Контрольная работа по курсу
«Математическое моделирование».
Преподаватель Чеб Е.С.

Вариант 1

1. Функция $f(t) = t$, $|t| \leqslant \pi$, разложена в ряд Фурье как периодическая функция. Чему равна сумма ряда Фурье в точках $-\pi, 0, \pi$? Ответ поясните.

2. Функция $f(t)$, $|t| \leqslant \pi$, разложена в ряд Фурье как периодическая функция. Ее сумма ряда Фурье

$$S(t; f) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (1+ik)}{1+k^2} e^{ikt}.$$

Вычислить амплитудный спектр в точках $\omega_k = \pm k$, $k = 0, 1, 2$.

3. Найти функцию $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ из уравнения

$$\int_0^\infty x(t) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t = e^{-\omega}, \omega > 0.$$

4. Известно, что функция

$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| \leqslant T/2; \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases}$$

имеет спектр

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2A}{\omega} \sin \frac{T\omega}{2}, & \omega \neq 0; \\ AT, & \omega = 0. \end{cases}$$

Используя свойства преобразования Фурье, вычислить спектр функции

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ 0, & t < 0, t > \pi. \end{cases}$$

5. Доказать, что для функции

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leqslant \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

справедливо представление

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\omega t)}{1-\omega^2} \sin(\omega t)\, \mathrm{d}\omega.$$

6. Найти функцию $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ из уравнения

$$x(t) - \frac{3}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|t-\tau|}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} e^t, & t \leqslant 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Функция $f(t) = t^2 - 2t$, $|t| \leqslant \pi$, разложена в ряд Фурье как периодическая функция. Чему равна сумма ряда Фурье в точках $-\pi, 0, \pi$? Ответ поясните.

2. Функция $f(t)$, $|t| \leqslant \pi$, разложена в ряд Фурье как периодическая функция. Ее сумма ряда Фурье

$$S(t; f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-ikt}}{2ik\pi} e^{ikt}.$$

Вычислить амплитудный спектр в точках $\omega_k = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

3. Найти функцию $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ из уравнения

$$\int\limits_0^{\infty} x(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

4. Известно, что функция $f(t) = e^{-t^2/2}$ имеет спектр $\hat{f}(\omega) = e^{-\omega^2/2}$. Используя свойства преобразования Фурье, вычислить спектр функции $g(t) = e^{-\beta t^2/2}$, $\beta > 0$.

5. Доказать, что для функции $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, справедливо представление

$$f(t) = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{a^2 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega.$$

6. Найти функцию $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ из уравнения

$$x(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|t-\tau|}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} e^{-t}, & t \geqslant 0; \\ 0, & \mathrm{t<0}. \end{cases}$$