МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра биомедицинской информатики

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

Лабораторная работа

Благодарного Артёма Андреевича
студента 3-го курса

Преподаватель:
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

Задание 1. №1.5

Привести к одному из канонических видов уравнение:

$$3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u = -y$$

Решение:
Характеристическое уравнение:

$$3(dy)^2 - dy \cdot dx = 0$$

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$3t^2 - t = 0$$

Дискриминант $D = 1 > 0$, следовательно, уравнение **гиперболического типа**.
Решение уравнения:

$$t(3t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Соответствующие характеристические переменные:

$$\begin{aligned} t_1 = 0: &\quad y = C_1 \\ t_2 = \frac{1}{3}: &\quad y = \frac{1}{3}x + C_2 \end{aligned}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y, & \xi_x &= 0, & \xi_y &= 1 \\ \eta &= y - \frac{x}{3}, & \eta_x &= -\frac{1}{3}, & \eta_y &= 1 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{c|l} 3 & u_x = -\frac{1}{3}u_\eta \\ 1 & u_y = u_\eta + u_\xi \\ 3 & u_{xx} = \frac{1}{9}u_{\eta\eta} \\ 1 & u_{xy} = -\frac{1}{3}u_{\eta\xi} - \frac{1}{3}u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & 1 \\ u_\eta & : & -1 + 1 = 0 \\ u_{\xi\xi} & : & 0 \\ u_{\xi\eta} & : & -\frac{1}{3} \\ u_{\eta\eta} & : & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \end{array}$$

$$-\frac{1}{3}u_{\xi\eta} + u_\xi - u = -\xi$$

$$u_{\xi\eta} - 3u_\xi + 3u - 3\xi = 0$$

Ответ: $u_{\xi\eta} - 3u_\xi + 3u - 3\xi = 0.$

Задание 2. №1.29

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$$

Решение:
Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + 2\sin x\, dydx - \cos^2 x\,(dx)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x\frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$t^2 + 2\sin x\, t - \cos^2 x\ = 0$$

Дискриминант $D = 4 > 0$, следовательно, уравнение **гиперболического типа**.
Решение квадратного уравнения:

$$t_{1,2} = -\sin x \pm 1$$

Соответствующие характеристики:

$$\begin{aligned} t_1 = -\sin x - 1 : &\quad y = \cos x - x + C_1 \\ t_2 = -\sin x + 1 : &\quad y = \cos x + x + C_2 \end{aligned}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} &\xi = y - \cos x + x, \qquad && \xi_x = \sin x + 1\,, \quad \xi_y = 1, \quad \xi_{xx} = \cos x \\ &\eta = y - \cos x - x, \qquad && \eta_x = \sin x - 1\,, \quad \eta_y = 1, \quad \eta_{xx} = \cos x \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = (\sin x + 1)u_\xi + (\sin x - 1)u_\eta \\ -\cos x & u_y = u_\eta + u_\xi \\ 1 & u_{xx} = (\sin x + 1)^2 u_{\xi\xi} + 2(\sin x + 1)(\sin x - 1)u_{\xi\eta} + (\sin x - 1)^2 u_{\eta\eta} + \\ & + \cos x\, u_\xi + \cos x\, u_\eta \\ -2\sin x & u_{xy} = (\sin x + 1)u_{\xi\xi} + 2\sin x\, u_{\xi\eta} + (\sin x - 1)u_{\eta\eta} \\ -\cos^2 x & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & -\cos x\ + \cos x\ = 0 \\ u_\eta & : & -\cos x\ + \cos x\ = 0 \\ u_{\xi\xi} & : & (\sin x + 1)^2 - 2\sin x\,(\sin x\ + 1) - \cos^2 x\ = 0 \\ u_{\xi\eta} & : & 2(\sin x + 1)(\sin x - 1) - 4\sin^2 x\ - 2\cos^2 x\ = -4 \\ u_{\eta\eta} & : & (\sin x - 1)^2 - 2\sin x\,(\sin x\ - 1) - \cos^2 x\ = 0 \end{array}$$

$-4u_{\xi\eta} = 0$

Ответ: $u_{\xi\eta} = 0$.

Задание 3. №1.50

Привести к каноническому виду уравнение в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$\operatorname{sign} y\, u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Решение:

Характеристическое уравнение:

$$\operatorname{sign} y (dy)^2 - 2dydx + (dx)^2 = 0$$

$$\operatorname{sign} y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$\operatorname{sign} y \cdot t^2 - 2t + 1 = 0$$

Дискриминант:

$$D = 4 - 4 \operatorname{sign} y$$

I. $\operatorname{sign} y = 0, \quad y = 0, \quad D = 4 > 0,$ следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

$$-2dy\, dx + (dx)^2 = 0$$
$$dx(dx - 2dy) = 0$$

Соответствующие характеристики:

$$dx = 0 \qquad x = C_1$$
$$dy = \frac{1}{2}dx \quad y = \frac{1}{2}x + C_2$$

Выбираем новые переменные:

$$\xi = y - \frac{1}{2}x, \quad \xi_x = -\frac{1}{2}, \quad \xi_y = 1$$
$$\eta = x, \qquad \eta_x = 1, \qquad \eta_y = 0$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{c|l} 0 & u_x = -\frac{1}{2}u_\xi + u_\eta \\ 0 & u_y = u_\xi \\ 0 & u_{xx} = \frac{1}{4}u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = -\frac{1}{2}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ 1 & u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & 0 \\ u_\eta & : & 0 \\ u_{\xi\xi} & : & 1 - 1 = 0 \\ u_{\xi\eta} & : & 2 \\ u_{\eta\eta} & : & 0 \end{array}$$

$2u_{\xi\eta} = 0$

Ответ: $u_{\xi\eta} = 0$

II. $\operatorname{sign} y = 1, \quad y > 0, \quad D = 0,$ следовательно, уравнение **параболического типа**.

Характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 1 &= 0 \\ (t-1)^2 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Характеристики:

$$\begin{aligned} &dy = dx \quad y = x + C_1 \\ &x = C_2 \end{aligned}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} &\xi = y - x \qquad \xi_x = -1, \quad \xi_y = 1 \\ &\eta = x \qquad\quad \eta_x = 1, \qquad \eta_y = 0 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = -u_\xi + u_\eta \\ 0 & u_y = u_\xi \\ 1 & u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ 1 & u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & 0 \\ u_\eta & : & 0 \\ u_{\xi\xi} & : & 1 + 1 - 2 = 0 \\ u_{\xi\eta} & : & -2 + 2 = 0 \\ u_{\eta\eta} & : & 1 \end{array}$$

$u_{\eta\eta} = 0$

Ответ: $u_{\eta\eta} = 0$.

III. $\operatorname{sign} y = -1, \quad y < 0, \quad D = 8,$ следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

Характеристическое уравнение:

$$-t^2 - 2t + 1 = 0$$

Решение квадратного уравнения:

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Соответствующие характеристически:

$$\begin{aligned} dy &= (-1 - \sqrt{2})dx \qquad y = (-1 - \sqrt{2})x + C_1 \\ dy &= (-1 + \sqrt{2})dx \qquad y = (-1 + \sqrt{2})x + C_2 \end{aligned}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y + (1 + \sqrt{2})x, \qquad \xi_x = 1 + \sqrt{2}, \qquad \xi_y = 1 \\ \eta &= y + (1 - \sqrt{2})x, \qquad \eta_x = 1 - \sqrt{2}, \qquad \eta_y = 1 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u_x = (1+\sqrt{2})u_\xi + (1-\sqrt{2})u_\eta \\
0 & u_y = u_\xi + u_\eta \\
-1 & u_{xx} = (1+\sqrt{2})^2 u_{\xi\xi} + 2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})u_{\xi\eta} + (1-\sqrt{2})^2 u_{\eta\eta} \\
2 & u_{xy} = (1+\sqrt{2})u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + (1-\sqrt{2})u_{\eta\eta} \\
1 & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{array}
$$

Пересчёт коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
u_\xi &: 0 \\
u_\eta &: 0 \\
u_{\xi\xi} &: -(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + 1 = 0 \\
u_{\eta\eta} &: -(1-\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + 1 = 0 \\
u_{\xi\eta} &: -2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + 4 + 2 = 8
\end{aligned}
$$

$8u_{\xi\eta} = 0$

Ответ: $u_{\xi\eta} = 0$.

Канонический вид уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$
\begin{cases}
u_{\xi\eta} = 0, \quad y = 0, \quad D = 4 \\
u_{\xi\eta} = 0, \quad y < 0, \quad D = 8 \\
u_{\eta\eta} = 0, \quad y > 0, \quad D = 0
\end{cases}
$$

Задание 4. №5

Привести к каноническому виду и упростить уравнение:

$$au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$$

Решение:
Характеристическое уравнение:

$$ady^2 - 2adydx + a(dx)^2 = 0$$

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a\left(\frac{dy}{dx}\right) + a = 0$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$at^2 - 2at + a = 0$$

Дискриминант $D = 4a^2 - 4a^2 = 0$, следовательно, уравнение **параболического типа**.
Решение квадратного уравнения:

$$a(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

Соответствующие характеристики:

$$dy = dx$$

$$y = x + C_1$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{array}{lll} \xi = y - x, & \xi_x = -1, & \xi_y = 1 \\ \eta = x, & \eta_x = 1, & \eta_y = 0 \end{array}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{r|l} b & u_x = -u_\xi + u_\eta \\ c & u_y = u_\xi \\ a & u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 2a & u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ a & u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & -b + c \\ u_\eta & : & b \\ u_{\xi\xi} & : & a - 2a + a = 0 \\ u_{\eta\eta} & : & -2a + 2a = 0 \\ u_{\xi\eta} & : & a \end{array}$$

$$au_{\eta\eta} + bu_\eta + (c - b)u_\xi + u = 0$$

Подстановка $u = e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta} \cdot v(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} u_\xi &= (\alpha_1 v + v_\xi)e^{\alpha_1\xi+\alpha_2\eta}, \\ u_\eta &= (\alpha_2 v + v_\eta)e^{\alpha_1\xi+\alpha_2\eta}, \\ u_{\eta\eta} &= (\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_\eta + v_{\eta\eta})e^{\alpha_1\xi+\alpha_2\eta}. \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение:

$$(a(\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_\xi + v_{\eta\eta}) + b(\alpha_2 v + v_\eta) + (c-b)(\alpha_1 v + v_\xi) + v)e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta} = 0.$$

Группировка по $v, v_\xi, v_\eta, v_{\eta\eta}$:

$$v\left(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + (c-b)\alpha_1 + 1\right) + v_\eta\left(2\alpha_2 + b\right) + v_\xi(c-b) + v_{\eta\eta}a = 0.$$

Зануляем коэффицинты:

$$\begin{cases} a\,\alpha_2^2 + b\alpha_2 + (c-b)\alpha_1 + 1 = 0 & \implies \quad \alpha_1 = -\frac{2b^2 - ab^2 - 4}{4(c-b)} \\ 2\alpha_2 + b = 0 & \implies \quad \alpha_2 = -\frac{b}{2}, \end{cases}$$

$av_{\eta\eta} + (c-b)\,v_\xi = 0.$

Ответ: $v_{\eta\eta} + \frac{(c-b)}{a}\,v_\xi = 0.$

Задание 5. №3.5

Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$$

Решение:
Характеристическое уравнение:

$$(dx)^2 + 2d(dxdy) = 0$$

$$dx(dx + 2dy) = 0$$

Рассмотрим случаи:

$$\begin{cases} dx = 0 & \Rightarrow \quad x = C \\ dx = -2dy & \Rightarrow \quad x = -2y + C \end{cases}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{array}{lll} \xi = x, & \xi_x = 1, & \xi_y = 0 \\ \eta = x + 2y, & \eta_x = 1, & \eta_y = 2 \end{array}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{r|l} 2 & u_x = u_\xi + u_\eta \\ -1 & u_y = 2u_\eta \\ 0 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ -2 & u_{xy} = 2u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} \\ 1 & u_{yy} = 4u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & 2 \\ u_\eta & : & 2 - 2 = 0 \\ u_{\xi\xi} & : & 0 \\ u_{\eta\eta} & : & -4 \\ u_{\xi\eta} & : & -4 + 4 = 0 \end{array}$$

$$-4u_{\xi\eta} + 2u_\xi = 4e^x$$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2}u_\xi = -e^x$$

$$\left(u_\eta - \frac{1}{2}u\right)_\xi = -e^x$$

Сделаем замену: $u_\eta - \frac{1}{2}u = v$

$$v_\xi = -e^x$$

Интегрируем:

$$v = \int -e^\xi d\xi = -e^\xi + C(\eta)$$

Обратная подставновка:

$$u_\eta - \frac{1}{2}u = -e^\xi + C(\eta)$$

Общее решение неоднородного уравнения представим в виде суммы:

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{частн}}$$

где $u_{\text{общ}}$ — общее решение однородного уравнения, а $u_{\text{частн}}$ — частное решение. Рассмотрим однородное уравнение:

$$u_\eta - \frac{1}{2}u = 0$$
$$u_\eta = \frac{1}{2}u$$
$$\frac{du}{d\eta} = \frac{1}{2}u$$
$$\frac{du}{\eta} = \frac{d\eta}{2}$$

Решение однородного уравнения:

$$ln(u) = \frac{1}{2}\eta + C_1(\xi)$$
$$u = e^{\frac{1}{2}\eta + C_1(\xi)}$$
$$u = e^{\frac{1}{2}\eta}C_2(\xi)$$

Найдём частное решение:

$$u_\eta = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}C_2 + e^{\frac{1}{2}\eta}C_{2\eta},$$
$$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}C_2 + e^{\frac{1}{2}\eta}C_{2\eta} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}C_2 = -e^{\xi} + C(\eta),$$
$$e^{\frac{1}{2}\eta}C_{2\eta} = -e^{\xi} + C(\eta),$$
$$C_{2\eta} = (C(\eta) - e^{\xi})e^{-\frac{1}{2}\eta},$$
$$C_2(\xi, \eta) = \int (C(\eta) - e^{\xi})e^{-\frac{1}{2}\eta}d\eta.$$

Таким образом, общее решение уравнения:

$$u = e^{\frac{1}{2}\eta}(C_1(\xi) + C_2(\xi, \eta))$$

$$u = e^{\frac{1}{2}(x+2y)}(C_1(x) + C_2(x, x+2y))$$

Ответ: $u = e^{\frac{1}{2}(x+2y)}(C_1(x) + C_2(x, x+2y))$.

Задание 6. №3.30

В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнения:

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$$

Решение:
Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + 2\sin x(dx \cdot dy) - (3 + \cos^2 x)(dx)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x\left(\frac{dy}{dx}\right) - (3 + \cos^2 x) = 0$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$t^2 + 2\sin x t - (3 + \cos^2 x) = 0$$

$$D = 4\sin^2 x + 4 \cdot (3 + \cos^2 x) = 16 \Rightarrow \text{уравнение гиперболическое}$$

Корни уравнения:

$$t_{1,2} = -\sin x \pm 2$$

Рассмотрим уравнения характеристик:

$$\begin{cases} dy = (-\sin x + 2)dx, \\ dy = (-\sin x - 2)dx. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} y = -\cos x + 2x + C_1, \\ y = -\cos x - 2x + C_2. \end{cases}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} &\xi = y - \cos x + 2x, \quad \xi_x = \sin x + 2, \quad \xi_y = 1, \quad \xi_{xx} = \cos x, \\ &\eta = y - \cos x - 2x, \quad \eta_x = \sin x - 2, \quad \eta_y = 1, \quad \eta_{xx} = \cos x. \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = (\sin x + 2)u_\xi + (\sin x - 2)u_\eta \\ -\cos x & u_y = u_\xi + u_\eta \\ 1 & u_{xx} = (\sin x + 2)^2 u_{\xi\xi} + 2(\sin x + 2)(\sin x - 2)u_{\xi\eta} + (\sin x - 2)^2 u_{\eta\eta} + \\ & + \cos x u_\xi + \cos x u_\eta \\ -2\sin x & u_{xy} = (\sin x + 2)u_{\xi\xi} + 2\sin x u_{\xi\eta} + (\sin x - 2)u_{\eta\eta} \\ -(3 + \cos^2 x) & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl} u_\xi & : & -\cos x + \cos x = 0 \\ u_\eta & : & -\cos x + \cos x = 0 \\ u_{\xi\xi} & : & (\sin x + 2)^2 - 2\sin x(\sin x + 2) - (3 + \cos^2 x) = 0 \\ u_{\xi\eta} & : & 2(\sin x + 2)(\sin x - 2) - 4\sin^2 x - 2(3 + \cos^2 x) = -16 \\ u_{\eta\eta} & : & (\sin x - 2)^2 - 2\sin x(\sin x - 2) - (3 + \cos^2 x) = 0 \end{array}$$

Подставляя, получаем:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_\xi = C(\xi)$$

$$u = \int C(\xi)\, d\xi$$

$$u = C_1(\xi)\ + C_2(\eta)$$

Ответ: $u = C_1(y - \cos x + 2x) + C_2(y - \cos x - 2x)$.

Задание 7

Решить задачу Коши:

$$x\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + y\,u_{yy} = 0, \quad x>0,\ y>0,$$
$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \qquad u_y\Big|_{y=\frac{1}{x}} = -x^4$$

Решение:

Характеристическое уравнение:

$$x\,(dy)^2 - 2(x+y)\,(dy\cdot dx) + y\,(dx)^2 = 0.$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(x+y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0.$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$xt^2 - 2(x+y)t + y = 0.$$

Дискриминант $D = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0$, следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

Решение уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{y}{x} \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Соответствующие характеристические переменные:

$$t_1 = \frac{y}{x}: \quad y = xC_1$$
$$t_2 = 1: \quad y = x + C_2$$

Выбираем новые переменные:

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \xi_x = -\frac{y}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{x}, \quad \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\eta = y - x, \quad \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x = -\frac{y}{x^2}u_\xi - u_\eta \\
0 & u_y = \frac{1}{x}u_\xi + u_\eta \\
x & u_{xx} = \frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\xi \\
(x+y) & u_{xy} = -\frac{y}{x^3}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}) - u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\xi \\
y & u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl}
u_\xi & : & \frac{2y}{x^3}x - \frac{1}{x^2}(x+y) = \frac{(y-x)}{x^2} \\
u_\eta & : & 0 \\
u_{\xi\xi} & : & \frac{y^2}{x^3} - \frac{y(x+y)}{x^3} + \frac{y}{x^2} = 0 \\
u_{\xi\eta} & : & \frac{2y}{x} + (x+y)(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}) + \frac{2y}{x} = -\frac{(y-x)^2}{x^2} \\
u_{\eta\eta} & : & x - (x+y) + y = 0
\end{array}$$

Обратная замена переменных:

$$x = \frac{\eta}{\xi - 1}, \qquad y = \frac{\xi\eta}{\xi - 1}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{(y-x)^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{(y-x)}{x^2}u_\xi = 0 \\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{y-x}u_\xi = 0 \\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{\eta}u_\xi = 0 \end{aligned}$$

Замена $u_\xi = v$:

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{v}{\eta}$$

$$v_\eta - \frac{1}{\eta}v = 0$$

$$\ln v = \ln \eta + C$$

$$v = \eta \cdot C(\xi)$$

Тогда:

$$u_\xi = \eta \cdot C(\xi)$$

$$u = \int \eta \cdot C(\xi) d\xi + C(\eta)$$

$$u = \eta \cdot C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

Обратная замена:

$$u = (y - x) \cdot C_1(\frac{y}{x}) + C_2(y - x)$$

Используя начальные условия, подставим $y = \frac{1}{x}$ в выражение для $u(x, y)$:

$$\left(\frac{1}{x} - x\right) C_1\left(\frac{1}{x^2}\right) + C_2\left(\frac{1}{x} - x\right) = x^3$$

Обозначим

$$\xi = y - x = \frac{1 - x^2}{x}, \quad \eta = \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\xi C_1(\eta) + C_2(\xi) = x^3$$

Второе условие даёт производную:

$$C_1(\eta) + \frac{1 - x^2}{x^2}C_1'(\eta) + C_2'(\xi) = -x^4$$

Используем замену переменных $s = \xi$, $t = \eta$ и выразим x через t:

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad s = \frac{t - 1}{\sqrt{t}}$$

Запишем уравнения в терминах t:

$$C_2(s) + sC_1(t) = \frac{1}{t^{3/2}},$$
$$C_2'(s) + C_1(t) + (t-1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

Решим систему уравнений.

1. Выразим $C_2(s)$:

$$C_2(s) = \frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t).$$

2. Подставим это выражение:

$$\left(\frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t)\right)' + C_1(t) + (t-1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Так как $s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, имеем $ds/dt = \frac{(t-1)'\sqrt{t}-(t-1)(\sqrt{t})'}{t} = \frac{\sqrt{t}-\frac{t-1}{2\sqrt{t}}}{t}$, что упрощается до $ds/dt = \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}$.

3. Производная $C_2(s)$ будет:

$$C_2'(s) = \left(\frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t)\right)' = -\frac{3}{2}t^{-5/2} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t) - sC_1'(t).$$

Подставляя это, получаем

$$-\frac{3}{2}t^{-5/2} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t) - sC_1'(t) + C_1(t) + (t-1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

4. Переписываем уравнение:

$$(t-1-s)C_1'(t) + \left(1 - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}\right)C_1(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{3}{2}t^{-5/2}.$$

Так как $s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$, имеем $t-1-s = \frac{(t-1)(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}$.

5. Разделяем переменные и интегрируем уравнение относительно $C_1(t)$:

$$C_1'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

6. Подставляем $C_1(t)$ в уравнение для $C_2(s)$ и находим $C_2(s) = 0$.

Подставляя найденные функции, получаем решение:

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

Ответ: $u = \frac{x^2}{y}$.

Задание 8. №5

Решить задачу Гурса:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \quad y < 5x, \quad x > 0$$
$$u\Big|_{y=0} = \cos x, \qquad u\Big|_{y=5x} = \cos 2x$$

Решение:

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + 6(dx \cdot dy) + 5(dx)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5 = 0$$

Подстановка $t = \frac{dy}{dx}$:

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \text{уравнение гиперболическое}$$

Корни уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения характеристик:

$$\begin{cases} dy = dx, \\ dy = 5dx. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} y = x + C_1, \\ y = 2x + C_2. \end{cases}$$

Выбираем новые переменные:

$$\xi = y - 5x, \quad \xi_x = -5, \qquad \xi_y = 1$$
$$\eta = y - x, \quad \eta_x = -1, \qquad \eta_y = 1$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{c|l} 0 & u_x = -5u_\eta - u_\xi \\ 0 & u_y = u_\eta + u_\xi \\ 1 & u_{xx} = 25u_{\xi\xi} + 10u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 6 & u_{xy} = -5u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} \\ 5 & u_{xy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: \ 0 \\ u_\eta &: \ 0 \\ u_{\xi\xi} &: \ 25 - 30 + 5 = 0 \\ u_{\xi\eta} &: \ 10 - 24 + 10 = -4 \\ u_{\eta\eta} &: \ 1 - 6 + 5 = 0 \end{aligned}$$

Подставляя, получаем:

$$-4u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_\xi = C(\xi)$$

$$u = \int C(\xi)\, d\xi$$

$$u = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

$$u = C_1(y-5x) + C_2(y-x)$$

Используя начальные условия:

$$C_1(-5x) + C_2(-x) = \cos x$$
$$C_1(0) + C_2(4x) = \cos 2x$$

Выразим C_1 и C_2:

$$C_1(z) = \cos(-\frac{z}{5}) - C_2(\frac{z}{5})$$
$$C_2(z) = \cos(\frac{z}{2}) + C_1(0)$$

Тогда имеем:

$$u = \cos(\frac{5x-y}{5}) - C_2(\frac{y-5x}{5}) + \cos(\frac{y-x}{2}) - C_1(0)$$
$$u = \cos(\frac{5x-y}{5}) - \cos(\frac{y-5x}{10}) + C_1(0) + \cos(\frac{y-x}{2}) - C_1(0)$$
$$u = \cos(\frac{5x-y}{5}) - \cos(\frac{y-5x}{10}) + \cos(\frac{y-x}{2})$$

Ответ: $u = \cos(\frac{5x-y}{5}) - \cos(\frac{y-5x}{10}) + \cos(\frac{y-x}{2})$.

Задание 9. №2.5

Привести к каноническому виду и упростить уравнение:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z + 4u = 0$$

Решение:

$$\Phi(t) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 6t_1t_2 + 2t_1t_3 + 2t_2t_3 =$$
$$= (t_1^2 + 2t_1(3t_2 + t_3) + (3t_2 + t_3)^2) - (3t_2 + t_3)^2 + t_2^2 + t_3^2 + 6t_1t_2 + 2t_2t_3 =$$
$$= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - 9t_2^2 - 6t_2t_3 - t_3^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_2t_3 =$$
$$= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - 8t_2^2 - 4t_2t_3 =$$
$$= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - (8t_2^2 + 2(2\sqrt{2}t_2)(\frac{t_3}{\sqrt{2}}) + \frac{t_3^2}{2}) + \frac{t_3^2}{2} =$$
$$= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - (\sqrt{8}t_2 + \frac{t_3}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{t_3}{\sqrt{2}})^2 = \tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2$$

Замена τ_1, τ_2, τ_3:

$$\tau_1 = t_1 + 3t_2 + t_3$$
$$\tau_2 = \sqrt{8}t_2 + \frac{t_3}{2}$$
$$\tau_3 = \frac{t_3}{2}$$

Обратная замена t_1, t_2, t_3:

$$t_1 = \tau_1 - \frac{3}{\sqrt{8}}\tau_2 - \frac{1}{\sqrt{8}}\tau_3$$
$$t_2 = \frac{\tau_2 - \tau_3}{2\sqrt{2}}$$
$$t_3 = \sqrt{2}\tau_3$$

Матрица преобразования:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Замена переменных:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Тогда y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned}
&y_1 = x\\
&y_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}y\\
&y_3 = -\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}y + \sqrt{2}z
\end{aligned}$$

Выразим x, y, z:

$$\begin{aligned}
&x = y_1\\
&y = 2\sqrt{2}(y_2 + \frac{3}{\sqrt{8}}y_1)\\
&z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_2 + \sqrt{2}y_1)
\end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{c|l}
2 & u_x = u_{y_1} - \frac{3}{\sqrt{8}}u_{y_2} - \frac{1}{\sqrt{8}}u_{y_3}\\
2 & u_y = \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3}\\
2 & u_z = \sqrt{2}u_{y_3}\\
1 & u_{xx} = u_{y_1y_1} - \frac{3}{\sqrt{8}}u_{y_1y_2} - \frac{1}{\sqrt{8}}u_{y_1y_3} - \frac{3}{\sqrt{8}}u_{y_2y_1} + \frac{9}{8}u_{y_2y_2} + \frac{3}{8}u_{y_2y_3} - \frac{1}{\sqrt{8}}u_{y_3y_1} + \frac{3}{8}u_{y_3y_2} +\\
 & +\frac{1}{8}u_{y_3y_3} = u_{y_1y_1} + \frac{9}{8}u_{y_2y_2} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} - \frac{6}{\sqrt{8}}u_{y_1y_2} - \frac{2}{\sqrt{8}}u_{y_1y_3} + \frac{3}{4}u_{y_2y_3}\\
1 & u_{yy} = \frac{1}{8}u_{y_2y_2} - \frac{1}{8}u_{y_2y_3} - \frac{1}{8}u_{y_2y_3} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} = \frac{1}{8}u_{y_2y_2} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} - \frac{1}{4}u_{y_2y_3}\\
1 & u_{zz} = 2u_{y_3y_3}\\
6 & u_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_2y_1} - \frac{3}{8}u_{y_2y_2} - \frac{1}{8}u_{y_2y_3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3y_1} + \frac{3}{8}u_{y_2y_3} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} =\\
 & = -\frac{3}{8}u_{y_2y_2} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_1y_2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_1y_3} + \frac{1}{4}u_{y_2y_3}\\
2 & u_{yz} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3y_2} - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3y_3} = \frac{1}{2}u_{y_3y_2} - \frac{1}{2}u_{y_3y_3}\\
2 & u_{xz} = \sqrt{2}u_{y_3y_1} - \frac{3}{2}u_{y_3y_2} - \frac{1}{2}u_{y_3y_3} = -\frac{1}{2}u_{y_3y_3} + \sqrt{2}u_{y_1y_3} - \frac{3}{2}u_{y_2y_3}
\end{array}$$

Пересчет коэффициентов:

$$\begin{array}{rcl}
u_{y_1} & : & 2\\
u_{y_2} & : & -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\\
u_{y_3} & : & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\\
u_{y_1y_1} & : & 1\\
u_{y_2y_2} & : & \frac{9}{8} + \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = -1\\
u_{y_3y_3} & : & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 2 + \frac{3}{4} - 1 - 1 = 1\\
u_{y_1y_2} & : & -\frac{6}{\sqrt{8}} + \frac{6}{\sqrt{8}} = 0\\
u_{y_1y_3} & : & -\frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{6}{\sqrt{8}} + 2\sqrt{2} = 0\\
u_{y_2y_3} & : & \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{6}{4} + 1 - 3 = 0
\end{array}$$

Подставляя, получаем:

$$u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} + u_{y_3y_3} + 2u_{y_1} - \sqrt{2}u_{y_2} + \sqrt{2}u_{y_3} + 4u = 0$$

Введем функцию $u = e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} v(y_1, y_2, y_3)$ и обозначим $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -$, $v(y_1, y_2, y_3) = v$, тогда $u = e^{-}v$. Посчитаем производные:

$$
\begin{aligned}
u_{y_1} &= (\alpha_1 v + v y_1)e^- \\
u_{y_2} &= (\alpha_2 v + v y_2)e^- \\
u_{y_3} &= (\alpha_2 v + v y_2)e^- \\
u_{y_1 y_1} &= (\alpha_1^2 v + 2\alpha_1 v_{y_1} + v_{y_1 y_1})e^- \\
u_{y_2 y_2} &= (\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_{y_2} + v_{y_2 y_2})e^- \\
u_{y_3 y_3} &= (\alpha_3^2 v + 2\alpha_3 v_{y_3} + v_{y_3 y_3})e^-
\end{aligned}
$$

Подставим в уравнение:

$$
\begin{aligned}
\big(&\alpha_1^2 v + 2\alpha_1 v_{y_1} + v_{y1y1} - \alpha_2^2 v - 2\alpha_2 v_{y_2} - v_{y_2 y_2} \\
&+ \alpha_3^2 v + 2\alpha_3 v_{y_3} + v_{y_3 y_3} + 2\alpha_1 v + 2 v_{y_1} \\
&-\sqrt{2}\alpha_2 v - \sqrt{2} v_{y_2} + \sqrt{2}\alpha_3 v + 2 v_{y_3} + 4v\Big)\, e^{-t} = 0.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты при $v, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, v_{y_1 y_1}, v_{y_2 y_2}, v_{y_3 y_3},$:

$$
\begin{aligned}
v &: \ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_1 - \sqrt{2}\alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_3 + 4 \\
v_{y_1} &: \ 2\alpha_1 + 2 \\
v_{y_2} &: \ -2\alpha_2 + \sqrt{2} \\
v_{y_3} &: \ 2\alpha_3 + \sqrt{2} \\
v_{y_1 y_1} &: \ 1 \\
v_{y_2 y_2} &: \ -1 \\
v_{y_3 y_3} &: \ -1
\end{aligned}
$$

Возьмём $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда уравнение примет вид:

$$
3v + v_{y_1 y_1} - v_{y_2 y_2} + v_{y_3 y_3} = 0
$$

Ответ: $v_{y_1 y_1} - v_{y_2 y_2} + v_{y_3 y_3} + 3v = 0.$