МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №2
Вариант 5
«Метод Якоби»
Задание № СЛАУ-04

Выполнил: Благодарный Артём Андреевич,
студент 3 курса, 3 группы
Дисциплина: «Численные методы»
Преподаватель: Будник А.М.

Минск, 2024

Постановка задачи

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений Ax = b с основной матрицей A системы вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8894 & 0.0000 & -0.2323 & 0.1634 & 0.2723 \\ -0.0545 & 0.5808 & 0.0000 & -0.1107 & 0.0363 \\ 0.0182 & -0.1634 & 1.0527 & 0.0200 & 0.0635 \\ 0.0545 & 0.0000 & -0.1325 & 1.0527 & 0.0000 \\ 0.0363 & -0.0545 & 0.2632 & -0.0218 & 0.7623 \end{pmatrix}$$

и столбца свободных членов b вида:

$$b = \begin{pmatrix} 4.2326 \\ -4.1037 \\ -2.6935 \\ 1.6916 \\ 3.1908 \end{pmatrix}$$

методом Якоби.

Алгоритм решения

Метод Якоби — это итерационный метод для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $Ax = b$, где A — квадратная матрица, x — вектор неизвестных, и b — вектор правой части. В методе Якоби каждая новая итерация решения строится на основе значений предыдущей итерации, при этом обновление каждой компоненты вектора решения x происходит независимо.

Разбиение матрицы и итерационная формула

Для метода Якоби матрицу A разлагают на диагональную часть D и оставшуюся часть R:

$$A = D + R,$$

где:

- D — диагональная матрица, содержащая только диагональные элементы матрицы A,
- $R = A - D$ — матрица, содержащая оставшиеся элементы A, кроме диагональных (верхняя и нижняя треугольные части).

Тогда систему $Ax = b$ можно переписать как:

$$Dx = b - Rx.$$

Преобразуем её в итерационную форму:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Rx^{(k)}).$$

Для вычислений, каждая компонента x_i на $(k+1)$-й итерации определяется выражением:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right),$$

где a_{ii} — диагональный элемент матрицы A, a_{ij} — недиагональные элементы строки i матрицы A.

Условие сходимости метода Якоби

Для анализа сходимости метода Якоби введем итерационную матрицу B:

$$B = D^{-1}R.$$

Метод Якоби сходится, если последовательность приближений $x^{(k)}$ стремится к точному решению x. Согласно **теореме 3**, достаточным условием сходимости является условие, что **норма матрицы B меньше единицы**:

$$\|B\| < 1.$$

Если это условие выполнено, то метод Якоби сходится для любого начального приближения $x^{(0)}$, и последовательность $x^{(k)}$ будет сходиться к точному решению x системы.

Листинг

```
import numpy as np
A = np.array([[0.8894, 0.0000, -0.2323, 0.1634, 0.2723],
              [-0.0545, 0.5808, 0.0000, -0.1107, 0.0363],
              [0.0182, -0.1634, 1.0527, 0.0200, 0.0635],
              [0.0545, 0.0000, -0.1325, 1.0527, 0.0000],
              [0.0363, -0.0545, 0.2632, -0.0218, 0.7623]])
b = np.array([4.2326, -4.1037, -2.6935, 1.6916, 3.1908])

def jacobi_method(A, b, max_iter=10):
    n = len(A)
    x = [b[i] / A[i, i] for i in range(n)]
    new_x = [0] * n
    for iter in range(max_iter):
        new_x = [0] * n
        for i in range(n):
           new_x[i] = (b[i] - x @ A[i] + x[i] * A[i, i]) / A[i, i]
        x = new_x.copy()
    return x

def condition_method(A):
    B = A.copy()
    n = len(A)
    for i in range(n):
        B[i] = - B[i] / B[i, i]
        B[i, i] = 0
    return np.linalg.norm(B)

def residual(A, b, x):
    return b - A @ x

x10 = jacobi_method(A, b, max_iter=10)
x100 = jacobi_method(A, b, max_iter=100)
x1000 = jacobi_method(A, b, max_iter=1000)

print(f"Norm matrix B: {condition_method(A)}")

print(f"Solution: {x100}")

print(f"10 iterations r: {residual(A, b, x10)}\n 100 iterations r: {residual(A, b,
x100)}\n 1000 iterations r: {residual(A, b, x1000)}")
```

Результаты и их анализ

На описанных данных алгоритм выдаёт следующее решение:

$$x = \begin{pmatrix} 1.9996 \\ -6.9999 \\ -4.0003 \\ 0.9999 \\ 4.9999 \end{pmatrix}$$

Норма матрицы B: $\|B\| = 0.6474$

Она меньше 1, следовательно условие сходимости метода Якоби выполняются.

Со следующим вектором невязки R:

r = Ax – b

Метод Гаусса: $$r = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 2.22 \times 10^{-16} \\ -4.44 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Невязка после 10 итераций:

$$r = \begin{pmatrix} -2.0362 \times 10^{-6} \\ -5.2808 \times 10^{-7} \\ -7.5307 \times 10^{-7} \\ 4.3493 \times 10^{-9} \\ 8.0966 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Невязка после 100 итераций:

$$r = \begin{pmatrix} -8.8818 \times 10^{-16} \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -2.2204 \times 10^{-16} \\ -4.4409 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

Невязка после 1000 итераций:

$$r = \begin{pmatrix} -8.8818 \times 10^{-16} \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -2.2204 \times 10^{-16} \\ -4.4409 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

Вывод по полученным результатам

Метод Якоби успешно сходится к решению системы, что подтверждается уменьшением невязки (вектора r) до значений, близких к нулю с ростом числа итераций. Уже на 10-й итерации величина невязки становится малой, а к 100 и 1000 итерациям элементы невязки практически равны нулю. Это указывает на то, что метод Якоби приближается к точному решению и сходится при данном разложении матрицы A. Метод Якоби является полезным и надёжным инструментом для решения систем линейных уравнений, особенно в задачах с разреженными матрицами, где метод Гаусса может быть менее эффективным. Однако метод Якоби сходится медленнее, чем прямые методы, и его сходимость обеспечивается, когда матрица A удовлетворяет условию диагонального преобладания.