Лабораторная работа №5

Вариант 5

Благодарный Артём

5 октября, 2025

Вариант $N = 5$. $5 mod(4) = 1$.

Задача 1(№1)

Каждый из двух игроков записывпает одно из чисел 0, 1, 2, не показывая написанного противнику. Затем игроки называет предполагаемую сумму записанных чисел. Угадавший игрок получает 10 очков. Если же никто не угадал, то выигрыш каждого из игроков равен нулю. Определить число чистых стратегий каждого из игроков. Определить разрешимость игры в чистых стратегиях. Если игра разрешима в чистых стратегих, то найти решение.

Решение

Два игрока одновременно (и независимо) выполняют по два действия:

- выбирают записать одно целое число из множества $\{0, 1, 2\}$ (это их «скрытый ход»);
- называют предполагаемую сумму записанных чисел (это их «угадывание»). Сумма двух скрытых чисел может принимать значения $0, 1, 2, 3, 4$.

Правила выплат (интерпретируем как *нуль-суммовую* игру):

- Если ровно один игрок угадывает истинную сумму, то этот игрок получает $+10$, а противник — -10.
- Если оба угадывают или оба не угадывают, то выплаты равны нулю.

(Такая интерпретация делает игру нуль-суммовой и стандартной для матричного анализа.)

Обозначим стратегию одного игрока как пара (a, g), где $a \in \{0, 1, 2\}$ — записанное число, а $g \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — называнное предположение о сумме.

1. Число чистых стратегий

Каждый игрок может выбрать одно из 3 значений для скрытого числа и одно из 5 значений для предполагаемой суммы, следовательно число чистых стратегий равно

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Итак, у каждого игрока по 15 чистых стратегий.

2. Выигрыш при произвольном профиле чистых стратегий

Пусть игрок 1 играет стратегию (a, g_1), игрок 2 — (b, g_2). Истинная сумма равна $s = a + b$. Выплата игрока 1 (обозначим её u_1):

$$u_1((a, g_1), (b, g_2)) = \begin{cases} +10, & g_1 = s,\ g_2 \neq s, \\ -10, & g_2 = s,\ g_1 \neq s, \\ 0, & \text{в остальных случаях (оба угадали или оба не угадали).} \end{cases}$$

(Игра нуль-суммовая, поэтому $u_2 = -u_1$.)

3. Разрешимость в чистых стратегиях (существование равновесия в чистых стратегиях)

Докажем, что у данной нуль-суммовой игры **не существует** равновесия в чистых стратегиях.

Пусть для противного, что существует профиль чистых стратегий (a, g_1) для игрока 1 и (b, g_2) для игрока 2, являющийся равновесием Нэша. Рассмотрим значение суммы $s = a + b$.

Рассмотрим все возможные случаи и покажем, что в каждом из них один из игроков имеет выгодный односторонний откат (противоречие равновесию):

Случай A. $g_1 = s$ и $g_2 \neq s$. Тогда $u_1 = +10$. Но тогда игрок 2 может изменить свою стратегию, выбрав новое число $b' \in \{0, 1, 2\}$ такое, что $a+b' \neq g_1$ (такое b' всегда найдётся, потому что g_1 — фиксированное значение, а $a + b'$ принимает не более трёх различных значений; по крайней мере для двух значений b' сумма не равна g_1). Затем игрок 2 установит своё угадывание $g_2' = a + b'$, получит $g_2' = s'$ (новая сумма), тогда игрок 2 окажется единственным угадавшим и получит +10, т. е. улучшит выплату. Следовательно профиль не является равновесием.

Случай B. $g_2 = s$ и $g_1 \neq s$. Аналогично предыдущему, игрок 1 имеет выгодный откат и может получить +10 — противоречие.

Случай C. $g_1 \neq s$ и $g_2 \neq s$ (никто не угадал). Тогда игрок 1 может выбрать некоторое $a' \in \{0, 1, 2\}$ такое, что $a' + b \neq g_2$ (такое a' существует по тем же соображениям), и затем заявить $g_1' = a'+b$; в результате он будет единственным угадавшим и получит +10. Следовательно исходный профиль не был равновесием.

Случай D. $g_1 = g_2 = s$ (оба угадали). Тогда любой игрок, например игрок 1, может изменить своё записанное число на $a' \neq a$ и при этом заявить новое угадывание $g_1' = a' + b$ (напомним: ход соперника фиксирован — он оставляет своё число b и угадывание $g_2 = s$). Так как g_2 остаётся равным старой сумме $s = a + b$, а новая сумма $s' = a' + b \neq s$, то игрок 1 окажется единственным угадавшим и получит +10. Следовательно профиль тоже не является равновесием.

Во всех возможных ситуациях найдена односторонняя выгодная отклоняющая стратегия, значит *нельзя* иметь профиль чистых стратегий, в котором никто не заинтересован менять ход. Следовательно равновесия в чистых стратегиях не существует.

Задача 2(3)

Два игрока одновременно и независимо друг от друга показывают от одного до пяти пальцев. Если общее число указанных пальцев чётно, то сумму равную этому числу выигрывает первый игрок, если нечётно, то второй игрок. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

Решение

Два игрока одновременно и независимо выбирают целое число от 1 до 5. Если суммарное число показанных пальцев s чётно, то первый игрок выигрывает сумму s (в очках); если s нечётно, то выигрыш получает второй игрок и равен s. Рассматриваем нуль-суммовую игру, поэтому платёж игрока 1 равен

$$u_1(i,j) = \begin{cases} +(i+j), & i+j \text{ чётно}, \\ -(i+j), & i+j \text{ нечётно}, \end{cases}$$

где $i \in \{1,\dots,5\}$ — действие первого игрока, $j \in \{1,\dots,5\}$ — действие второго.

Требуется:

- перечислить чистые стратегии каждого игрока;
- определить, существует ли равновесие в чистых стратегиях;
- найти смешанные оптимальные стратегии и значение игры.

1. Число чистых стратегий

Каждому игроку доступно 5 действий (показать $1, 2, 3, 4$ или 5 пальцев). Следовательно у каждого по 5 чистых стратегий.

2. Матрица выплат

Построим матрицу выплат игрока 1 (строки — действие игрока 1, столбцы — действие игрока 2). Элемент на месте (i,j) равен $u_1(i,j) = (-1)^{i+j}(i+j)$. Явно:

$$U = \left[u_1(i,j)\right]_{i,j=1}^{5} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ -3 & 4 & -5 & 6 & -7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & -9 \\ 6 & -7 & 8 & -9 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Разрешимость в чистых стратегиях

Покажем, что чистого равновесия не существует.

Если (i^*, j^*) — профиль чистых стратегий, то рассмотрим сумму $s = i^* + j^*$. В зависимости от того, кто угадал (чётность суммы), всегда существует односторонний выгодный отход:

- Если $i^* + j^*$ чётно, то игрок 1 выигрывает > 0. Тогда игрок 2 может изменить своё действие на такое j' (существует), что новая сумма $i^* + j'$ не равна $i^* + j^*$ и при этом подобрать своё предполагаемое поведение (в данной формулировке предполагается, что угадывание полной суммы задаётся самим выбором, см. замечание). В результате игрок 2 может стать единственным угадавшим и получить положительный выигрыш — то есть у него есть выгодный откат.

- Аналогично если сумма нечётна.

Более формально: смотря на матрицу U, для любого фиксированного столбца (или строки) найдётся строка (столбец), дающая противоположный по знаку и большее по модулю значение, поэтому ни одна пара чистых стратегий не устойчива. Следовательно равновесие в чистых стратегиях отсутствует.

(Интуитивно: имея возможность выбирать число, игрок всегда может изменить своё действие так, чтобы изменить паритет суммы и стать единственным победителем.)

4. Решение в смешанных стратегиях

Обозначим смешанную стратегию первого игрока $p = (p_1, \ldots, p_5)$ (вероятности выбора $1, \ldots, 5$), второго — $q = (q_1, \ldots, q_5)$. Значение игры (в нуль-суммовой постановке) равно

$$V = \max_p \min_j \sum_{i=1}^5 p_i u_1(i,j) = \min_q \max_i \sum_{j=1}^5 q_j u_1(i,j).$$

Найдём оптимальную стратегию первого игрока, используя симметрии матрицы. Заметим, что матрица имеет чередующийся (по знаку) и линейный по $i+j$ характер. Попробуем искать оптимальную стратегию первого игрока с симметрией

$$p_1 = p_5 = a, \qquad p_2 = p_4 = b, \qquad p_3 = c,$$

где $2a + 2b + c = 1$, $a, b, c \geq 0$.

Вычислим математическое ожидание выигрыша игрока 1 при чистой стратегии второго игрока j (то есть при столбце j):

$$E_j = \sum_{i=1}^5 p_i u_1(i,j).$$

При указанной симметрии (после алгебраических преобразований) получаем

$$\begin{aligned} E_1 &= 8(a-b) + 4c, \\ E_2 &= -10(a-b) - 5c, \\ E_3 &= 12(a-b) + 6c, \\ E_4 &= -14(a-b) - 7c, \\ E_5 &= 16(a-b) + 8c. \end{aligned}$$

Пусть $d := a - b$. Тогда

$$E_1 = 8d + 4c, \quad E_2 = -10d - 5c, \quad E_3 = 12d + 6c, \quad E_4 = -14d - 7c, \quad E_5 = 16d + 8c.$$

Если выбрать $c = -2d$, то для всех j получается $E_j = 0$. Подставляя $c = -2d$ в нормировочное условие $2a + 2b + c = 1$ и используя $d = a - b$, получаем

$$2(a+b) + (-2d) = 1 \implies 2(a+b) - 2(a-b) = 1 \implies 4b = 1 \implies b = \tfrac{1}{4}.$$

Отсюда $a = b + d = \frac{1}{4} + d$, $c = -2d$. Необходимые неотрицательности $a \geq 0,\ c \geq 0$ дают диапазон $d \in [-\frac{1}{4}, 0]$. В частности, выбор

$$d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = \tfrac{1}{4},\ c = 0$$

даёт допустимую стратегию:

$$\boxed{p^* = \left(\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}\right).}$$

При этой стратегии для любого чистого действия второго игрока ожидаемый выигрыш игрока 1 равен 0. Значит игрок 1 гарантирует не менее 0.

Аналогично (по симметрии задачи и матрицы выплат) в качестве стратегии игрока 2 можно взять ту же стратегию

$$\boxed{q^* = \left(\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}\right).}$$

и тогда для любого чистого действия первого игрока ожидаемый выигрыш игрока 1 также окажется равным 0. Следовательно игрок 2 гарантирует, что выигрышь игрока 1 не превысит 0.

Отсюда по мини-макс теореме для конечных нуль-суммовых игр получаем, что

$$V = 0,$$

и p^*, q^* — оптимальные смешанные стратегии (равновесие в смесях).

Замечание о множественности. Как показано выше, всякий тройный параметр (a, b, c) с

$$b = \tfrac{1}{4}, \quad c = -2(a-b) = -2d, \quad a = b + d, \qquad d \in \Big[-\tfrac{1}{4}, 0\Big],$$

даёт стратегию p с выровненными на ноль ожиданиями по всем столбцам; т.е. множество оптимальных смешанных стратегий первого игрока представляет собой отрезок в пространстве вероятностных векторов. В частности, p^* — один из наиболее простых представителей этого множества (с нулевой долей на действие 3). Точно так же для второго игрока существует аналогичный класс оптимальных стратегий; в частности q^* — допустимый выбор.

Ответ:

- Чистых стратегий у каждого игрока: $\boxed{5}$.
- Игра не разрешима в чистых стратегиях (чистого равновесия нет).
- Значение игры: $\boxed{V = 0}$.
- Одно из оптимальных смешанных решений:

$$p^* = q^* = \left(\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}\right),$$

причём существует целый непрерывный класс оптимальных смешанных стратегий, описанный в тексте.

Задача 3(7)

Условие

Дана матрица выигрышей (для игрока 1, строки — чистые стратегии игрока 1, столбцы — чистые стратегии игрока 2):

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Предполагаемые смешанные стратегии и предполагаемая цена игры:

$$p = \left(\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right), \qquad q = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \qquad I = 4.$$

Задача: проверить, являются ли p и q оптимальными смешанными стратегиями, и равна ли цена игры $I = 4$.

Критерии оптимальности

Для конечной нуль-суммовой матричной игры приектор-строка p и столбцовая стратегия q являются оптимальными и I — ценой игры тогда и только тогда, когда выполняются равенства/неравенства

$$\min_j (p^T A e_j) = I, \quad \text{(то есть } p^T A \geq I \text{ по всем столбцам и минимум равен } I\text{)},$$
$$\max_i (e_i^T A q) = I, \quad \text{(то есть } Aq \leq I \text{ по всем строкам и максимум равен } I\text{)},$$
и в частности $p^T A q = I$.

Практически мы проверяем:

- оценки игрока 1 против любой чистой стратегии второго: p^T по колонкам;
- оценки игрока 1 при любых чистых стратегиях первого против q: строки Aq.

1) Проверка столбцовых ожиданий для данного p

Вычислим вектор $p^T A$ (ожидание игрока 1 при фиксированной стратегии p и чистых стратегиях противника — для каждой колонки):

колонка 1:

$$p^T A_{\cdot 1} = \tfrac{1}{4} \cdot 14 + 0 \cdot (-4) + \tfrac{1}{4} \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 3{,}5 + 0 + 1 + 1 = 5{,}5.$$

колонка 2:

$$p^T A_{\cdot 2} = \tfrac{1}{4} \cdot (-4) + 0 \cdot 8 + \tfrac{1}{4} \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 8 = -1 + 0 + 1 + 4 = 4.$$

колонка 3:

$$p^T A_{\cdot 3} = \tfrac{1}{4} \cdot 2 + 0 \cdot 8 + \tfrac{1}{4} \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 0{,}5 + 0 + 1 + 1 = 2{,}5.$$

Итак,

$$p^T A = \begin{pmatrix} 5{,}5, & 4, & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Минимальное значение по столбцам равно 2,5. Если p была бы оптимальной стратегией для игрока 1 с ценой $I = 4$, то минимум должен был быть равен 4. Но $2{,}5 < 4$. Следовательно p не является оптимальной стратегией.

2) Проверка строковых ожиданий для данного q

Вычислим Aq (ожидание игрового выигрыша при чистой стратегии игрока 1 и стратегии q второго игрока):

для строки 1:

$$(Aq)_1 = \frac{14 + (-4) + 2}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

для строки 2:

$$(Aq)_2 = \frac{-4 + 8 + 8}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

для строки 3:

$$(Aq)_3 = \frac{4 + 4 + 4}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

для строки 4:

$$(Aq)_4 = \frac{2 + 8 + 2}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Итак,

$$Aq = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Максимум по строкам равен 4, и для любой строки ожидаемый выигрыш равен 4. Это означает, что стратегии второго игрока q гарантирует, что игрок 1 при любых чистых ответах не получит более 4. Поэтому q является оптимальной стратегией столбцового игрока и даёт верхнюю оценку $V \leq 4$.

3) Оценка взаимного ожидания $p^T Aq$

$$p^T Aq = p^T(Aq) = p^T \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Таким образом ожидаемый выигрыш при паре (p, q) равен 4.

Вывод по оптимальности и цене игры

Мы получили:

- $\min_j p^T A_{\cdot j} = 2{,}5 < 4$. Следовательно p не обеспечивает гарантии 4 (то есть p не оптимальна).

- $\max_i (Aq)_i = 4$ и при этом $p^T Aq = 4$. Стратегия q даёт верхнюю границу 4 и совместно с p даёт ожидаемое значение 4.

По определению цены игры V в нуль-суммовой матричной игре выполняется

$$\max_p \min_j p^T A_{\cdot j} \le V \le \min_q \max_i (Aq)_i.$$

Мы уже видим, что $\min_q \max_i (Aq)_i \le 4$ (так как для конкретного q максимум равен 4), и для данного p $\min_j p^T A_{\cdot j} = 2{,}5$. Тем не менее, поскольку Aq даёт всем строкам значение 4, верхняя оценка равна 4, и так как $p^T Aq = 4$, следует, что действительное значение игры V равно 4. (Иначе говоря, существует множество оптимальных стратегий игрока 1, дающих гарантию 4; p не входит в это множество, см. ниже.)

Следовательно:

$$\boxed{V = 4, \quad q \text{ — оптимальна}, \quad p \text{ — не оптимальна.}}$$