МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра компьютерных технологий и систем

Лабораторная работа № 2

Вариант 5

Выполнено Благодарным Артёмом, студентом 4 курса 3 группы,

дисциплина «Математическое моделирование»

Преподаватель: Каркоцкий А.Г.

Минск, 2025 г.

Задание №1

Определить амплитудный и фазовые спектры и построить их графики для следующего сигнала:

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le \tau_\text{i}, \\ -A, & 2\tau_\text{i} \le t \le 3\tau_\text{i}, \\ 0, & \text{в остальных } t. \end{cases}$$

Решение

Комплексный спектр (непрерывное преобразование Фурье)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}\,dt = A\int_0^{\tau_\text{i}} e^{-j\omega t}\,dt - A\int_{2\tau_\text{i}}^{3\tau_\text{i}} e^{-j\omega t}\,dt.$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{\tau_\text{i}} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1-e^{-j\omega\tau_\text{i}}}{j\omega}, \qquad \int_{2\tau_\text{i}}^{3\tau_\text{i}} e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j2\omega\tau_\text{i}}\frac{1-e^{-j\omega\tau_\text{i}}}{j\omega}.$$

Следовательно,

$$S(\omega) = A\frac{1-e^{-j\omega\tau_\text{i}}}{j\omega}\Big(1-e^{-j2\omega\tau_\text{i}}\Big).$$

Упростим это выражение, используя формулы половинных углов:

$$1-e^{-j\omega\tau_\text{i}} = 2je^{-j\omega\tau_\text{i}/2}\sin\frac{\omega\tau_\text{i}}{2}, \qquad 1-e^{-j2\omega\tau_\text{i}} = 2je^{-j\omega\tau_\text{i}}\sin(\omega\tau_\text{i}).$$

Подставляя, получаем

$$S(\omega) = A\frac{(2je^{-j\omega\tau_\text{i}/2}\sin\frac{\omega\tau_\text{i}}{2})(2je^{-j\omega\tau_\text{i}}\sin(\omega\tau_\text{i}))}{j\omega}.$$

Так как $j^2 = -1$ и деление на j даёт множитель $1/j = -j$, после сокращений:

$$S(\omega) = 4A\,j\,\frac{\sin\frac{\omega\tau_\text{i}}{2}\,\sin(\omega\tau_\text{i})}{\omega}\,e^{-j\frac{3\omega\tau_\text{i}}{2}}.$$

Амплитудный спектр:

$$|S(\omega)| = \frac{4A\left|\sin\frac{\omega\tau_\text{i}}{2}\,\sin(\omega\tau_\text{i})\right|}{|\omega|}$$

(при $\omega = 0$ значение равно 0 — так как интеграл постоянной части $A\tau_\text{i} - A\tau_\text{i} = 0$).

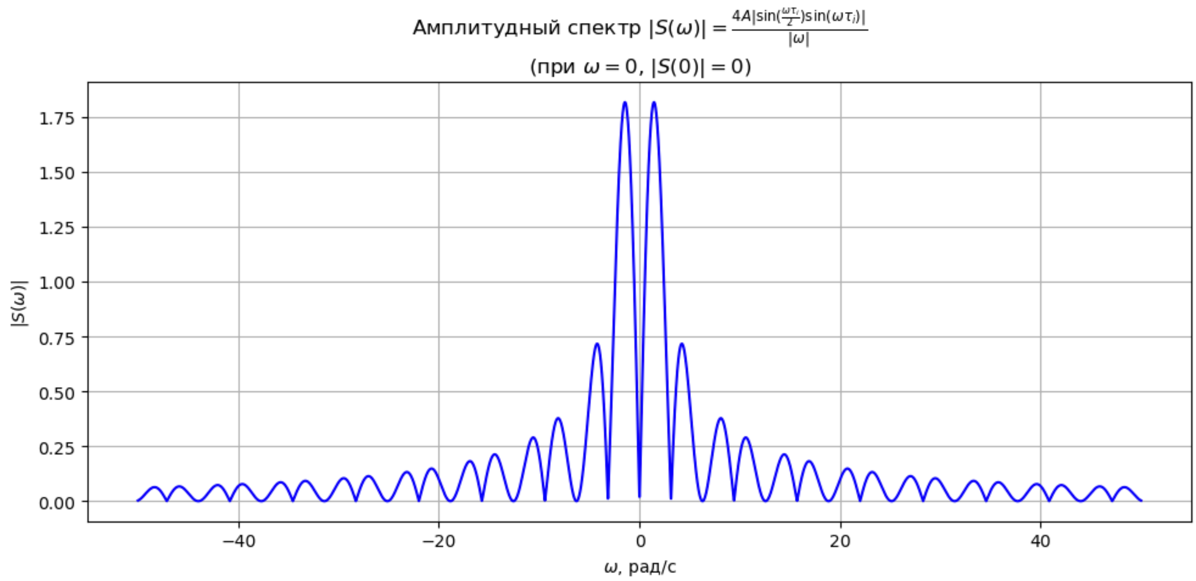

Рис. 1: Амплитудный спектр $|S(\omega)| = \frac{4A|\sin(\frac{\omega\tau_i}{2})\sin(\omega\tau_i)|}{|\omega|}$

Фазовый спектр. Начнём с выражения для комплексного спектра:

$$S(\omega) = 4A\,j\,\frac{\sin\frac{\omega\tau_\mathrm{i}}{2}\sin(\omega\tau_\mathrm{i})}{\omega}\,e^{-j\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}}.$$

Преобразуем его, чтобы выделить действительную и мнимую части. Для этого раскроем экспоненту:

$$e^{-j\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}} = \cos\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2} - j\sin\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}.$$

Умножим на j:

$$je^{-j\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}} = j\cos\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2} + \sin\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}.$$

Подставим это в выражение для спектра:

$$S(\omega) = 4A\frac{\sin\frac{\omega\tau_\mathrm{i}}{2}\sin(\omega\tau_\mathrm{i})}{\omega}\left[\sin\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2} + j\cos\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}\right].$$

Таким образом, действительная и мнимая части равны:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} S(\omega) = 4A\dfrac{\sin\frac{\omega\tau_\mathrm{i}}{2}\sin(\omega\tau_\mathrm{i})}{\omega}\sin\dfrac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}, \\ \operatorname{Im} S(\omega) = 4A\dfrac{\sin\frac{\omega\tau_\mathrm{i}}{2}\sin(\omega\tau_\mathrm{i})}{\omega}\cos\dfrac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}. \end{cases}$$

Фазу спектра находим по известной формуле:

$$\angle S(\omega) = -\arctan\frac{\operatorname{Im} S(\omega)}{\operatorname{Re} S(\omega)}.$$

Подставляем выражения для действительной и мнимой частей:

$$\angle S(\omega) = -\arctan\frac{\cos\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}}{\sin\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}} = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{3\omega\tau_\mathrm{i}}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Это основное выражение для фазы при положительном значении множителя $\dfrac{\sin\frac{\omega\tau_{\text{i}}}{2}\sin(\omega\tau_{\text{i}})}{\omega}$.

Если этот множитель отрицателен, фаза изменяется на π, что соответствует переходу вектора спектра в противоположную полуплоскость.

Окончательно, с учётом возможного изменения знака:

$$\angle S(\omega) = -\frac{3\omega\tau_{\text{i}}}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi\, n(\omega)\,,$$

где $n(\omega) = 0$ при положительном значении $\dfrac{\sin\frac{\omega\tau_{\text{i}}}{2}\sin(\omega\tau_{\text{i}})}{\omega}$ и $n(\omega) = 1$ при отрицательном. Такое добавление π обеспечивает правильное направление вектора и непрерывность фазового спектра при переходе через нули амплитуды.

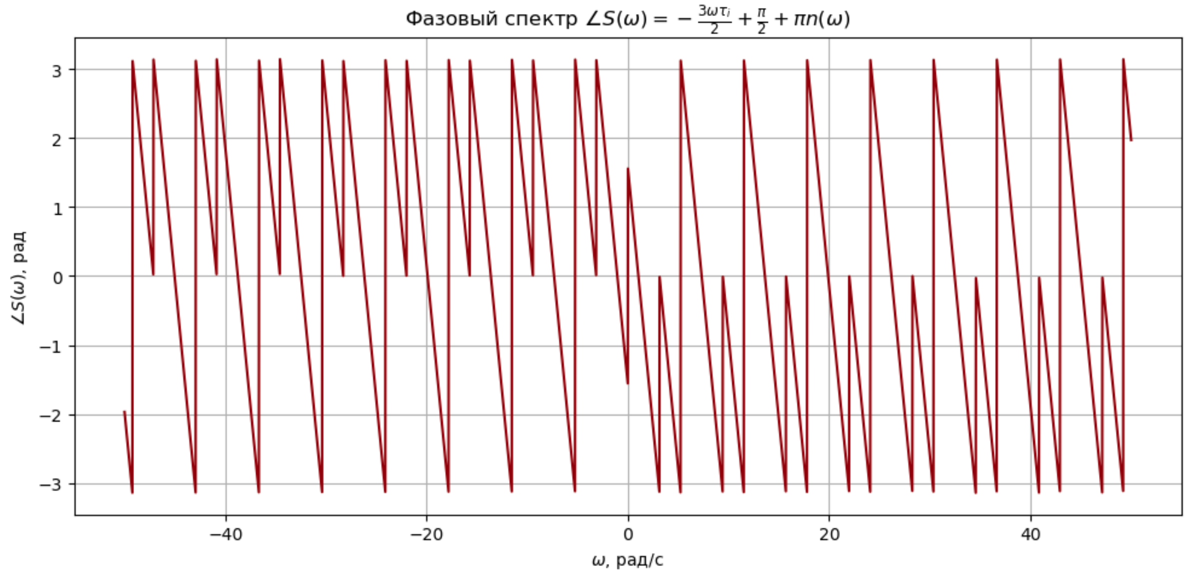

Рис. 2: Фазовый спектр $\angle S(\omega) = -\frac{3\omega\tau_i}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n(\omega)$

Задание №2

Определить АКФ, коэффициент корреляции, интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}, \tau_{\text{кор},\epsilon}$ и эффективную ширину спектра непериодического детерминированного сигнала:

$$s(t) = \begin{cases} A\sin(\dfrac{2\pi}{T}t), & 0 \le t \le \dfrac{3T}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Построить графики АКФ и $k(\tau)$.

Решение

Положим $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ и $L = \dfrac{3T}{2}$. Автокорреляция определяется как

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt.$$

Поскольку $s(t)$ ненулевой только при $t \in [0, L]$, а $s(t+\tau)$ ненулевой при $t \in [-\tau, L-\tau]$, интегрирование ведётся по пересечению интервалов:

$$t \in \big[\max(0, -\tau),\, \min(L, L-\tau)\big].$$

Следовательно $R(\tau) = 0$ при $|\tau| > L$, и при $|\tau| \le L$ имеем

$$R(\tau) = A^2 \int_a^b \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))\, dt,$$

где

$$(a, b) = \begin{cases} (0,\ L-\tau), & \tau \ge 0, \\ (-\tau,\ L), & \tau < 0. \end{cases}$$

Воспользуемся тождеством

$$\sin x \sin(x+\alpha) = \tfrac{1}{2}\big(\cos\alpha - \cos(2x+\alpha)\big).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{A^2}{2}\int_a^b \Big(\cos(\omega_0\tau) - \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\Big)\, dt \\ &= \frac{A^2}{2}\Big[\cos(\omega_0\tau)(b-a) - \frac{1}{2\omega_0}\big(\sin(2\omega_0 b + \omega_0\tau) - \sin(2\omega_0 a + \omega_0\tau)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

Случай A: $\tau \ge 0$. Тогда $a = 0$, $b = L - \tau$:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{A^2}{2}\Big[\cos(\omega_0\tau)(L-\tau) - \frac{1}{2\omega_0}\big(\sin(2\omega_0(L-\tau) + \omega_0\tau) - \sin(\omega_0\tau)\big)\Big] \\ &= \frac{A^2}{2}\Big[\cos(\omega_0\tau)(L-\tau) - \frac{1}{2\omega_0}\big(\sin(2\omega_0 L - \omega_0\tau) - \sin(\omega_0\tau)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Так как $2\omega_0 L = 6\pi$, имеем $\sin(2\omega_0 L - \omega_0\tau) = \sin(6\pi - \omega_0\tau) = -\sin(\omega_0\tau)$, и после упрощения:

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}\Big((L-\tau)\cos(\omega_0\tau) + \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big).$$

Случай B: $\tau < 0$. Тогда $a = -\tau$, $b = L$:

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \frac{A^2}{2}\Big[\cos(\omega_0\tau)(L+\tau) - \frac{1}{2\omega_0}\big(\sin(2\omega_0 L + \omega_0\tau) - \sin(-2\omega_0\tau + \omega_0\tau)\big)\Big] \\
&= \frac{A^2}{2}\Big[\cos(\omega_0\tau)(L+\tau) - \frac{1}{2\omega_0}\big(\sin(\omega_0\tau) - (-\sin(\omega_0\tau))\big)\Big] \\
&= \frac{A^2}{2}\Big((L+\tau)\cos(\omega_0\tau) - \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big).
\end{aligned}$$

Для объединения двух случаев введём знак функции:

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \begin{cases} +1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau = 0, \\ -1, & \tau < 0. \end{cases}$$

Тогда обе формулы объединяются:

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}\Big((L - |\tau|)\cos(\omega_0\tau) + \operatorname{sgn}(\tau)\,\frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big), \quad |\tau| \le L,$$

а при $|\tau| > L$ $R(\tau) = 0$.

При $\tau = 0$:

$$R(0) = \frac{A^2 L}{2},$$

что соответствует энергии сигнала на интервале длины L. При $|\tau| = L$: пересечение интервалов исчезает, и $R(\tau) = 0$.

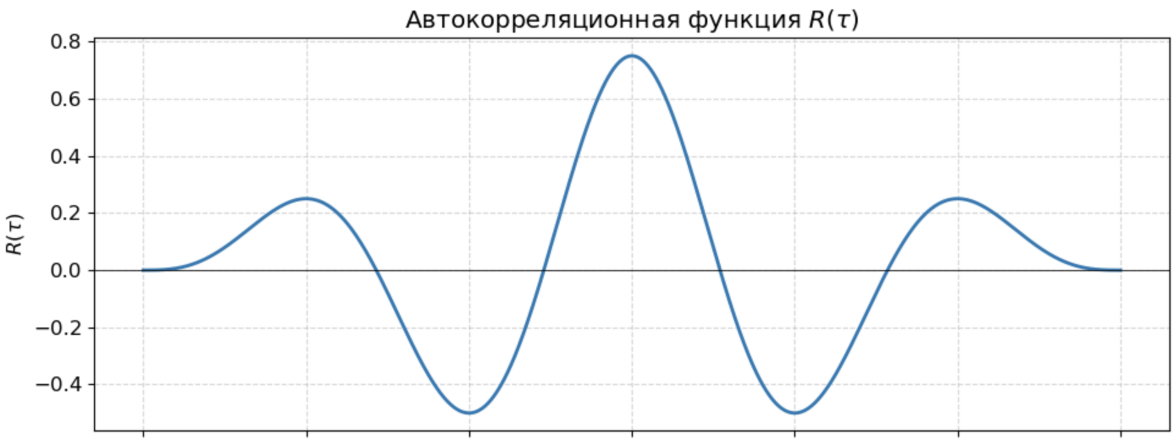

Рис. 3: Автокорреляционная функция $R(\tau)$

Нормированный коэффициент корреляции.

$$k(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}.$$

Подставляя $L = \dfrac{3T}{2}$ и $R(0) = \dfrac{3A^2 T}{4}$, можно записать

$$k(\tau) = \frac{2}{3T}\Big((L - |\tau|)\cos(\omega_0\tau) + \operatorname{sgn}(\tau)\,\frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big), \qquad |\tau| \le L,$$

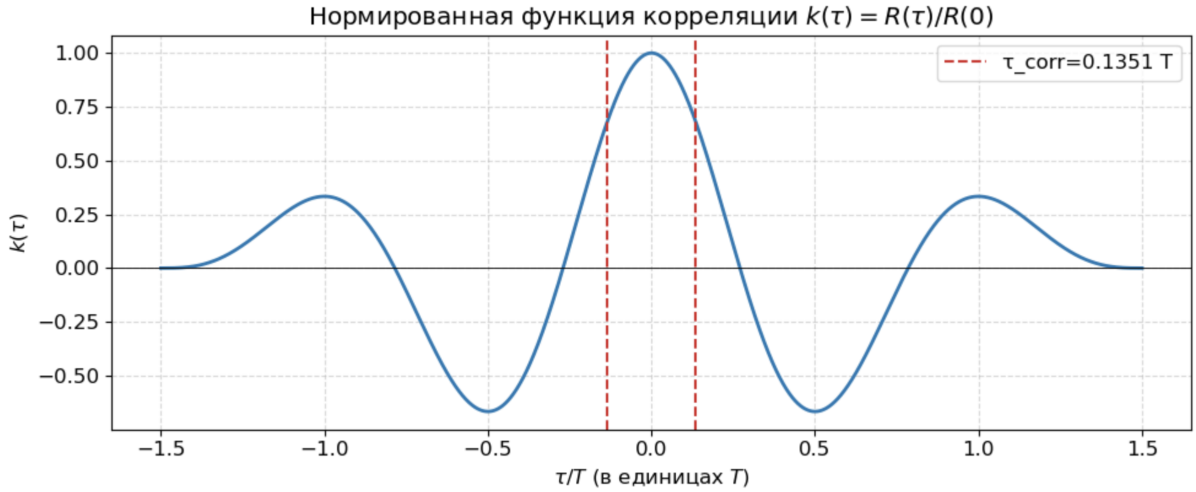

Рис. 4: Нормированная функция корреляции $k(\tau) = R(\tau)/R(0)$

и $k(\tau) = 0$ при $|\tau| > L$.

Интегральный интервал корреляции τ. Берём определение

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\, d\tau = \int_{-L}^{L} k(\tau)\, d\tau.$$

Поскольку $R(\tau) = 0$ при $|\tau| > L$, имеем

$$\tau = \int_{-L}^{L} k(\tau)\, d\tau = \frac{1}{R(0)} \int_{-L}^{L} R(\tau)\, d\tau.$$

Поэтому достаточно вычислить

$$I = \int_{-L}^{L} R(\tau)\, d\tau.$$

Имеем аналитическое выражение для $R(\tau)$ (для $|\tau| \le L$):

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}\Big((L - |\tau|)\cos(\omega_0\tau) + \operatorname{sgn}(\tau)\,\frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad L = \frac{3T}{2}.$$

Упростим из-за чётности. Заметим, что обе функции под интегралом чётны, поэтому

$$I = \int_{-L}^{L} R(\tau)\, d\tau = 2\int_{0}^{L} R(\tau)\, d\tau = A^2 \int_{0}^{L} \Big((L-\tau)\cos(\omega_0\tau) + \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big)\, d\tau.$$

Обозначим

$$I_1 = \int_0^L (L-\tau)\cos(\omega_0\tau)\, d\tau, \qquad I_2 = \int_0^L \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\, d\tau,$$

тогда $I = A^2(I_1 + I_2)$.

Вычисление I_1 при помощи интегрирование по частям. Положим $u = L-\tau$, $dv = \cos(\omega_0\tau)\,d\tau$. Тогда $du = -d\tau$, $v = \dfrac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}$. Применяя формулу интегрирования по частям,

$$\begin{aligned}I_1 &= (L-\tau)\frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\Big|_0^L + \frac{1}{\omega_0}\int_0^L \sin(\omega_0\tau)\,d\tau \\ &= 0 + \frac{1}{\omega_0}\int_0^L \sin(\omega_0\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{1-\cos(\omega_0 L)}{\omega_0} = \frac{1-\cos(\omega_0 L)}{\omega_0^2}.\end{aligned}$$

Вычисление I_2.

$$I_2 = \frac{1}{\omega_0}\int_0^L \sin(\omega_0\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{1-\cos(\omega_0 L)}{\omega_0} = \frac{1-\cos(\omega_0 L)}{\omega_0^2}.$$

Отсюда $I_2 = I_1$.

Сумма и упрощение

$$I = A^2\big(I_1+I_2\big) = A^2\cdot 2\cdot\frac{1-\cos(\omega_0 L)}{\omega_0^2} = \frac{2A^2}{\omega_0^2}\big(1-\cos(\omega_0 L)\big).$$

Подстановка конкретного значения $\omega_0 L$.

$$\omega_0 L = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{2} = 3\pi, \qquad \cos(3\pi) = -1.$$

Следовательно $1-\cos(\omega_0 L) = 1-(-1) = 2$, и

$$\int_{-L}^{L} R(\tau)\,d\tau = I = \frac{2A^2}{\omega_0^2}\cdot 2 = \frac{4A^2}{\omega_0^2}.$$

Найдём τ. Поскольку $R(0) = \dfrac{A^2 L}{2}$, получаем

$$\tau = \frac{1}{R(0)}\int_{-L}^{L} R(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\dfrac{A^2 L}{2}}\cdot\frac{4A^2}{\omega_0^2} = \frac{8}{L\,\omega_0^2}.$$

Подставляя $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ и $L = \dfrac{3T}{2}$,

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad \tau = \frac{8}{\dfrac{3T}{2}\cdot\dfrac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{4T}{3\pi^2}.$$

Таким образом

$$\tau = \frac{4T}{3\pi^2} \approx 0.1350949\,T.$$

Интервал корреляции по порогу ε. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{e}$. Тогда $\tau_{,\varepsilon}$ — минимальное положительное решение уравнения $|k(\tau)| = \frac{1}{e}$. Численно получили

$$\tau_{,1/e} \approx 0.20016\,T.$$

Эффективная ширина спектра. В приближении «обратное время корреляции» можно оценить как

$$\Delta\omega_{\text{eff}} \approx \frac{1}{\tau = \ 4T/(3\pi^2)} = \frac{3\pi^2}{4T}.$$

Численно:

$$\Delta\omega_{\text{eff}} \approx \frac{3\pi^2}{4T} \approx 7.4022\, T^{-1}.$$