$

где $h = k/T > 0$.

4. Классификация задач

- **Задача Коши:** Рассматривается для бесконечной струны ($-\infty < x < \infty$), задаются только начальные условия.
- **Краевая задача:** Рассматривается для ограниченной области, задаются только граничные условия (для стационарных состояний).
- **Смешанная задача:** Рассматривается на отрезке $[0, l]$, включает в себя и начальные, и граничные условия.

Вопрос 3. Вывод уравнения теплопроводности

Рассмотрим процесс распространения тепла в твердом теле (стержне). Пусть $u(x,t)$ — температура в точке x в момент времени t.

1. Физические законы

Для вывода используются два основных положения:

1. **Закон Фурье:** Вектор плотности теплового потока $\vec{q}$ пропорционален градиенту температуры:
$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad } u \tag{13}$$
Для одномерного случая: $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$, где k — коэффициент теплопроводности. Знак «минус» означает, что тепло течет от более нагретых слоев к менее нагретым.

2. **Закон сохранения энергии:** Изменение количества тепла в произвольном объеме тела за время Δt равно сумме тепла, прошедшего через границы, и тепла, выделенного внутренними источниками.

2. Математический баланс тепла

Рассмотрим участок стержня $[x_1, x_2]$ с площадью поперечного сечения S. Количество тепла Q, необходимое для изменения температуры этого участка от t до $t + \Delta t$:

$$Q_1 = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S[u(x, t+\Delta t) - u(x,t)]dx \tag{14}$$

где c — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала.

Количество тепла, прошедшее через концы x_1 и x_2 за время Δt:

$$Q_2 = \int_t^{t+\Delta t} S[q(x_1,\tau) - q(x_2,\tau)]d\tau = \int_t^{t+\Delta t}\int_{x_1}^{x_2} S\left(-\frac{\partial q}{\partial x}\right)dxd\tau \tag{15}$$

Количество тепла от внутренних источников с плотностью $f(x,t)$:

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t}\int_{x_1}^{x_2} Sf(x,\tau)dxd\tau \tag{16}$$

Согласно балансу: $Q_1 = Q_2 + Q_3$.

3. Переход к дифференциальному уравнению

Приравнивая выражения и сокращая на S, получаем:

$$\int_{x_1}^{x_2} c\rho[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]dx = \int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f\right]dxd\tau \tag{17}$$

Разделим на Δt и устремим $\Delta t \to 0$, $x_2 - x_1 \to 0$. В силу произвольности интервала интегрирования переходим к дифференциальной форме:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t) \tag{18}$$

4. Канонический вид

Если среда однородна ($c, \rho, k = \text{const}$), уравнение принимает вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(x,t) \tag{19}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — коэффициент **температуропроводности**, а $\tilde{f} = \frac{f}{c\rho}$.

Вопрос 4. Постановка краевых задач для тепловых процессов

Математическая модель тепловых процессов описывает распределение температуры $u(x,t)$ в теле. Для однозначного определения этого процесса необходимо задать само уравнение, начальное состояние и условия на границах.

1. Уравнение теплопроводности

В общем случае для однородного стержня длиной l уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{20}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, $f(x,t)$ — интенсивность внутренних источников тепла.

2. Начальное условие

Поскольку уравнение содержит первую производную по времени, необходимо задать одно начальное условие (распределение температуры в момент $t = 0$):

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{21}$$

3. Граничные условия (Краевые условия)

Задаются на концах стержня ($x = 0$ и $x = l$) и определяют характер теплообмена с окружающей средой.

I тип (Условие Дирихле) Задается значение температуры на границе. Например, если на концах поддерживается постоянная или меняющаяся по закону $\mu(t)$ температура:

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{22}$$

II тип (Условие Неймана) Задается величина теплового потока через границу (согласно закону Фурье $q = -ku_x$). Если конец стержня теплоизолирован, то поток равен нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \tag{23}$$

III тип (Условие Робена) Описывает конвективный теплообмен со средой, температура которой U_{ext}, по закону Ньютона-Рихмана. Поток тепла через границу пропорционален разности температур:

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha(u - U_{ext})\Big|_{\Gamma} \tag{24}$$

Для левого конца ($x = 0$): $u_x - h(u - \mu_1(t)) = 0$.
Для правого конца ($x = l$): $u_x + h(u - \mu_2(t)) = 0$, где $h = \alpha/k$.

Вопрос 5. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, связывающих характеристики электрического и магнитного полей с их источниками (зарядами и токами).

1. Физические величины

В уравнениях используются следующие векторы:

- $\vec{E}$ — напряженность электрического поля;
- $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля;
- $\vec{D}$ — электрическая индукция (смещение);
- $\vec{B}$ — магнитная индукция;
- $\vec{j}$ — плотность электрического тока;
- ρ — объемная плотность электрического заряда.

2. Дифференциальная форма уравнений

В произвольной среде уравнения Максвелла записываются следующим образом:

1. **Закон электромагнитной индукции Фарадея:**

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{25}$$

   Изменение магнитной индукции во времени порождает вихревое электрическое поле.

2. **Закон Ампера-Максвелла:**

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{26}$$

   Источниками магнитного поля являются токи проводимости и токи смещения (изменение электрической индукции).

3. **Закон Гаусса для электрического поля:**

$$\mathrm{div}\ \vec{D} = \rho \tag{27}$$

Источником электрической индукции являются электрические заряды.

4. **Закон Гаусса для магнитного поля:**

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \tag{28}$$

Магнитных зарядов (монополей) не существует; линии магнитной индукции замкнуты.

3. Материальные уравнения

Для замыкания системы уравнений (связи векторов полей с характеристиками среды) вводятся материальные соотношения (для изотропных сред):

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{29}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, σ — удельная проводимость среды.

Вопрос 6. Вывод уравнения Гельмгольца

Уравнение Гельмгольца описывает пространственную конфигурацию волн в задачах, где зависимость от времени носит чисто гармонический характер. Оно является результатом разделения переменных в волновом уравнении.

1. Исходное уравнение

Рассмотрим однородное волновое уравнение для функции $u(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{30}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа (div grad), a — скорость распространения волны.

2. Гипотеза об установившихся колебаниях

Предположим, что процесс является гармоническим во времени с круговой частотой ω. Это означает, что решение можно искать в виде:

$$u(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{или } U(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha)) \tag{31}$$

где $U(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда, зависящая только от пространственных координат.

3. Подстановка и дифференцирование

Найдем вторую производную функции u по времени t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega U(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 U(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = -\omega^2 U(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \tag{32}$$

Применим оператор Лапласа к u (поскольку он действует только по пространственным координатам):

$$\Delta u = \Delta(U(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}) = (\Delta U(\mathbf{r})) e^{-i\omega t} \tag{33}$$

4. Получение уравнения Гельмгольца

Подставим полученные выражения в исходное волновое уравнение (1):

$$(\Delta U)e^{-i\omega t} - \frac{1}{a^2}(-\omega^2 U)e^{-i\omega t} = 0 \tag{34}$$

Сокращая на ненулевой множитель $e^{-i\omega t}$, получаем:

$$\Delta U + \frac{\omega^2}{a^2}U = 0 \tag{35}$$

Введем обозначение $k = \frac{\omega}{a}$, где k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$). Тогда уравнение принимает окончательный вид:

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{36}$$

Это и есть **однородное уравнение Гельмгольца**.

5. Неоднородный случай

Если в исходной системе присутствовали внешние гармонические силы $f(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, то уравнение становится неоднородным:

$$\Delta U + k^2 U = \tilde{F}(\mathbf{r}) \tag{37}$$

Вопрос 7. Краевые задачи Дирихле и Неймана

Рассмотрим эллиптическое уравнение (например, уравнение Пуассона) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \tag{38}$$

1. Задача Дирихле (Первая краевая задача)

В задаче Дирихле на границе области задается само значение искомой функции.

Математическая постановка: Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условию:

$$u(x)\big|_{\Gamma} = g(x) \tag{39}$$

где $g(x)$ — заданная непрерывная функция на границе. Если $g(x) \equiv 0$, задача называется *однородной*.

Физический смысл:

- **Теплопроводность:** поддержание заданной температуры на границе тела.
- **Электростатика:** задание потенциала на проводящей поверхности.
- **Механика:** жесткое закрепление краев мембраны или струны.

2. Задача Неймана (Вторая краевая задача)

В задаче Неймана на границе задается значение нормальной производной функции, что соответствует потоку через границу.

Математическая постановка: Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условию:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = h(x) \tag{40}$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к границе Γ, а $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\nabla u \cdot \vec{n})$.

Физический смысл:

- **Теплопроводность:** задание теплового потока через границу (закон Фурье). Если $h(x) = 0$, граница считается *теплоизолированной*.
- **Гидродинамика:** задание нормальной составляющей скорости жидкости на стенке сосуда.
- **Магнетизм:** задание поверхностной плотности тока.

3. Сравнение и особенности

Характеристика	**Задача Дирихле**	**Задача Неймана**
Тип условия	Значение функции	Значение производной
Единственность	Решение всегда единственно	Единственно с точностью до константы
Физическая аналогия	Температура, потенциал	Поток, сила, скорость

Важное замечание для задачи Неймана: Для разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона необходимо выполнение условия согласования (интегральная форма закона сохранения):

$$\oint_\Gamma h(s)ds = \int_\Omega f(x)dx \tag{41}$$

Это означает, что суммарный поток через границу должен быть равен мощности внутренних источников.

Вопрос 8. Формулы Грина

Формулы Грина связывают интегралы по объему с интегралами по поверхности и являются основным инструментом для доказательства единственности решений краевых задач.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей Γ, а функции $u(x)$ и $v(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы в Ω и непрерывны вместе со своими первыми производными вплоть до границы.

1. Первая формула Грина

Эта формула получается непосредственно из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{A} = u\nabla v$:

$$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\Omega = \oint_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\Gamma \tag{42}$$

где Δ — оператор Лапласа, а $\frac{\partial v}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности Γ.

2. Вторая формула Грина

Если записать первую формулу для пары (u, v), затем поменять их местами и вычесть одно равенство из другого, получится вторая формула Грина:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{43}$$

Эта формула симметрична и часто используется для вывода интегрального представления функций.

3. Третья формула Грина (Интегральное представление)

Если в качестве функции v взять фундаментальное решение уравнения Лапласа (функцию источника), то вторая формула Грина позволяет выразить значение функции u внутри области через её значения и значения её нормальной производной на границе:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\Gamma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u}{r}\, d\Omega \tag{44}$$

где $r = |x - x_0|$. Это соотношение показывает, что гармоническая функция ($\Delta u = 0$) полностью определяется своими граничными значениями.

4. Применение в моделировании

- **Доказательство единственности:** С помощью первой формулы Грина доказывается, что если u — решение однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа, то $u \equiv 0$.
- **Функция Грина:** Позволяет строить решения неоднородных краевых задач в виде интегралов от источников и граничных данных.

Вопрос 9. Объемный и поверхностные потенциалы

Потенциалы представляют собой интегральные представления решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, выраженные через фундаментальное решение оператора Лапласа $\mathcal{E}(x, \xi)$. В $\mathbb{R}^3$ фундаментальное решение имеет вид:

$$\mathcal{E}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi|x - \xi|} = \frac{1}{4\pi r} \tag{45}$$

1. Объемный потенциал

Объемный потенциал описывает поле, создаваемое распределенными в объеме Ω источниками с плотностью $\rho(\xi)$.

$$V(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{1}{4\pi|x - \xi|} dV_{\xi} \tag{46}$$

Свойства:

- Если $\rho \in C^1(\Omega)$, то объемный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона внутри области: $\Delta V = -\rho(x)$.
- Вне области Ω потенциал является гармонической функцией ($\Delta V = 0$).

2. Потенциал простого слоя

Этот потенциал создается зарядами, распределенными по поверхности Γ с поверхностной плотностью $\nu(\xi)$.

$$U(x) = \oint_{\Gamma} \nu(\xi) \frac{1}{4\pi|x-\xi|} d\Gamma_{\xi} \tag{47}$$

Свойства:

- Функция $U(x)$ непрерывна во всем пространстве, включая саму поверхность Γ.
- Нормальная производная потенциала претерпевает скачок при переходе через поверхность:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{ext} - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{int} = -\nu(x_0) \tag{48}$$

3. Потенциал двойного слоя

Создается распределением диполей на поверхности Γ, ориентированных по нормали $\vec{n}_{\xi}$, с плотностью момента $\tau(\xi)$.

$$W(x) = \oint_{\Gamma} \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right) d\Gamma_{\xi} \tag{49}$$

Свойства:

- Сам потенциал $W(x)$ претерпевает скачок при переходе через поверхность Γ:

$$W_{ext}(x_0) - W_{int}(x_0) = \tau(x_0) \tag{50}$$

- Нормальная производная потенциала двойного слоя непрерывна при переходе через поверхность.

4. Резюме по применению

- **Задача Дирихле** обычно сводится к поиску плотности потенциала *двойного* слоя.
- **Задача Неймана** сводится к поиску плотности потенциала *простого* слоя.

Вопрос 10. Ряды Фурье по тригонометрической системе

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке и удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна). Тогда она может быть разложена в ряд Фурье.

1. Разложение на отрезке $[-\pi, \pi]$

Для функции с периодом $T = 2\pi$ ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{51}$$

Коэффициенты вычисляются по формулам Эйлера-Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \tag{52}$$

2. Разложение на произвольном отрезке $[-l, l]$

Если функция имеет период $T = 2l$, производится замена переменной, приводящая к виду:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{53}$$

Коэффициенты:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \tag{54}$$

3. Четные и нечетные функции

Свойства симметрии позволяют существенно упростить вычисления:

Четная функция ($f(-x) = f(x)$): Произведение $f(x)\sin(nx)$ будет нечетным, поэтому $b_n = 0$. Ряд содержит только косинусы (ряд Фурье по косинусам):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \tag{55}$$

Нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$): Произведение $f(x)\cos(nx)$ нечетно, поэтому $a_n = 0$. Ряд содержит только синусы (ряд Фурье по синусам):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \tag{56}$$

4. Разложение на отрезке $[0, \pi]$ (или $[0, l]$)

Если функция задана на «половинном» отрезке, её можно продолжить на вторую половину произвольным образом. Обычно используют два стандартных способа:

1. **Продолжение четным образом:** получаем ряд только по косинусам.
2. **Продолжение нечетным образом:** получаем ряд только по синусам.

Это критически важно при решении краевых задач: для задач Дирихле (закрепленные концы) используют синусы, для задач Неймана (свободные концы) — косинусы.

Вопрос 11. Комплексная форма ряда Фурье

Комплексная форма ряда Фурье удобна для анализа частотных характеристик систем и является базой для введения интеграла Фурье. Она объединяет синусы и косинусы в экспоненциальные функции с помощью формулы Эйлера: $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$.

1. Разложение на отрезке $[-l, l]$

Для функции $f(x)$ с периодом $T = 2l$ комплексная форма ряда Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \tag{57}$$

Комплексные коэффициенты Фурье c_n определяются формулой:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{58}$$

2. Связь с вещественной формой

Вещественная форма ряда Фурье записывается как:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{59}$$

Связь между комплексными коэффициентами c_n и вещественными a_n, b_n устанавливается следующими соотношениями:

1. **Для $n > 0$:**
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{60}$$

2. **Для $n = 0$:**
$$c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{61}$$

3. **Обратная связь (выражение вещественных через комплексные):**

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad a_n = 2\mathrm{Re}(c_n), \quad b_n = -2\mathrm{Im}(c_n) \tag{62}$$

3. Спектральная интерпретация

В комплексной форме:

- **Амплитудный спектр:** $|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}A_n$, где A_n — амплитуда n-й гармоники.

- **Фазовый спектр:** $\arg(c_n) = \mathrm{arctg}(-b_n/a_n)$.

Спектр комплексного ряда Фурье является *двусторонним* (определен для отрицательных частот), при этом амплитудный спектр четен, а фазовый — нечетен для вещественных функций.

4. Равенство Парсеваля

Связь энергий в вещественной и комплексной формах выражается равенством:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{63}$$

Вопрос 12. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладких функций

Вопрос о поточечной сходимости ряда Фурье решается теоремой Дирихле. Для этого введем определения.

1. Условия Дирихле

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-l, l]$, если она:

1. Непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода (скачков).
2. Имеет конечное число точек экстремума.

Такие функции называются кусочно-гладкими (если также их производная кусочно-непрерывна).

2. Теорема Дирихле (о поточечной сходимости)

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$, удовлетворяющая на отрезке $[-l, l]$ условиям Дирихле. Тогда тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, причем сумма ряда $S(x)$ определяется следующим образом:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ — точка непрерывности;} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если } x \text{ — точка разрыва первого рода;} \\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & \text{на концах отрезка } x = \pm l. \end{cases} \tag{64}$$

Здесь $f(x+0)$ и $f(x-0)$ — правосторонний и левосторонний пределы функции в точке x соответственно.

3. Свойства сходимости

- **Локализация:** Сходимость ряда Фурье в данной точке x_0 зависит только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.
- **Равномерная сходимость:** Если функция $f(x)$ непрерывна на всем периоде (включая равенство $f(-l) = f(l)$) и кусочно-гладкая, то ряд Фурье сходится к ней *равномерно.*
- **Эффект Гиббса:** В окрестности точек разрыва частичные суммы ряда Фурье имеют характерные всплески (около 9% от величины скачка), которые не исчезают при увеличении числа членов ряда, а лишь сдвигаются ближе к точке разрыва.

4. Интеграл Дирихле

Доказательство теоремы обычно базируется на представлении частичной суммы ряда $S_n(x)$ через ядро Дирихле $D_n(t)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x+t) D_n(t) dt, \quad D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{2l}\right)} \tag{65}$$

Вопрос 13. Эффект Гиббса и методы его подавления

1. Сущность эффекта Гиббса

Эффект Гиббса заключается в возникновении незатухающих осцилляций частичных сумм ряда Фурье $S_n(x)$ в окрестности точки разрыва функции $f(x)$.

Основные характеристики:

- При увеличении числа гармоник $n \to \infty$ амплитуда первого (самого большого) выброса не стремится к нулю, а стабилизируется на уровне примерно 9% от величины скачка функции.
- Математически, если скачок равен $h = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, то предел максимального значения частичной суммы составляет:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_{max}) \approx f(x_0) + \frac{h}{2} \cdot 1.1789\ldots \tag{66}$$

- С ростом n осцилляции становятся более частыми и «прижимаются» к точке разрыва, но их амплитуда остается неизменной.

2. Математическая причина

Эффект вызван тем, что тригонометрическая система $\{\sin, \cos\}$ является базисом в пространстве L^2, и сходимость в этом пространстве (среднеквадратичная) не гарантирует отсутствия локальных выбросов (равномерной сходимости) вблизи разрывов. Ядро Дирихле, через которое выражается частичная сумма, имеет знакопеременные «хвосты», которые и порождают пульсации.

3. Методы подавления (сглаживание)

Для устранения ложных осцилляций в математическом моделировании применяют методы аппроксимации, использующие весовые множители (окна).

А. Множители Ланцоша (σ-факторы) Идея заключается в замене коэффициентов Фурье c_n на $c_n \cdot \sigma_n$:

$$\sigma_n = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n}{N}\right) = \frac{\sin(\pi n/N)}{\pi n/N} \tag{67}$$

Это эквивалентно усреднению частичной суммы по малому интервалу. Метод эффективно подавляет выбросы, но немного «размывает» крутизну самого фронта разрыва.

Б. Метод средних Фейера Вместо частичной суммы S_n берется среднее арифметическое первых n частичных сумм:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \tag{68}$$

Ряд Фейера сходится равномерно к любой непрерывной функции и не создает эффекта Гиббса для разрывных функций, однако обладает низкой скоростью сходимости.

B. Использование оконных функций (Windowing) В цифровой обработке сигналов (ЦОС) применяются окна Хемминга, Ханна или Блэкмана. Они плавно уменьшают вклад высокочастотных гармоник, что подавляет осцилляции за счет расширения переходной зоны разрыва.

Вопрос 14. Спектр периодических функций

Спектр периодической функции $f(x)$ с периодом $T = 2l$ — это совокупность коэффициентов её разложения в ряд Фурье. В зависимости от формы ряда различают амплитудный и фазовый спектры.

1. Определение спектра

В комплексной форме ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 x}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{l} \tag{69}$$

Множество комплексных чисел $\{c_n\}$ называется **комплексным спектром**. Каждое c_n представляется в полярной форме: $c_n = |c_n|e^{i\theta_n}$.

- **Амплитудный спектр:** Множество модулей $|c_n|$. Характеризует интенсивность гармоники на частоте $n\omega_0$.
- **Фазовый спектр:** Множество аргументов $\theta_n = \arg c_n$. Характеризует временной сдвиг гармоники.

2. Свойства спектра

1. **Дискретность (линейчатость):** Спектр периодической функции состоит из отдельных линий на частотах, кратных основной частоте ω_0.
2. **Свойство для вещественных функций:** Если $f(x) \in \mathbb{R}$, то $c_{-n} = \bar{c}_n$ (комплексно-сопряженные). Отсюда следует:
   - $|c_n| = |c_{-n}|$ — амплитудный спектр **четен**.
   - $\arg c_n = -\arg c_{-n}$ — фазовый спектр **нечетен**.
3. **Энергетическое свойство (Парсеваль):** Сумма квадратов амплитуд спектральных линий пропорциональна средней мощности сигнала:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \tag{70}$$

3. Спектры четных и нечетных функций

Симметрия функции в пространстве (или во времени) напрямую влияет на структуру её спектра:

A. Четная функция ($f(-x) = f(x)$): Коэффициенты $b_n = 0$, следовательно, комплексные коэффициенты $c_n = a_n/2$ являются чисто **вещественными**.

- Фазовый спектр принимает значения только 0 (если $c_n > 0$) или π (если $c_n < 0$).

Б. Нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$): Коэффициенты $a_n = 0$, следовательно, $c_n = -ib_n/2$ являются чисто **мнимыми**.

- Фазовый спектр принимает значения $\pm\pi/2$.

Вопрос 15. Суммирование рядов Фурье

Под суммированием ряда Фурье понимается нахождение функции $S(x)$, к которой сходится последовательность частичных сумм $S_n(x)$ при $n \to \infty$.

1. Частичная сумма ряда

Частичная сумма порядка n для функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ определяется как:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \tag{71}$$

2. Интегральное представление (Ядро Дирихле)

Для анализа процесса суммирования частичную сумму представляют в виде интеграла:

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\xi) D_n(\xi - x) d\xi \tag{72}$$

где $D_n(t)$ — **ядро Дирихле**:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{2l}\right)} \tag{73}$$

Процесс суммирования можно рассматривать как фильтрацию функции $f(x)$ через это ядро.

3. Методы суммирования при плохой сходимости

Если ряд сходится медленно (например, в окрестности разрывов), применяются специальные методы:

А. Метод средних арифметических (Суммирование по Фейеру) Вместо последовательности S_n рассматривается последовательность σ_n:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n} \tag{74}$$

Этот метод обеспечивает сходимость даже в тех случаях, когда обычный ряд Фурье расходится (но функция непрерывна).

Б. Метод выделения особенностей (Улучшение сходимости) Если функция $f(x)$ имеет разрывы, коэффициенты убывают как $1/k$. Чтобы ускорить суммирование, функцию представляют в виде:

$$f(x) = g(x) + r(x) \tag{75}$$

где $g(x)$ — простая функция, имеющая те же разрывы, что и $f(x)$ (её ряд Фурье суммируется явно), а $r(x)$ — гладкая функция, ряд которой сходится очень быстро.

4. Суммирование в смысле среднего квадратичного

В пространстве $L^2[-l, l]$ ряд Фурье всегда суммируется к функции $f(x)$ по норме:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-l}^{l} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0 \tag{76}$$

Это свойство (полнота тригонометрической системы) гарантирует, что энергия ошибки аппроксимации стремится к нулю.

Вопрос 16. Интеграл и преобразование Фурье

При переходе от периодических функций к непериодическим (на всей числовой оси $x \in \mathbb{R}$) ряд Фурье заменяется интегралом Фурье. Это соответствует предельному переходу при периоде $T \to \infty$.

1. Интеграл Фурье в комплексной форме

Для функции $f(x)$, заданной на всей оси, интеграл Фурье записывается как:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right] e^{i\omega x} d\omega \tag{77}$$

Это выражение можно рассматривать как разложение непериодического сигнала по непрерывному спектру гармоник $e^{i\omega x}$.

2. Непрерывное преобразование Фурье

Если функция $f(x)$ абсолютно суммируема на $\mathbb{R}$ (т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$), то определено её прямое и обратное преобразование Фурье.

Прямое преобразование: Задает спектральную плотность функции $f(x)$:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{78}$$

Обратное преобразование: Восстанавливает функцию по её спектру:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{79}$$

3. Синус- и косинус-преобразования Фурье

Для функций, заданных на полупрямой $x \in [0, +\infty)$, или обладающих четностью/нечетностью, используются специальные формы:

Косинус-преобразование (для четных функций):

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega \tag{80}$$

Синус-преобразование (для нечетных функций):

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega \tag{81}$$

4. Условия существования

Для того чтобы функция $f(x)$ была представима интегралом Фурье, достаточно выполнения условий Дирихле на любом конечном интервале и требования абсолютной интегрируемости на всей оси.

Вопрос 17. Свойства преобразования Фурье

Пусть $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$.

1. Линейность

Для любых констант α, β и функций $f(x), g(x)$:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega) \tag{82}$$

2. Теорема подобия (масштабирование)

Изменение масштаба аргумента функции приводит к обратному изменению масштаба и амплитуды спектра:

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0 \tag{83}$$

Следствие: чем «уже» сигнал во временной области, тем «шире» его спектр в частотной.

3. Сдвиг аргумента (теорема запаздывания)

Сдвиг функции в пространстве (времени) приводит к появлению фазового множителя в спектре:

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} F(\omega) \tag{84}$$

4. Сдвиг частоты (модуляция)

Умножение функции на гармонический сигнал эквивалентно сдвигу спектра:

$$\mathcal{F}[f(x)e^{i\omega_0 x}] = F(\omega - \omega_0) \tag{85}$$

5. Дифференцирование

Это ключевое свойство для решения дифференциальных уравнений. Дифференцирование в физической области соответствует умножению на аргумент в частотной:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n F(\omega) \tag{86}$$

(При условии, что функция и её производные стремятся к нулю на бесконечности).

6. Интегрирование

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$, то:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{i\omega}F(\omega) \tag{87}$$

7. Теорема о свертке

Преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению их преобразований:

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi\right] = F(\omega) \cdot G(\omega) \tag{88}$$

В моделировании это свойство используется для нахождения отклика линейной системы на произвольное воздействие.

8. Равенство Парсеваля

Энергия сигнала в обеих областях одинакова:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{89}$$

Вопрос 18. Преобразование Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$, то есть выполняется условие:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \tag{90}$$

она не обязательно является абсолютно интегрируемой (L^1). В этом случае классический интеграл Фурье может расходиться.

1. Определение через предел (Теорема Планшереля)

Для функций из $L^2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье определяется как предел в среднем квадратичном. Рассмотрим последовательность функций $f_A(x)$, равных $f(x)$ на $[-A, A]$ и нулю вне этого отрезка. Поскольку $f_A \in L^1 \cap L^2$, для неё определено классическое преобразование $F_A(\omega)$. Тогда преобразование Фурье $F(\omega)$ функции $f \in L^2$ есть:

$$F(\omega) = \text{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\omega x}dx, \tag{91}$$

где l.i.m. (limit in mean) означает предел по норме пространства L^2.

2. Равенство Парсеваля–Планшереля

Важнейшим свойством преобразования в L^2 является сохранение нормы (энергии) с точностью до множителя:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|F\|_{L^2}^2 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \tag{92}$$

Это означает, что преобразование Фурье является унитарным оператором (с точностью до нормировки) в гильбертовом пространстве L^2.

3. Свойства и значение в моделировании

- **Обратимость:** Обратное преобразование Фурье также сходится в смысле L^2.
- **Обобщенный спектр:** Многие физические сигналы (например, гармоники бесконечной длительности, рассматриваемые в окне) моделируются именно как функции из L^2 для корректного описания их энергетического спектра.
- **Спектральная плотность энергии:** Величина $|F(\omega)|^2$ называется энергетическим спектром сигнала.

Вопрос 19. Спектральный анализ непериодических функций

Спектральный анализ непериодической функции $f(x)$ заключается в её представлении в виде суперпозиции бесконечного числа гармонических колебаний с бесконечно близкими частотами.

1. Переход от ряда к интегралу

Рассмотрим периодическую функцию с периодом T. При $T \to \infty$ расстояние между спектральными линиями $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ стремится к нулю, и дискретная сумма (ряд Фурье) переходит в интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{93}$$

2. Спектральная плотность

Функция $F(\omega)$, полученная с помощью прямого преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{94}$$

называется **спектральной плотностью** или **непрерывным спектром** функции $f(x)$.

3. Характеристики спектра

Поскольку $F(\omega)$ в общем случае является комплексной функцией, её представляют в виде:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)} \tag{95}$$

- $|F(\omega)|$ — **амплитудный спектр** (модуль спектральной плотности). Характеризует «вклад» частоты ω в формирование сигнала.
- $\phi(\omega) = \arg F(\omega)$ — **фазовый спектр**.

4. Энергетический спектр

Согласно равенству Парсеваля для непериодических функций:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{96}$$

Величина $|F(\omega)|^2$ называется **энергетическим спектром** (спектральной плотностью энергии). Она показывает распределение энергии сигнала по непрерывной шкале частот.

Вопрос 20. Свертка и корреляция

1. Свертка

Сверткой двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция $h(x)$, определяемая интегралом:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi \tag{97}$$

Физический смысл: Свертка описывает выходной сигнал линейной стационарной системы, где $f(x)$ — входной сигнал, а $g(x)$ — импульсная характеристика системы.

Свойства:

- Коммутативность: $f * g = g * f$.
- Ассоциативность: $(f * g) * w = f * (g * w)$.
- Дистрибутивность: $f * (g + w) = f * g + f * w$.

2. Взаимная корреляция

Корреляция функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется как:

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x - \tau)}dx \tag{98}$$

В отличие от свертки, здесь одна из функций не «разворачивается» во времени. **Физический смысл:** Мера сходства двух сигналов в зависимости от временного сдвига τ. Если $f = g$, функция называется **автокорреляционной**.

3. Основная теорема о свертке

Это важнейшая теорема, связывающая операцию в пространственной области с операцией в частотной.

Теорема: Преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье.

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] = F(\omega) \cdot G(\omega) \tag{99}$$

Следствие (Теорема о произведении): Преобразование Фурье от произведения двух функций равно свертке их спектров (с точностью до множителя):

$$\mathcal{F}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) \tag{100}$$

4. Теорема о корреляции (Винера-Хинчина)

Для корреляции справедлива похожая связь:

$$\mathcal{F}[R_{fg}(\tau)] = F(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} \tag{101}$$

Для автокорреляционной функции $R_{ff}(\tau)$ преобразование Фурье дает **энергетический спектр** сигнала: $\mathcal{F}[R_{ff}] = |F(\omega)|^2$.

Вопрос 21. Применение методов Фурье в прикладных задачах

Методы Фурье (ряды и интегральные преобразования) являются мощным инструментом математического моделирования, позволяющим переходить от анализа функций во временной или пространственной области к их анализу в частотной области.

1. Решение краевых задач (Метод разделения переменных)

Ряды Фурье используются для решения уравнений в частных производных (УЧП) в ограниченных областях.

Пример: Колебания струны или теплопроводность в стержне $[0, l]$. Решение представляется в виде суперпозиции собственных функций:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{102}$$

Здесь каждая гармоника $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ соответствует определенной «моде» (собственному состоянию) системы.

2. Анализ процессов в неограниченных средах

Для задач на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ используется непрерывное преобразование Фурье. Оно позволяет исключить пространственные производные:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t) \tag{103}$$

Это свойство сводит УЧП к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) относительно спектральной плотности $\hat{u}$.

3. Цифровая обработка сигналов и фильтрация

В прикладных задачах (радиотехника, акустика) преобразование Фурье используется для:

- **Спектрального анализа:** выделение доминирующих частот в зашумленном сигнале.
- **Фильтрации:** подавление нежелательных частот путем умножения спектра сигнала на передаточную функцию фильтра $H(\omega)$:

  $$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \tag{104}$$

  согласно теореме о свертке.

4. Решение интегральных уравнений

С помощью теоремы о свертке решаются уравнения вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x) \tag{105}$$

После преобразования Фурье уравнение становится алгебраическим: $\hat{K}(\omega)\hat{\varphi}(\omega) = \hat{f}(\omega)$, откуда легко находится искомая функция $\varphi(x)$ через обратное преобразование.

5. Оптика и квантовая физика

- **Дифракция:** Распределение амплитуды света в дальней зоне является преобразованием Фурье от функции пропускания отверстия.
- **Квантовая механика:** Переход от координатного представления волновой функции $\psi(x)$ к импульсному $\phi(p)$ осуществляется именно преобразованием Фурье.

Вопрос 22. Основные понятия теории динамических систем

Динамическая система — это математическая модель объекта или процесса, состояние которого изменяется во времени согласно определенному закону.

1. Фазовое пространство и состояние системы

- **Состояние системы:** Совокупность величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полностью определяющих положение системы в данный момент времени t.
- **Фазовое пространство:** Абстрактное пространство, осями которого являются переменные состояния. Точка в этом пространстве соответствует мгновенному состоянию системы.

2. Классификация систем

Системы делятся на:

1. **Непрерывные:** Описываются дифференциальными уравнениями: $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$.
2. **Дискретные:** Описываются разностными уравнениями (отображениями): $x_{n+1} = f(x_n)$.
3. **Детерминированные:** Состояние в будущем однозначно определяется начальными условиями.
4. **Стохастические:** Изменения носят вероятностный характер.

3. Траектория и фазовый портрет

- **Фазовая траектория:** Кривая в фазовом пространстве, описывающая эволюцию системы из начальной точки x_0.
- **Фазовый портрет:** Совокупность всех возможных фазовых траекторий. Он дает качественное представление о поведении системы (наличие циклов, узлов, фокусов).

4. Равновесие и устойчивость

- **Точка покоя (равновесия):** Точка x^*, для которой $f(x^*) = 0$ (в непрерывном случае). В этой точке система не изменяется во времени.
- **Устойчивость по Ляпунову:** Способность системы оставаться вблизи состояния равновесия при малых внешних возмущениях.

5. Аттракторы

Аттрактор — это подмножество фазового пространства, к которому стремятся траектории системы с течением времени.

- **Устойчивый фокус/узел:** Система затухает к точке.
- **Предельный цикл:** Изолированная замкнутая траектория (автоколебания).
- **Странный аттрактор:** Присущ динамическому хаосу (система детерминирована, но непредсказуема).

Вопрос 23. Стационарные точки одномерных динамических систем

Одномерная динамическая система описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{106}$$

где $x(t)$ — переменная состояния, а $f(x)$ — фазовая скорость.

1. Определение стационарной точки

Точка x^* называется **стационарной точкой** (точкой покоя или равновесия), если в ней скорость изменения системы равна нулю:

$$f(x^*) = 0 \tag{107}$$

Если система находится в этой точке в начальный момент времени, она будет оставаться в ней бесконечно долго.

2. Классификация и устойчивость

Для определения устойчивости стационарной точки используется метод линеаризации (анализ производной $f'(x^*)$):

- **Устойчивое равновесие (Аттрактор):** Если $f'(x^*) < 0$. При малом отклонении система возвращается к x^*. На фазовой прямой стрелки направлены к точке.
- **Неустойчивое равновесие (Репеллер):** Если $f'(x^*) > 0$. При малом отклонении система уходит от x^*. На фазовой прямой стрелки направлены от точки.
- **Полуустойчивое равновесие:** Если $f'(x^*) = 0$, требуются исследования высших производных. Обычно точка устойчива с одной стороны и неустойчива с другой.

3. Качественный анализ на фазовой прямой

Поскольку фазовое пространство одномерно, оно представляет собой прямую. Поведение системы полностью определяется знаком функции $f(x)$:

1. Если $f(x) > 0$, то x возрастает (движение вправо).
2. Если $f(x) < 0$, то x убывает (движение влево).

Вопрос 24. Бифуркации в одномерных динамических системах

Бифуркацией называется качественное изменение поведения динамической системы при малом изменении её управляющего параметра μ. В одномерном случае ($\dot{x} = f(x, \mu)$) это обычно проявляется в изменении количества или устойчивости стационарных точек.

1. Седло-узловая бифуркация

Это основной механизм рождения или гибели стационарных точек.

- **Канонический вид:** $\dot{x} = \mu - x^2$.
- **Суть:** При $\mu < 0$ точек покоя нет. При $\mu = 0$ появляется одна полуустойчивая точка. При $\mu > 0$ она расщепляется на две: устойчивую ($\sqrt{\mu}$) и неустойчивую ($-\sqrt{\mu}$).

2. Транскритическая бифуркация

Происходит, когда стационарная точка существует при всех значениях параметра, но меняет свою устойчивость.

- **Канонический вид:** $\dot{x} = \mu x - x^2$.
- **Суть:** При всех μ существует точка $x = 0$. При переходе μ через ноль две точки ($x = 0$ и $x = \mu$) «сталкиваются» и обмениваются устойчивостью.

3. Бифуркация вилки

Характерна для систем с симметрией.

- **Суперкритическая:** $\dot{x} = \mu x - x^3$. Устойчивая точка в нуле при $\mu > 0$ теряет устойчивость, и рождаются две новые симметричные устойчивые точки.
- **Субкритическая:** $\dot{x} = \mu x + x^3$. Неустойчивые точки «схлопываются» в нуле, делая его окончательно неустойчивым.

Вопрос 25. Двумерные динамические системы

Система двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{108}$$

1. Фазовый поток и траектории

- **Фазовый поток:** Семейство всех преобразований g^t, которые переводят начальное состояние (x_0, y_0) в состояние $(x(t), y(t))$ через время t. Его можно представить как «течение» воображаемой жидкости в фазовой плоскости.
- **Фазовая траектория:** Путь, описываемый точкой $(x(t), y(t))$ на плоскости Oxy.
- **Фазовый портрет:** Совокупность фазовых траекторий вместе с особыми точками (равновесиями) и предельными циклами, дающая полное качественное представление о динамике.

2. Нульклины

Нульклины — это кривые, на которых скорость изменения одной из переменных равна нулю.

- **Вертикальная нульклина (x-нульклина):** Задается уравнением $P(x, y) = 0$. В любой точке этой кривой вектор фазовой скорости направлен строго вертикально (так как $\dot{x} = 0$).

- **Горизонтальная нульклина (y-нульклина):** Задается уравнением $Q(x, y) = 0$. Здесь вектор скорости направлен строго горизонтально ($\dot{y} = 0$).

Важное свойство: Точки пересечения нульклин являются **стационарными точками** системы.

3. Изоклины

Изоклины — это кривые, во всех точках которых касательные к фазовым траекториям имеют одинаковый наклон k. Уравнение изоклин:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = k \tag{109}$$

Метод изоклин позволяет построить фазовый портрет вручную, нанося короткие отрезки с наклоном k вдоль соответствующих кривых.

Вопрос 26. Анализ устойчивости двумерных систем

Рассмотрим автономную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{110}$$

Пусть (x^*, y^*) — стационарная точка, т.е. $P(x^*, y^*) = 0$ и $Q(x^*, y^*) = 0$.

1. Метод линеаризации

Для анализа устойчивости в окрестности точки равновесия функции P и Q разлагаются в ряд Тейлора. Удерживая только линейные члены, получаем линеаризованную систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \tag{111}$$

где J — матрица Якоби (Якобиан), а ξ, η — малые отклонения от равновесия.

Поведение системы определяется собственными числами λ_1, λ_2 матрицы J, которые находятся из характеристического уравнения:

$$\det(J - \lambda E) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \tag{112}$$

2. Классификация стационарных точек

Тип точки зависит от знаков и комплексности $\lambda_{1,2}$:

- **Узел:** λ_1, λ_2 вещественные и одного знака.
  - Устойчивый, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.
  - Неустойчивый, если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
- **Седло:** λ_1, λ_2 вещественные и имеют разные знаки. Всегда **неустойчиво**.
- **Фокус:** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (комплексно-сопряженные). Траектории — спирали.
  - Устойчивый, если $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
  - Неустойчивый, если $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) > 0$.
- **Центр:** $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ (чисто мнимые). Траектории — замкнутые эллипсы. Система находится на границе устойчивости.

3. Условия устойчивости по Ляпунову

На основе анализа Якобиана, точка устойчива, если:

1. $\mathrm{tr}(J) = P'_x + Q'_y < 0$ (след матрицы отрицателен).
2. $\det(J) = P'_x Q'_y - P'_y Q'_x > 0$ (определитель положителен).

Вопрос 27. Предельные циклы и теорема Пуанкаре–Бендиксона

В двумерных динамических системах $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$, помимо стационарных точек, возможен особый тип поведения — автоколебания, которые на фазовой плоскости представляются предельными циклами.

1. Определение предельного цикла

Предельный цикл — это изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве. Изолированность означает, что у этой траектории существует окрестность, не содержащая других замкнутых траекторий.

Типы предельных циклов:

- **Устойчивый:** все близкие траектории при $t \to +\infty$ спиралевидно приближаются к нему (соответствует установившимся автоколебаниям).
- **Неустойчивый:** траектории удаляются от него при $t \to +\infty$.
- **Полу-устойчивый:** с одной стороны траектории приближаются, с другой — удаляются.

2. Теорема Пуанкаре–Бендиксона

Это фундаментальная теорема, определяющая условия существования предельного цикла в двумерном пространстве.

Формулировка: Если существует замкнутая ограниченная область D на плоскости, такая что:

1. Всякая траектория, начинающаяся в D, остается в ней при $t \to +\infty$ (область является инвариантной).
2. Внутри области D нет стационарных точек.

Тогда в области D существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

3. Индекс Пуанкаре и необходимое условие

Согласно топологическим свойствам фазового портрета:

- Внутри любого предельного цикла обязана находиться хотя бы одна стационарная точка.
- Если точка одна, то это должен быть либо узел, либо фокус (не седло).

4. Критерий Бендиксона (отсутствие циклов)

Если в односвязной области D дивергенция фазовой скорости не меняет знак:

$$\text{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0 \tag{113}$$

то в этой области не может существовать замкнутых траекторий (предельных циклов).

Вопрос 28. Модель Мальтуса (Экспоненциальный рост)

Модель была предложена Томасом Мальтусом в 1798 году и базируется на предположении, что скорость роста популяции прямо пропорциональна её текущей численности.

1. Постановка задачи и уравнение

Пусть $N(t)$ — численность популяции в момент времени t. Основная гипотеза модели:

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{114}$$

где $r = (b - d)$ — коэффициент естественного прироста (мальтузианский параметр), b — рождаемость, d — смертность.

2. Решение уравнения

Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. При начальном условии $N(0) = N_0$ решение имеет вид:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{115}$$

3. Анализ динамики

В зависимости от значения параметра r возможны три сценария:

- $r > 0$: Экспоненциальный рост (биологический взрыв). Численность неограниченно растет.
- $r < 0$: Экспоненциальное вымирание. Численность стремится к нулю.
- $r = 0$: Стационарное состояние. Популяция не меняется ($N(t) = N_0$).

4. Фазовое пространство

Фазовое пространство модели — одномерное (луч $N \geq 0$).

- Стационарная точка: $N^* = 0$.
- При $r > 0$ точка $N^* = 0$ является неустойчивой (репеллером). Любое малое отклонение приводит к уходу траектории в бесконечность.

Вопрос 29. Логистическая модель популяции (Модель Ферхюльста)

Логистическая модель является классическим примером нелинейной динамической системы с одномерным фазовым пространством. Она описывает развитие популяции в условиях ограниченных ресурсов.

1. Дифференциальное уравнение модели

Основное уравнение модели имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{116}$$

где:

- $N(t)$ — численность популяции в момент времени t;
- $r > 0$ — мальтузианский параметр (чистая рождаемость);
- $K > 0$ — емкость среды (максимально возможная численность).

Нелинейное слагаемое $-\frac{rN^2}{K}$ описывает внутривидовую конкуренцию (эффект скученности).

2. Аналитическое решение

Уравнение Ферхюльста является уравнением Бернулли. С помощью разделения переменных и интегрирования методом элементарных дробей получается решение:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \tag{117}$$

График этой функции называется **логистической кривой** (S-образная кривая). При $t \to \infty$ численность популяции $N(t) \to K$.

3. Качественный анализ и устойчивость

Анализ системы без решения уравнения:

1. **Стационарные точки:** Находятся из условия $f(N) = 0$:
   - $N_1^* = 0$ (тривиальное равновесие);
   - $N_2^* = K$ (состояние насыщения).
2. **Анализ устойчивости по Ляпунову (линеаризация):** Найдем производную правой части: $f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$.
   - В точке $N_1^* = 0$: $f'(0) = r > 0 \implies$ **неустойчивый узел** (репеллер).
   - В точке $N_2^* = K$: $f'(K) = r - 2r = -r < 0 \implies$ **устойчивый узел** (аттрактор).

4. Фазовый портрет и интерпретация

Фазовым пространством является луч $N \in [0, +\infty)$.

- Если $0 < N < K$, то $\dot{N} > 0$ (популяция растет).
- Если $N > K$, то $\dot{N} < 0$ (популяция сокращается из-за нехватки ресурсов).
- Точка $N = K/2$ является точкой перегиба: в ней скорость роста $\dot{N}$ максимальна.

Вопрос 30. Модель Лотки–Вольтерра (система “хищник–жертва”)

Модель описывает динамику двух взаимодействующих популяций: жертв (x) и хищников (y).

1. Дифференциальные уравнения модели

Система базируется на следующих гипотезах:

1. Жертвы имеют неограниченный пищевой ресурс и размножаются экспоненциально в отсутствие хищников.
2. Скорость убыли жертв пропорциональна количеству встреч с хищниками.
3. Рождаемость хищников пропорциональна количеству съеденных жертв.
4. Хищники вымирают экспоненциально в отсутствие жертв.

Математическая запись:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = cxy - dy \end{cases} \tag{118}$$

где $a, b, c, d > 0$ — параметры модели.

2. Стационарные точки

Для поиска положений равновесия решим систему:

$$\begin{cases} x(a-by)=0 \\ y(cx-d)=0 \end{cases}$$

Существуют две стационарные точки:

1. $M_1(0,0)$ — тривиальное равновесие (обе популяции вымерли).
2. $M_2(\frac{d}{c},\frac{a}{b})$ — точка динамического равновесия.

3. Анализ устойчивости (Линеаризация)

Матрица Якоби системы имеет вид:

$$J=\begin{pmatrix} a-by & -bx \\ cy & cx-d \end{pmatrix} \tag{119}$$

Анализ точки $M_1(0,0)$: $J(0,0)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$. Собственные числа: $\lambda_1=a>0$, $\lambda_2=-d<0$. Точка является **седлом** (неустойчива).

Анализ точки $M_2(\frac{d}{c},\frac{a}{b})$: $J(M_2)=\begin{pmatrix} 0 & -bd/c \\ ac/b & 0 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2+ad=0$. Собственные числа чисто мнимые: $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{ad}$. Точка является **центром**. Вокруг нее совершаются периодические колебания.

4. Инвариант (Первый интеграл)

Система является консервативной. Можно показать, что вдоль траекторий сохраняется величина:

$$H(x,y)=cx-d\ln x+by-a\ln y=\text{const} \tag{120}$$

Это означает, что траектории на фазовой плоскости являются замкнутыми кривыми.

Вопрос 31. Устойчивость популяционных моделей

Устойчивость популяции определяется способностью системы возвращаться к стационарному состоянию после внешних возмущений (засуха, эпидемия, вылов).

1. Определение устойчивости по Ляпунову

Состояние равновесия x^* называется **устойчивым**, если для любого $\epsilon>0$ существует $\delta>0$, такое что из $|x(0)-x^*|<\delta$ следует $|x(t)-x^*|<\epsilon$ для всех $t>0$. Если при этом $\lim_{t\to\infty}x(t)=x^*$, равновесие называется **асимптотически устойчивым**.

2. Метод линеаризации (первое приближение)

Для автономной системы $\dot{x} = f(x)$ устойчивость точки x^* определяется знаком производной $f'(x^*)$:

- $f'(x^*) < 0$ — точка **устойчива** (аттрактор).
- $f'(x^*) > 0$ — точка **неустойчива** (репеллер).
- $f'(x^*) = 0$ — критический случай (требуется анализ нелинейных членов).

3. Сравнительный анализ моделей

Модель	**Стационарные точки**	**Характер устойчивости**
Мальтус ($\dot{N} = rN$)	$N^* = 0$	Неустойчива при $r > 0$
Логистическая ($\dot{N} = rN(1 - N/K)$)	$N_1^* = 0$ $N_2^* = K$	Неустойчива (репеллер) **Асимптотически устойчива**
Лотки–Вольтерра (Хищник–жертва)	$M_1(0,0)$ $M_2(d/c, a/b)$	Седло (неустойчива) **Центр** (нейтрально устойчива)

4. Структурная устойчивость и грубость систем

Система называется **грубой**, если малые изменения её параметров не меняют качественную структуру фазового портрета.

- Логистическая модель — **грубая**. Малое изменение r или K оставляет точку K устойчивой.
- Модель Лотки–Вольтерра — **негрубая**. Добавление даже слабой конкуренции среди жертв превращает "центр" в "устойчивый фокус", полностью меняя тип динамики.

Вопрос 32. Пространственно-распределенные модели популяций

В распределенных моделях популяция рассматривается как «непрерывная среда», плотность которой $n(\mathbf{r}, t)$ меняется в пространстве $\mathbf{r}$ вследствие локального роста и перемещения (диффузии).

1. Уравнение «реакция–диффузия»

Общий вид уравнения для одной популяции:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = f(n) + D\nabla^2 n \tag{121}$$

Где:

- $f(n)$ — кинетический член (реакция), описывающий локальную динамику (например, рост по Мальтусу или Ферхюльсту).
- D — коэффициент диффузии, описывающий хаотическое перемещение особей.
- $\nabla^2 n$ (оператор Лапласа) — математическое описание рассеивания плотности из областей с высокой концентрацией в области с низкой.

2. Модель Фишера–Колмогорова (ФКМ)

Если локальный рост описывается логистическим законом, получаем уравнение ФКМ:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = rn\left(1 - \frac{n}{K}\right) + D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{122}$$

Эта модель описывает распространение популяции в виде **бегущей волны**. Если в некоторой области зародилась популяция, она начнет расширять свой ареал с постоянной скоростью $v = 2\sqrt{rD}$.

3. Системы реакция–диффузия (Тьюринговские структуры)

Для двух видов (например, хищник–жертва) модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \nabla^2 v \end{cases} \tag{123}$$

Неустойчивость Тьюринга: Алан Тьюринг показал, что если коэффициенты диффузии сильно различаются ($D_v \gg D_u$), то равномерное распределение видов может стать неустойчивым. Это приводит к образованию стационарных пространственных структур (пятна, полосы) — самоорганизации.

4. Граничные условия

Для решения уравнений необходимо задать поведение на границах ареала Ω:

- **Условие Дирихле** ($n|_{\partial\Omega} = 0$): Среда за границей враждебна, особи погибают при выходе за пределы.
- **Условие Неймана** ($\frac{\partial n}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$): Граница непроницаема (изолированный остров), поток особей через границу равен нулю.

Вопрос 33. Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП)

Уравнение КПП (1937 г.) является базовой моделью теории автоволн и описывает процесс перехода системы из неустойчивого состояния равновесия в устойчивое.

1. Математическая формулировка

В одномерном случае уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \tag{124}$$

где $u(x, t)$ — плотность популяции (или доля концентрации), D — коэффициент диффузии.

2. Свойства источника $F(u)$

В классической постановке функция $F(u)$ удовлетворяет условиям:

- $F(0) = F(1) = 0$ (состояния равновесия);
- $F(u) > 0$ при $u \in (0, 1)$;
- $F'(0) = \alpha > 0$ (неустойчивое равновесие в нуле);
- $F'(1) < 0$ (устойчивое равновесие в единице);
- $F'(u) \leq F'(0)$ на всем интервале.

Типичный пример — логистический источник: $F(u) = \alpha u(1 - u)$.

3. Решение в виде бегущей волны

Основной интерес представляют решения типа **автоволны**:

$$u(x, t) = U(x - vt) = U(\xi) \tag{125}$$

где v — скорость волны, ξ — автомодельная переменная. Подстановка в исходное уравнение дает обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$DU'' + vU' + F(U) = 0 \tag{126}$$

4. Фазовый анализ и скорость волны

Переходя к системе первого порядка ($U' = w$), можно показать, что:

- Точка $(0, 0)$ в фазовом пространстве (U, w) является узлом или фокусом.
- Чтобы решение оставалось положительным ($u \geq 0$), дискриминант характеристического уравнения в нуле должен быть неотрицательным: $v^2 \geq 4\alpha D$.
- Отсюда следует существование **минимальной скорости** волны:

$$v_{\min} = 2\sqrt{\alpha D} \tag{127}$$

Вопрос 34. Автомодельные решения в популяционных моделях

Автомодельное решение — это решение вида $u(x, t) = \Phi(\xi)$, где ξ — некоторая комбинация переменных x и t (автомодельная переменная). Это позволяет свести уравнение в частных производных (УЧП) к обычному дифференциальному уравнению (ОДУ).

1. Типы автомодельных переменных

В биологических задачах наиболее распространены два типа:

1. **Тип “Бегущая волна”:** $\xi = x - vt$. Используется для описания распространения ареала популяции с постоянной скоростью v.
2. **Тип “Диффузионное масштабирование”:** $\xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$. Характерно для процессов чистого расселения без нелинейных источников.

2. Пример: Бегущая волна в уравнении КПП

Рассмотрим уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$. Ищем решение в виде $u(x,t) = U(x - vt) = U(\xi)$. Подставляя производные:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -vU', \quad \frac{\partial u}{\partial x} = U', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = U''$$

Получаем ОДУ второго порядка:

$$DU''(\xi) + vU'(\xi) + f(U) = 0 \tag{128}$$

Это уравнение описывает стационарный профиль волны, который движется вдоль оси x без деформации.

3. Смысл автомодельности для популяции

- **Биологическая инвазия:** Если популяция описывается автомодельным решением типа бегущей волны, это означает, что граница ареала продвигается с постоянной скоростью, а плотность популяции за фронтом волны стабилизируется.
- **Универсальность:** Автомодельные решения часто являются промежуточными асимптотиками. Это значит, что независимо от начального распределения популяции, через длительное время система "забывает" начальные условия и выходит на стандартный профиль (например, волну Фишера).

4. Условия существования

Для того чтобы решение было автомодельным, граничные и начальные условия также должны быть автомодельными (например, бесконечная прямая или мгновенный точечный источник).

Вопрос 35. Пространственное моделирование двухкомпонентных популяций

Переход от точечных моделей к пространственным осуществляется путем добавления диффузионных членов в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Базовая система уравнений

Для двух видов с плотностями $u(\mathbf{r},t)$ и $v(\mathbf{r},t)$ система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + D_u \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v) + D_v \nabla^2 v \end{cases} \tag{129}$$

Где:

- $f(u,v), g(u,v)$ — функции локального взаимодействия (кинетика);
- D_u, D_v — коэффициенты диффузии компонентов;
- ∇^2 — оператор Лапласа, описывающий пространственное рассеивание.

2. Основные типы пространственного поведения

В зависимости от параметров системы могут возникать следующие режимы:

1. **Синхронизация:** Диффузия сглаживает пространственные неоднородности, и вся система колеблется во времени одинаково во всех точках пространства.

2. **Автоволны:** Распространение фронтов возбуждения. Например, в модели "хищник–жертва" это может быть волна хищников, преследующая волну жертв.

3. **Пространственный хаос:** Возникновение сложных, динамически меняющихся пятнистых структур (спиральные волны, мишени).

3. Диффузионная неустойчивость (Неустойчивость Тьюринга)

Это важнейший эффект двухкомпонентных систем. Алан Тьюринг доказал, что если система в отсутствие диффузии устойчива, то при добавлении диффузии она может стать неустойчивой, если один компонент (ингибитор) диффундирует быстрее другого (активатора):

$$D_v \gg D_u \tag{130}$$

Результатом такой неустойчивости становится **самоорганизация** — возникновение стационарных в пространстве структур (пятен, полос), которые моделируют окрас животных или распределение растительности.

Вопрос 36. Пространственная динамика популяции амеб и диссипативные структуры

Моделирование динамики амеб является классическим примером биологической самоорганизации, где из однородного распределения клеток возникают сложные агрегационные структуры.

1. Модель Келлера–Сегель

Математическая модель описывает изменение плотности амеб $n(\mathbf{r}, t)$ и концентрации аттрактанта (вещества, привлекающего клетки) $c(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D_n \nabla n - \chi n \nabla c) \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \nabla^2 c + f(n) - kc \end{cases} \tag{131}$$

Где:

- D_n, D_c — коэффициенты диффузии амеб и аттрактанта соответственно.
- χ — коэффициент хемотаксиса (описывает интенсивность направленного движения к источнику химического сигнала).
- $f(n)$ — скорость секреции аттрактанта амебами (обычно $f(n) = \alpha n$).
- k — скорость естественного распада аттрактанта.

2. Постановка начально-краевых задач

Для решения системы в ограниченной области Ω необходимо задать:

1. **Начальные условия:** $n(\mathbf{r},0) = n_0(\mathbf{r})$ и $c(\mathbf{r},0) = c_0(\mathbf{r})$ (обычно задается почти однородное распределение с малым шумом).

2. **Краевые условия:** Чаще всего используются условия **Неймана** (отсутствие потока через границы):
$$\frac{\partial n}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{132}$$
Это означает, что популяция замкнута в сосуде (чашке Петри).

3. Диссипативные структуры

Диссипативные структуры (термин И. Пригожина) — это устойчивые пространственно-неоднородные структуры, возникающие в открытых нелинейных системах вдали от термодинамического равновесия.

В модели амеб возникновение структур происходит через механизм **неустойчивости Тьюринга**:

- При малых значениях χ диффузия сглаживает неоднородности, и система остается однородной.
- При превышении критического порога хемотаксиса ($\chi > \chi_{crit}$) случайное скопление амеб начинает выделять больше аттрактанта, что привлекает еще больше амеб.
- Этот процесс положительной обратной связи приводит к распаду однородного слоя на отдельные **агрегаты (пятна)** или кольцевые волны.

Вопрос 37. Модель распространения примеси в грунтовых водах

Процесс переноса загрязняющего вещества (поллютанта) в пористой среде описывается уравнением адвекции-дисперсии (конвективной диффузии) с учетом сорбции и распада.

1. Уравнение переноса

Для концентрации примеси $C(\mathbf{r},t)$ основное уравнение имеет вид:

$$R\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla C) - \mathbf{v} \cdot \nabla C - \lambda RC \tag{133}$$

Где компоненты модели означают:

- $\mathbf{v}$ — **скорость фильтрации** (адвекция). Описывает перенос вещества вместе с основным потоком воды. Согласно закону Дарси: $\mathbf{v} = -k\nabla H$, где k — коэффициент фильтрации, H — напор.
- $\mathbf{D}$ — **тензор гидродинамической дисперсии**. В пористой среде перемешивание происходит сильнее, чем при обычной молекулярной диффузии, из-за искривленности каналов пор.

- R — **фактор задержки (retardation factor)**. Учитывает сорбцию примеси на частицах грунта ($R = 1 + \rho K_d/n$, где n — пористость).
- λ — **коэффициент распада** (для радиоактивных веществ или биоразлагаемых органических соединений).

2. Механизмы дисперсии

Гидродинамическая дисперсия складывается из:

1. **Молекулярной диффузии** (за счет хаотического теплового движения).
2. **Механической дисперсии** (за счет разности скоростей в порах разного диаметра и изменения направления потока вокруг зерен грунта).

3. Начальные и краевые условия

- **Начальные:** $C(\mathbf{r}, 0) = C_0(\mathbf{r})$ (фоновое загрязнение).
- **Граничные:**
  - Условие I рода (Дирихле): $C|_{boundary} = C_{source}$ (постоянный источник, например, протечка резервуара).
  - Условие II рода (Неймана): $\frac{\partial C}{\partial \nu} = 0$ (непроницаемый слой глины).

Вопрос 38. Динамические уравнения фильтрации и переноса примеси

Процесс описывается системой связанных уравнений: уравнением баланса массы жидкости (уравнение фильтрации) и уравнением сохранения массы растворенного вещества.

1. Уравнение движения жидкости (Закон Дарси)

Движение воды в пористой среде при малых числах Рейнольдса подчиняется закону Дарси. Скорость фильтрации $\vec{v}$ пропорциональна градиенту давления (или напора):

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla P = -K\nabla H \tag{134}$$

Где:

- k — проницаемость среды; μ — динамическая вязкость;
- K — коэффициент фильтрации $[m/day]$;
- $H = z + \frac{P}{\rho g}$ — гидравлический напор.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в пористой среде:

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = Q \tag{135}$$

где S_s — удельная водоотдача, Q — источники/стоки.

2. Уравнение переноса примеси

Загрязняющее вещество переносится за счет двух механизмов: **адвекции** (движение вместе с потоком) и **гидродинамической дисперсии** (размытие фронта).

Уравнение баланса массы примеси для концентрации $C(\vec{r}, t)$:

$$\frac{\partial(mC)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}C - m\mathbf{D}\nabla C) + S \tag{136}$$

Где:

- m — активная пористость среды;
- $\mathbf{D}$ — тензор гидродинамической дисперсии;
- S — член, учитывающий химические реакции, сорбцию или распад.

3. Гидродинамическая дисперсия

В пористой среде компоненты тензора дисперсии $\mathbf{D}$ зависят от скорости фильтрации. Коэффициент дисперсии в направлении потока (продольная дисперсия D_L) обычно значительно больше поперечной (D_T):

$$D_L = \alpha_L|\vec{v}| + D^*, \quad D_T = \alpha_T|\vec{v}| + D^* \tag{137}$$

Здесь α — параметр дисперсности грунта, а D^* — молекулярная диффузия.

Вопрос 39. Моделирование процессов в очистных сооружениях

Основой биологической очистки является жизнедеятельность микроорганизмов (активного ила), которые перерабатывают органические загрязнения. Математическая модель должна учитывать изменение концентрации субстрата (загрязнения) и биомассы.

1. Кинетика Моно

Скорость роста микроорганизмов μ зависит от концентрации лимитирующего субстрата S. В большинстве моделей используется уравнение Моно:

$$\mu = \mu_{\max}\frac{S}{K_s + S} \tag{138}$$

Где $\mu_{\max}$ — максимальная удельная скорость роста, K_s — константа полунасыщения (концентрация, при которой $\mu = \mu_{\max}/2$).

2. Система уравнений в аэротенке

Рассмотрим аэротенк (реактор идеального перемешивания). Динамика биомассы X и субстрата S описывается системой:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = (\mu - k_d - \frac{Q}{V})X \\ \frac{dS}{dt} = \frac{Q}{V}(S_{in} - S) - \frac{1}{Y}\mu X \end{cases} \tag{139}$$

Где:

- $Q/V = D$ — скорость протока (разбавления);
- k_d — коэффициент отмирания биомассы;
- Y — экономический коэффициент (выход биомассы на единицу субстрата);
- S_{in} — концентрация загрязнения на входе.

3. Процессы седиментации

После аэротенка смесь воды и ила поступает во вторичный отстойник. Его моделирование основано на теории потока твердых частиц:

$$J = X \cdot v_s(X) \tag{140}$$

где $v_s(X)$ — скорость осаждения, которая резко уменьшается при росте концентрации ила (стесненное осаждение).