БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Лекции по курсу ”Математический анализ – 2”

для студентов специальностей

”Компьютерная безопасность”

”Экономическая кибернетика”

”Актуарная математика”

”Прикладная криптография”

Лектор
кандидат физико-математических наук,
доцент
Васьковский М.М.

Минск, 2022

Содержание

1 Топология евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$

Обозначим через $\mathbb{R}^2$ множество точек $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ евклидовой плоскости Oxy. Далее под точками понимаем точки плоскости $\mathbb{R}^2$, а под множествами – некоторые подмножества $\mathbb{R}^2$.

Расстояние между точками $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Замкнутой δ-окрестностью точки $A_0 \in \mathbb{R}^2$ называется круг с границей с центром в точке A_0 радиуса δ, т.е.

$$B[A_0, \delta] = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) \leq \delta\}.$$

Открытой δ-окрестностью точки $A_0 \in \mathbb{R}^2$ называется круг без границы с центром в точке A_0 радиуса δ, т.е.

$$B(A_0, \delta) = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) < \delta\}.$$

Под *окрестностью* точки обычно понимают открытую окрестность (если не оговорено иное). Удаляя центр A_0 окрестности, получаем *проколотую окрестность*.

Пусть D – непустое множество в $\mathbb{R}^2$. Точка $A \in D$ называется *внутренней* для множества D, если существует δ-окрестность точки A, содержащаяся в D.

Множество D называется *открытым*, если любая точка множества D является внутренней.

Допонением множества $D \subset \mathbb{R}^2$ называется множество $D^C = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

Множество $D \subset \mathbb{R}^2$ называется *замкнутым*, если его дополнение D^C открыто.

Пример 1.1. *Замкнутая окрестность $B[A_0, \delta]$ является примером замкнутого множества, а открытая окрестность $B(A_0, \delta)$ – примером открытого множества.*

Замечание 1.1. *Пустое множество $\varnothing$ по определению считают открытым. Отсюда следует, что вся плоскость $\mathbb{R}^2$ является замкнутым множеством. С другой стороны, плоскость $\mathbb{R}^2$ по определению является открытым множеством. Следовательно, ее дополнение – пустое множество – является замкнутым. Таким образом, существуют множества, которые одновременно являются открытыми и замкнутыми: таким свойством обладают лишь пустое множество и вся плоскость.*

Точка A называется *граничной* для множества D, если любая окрестность точки A содержит как точки из D, так и точки из дополнения D^c. Совокупность всех граничных точек множества D называют *границей* множества D и обозначают ∂D.

Замыканием множества D называется множество $D \cup \partial D$, замыкание множества D обозначают через $\overline{D}$.

Пример 1.2. *Границей круга $B(A_0, \delta)$ является окружность $C(A_0, \delta) = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) = \delta\}$. Замыканием открытого круга $B(A_0, \delta)$ является замкнутый круг $B[A_0, \delta]$.*

Пример 1.3. *Множества граничных точек плоскость $\mathbb{R}^2$ и пустого множества являются пустыми.*

Предложение 1.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$, тогда замыкание $\overline{D}$ является замкнутым множеством.*

$\diamondsuit$

Рассмотрим произвольную точку A из дополнения $\overline{D}^c$ множества $\overline{D}$, т.е. $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, и докажем, что точка A является внутренней для $\overline{D}^c$. Предположим, что это не так. Т.е. для любого $\delta > 0$ окрестность $B(A,\delta)$ не содержится в $\overline{D}^c$. Тогда окрестность $B(A,\delta)$ имеет непустое пересечение с $\overline{D}$. Докажем, что окрестность $B(A,\delta)$ также имеет непустое пересечение и с множеством D. Рассмотрим некоторую точку $A_1 \in B(A,\delta) \cap \overline{D}$. Предположим, что $A_1 \notin D$, тогда $A_1 \in \partial D$. Поэтому для любого $\delta_1 > 0$ окрестность $B(A_1,\delta_1)$ имеет непустое пересечение с множеством D. Т.к. A_1 – внутренняя точка множества $B(A,\delta)$, то найдется такое $\delta_0 > 0$, что $B(A_1,\delta_0) \subset B(A,\delta)$. Таким образом, $B(A,\delta)$ имеет непустое пересечение с множеством D. Мы получили, что любая окрестность $B(A,\delta)$ точки A содержит как точки из множества D, так и точки из D^c (например, $A \in \overline{D}^c \subset D^c$). Следовательно, $A \in \partial D$, что невозможно, т.к. $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$. Полученное противоречие доказывает тот факт, что точка A внутренняя для $\overline{D}^c$. Т.к. точка A выбрана произвольно, то множество $\overline{D}^c$ открытое и, следовательно, множество $\overline{D}$ замкнутое.

$\blacksquare$

Рис. 1: К доказательству предложения 1.1

Точка A называется *предельной* для множества $D \subset \mathbb{R}^2$, если в любой окрестности точки A имеются точки множества D, отличные от A.

Замечание 1.2. *Предельная точка множества не обязана принадлежать самому множеству. Например, центр проколотой окрестности является предельной точкой этой проколотой окрестности.*

Точка A множества D называется *изолированной* точкой для множества D, если существует δ-окрестность точки A, которая не содержит точек множества D, отличных от A.

Множество D называется *связным*, если любые две точки A_1, $A_2 \in D$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в D, т.е. существуют непрерывные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, такие, что $A_1 = (x(a), y(a))$, $A_2 = (x(b), y(b))$ и $(x(t), y(t)) \in D$ для любых $t \in [a,b]$.

Множество D называется *областью*, если оно открыто и связно.

Множество D называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором круге конечного радиуса, т.е. $\exists r > 0$, $\forall A \in D \Rightarrow \rho(A,O) \le r$, где $O = (0,0)$.

Предложение 1.2. *Пусть D – ограниченное множество. Тогда его замыкание $\overline{D}$ также ограничено.*

$\diamondsuit$

Предположим противное: т.е. замыкание $\overline{D}$ не ограничено. Пусть множество D содержится к круге радиуса r с центром в начале координат. Тогда существует $A \in \partial D$, такое что $\rho(A,O) > r+1$. Но в таком случае окрестность $B(A,\frac{1}{2})$ не содержит точек множества D, что противоречит определению граничной точки. Следовательно, множество $\overline{D}$ ограничено.

$\blacksquare$

Пусть D – ограниченная область. Замыкание $\overline{D}$ области D часто называют *ограниченной замкнутой областью*, несмотря на то, что определение области предполагает открытость.

Множество D называется *компактом*, если оно является ограниченным и замкнутым. В частности, в силу предложений 1.1 и 1.2 ограниченные замкнутые области являются компактами.

Пример 1.4. *Открытая окрестность является областью, но не компактом. Замкнутая окрестность является ограниченной замкнутой областью и, как следствие, компактом. Плоскость $\mathbb{R}^2$ замкнута, но неограничена, следовательно, она не является компактом. Однако, $\mathbb{R}^2$ является областью. Пустое множество является и компактом, и областью.*

Рассмотрим последовательность точек в $\mathbb{R}^2$:

$$A_n = (x_n, y_n), n \geq 1.$$

Последовательность (A_n) называется сходящейся, если существует точка $A_0 = (x_0, y_0)$ такая, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \rho(A_n, A_0) \leq \varepsilon.$$

В таком случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$ или $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A_0$.

Предложение 1.3. *Множество D является замкнутым тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $(A_n) \subset D$ ее предел A_0 принадлежит D.*

$\diamondsuit$

Необходимость. Пусть множество D замкнуто. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $(A_n) \subset D$, $A_0 = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Предположим, что $A_0 \notin D$. Тогда $A_0 \in D^c$. Так как множество D^c открытое, то существует окрестность $B(A_0, \delta)$, принадлежащая D^c. Но тогда в окрестности $B(A_0, \delta)$ не содержится ни одного члена последовательности (A_n), что противоречит определению предела. Следовательно, $A_0 \in D$.

Достаточность. Пусть для любой сходящейся последовательности $(A_n) \subset D$ ее предел A_0 принадлежит D. Предположим, что множество D не является замкнутым, тогда D^c не является открытым, т.е. существует точка $L \in D^c$ такая, что в любой окрестности $B(L, \delta)$ содержатся точки из D. Для каждого $\delta_n = \frac{1}{n}$ выберем точку $A_n \in D \cap B(L, \delta_n)$. Очевидно, что $A_n \underset{n\to\infty}{\to} L \notin D$. Противоречие. Следовательно, множество D замкнуто.

$\blacksquare$

Теорема 1.1. *(теорема о компакте). Множество D является компактом тогда и только тогда, когда из любой последовательности $(A_n) \subset D$ можно выбрать подпоследовательность (A_{n_k}), сходящуюся к точке множества D.*

$\diamondsuit$

Необходимость. Пусть D – компакт, и $(A_n) \subset D$, $A_n = (x_n, y_n)$. Т.к. D ограничено, то последовательности (x_n), (y_n) ограничены. На основании принципа выбора существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$. Аналогично из последовательности (y_{n_k}) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $y_{n_{k_m}} \underset{m\to\infty}{\to} y_0$. Таким образом, $A_{n_{k_m}} \underset{m\to\infty}{\to} A_0 = (x_0, y_0)$. Т.к. D замкнуто, то согласно предложению 1.3 $A_0 \in D$.

Достаточность. Предположим, что из любой последовательности $(A_n) \subset D$ можно выбрать подпоследовательность (A_{n_k}), сходящуюся к точке множества D. Предположим, что множество D не является ограниченным. Можно построить последовательность точек $A_n \in D$ такую, что $A_n \in B(O, \delta_n)$, $A_n \notin B(O, \delta_{n-1})$, где δ_n – возрастающая последовательность положительных чисел, $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Никакая подпоследовательность последовательности (A_n) не может лежать в круге конечного радиуса. Следовательно, не существует сходящихся подпоследовательностей последовательности (A_n). Противоречие. Следовательно, D ограничено. Если предположить, что D не является замкнутым, то из доказательства достаточности предложения (1.3) вытекает существование последовательности $(A_n) \subset D$ такой, что ее предел L не принадлежит D. Но тогда все подпоследовательности последовательности (A_n) также будут сходиться к $L \notin D$. Противоречие. Следовательно, D замкнуто.

■

2 Предел и непрерывность функции двух переменных

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$, отображение $f : D \to \mathbb{R}^2$ называется функцией двух переменной. Пишут $z = f(x, y)$ или $z = f(X)$, где $X = (x, y) \in D$.

Пусть функция $z = f(X)$ определена в некоторой проколотой окрестности E точки X_0. Число $A \in \mathbb{R}$ называется двойным пределом f при $X \to X_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in E : 0 < \rho(X, X_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - A| \leq \varepsilon,$$

пишут $A = \lim\limits_{X \to X_0} f(X)$.

Теорема 2.1. *(критерий Гейне). Существовует предел $A = \lim\limits_{X \to X_0} f(X)$ тогда и только тогда, когда $\forall (X_n) \subset E$, $X_n \neq X_0$, $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X_0 \Rightarrow f(X_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$.*

Доказательство аналогично доказательству критерия Гейне для функции одной переменной.

Замечание 2.1. *Критерий Гейне позволяет перенести все основные свойства пределов скалярных функций на пределы функций двух переменных.*

Пусть X_0 – предельная, но не внутренняя точка множества D. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f при $X \to X_0$ вдоль множества D, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in D : 0 < \rho(X, X_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - A| \leq \varepsilon,$$

пишут $A = \lim\limits_{X \to X_0, X \in D} f(X)$.

В частности, пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0), \ \lim_{y \to y_0} f(x_0, y)$$

называются пределами вдоль прямых $y = y_0$, $x = x_0$ соответственно.

Пусть X_0 – точка из $\mathbb{R}^2$ или бесконечность, A – действительное число или бесконечность. Говорят, что $A = \lim\limits_{X \to X_0} f(X)$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in B_2(X_0, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow f(X) \in B_1(A, \varepsilon),$$

где $B_2(X_0, \delta(\varepsilon))$ – проколотая $\delta(\varepsilon)$-окрестность точки X_0, $B_1(A, \varepsilon)$ – ε-окрестность точки A, где под δ-окрестностью бесконечности в $\mathbb{R}^2$ понимаем множество

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : \rho(X, O) \geq \delta\}.$$

Пример 2.1. *Доказать, что*

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x + y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$\left|\frac{x + y}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|\cos\varphi + \sin\varphi|}{r} \leq \frac{2}{r} \underset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Здесь мы использовали тот факт, что условие $(x,y)\to\infty$ эквивалентно условию $r\to\infty$.

Говорят, что $A=\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty} f(x,y)$, если

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\geq\delta(\varepsilon),|y|\geq\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(X)\in B_1(A,\varepsilon).$$

Отметим, что из существования предела $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty} f(x,y)$ не вытекает существование двойного предела $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$. Например, для функции $f(x,y)=\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y}$ существует $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty} f(x,y)=0$, однако из критерия Гейне вытекает, что двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ не существует.

Рассмотрим функцию $z=f(X)$, определенную в некоторой Δ-окрестности E точки $X_0=(x_0,y_0)$. Говорят, что функция f непрерывна в точке X_0 (по совокупности переменных), если $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=f(X_0)$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall X\in E,\rho(X,X_0)\leq\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(X)-f(X_0)|\leq\varepsilon.$$

Функция f непрерывна в точке X_0 тогда и только тогда, когда приращение $\Delta z=f(X_0+\Delta X)-f(X_0)$ стремится к нулю при ΔX, стремящемся к нулю.

Пусть X_0 – предельная, но не обязательно внутренняя точка множества D. Говорят, что функция f непрерывна в точке X_0 вдоль множества D, если

$$\lim_{X\to X_0,X\in D} f(X)=f(X_0).$$

Функция f называется равномерно непрерывной на множестве D, если

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall X_1,X_2\in D,\rho(X_1,X_2)\leq\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(X_1)-f(X_2)|\leq\varepsilon.$$

Говорят, что функция $z=f(x,y)$ непрерывна по x, если при каждом фиксированном y_0 функция одной переменной $f(x,y_0)$ непрерывна. Аналогично вводится понятие непрерывности функции f по y.

Очевидно, что из непрерывности по совокупности переменных (x,y) вытекает непрерывность по x и по y. Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 2.2.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x=y=0.\end{cases}$$

В каждой точке $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus O$ функция f непрерывна по совокупности переменных как элементарная функция. Из критерия Гейне следует, что f не является непрерывной в точке $O=(0,0)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть две последовательности $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n},-\frac{1}{n})$. Тем не менее, функция f непрерывна по x и по y, т.к. $f(x,0)=f(0,y)\equiv 0$.

Наряду с функцией $z=f(x,y)$, определенной на множестве D, рассмотрим функции $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, определенные на множестве E. Определим сложную функцию

$$g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v)),(u,v)\in E.$$

Теорема 2.2. *(теорема о непрерывности сложной функции). Пусть функции φ, ψ непрерывны в точке (u_0, v_0) вдоль множества E, функция f непрерывна в точке $(x_0, y_0) = (\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))$ вдоль множества D. Тогда сложная функция $g(u, v)$, определенная выше, непрерывна в точке (u_0, v_0) вдоль множества E.*

$\diamondsuit$ Имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (x, y) \in D, \rho((x, y), (x_0, y_0)) \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \le \varepsilon;$$

$$\exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall (u, v) \in E, \rho((u, v), (u_0, v_0)) \le \nu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow$$

$$|x(u, v) - x(u_0, v_0)| \le \frac{\delta(\varepsilon)}{2}, |y(u, v) - y(u_0, v_0)| \le \frac{\delta(\varepsilon)}{2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall (u, v) \in E, \rho((u, v), (u_0, v_0)) \le \nu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x(u, v), y(u, v)) - f(x_0, y_0)| \le \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.
$\blacksquare$

Свойства непрерывных функций

Следующие свойства непрерывной функции доказываются по той же схеме, что и аналогичные утверждения для непрерывных функций одной переменной.

1. *Теорема о стаблизации знака.* Если функция f непрерывна в точке X_0 и $f(X_0) \neq 0$, то существует окрестность точки X_0, в которой $f(X)$ сохраняет тот же знак, что и $f(X_0)$.
2. *Теорема о локальной ограниченности.* Если функция f непрерывна в точке X_0, то сущесвует окрестность точки X_0, в которой функция f ограничена.
3. *Теорема Вейерштрасса.* Если функция f непрерывна на компакте D, то f достигает минимальное и максимальное значения на D. В частности, функция, непрерывная на компакте, ограничена на этом компакте.
4. *Теорема Кантора.* Если функция f непрерывна на компакте, то f равномерно непрерывна на этом компакте.
5. Если функции f, g непрерывны в точке X_0, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$, произведение $f \cdot g$ и частное $\frac{f}{g}$ (при условии $g(X_0) \neq 0$) непрерывны в точке X_0.

Теорема 2.3. *(теорема о промежуточных значениях). Если непрерывная на связном множестве D функция $f(X)$ принимает значения A и B, то она принимает любое промежуточное значение C.*

$\diamondsuit$ Пусть $A < B$, $f(X_1) = A$, $f(X_2) = B$. Возьмем непрерывную кривую $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, с концами в точках X_1, X_2 и целиком лежащую в D. Рассмотрим сложную функцию $g(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Функция $g(t)$ непрерывна, $g(a) = A$, $g(b) = B$. По теореме о промежуточных значениях функции одной переменной существует $t_0 \in [a, b]$ такое, что $g(t_0) = C$. Таким образом, $f(X_0) = C$, где $X_0 = (x(t_0), y(t_0))$.
$\blacksquare$

3 Дифференцируемая функция двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $X_0 = (x_0, y_0)$.

Функцию f называют дифференцируемой в точке X_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно представить в виде

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0),$$

где A, B – некоторые числа. При этом выражение $df = Adx + Bdy$ называют дифференциалом f в точке X_0, где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Если функция f дифференцируема в точке X_0, то $\Delta f \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, т.е. f непрерывна в точке X_0.

Определим частные приращения

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),\ \Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Пределы (если они существуют)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x},\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

называются частными производными от функции f в точке X_0 и обозначаются f'_x, f'_y или $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Если функция f дифференцируема в точке X_0, то $df = f'_x dx + f'_y dy$.

В отличие от функций одной переменной существование конечных частных производных от функции $f(X)$ в точке X_0 не обеспечивает дифференцируемости и даже непрерывности в этой точке. Действительно, рассмотрим функцию из примера 2.2. Имеем

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Как показано в примере 2.2, функция f не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то касательная плоскость к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) задается уравнением

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Теорема 3.1. *(теорема о частных производных сложной функции). Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0), функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$, тогда сложная функция $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ имеет конечные частные производные в точке (u_0, v_0), которые вычисляются по формулам*

$$g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0),$$

$$g'_v(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0)x'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_v(u_0, v_0).$$

$\diamondsuit$

Имеем

$$\Delta_u g = f(x(u_0+\Delta u, v_0), y(u_0+\Delta u, v_0)) - f(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)) =$$

$$= f'_x(x_0,y_0)\Delta_u x + f'_y(x_0,y_0)\Delta_u y + o(\sqrt{(\Delta_u x)^2 + (\Delta_u y)^2}) =$$

$$= f'_x(x'_u \Delta u + o(\Delta u)) + f'_y(y'_u \Delta u + o(\Delta u)) + o(\sqrt{(\Delta_u x)^2 + (\Delta_u y)^2}) =$$

$$= (f'_x x'_u + f'_y y'_u)\Delta u + o(\Delta u) + o(\Delta u\sqrt{(x'_u + o(1))^2 + (y'_u + o(1))^2}) =$$

$$= (f'_x x'_u + f'_y y'_u)\Delta u + o(\Delta u).$$

Отсюда получаем, что $g'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u$. Аналогично доказывается, что $g'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v$.

$\blacksquare$

Теорема 3.2. *(формула конечных приращений). Пусть функция $f(x,y)$ имеет конечные частные производные f'_x, f'_y в каждой точке прямоугольника $\Pi = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$. Пусть точки (x_0,y_0), $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ принадлежат прямоугольнику Π. Тогда справедлива формула конечных приращений*

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x + f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

где θ_1, $\theta_2 \in (0,1)$.

$\diamondsuit$

Имеем

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y + f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x.$$

$\blacksquare$

Теорема 3.3. *(достаточное условие дифференцируемости). Если частные производные f'_x, f'_y непрерывны на открытом множестве D, то функция f дифференцируема в каждой точке множества D.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную точку $X_0 = (x_0,y_0) \in D$. Т.к. множество D открытое, то точка X_0 содержится в D вместе с некоторой окрестностью. Впишем в эту окрестность прямоугольник Π и применим для него формулу конечных приращений:

$$\Delta f = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x + f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y =$$

$$f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(1)\Delta x + o(1)\Delta y =$$

$$f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

$\blacksquare$

Инвариантность формы первого дифференциала

Функция f называется непрерывно дифференцируемой на множестве D, если существует открытое множество D_1, содержащее D, такое, что частные производные f'_x, f'_y непрерывны на D_1.

Из достаточного условия дифференцируемости вытекает, что непрерывно дифференцируемая на множестве D функция f является дифференцируемой на этом множестве.

Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Если x, y – независимые переменные, то

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = f(x(u, v), y(u, v))$, то

$$dz = (f'_x x'_u + f'_y y'_u)du + (f'_x x'_v + f'_y y'_v)dv = f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv) =$$

$$= f'_x dx + f'_y dy,$$

таким образом, имеет место инвариантность формы первого дифференциала.

Если функции f, g – непрерывно дифференцируемы на множестве D, то функции $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ также непрерывно дифференцируемы на D и

$$d(f + g) = df + dg,\ d(fg) = gdf + fdg,\ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Справедливость этих соотношений вытекает из теоремы о частных производных сложной функции.

Производная по направлению и градиент

Рассмотрим функцию f, определенную в некоторой окрестности точки $X_0 = (x_0, y_0)$, а также рассмотрим луч $l : x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $t \in [0, +\infty)$.

Производной по направлению l от функции f называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta t\cos\alpha, y_0 + \Delta t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\Delta t}.$$

Пишут $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{X_0}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{X_0} = (f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha))'_t\Big|_{t=0} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

Вектор $f'_x i + f'_y j$ называется градиентом функции f и обозначается $\mathrm{grad} f$, где i, j – единичные орты.

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{X_0}$ есть скалярное произведение градиента и единичного вектора луча l, то $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{X_0}$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда луч l сонаправлен с градиентом $\mathrm{grad} f$ в точке X_0. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{X_0}$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда луч l противоположно направлен с градиентом $\mathrm{grad} f$ в точке X_0.

4 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на открытом множестве D и имеет на этом множестве частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Эти частные производные являются функциями двух переменных. Если они в свою очередь имеют частные производные, то их называют частными производными второго порядка функции f :

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x,\ f''_{xy} = (f'_x)'_y,\ f''_{yx} = (f'_y)'_x,\ f''_{y^2} = (f'_y)'_y.$$

При этом частные производные f''_{xy}, f''_{yx}, называются смешанными. Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков.

Теорема 4.1. *(теорема о смешанных производных). Если смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0), то они совпадают в этой точке.*

$\diamondsuit$

Т.к. определены f''_{xy}, f''_{yx} в точке (x_0, y_0), то частные производные определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Определим функции

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \Delta y \neq 0,$$

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y), \Delta x \neq 0.$$

Обозначим

$$\omega = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Очевидно, что

$$\omega = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

Применим формулу конечных приращений:

$$\omega = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x = (f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0))\Delta x,$$

$$\omega = \psi'(y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y = (f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y))\Delta y.$$

Применим еще раз формулу конечных приращений:

$$\omega = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

$$\omega = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y \Delta x.$$

Отсюда получаем $f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, используя при этом непрерывность частных производных f''_{xy}, f''_{yx} в точке (x_0, y_0), получаем требуемое $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

$\blacksquare$

Функция $z = f(x, y)$ называется m раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D, если все частные производные порядка m непрерывны на D.

Из теоремы о смешанных производных вытекает, что для m раз непрерывно дифференцируемой функции все смешанные производные одного порядка $k \leq m$ совпадают. Частные производные порядка k от m раз непрерывно дифференцируемой функции, содеражащие l дифференцирований по x и $k-l$ дифференцирований по y обозначают $\frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^{k-l}}$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D. Дифференциал порядка $k \leq m$ от функции f определяется рекуррентно:

$$d^k f := d(d^{k-1} f).$$

Аналогично доказательству правила Лейбница доказывается следующая формула для дифференциала порядка k :

$$d^k f = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^{k-l}} dx^l dy^{k-l}.$$

Эту же формулу можно переписать в терминах оператора дифференцирования

$$d := \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

следующим образом:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f.$$

Замечание 4.1. *Как и в случае функций одной переменной, дифференциалы высших порядков от функций двух переменных не обладают инвариантностью формы в общем случае. Однако, если $x = a_1 u + b_1 v + c_1$, $y = a_2 u + b_2 v + c_2$ – линейные функции от u, v, дифференциалы высших порядков от сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ вычисляются по тем же формулам, как и в случае независимых аргументов, т.е. $d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f$.*

Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция $f(x, y)$ является $m+1$ раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве E, содержащем точку $X_0 = (x_0, y_0)$. Возьмем приращение $\Delta X = (\Delta x, \Delta y)$ такое, что отрезок с концами в точках X_0, $X_0 + \Delta X$ принадлежит множеству E.

Определим функцию

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), t \in (-\alpha, 1 + \alpha), \alpha > 0.$$

Запишем формулу Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа

$$g(\Delta t) - g(0) = \frac{dg(0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m g(0)}{m!} + \frac{d^{m+1} g(\theta \Delta t)}{(m+1)!},$$

где $\Delta t \in (-\alpha, 1 + \alpha)$, $\theta \in (0, 1)$.

Т.к. функции $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ – линейные по t, то согласно замечанию 4.1 получаем

$$d^k g = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f = (\Delta t)^k \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f.$$

Полагая $\Delta t = 1$, получаем формулу Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) = \frac{df(X_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(X_0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(X_0 + \theta \Delta X)}{(m+1)!}.$$

Запишем формулу Тейлора через частные производные, полагая при этом $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m} C_m^l f^{(m)}_{x^l y^{m-l}}(x_0,y_0)(x-x_0)^l (y-y_0)^{m-l} + R_m(x,y),$$

где

$$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{l=0}^{m+1} C_{m+1}^l f^{(m+1)}_{x^l y^{m+1-l}}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)^l (y-y_0)^{m+1-l} =$$

$$= o((x-x_0)^m + (y-y_0)^m), (x,y) \to (x_0,y_0).$$

Пример 4.1. *Разложить функцию $f(x,y) = e^x \sin y$ по формуле Тейлора в точке $(0,0)$ до членов второго порядка включительно.*

Имеем

$$f'_x = e^x \sin y \Rightarrow f'_x(0,0) = 0,$$
$$f'_y = e^x \cos y \Rightarrow f'_y(0,0) = 1,$$
$$f''_{x^2} = e^x \sin y \Rightarrow f''_{x^2}(0,0) = 0,$$
$$f''_{xy} = e^x \cos y \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = 1,$$
$$f''_{y^2} = -e^x \sin y \Rightarrow f''_{y^2}(0,0) = 0.$$

Таким образом,

$$f(x,y) = y + xy + o(x^2+y^2), (x,y) \to (0,0).$$

5 Теорема о неявной функции

Пусть $z = F(x,y)$ – функция двух переменных. Рассмотрим функциональное уравнение

$$F(x,y) = 0. \tag{1}$$

Пусть $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$. Обозначим через Γ_x проекцию множества Γ на ось Ox. Возьмем некоторый прямоугольник $\Pi = [a,b] \times [c,d]$. Будем говорить, что соотношение (1) задает неявную функцию $y = \varphi(x)$ в прямоугольнике Π, если: $[a,b] \subset \Gamma_x$ и для любых (x,y_1), $(x,y_2) \in \Gamma \cap \Pi$ следует, что $y_1 = y_2$. Очевидно, что $F(x,\varphi(x)) = 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Теорема 5.1. *(теорема о неявной функции). Пусть функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям:*

1. $F(x_0,y_0) = 0$;
2. *F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0);*
3. $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, $a > 0$, $b > 0$, в котором соотношение (1) задает непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, производная которой равна

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}, x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

$\diamondsuit$

Доказательство существования неявной функции.

Приведем доказательство для случая $F'_y(x_0,y_0) > 0$.

Пусть $B(X_0,\delta)$ – окрестность точки $X_0 = (x_0,y_0)$, в которой функция F непрерывно дифференцируемая. По теореме о стабилизации знака существует окрестность $B(X_0,\delta_1) \subset B(X_0,\delta)$, такая, что $F'_y(x,y) > 0$ для любого $X = (x,y) \in B(X_0,\delta_1)$. Выберем некоторый прямоугольник $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, содержащийся в окрестности $B(X_0,\delta_1)$.

По критерию строгой монотонности функция $y \to F(x_0,y)$ строго возрастает на отрезке $[y_0 - b, y_0 + b]$. Следовательно, $F(x_0,y_0 - b) < F(x_0,y_0) = 0 < F(x_0,y_0 + b)$.

Т.к. функции $x \to F(x,y_0 - b)$, $x \to F(x,y_0 + b)$ непрерывны, то по теореме о стабилизации знака существует $\alpha > 0$ такое, что

$$F(x,y_0 - b) < 0, \ F(x,y_0 + b) > 0 \ \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

Не нарушая общности можем считать, что отрезок $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ совпадает с отрезком $[x_0 - a, x_0 + a]$.

По теореме о промежуточных значениях для каждого $\bar{x} \in [x_0 - a, x_0 + a]$ существует $\bar{y} \in [y_0 - b, y_0 + b]$ такое, что $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$. В силу критерия строгой монотонности $F(\bar{x},y) < 0$ $\forall y \in [y_0 - b, \bar{y})$ и $F(\bar{x},y) > 0$ $\forall y \in (\bar{y}, y_0 + b]$. Следовательно, определена функция $\varphi : \bar{x} \in [x_0 - a, x_0 + a] \mapsto \bar{y}$ такая, что $F(x,\varphi(x)) = 0$ $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Доказательство непрерывной дифференцируемости неявной функции.

Прямоугольник П является компактом. По теореме Вейерштрасса существует точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in$ П такая, что

$$\min_{(x,y)\in\Pi} F'_y(x,y) = F'_y(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0.$$

По следствию из теоремы Вейерштрасса существует постоянная M такая, что

$$|F'_x(x,y)| \leq M \ \forall (x,y) \in \Pi.$$

Возьмем произвольную точку $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, а также произвольное $\Delta x \neq 0$, такое, что $x + \Delta x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Пусть $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, – неявная функция в прямоугольнике П, определяемая соотношением (1), тогда

$$F(x, \varphi(x)) = F(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) = 0.$$

Применяя формулу конечных приращений, получаем

$$0 = F(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) - F(x, \varphi(x)) =$$

$$= F'_x(x + \theta_1 \Delta x, \varphi(x))\Delta x + F'_y(x + \Delta x, \varphi(x) + \theta_2 \Delta\varphi(x))\Delta\varphi,$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, $\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Отсюда получаем

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta_1\Delta x, \varphi(x))}{F'_y(x + \Delta x, \varphi(x) + \theta_2\Delta\varphi(x))} \Rightarrow |\Delta\varphi| \leq \frac{M}{F'_y(\tilde{x}, \tilde{y})}|\Delta x|.$$

Отсюда вытекает непрерывность функции φ в точке $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, и используя непрерывность частных производных F'_x, F'_y, получаем

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Непрерывность функции $\varphi'(x)$ вытекает из теоремы о непрерывности арифметических комбинаций непрерывных функций.

■

Производные высших порядков неявной функции

Пусть $y = \varphi(x)$ – неявная функция, определяемая функциональным уравнением (1). По теореме о неявной функции имеем

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Предположим, что функция F является дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда получаем

$$\varphi'' = \left(-\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}\right)'_x = -\frac{(F''_{x^2} + F''_{xy}\varphi')F'_y - (F''_{yx} + F''_{y^2}\varphi')F'_x}{(F'_y)^2}.$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков от функции φ.

6 Определение и свойства двойного интеграла

Рассмотрим $D \subset R^2$(фигура на плоскости). $D \neq \varnothing$.

Определение 6.1. *Диаметром фигуры D называют величину*

$$diamD = \sup_{X \in D, Y \in D} \rho(X, Y)$$

Фигура D ограничена тогда и только тогда, когда $diamD < \infty$.

В дальнейшем будем рассматривать только ограниченные и измеримые фигуры D.

Упражнение. Доказать, что если фигура ограничена и измерима, то ее граница будет иметь нулевую площадь.

Определение 6.2. *Граница называется простой, если она не имеет самопересечений.*

Определение 6.3. *Кривую*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

называют кусочно-гладкой, если существует разбиение $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m = b$ отрезка $[a, b]$ на части $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$. При этом функции $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезках $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ и

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, t \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k), k = 1, \ldots, m.$$

Упражнение. Доказать, что любая простая кусочно-гладкая прямая имеет нулевую площадь.(Достаточно доказать, что данное утверждение верно для гладких прямых).

Пусть D – ограниченная и измеримая фигура.

Определение 6.4. *Разбиением фигуры D называется совокупность множеств $\{D_k\}_{k=1}^n$ тогда, когда выполняются следующие три условия:*

1) $\cup_{k=1}^n D_k = D$

2) D_k – измеримая фигура.

3) D_i, D_j не имеют общих внутренних точек $\forall i \neq j$.

Пл. $D = \sum\limits_{k=1}^{n}$ пл.D_k, если $\{D_k\}$ является разбиением D. Величину $\delta(\{D_k\}) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{diamD_k\}$ называют диаметром разбиения.

Возьмем какое-нибудь $\{D_k\}$ и выберем по точке X_k в каждой части D_k. Построим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(X_k)\text{пл.}D_k$$

Определение 6.5. *Функция f называется интегрируемой по Риману на D, если*

$$\exists I : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{D_k\}_{k=1}^n \subset D : \delta(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon), \forall X_k \in D_k \Rightarrow |\sigma - I| \leqslant \varepsilon$$

где, I – двойной интеграл от f по D и обозначается

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy$$

Необходимое условие интегрируемости

Теорема 6.1. *(необходимое условие интегрируемости)*
Пусть f интегрируема на D, тогда

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0, \exists m_0(\varepsilon) : \forall m \geqslant m_0(\varepsilon), \forall\{D_k^m\}_{k=1}^{n_m} \subset D, \delta\{D_k^m\} \leqslant \delta(\varepsilon)$$

$$|\sum_{k=1}^{n_m} f(x_k^m)\text{пл.}D_k^m - \iint\limits_D f(x,y)dxdy| \leqslant \varepsilon$$

♢ Доказательство аналогично одномерному случаю. ■
!Теперь из интегрируемости не следует ограниченность!

Достаточные условия интегрируемости

Теорема 6.2. *(Критерий Коши интегрируемости)*
Для интегрируемости ограниченной на D функции f необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0, \forall\{D_k\}_{k=1}^{n} \subset D, \delta(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon), \forall\{D_r\}_{r=1}^{m} \subset D, \delta(\{D_r\}) \leqslant \delta(\varepsilon), \forall X_k \in D_k, \forall Y_r \in D_r \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=1}^{n} f(X_k)\text{пл.}D_k - \sum_{r=1}^{m} f(Y_r)\text{пл.}D_r| \leqslant \varepsilon$$

или же $|\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon$, где $\tau = \sum\limits_{r=1}^{m} f(Y_r)\text{пл.}D_r$.

Упражнение. Надо ли здесь требовать ограниченность функции?

Теорема 6.3. *(об интегрируемости непрерывной на компакте функции)*
Непрерывная на компакте D функция f интегрируема на этом компакте.

Упражнение. Доказать самостоятельно.

Геометрический смысл двойного интеграла

П – простая фигура, состоящая из конечного числа параллелепипедов($\mathbb{R}^3$).

$$\Pi = \{(x,y,z) : a_1 \leqslant x \leqslant a_r, b_1 \leqslant y \leqslant b_r, c_1 \leqslant z \leqslant c_r\}$$

Простое тело(Π^*) – тело, которое можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся прямоугольных параллелепипедов. За объем простого тела принимают сумму объемов прямоугольных параллелепипедов, из которых оно составлено.

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$, $T \neq 0$, T – тело.

Введем верхнюю грань:

$$S^* = \inf \text{об.}\Pi^*,\ T \subset \Pi^*$$

Введем нижнюю грань:

$$S_* = \sup \text{об.}\Pi_*,\ T \supset \Pi_*$$

Если $S^* = S_* \Rightarrow$ T – измерима(кубируема). $S = S^* = S_*$ – объем тела T.

Теорема 6.4. *(Критерий измеримости тела)*

Тело T измеримо(кубируемо) тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T^*, T_*$ измеримые тела($T_* \subset T \subset T^*$), такие что об.$T^*-$об.$T_* \leqslant \varepsilon$.

В основании цилиндра может быть любое произвольное компактное множество. Тогда цилиндр измерим.

Теперь рассмотрим объем цилиндроида.

Считаем, что $z = f(x, y)$ непрерывна на компакте D.

Цилиндроид – это тело ограниченное сверху графиком функции $z = f(x, y)$, снизу координатной плоскостью $0xy$, сбоку – цилиндрической поверхностью по форме основания.

Далее разбиваем фигуру D на компактные части $D_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\underline{X_k}$ и $\overline{X_k}$ – точки в которых f принимает минимальное и максимальное значения на D_k.

Построим нижнюю и верхнюю интегральные суммы.

$$\underline{\sigma_m} = \sum_{k=1}^{n} (f(\underline{X_k}))\text{пл.}D_k$$
$$\overline{\sigma_m} = \sum_{k=1}^{n} (f(\overline{X_k}))\text{пл.}D_k$$

Из теоремы об интегрируемости непрерывной на компакте функции и необходимого условия интерируемости получаем, что $\underline{\sigma_m}, \overline{\sigma_m}$ сходятся к $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

По критерию измеримости тела об.цилиндра $= \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Свойства двойного интеграла

1. Линейность Если f и g – две интегрируемые на D функции, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\iint\limits_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x, y)dxdy$$

2. Монотонность Если f и g – две интегрируемые на D функции и $f(x, y) \leqslant g(x, y), \forall (x, y) \in D$ то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x, y)dxdy$$

3. Теорема о среднем для двойного интеграла Если $f(x, y)$ непрерывна на связном компакте D, тогда $\exists (\xi, \eta) \in D$, такое что

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)\text{пл.}D$$

$\Diamond$ Пусть $m = \min f(x, y)$ и $M = \max f(x, y)$ $((x, y) \in D)$. Тогда

$$m\cdot\text{пл.}D = \iint\limits_D mdxdy \leqslant \iint\limits_D f(x, y)dxdy \leqslant \iint\limits_D Mdxdy = M\text{пл.}D$$

Рассмотрим два случая.
1) Пл.$D = 0$. Тогда получаем, что и $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$.
2) Пл.$D > 0$. Тогда

$$m \leqslant 1/\text{пл.}D \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant M$$

По теореме о промежуточном значении $\exists(\xi,\eta) \in D$, такая что

$$f(\xi,\eta) = 1/\text{пл.}D \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Отсюда получаем то, что и требовалось доказать.
■

7 Критерий Дарбу для двойного интеграла

Замечание 7.1. *Под фигурой D далее будем понимать ограниченное и измеримое множество $D \subseteq \mathbb{R}^2$.*

Определение 7.1. *Пусть задано какое-то подмножество $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда положим $B(D, \varepsilon) = \{X \in \mathbb{R}^2 | \exists Y \in D : \rho(X, Y) \leq \varepsilon\}$.*

Свойство 7.1. *Для любых $D_1, \dots, D_n \subseteq \mathbb{R}^2$ и $\varepsilon > 0$ верно следующее : $B(D_1 \cup \dots \cup D_n, \varepsilon) = B(D_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(D_n, \varepsilon)$.*

$\diamondsuit$ Несложное упражнение. $\blacksquare$

Лемма 7.1. *Пусть дана какая-то простая фигура Π площади S. Тогда для любого заданного $p > S$ существует $q > 0$, такое что пл.$B(\Pi, q) \leq p$.*

$\diamondsuit$

Предположим, что мы уже доказали лемму в случае, когда Π - прямоугольник. Докажем ее теперь в случае, когда Π - объединение прямоугольников $\Pi_1, \dots, \Pi_n$(пересекающихся не более чем по границе) с площадями $S_1, \dots, S_n$. Используя ранее описанное свойство:

$$\text{пл.}B(\Pi, q) = \text{пл.}(B(\Pi_1, q) \cup \dots \cup B(\Pi_n, q)) = \text{пл.}B(\Pi_1, q) + \dots + \text{пл.}B(\Pi_n, q)$$

Теперь пусть $p > S$, где S - площадь Π. Тогда берем некоторые p_i, такие что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ верно $p_i > S_i$ и такие что $p_1 + \dots + p_n = p$. Тогда найдем такие $q_1, \dots, q_n$, что $B(\Pi_i, q_i) \leq p_i$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Положим $q = min\{q_1, \dots, q_n\}$. Тогда:

$$B(\Pi, q) = \text{пл.}B(\Pi_1, q) + \dots + \text{пл.}B(\Pi_n, q) \leq \text{пл.}B(\Pi_1, q_1) + \dots + \text{пл.}B(\Pi_n, q_n) \leq p_1 + \dots + p_n = p$$

Теперь докажем для случая, когда Π - прямоугольник. Пусть он имеет стороны a и b. Пусть также дано число $q > 0$. Тогда посторим прямоугольник Π', центр которого совпадает с центром Π и со стронами $a + q$ и $b + q$ соответственно. Тогда $\Pi \subseteq B(\Pi, q) \subseteq \Pi'$. Тогда пл.$B(\Pi, q) \leq$ пл.$\Pi' = (a+q)(b+q) = ab+q(a+b+q) =$ пл.$\Pi + q(a+b+q)$. А число $q(a+b+q)$ мы можем сделать сколь угодно малым.

$\blacksquare$

Теорема 7.1. *(Необходимое условие Дарбу интегрируемости) Пусть $f : D \to \mathbb{R}^2$ - интегрируемая на фигуре $D \subseteq \mathbb{R}^2$ функция. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякого разбиения $\{D_k\}_{k=1}^n$ множества D, такого что $diam(\{D_k\}) \leq \delta(\varepsilon)$ верно, что $\Omega(f, \{D_k\}) \leq \varepsilon$.*

$\diamondsuit$ Доказательство полностью идентично доказательству для одномерного случая. $\blacksquare$

Теорема 7.2. *(Достаточное условие Дарбу интегрируемости)*
Пусть на фигуре $D \subseteq \mathbb{R}^2$ задана функция $f : D \to \mathbb{R}$, для которой верно следующее :

(1) *f ограничена на D*

(2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{D_k\}_{k=1}^n$ множества D, такое что $\Omega(f, \{D_k\}) \leq \varepsilon$*

Тогда функция f интегрируема на D.

$\diamondsuit$ Пусть для начала фнукция f ограничена какой-то константой $M \geq 0$. Доказывать будем используя критерий Коши интегрируемости. Потому выберем какое-то $\varepsilon > 0$ и два разбиения $\{S_w\}_{w=1}^p, \{U_t\}_{t=1}^m$ множества D с диаметрами $\leq \delta$(Значение δ мы уточним в процессе доказательства). Для данного ε выберем какое-то разбиение $\{D_k\}_{k=1}^n$, такое что $\Omega(f, \{D_k\}) \leq \varepsilon$.

Возьмем теперь какие-то семейства точек $\{\xi_w \in S_w\}_{w=1}^p, \{\psi_t \in U_t\}_{t=1}^m$. Для выбранных точек и разбиений посчитаем разницу соответствующим их интегральных сумм :

$$\Delta = \sum_{w=1}^{p} f(\xi_w) \cdot \text{пл.} S_w - \sum_{t=1}^{m} f(\psi_t) \cdot \text{пл.} U_t = \sum_{w,t} (f(\xi_w) - f(\psi_t)) \cdot \text{пл.}(S_w \cap U_t)$$

Введем свойство $\phi(w,t) \equiv \exists k \in \{1, \ldots, n\} : S_w \cup U_t \subseteq D_k$ Обозначим $\varphi(w,t,k) \equiv S_w \cup U_t \subseteq D_k$. Положим также $\Delta f(w,t) = f(\xi_w) - f(\psi_t)$. Тогда:

$$\Delta = \sum_{\phi(w,t)} \Delta f(w,t) \cdot \text{пл.}(S_w \cap U_t) + \sum_{\neg\phi(w,t)} \Delta f(w,t) \cdot \text{пл.}(S_w \cap U_t)$$

Обозначим первую сумму как $\sum_1$, а вторую как $\sum_2$. Оценим теперь первую сумму :

$$\Sigma_1 \leq \sum_{\phi(w,t)} |\Delta f(w,t)| \cdot \text{пл.}(S_w \cap U_t) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\varphi(w,t,k)} |\Delta f(w,t)| \cdot \text{пл.}(S_w \cap U_t)$$

Если $\varphi(w,t,k)$, то $\xi_w, \psi_t \in S_w \cup U_t \subseteq D_k$ и тогда $|\Delta f(w,t)| \leq \omega(f, D_k)$. Тогда имеем :

$$\Sigma_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \omega(f, D_k) \cdot \left(\sum_{\varphi(w,t,k)} \text{пл.}(S_w \cap U_t) \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \omega(f, D_k) \cdot \left(\sum_{w: S_w \subseteq D_k} \sum_{t=1}^{m} \text{пл.}(S_w \cap U_t) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \omega(f, D_k) \cdot \left(\sum_{w: S_w \subseteq D_k} \text{пл.} S_w \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \omega(f, D_k) \cdot \text{пл.} D_k = \Omega(f, \{D_k\}) = \varepsilon$$

Теперь перейдем к оценке второй суммы. Для этого воспользуемся леммой, доказательство которой приложим в конце, чтобы не нагружать повествование.

Лемма 7.2. *Для ε существует такой выбор диаметра δ и фигуры F с площадью не более ε, что, если $\neg\phi(w,t)$ и пл.$(S_w \cap U_t) \neq 0$, то по крайней мере одно из множеств S_w, U_t содержится в F.*

Поскольку $|\Delta f(w,t)| \leq 2M$, то :

$$\Sigma_2 \leq 2M \cdot \sum_{\neg\phi(w,t)} \text{пл.}(S_w \cap U_t) \leq 2M \cdot \left(\sum_{w: S_w \subseteq F} \text{пл.}(S_w) + \sum_{t: U_t \subseteq F} \text{пл.}(U_t) \right) \leq 2M \cdot (\text{пл.} F + \text{пл.} F) \leq 4M\varepsilon$$

Тогда выходит, что $\Delta \leq (1 + 4M)\varepsilon$, и значит пользуяюсь критерием Коши интегрируемости и аналогом M-леммы получаем, что f интегрируема.

Теперь перейдем к доказательству описанной леммы. Объединение всех границ кусков разбиения $\{D_k\}_{k=1}^n$ обозначим B. Это множество будет являться объединением простых замкнутых кривых, а следовательно пл.$B = 0$ и по критерию измеримости это множество покрывется сколь угодно малой по площади простой фигурой, а значит и какой-то простой фигурой Π с площадью $S < \varepsilon$. А значит найдется такое $q > 0$, что пл.$B(\Pi, q) \leq \varepsilon$. Положим тогда $F = B(\Pi, q)$. Рассмотрим некоторые w, t, такие что $\neg\phi(w,t)$ и пл.$(S_w \cap U_t) \neq 0$. Если показать, что хотя-бы одно из множеств S_w, U_t попадает на границу частей разбиения $\{D_k\}_{k=1}^{n}$, то при диаметре $\delta = q/2$ это множество попадет в F.

Пусть ни одно из множеств не попадает на границу. Тогда есть такие D_k, D_l, что $S_w \subseteq D_k$ и $U_t \subseteq D_l$. Ясно, что $D_k \neq D_l$, ведь иначе выполняется $\phi(w,t)$. Тогда раз пл.$(S_w \cap U_t) \neq 0$, то S_w и U_t пересекаются более чем по границе, а значит более чем по границе пересекаются и D_k, D_l - противоречие.

■

Свойство 7.2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ - ограниченная функция двух переменых, заданная на фигуре $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Пусть также имеется разбиение $D = D_1 \cup D_2$. Тогда следующие условия эквивалентны :*

(1) *f интегрируема на D*

(2) *f интегрируема на D_1 и на D_2*

♢

(1) $\implies$ (2) : Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда по критерию Дарбу найдется такое разбиение $\{S_w\}_{w=1}^{p}$ множества D, что $\Omega(f, \{S_w\}) \leq \varepsilon$. Тогда мы можем построить разбиение $\{E_w\}_{w=1}^{p}$ множества D_1, положив $E_w = S_w \cap D_1$. Тогда понятно, что $\omega(f, E_w) \leq \omega(f, S_w)$ и пл.$E_w \leq$ пл.S_w для любого $w \in \{1, \ldots, p\}$. А значит $\Omega(f, \{E_w\}) \leq \Omega(f, \{S_w\}) \leq \varepsilon$. Тогда по критерию Дарбу f интегрируема на D_1. Полностью аналогично показывается интегрируемость на D_2.

(2) $\implies$ (1) : Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда найдем по критерию Дарбу два разбиения $\{S_w\}_{w=1}^{p}, \{U_t\}_{t=1}^{m}$ множеств D_1, D_2, такие что $\Omega(f, \{S_w\}) \leq \varepsilon$ и $\Omega(f, \{U_t\}) \leq \varepsilon$. Построим разбиение $\{E_k\}_{k=1}^{p+m}$ таким образом : положим $E_k = S_k$ для $k \in \{1, \ldots, p\}$ и $E_k = U_{k-p}$ для $k \in \{p+1, \ldots, m+p\}$. Тогда $\Omega(f, \{E_k\}) = \Omega(f, \{S_w\}) + \Omega(f, \{U_t\}) \leq 2\varepsilon$. Тогда пользуяюсь аналогом M-леммы и критерием Дарбу получаем, что f интегрируема на D.

■

Свойство 7.3. *(Аддитивность интеграла)*

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ - ограниченная функция, интегрируемая на фигуре $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и дано разбиение $D = D_1 \cup D_2$. Тогда функция f интегрируема на D_1, D_2(по предыдущему свойству) и выполняется следующее равенство :

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

♢

Возьмем такие семейства $\{U_k^m\}_{k=1}^{n_m}$ разбиений D с диаметрами δ_m, что $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Для каждого m выберем семейство точек $\{\xi_k^m \in U_k^m\}_{k=1}^{n_m}$. Пусть также $n_m \geq 2$ для любого m. Наложим еще условие, что что для любого m существует такое $s_m \geq 2$, что $U_1^m, \ldots, U_{s_m-1}^m \subseteq D_1$, а $U_{s_m}^m, \ldots, U_n^m \subseteq D_2$. Тогда описанные классы множеств будут являться разбиениями

D_1,D_2 соответственно и диаметры этих разбиений будут стремиться к 0. Построим по m-му разбиению интегральную сумму σ_m. Тогда получаем следующее:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^m) \cdot \text{пл.}U_k^m = \sum_{k=1}^{s_m-1} f(\xi_k^m) \cdot \text{пл.}U_k^m + \sum_{t=s_m}^{n} f(\xi_t^m) \cdot \text{пл.}U_t^m$$

В итоге σ_m представима в виде суммы двух интегральных сумм для разбиений D_1 и D_2, диаметры которых стремятся к 0. Устремляя m к ∞ получаем из необходимого условия интегрируемости нужное равенство.

■

Теорема 7.3. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ - ограниченная на компакте D функция(ограниченная некоторой константой A). Пусть также функция f непрерывна во всех точках D за исключением некотрого $\mathfrak{I} \subseteq D$, такого что пл.$\mathfrak{I} = 0$. Тогда f интегрируема на D.*

$\diamondsuit$ Начнем с того, что поскольку $\mathfrak{I}$ имеет нулевую площадь, то $\mathfrak{I}$ покрывается простой фигурой сколь угодно малой площади(по критерию измеримости), содержащейся в D. Более того, можно говорить, что $\mathfrak{I}$ покрывается фигурой со сколь угодно малой площадью составленной из открытых прямоугольников. Зафиксируем какое-то $\varepsilon > 0$ на все оставшееся доказательство. Согласно ранее сказанному найдем какая-то открытая лежащее в D фигура $U \supseteq \mathfrak{I}$ площади ε.

Рассмотрим теперь разбиение $D = (D \backslash U) \cup U$. Раз U открыто, то $T = D \backslash U$ - компакт. Функция f непрерывна на компакте T, а значит она интегрируема на нем. Тогда из критерия Дарбу вытекает, что есть такое разбиение $\{S_k\}_{k=1}^{n}$ множества T, что $\Omega(f, \{S_k\}) \leq \varepsilon$. Тогда мы имеем новое разбиение $\{E_k\}_{k=1}^{n+1}$ множества D, где $E_1, \ldots, E_n$ совпадают соответственно с $S_1, \ldots, S_n$, а $E_{n+1} = U$. В результате имеем :

$$\Omega(f, \{E_k\}) = \sum_{k=1}^{n+1} \omega(f, E_k) \cdot \text{пл.}E_k = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, E_k) \cdot \text{пл.}E_k + \omega(f, E_{n+1}) \cdot \text{пл.}E_{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \omega(f, S_k) \cdot \text{пл.}S_k + \omega(f, U) \cdot \text{пл.}U = \Omega(f, \{S_k\}) + \omega(f, U) \cdot \text{пл.}U$$

Как мы говорили ранее, $\Omega(f, \{S_k\}) \leq \varepsilon$. Ясно, что $\omega(f, U) \leq 2A$. Тогда второе слагаемое можно оценить так : $\omega(f, U) \cdot \text{пл.}U \leq 2A\varepsilon$. На выходе имеем $\Omega(f, \{E_k\}) \leq (2A+1)\varepsilon$. То есть по заданному ε мы построили разбиение, колебание котрого менее $M\varepsilon$ для некоторой фиксированной константы M(в нашем случае $M = 2A + 1$). Тогда применяя рассуждения аналогичные M-лемме и достаточное условие Дарбу, получаем, что f интегрируема на D. ■

8 Сведение двойного интеграла к повторному

Лемма 8.1. *Пусть а) функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике $P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, б) при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ отображение $y \to f(x, y)$ интегрируемо по Риману на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$и*

$$\int_a^b F(x)dx = \iint_P f(x, y)dxdy.$$

$\diamondsuit$ Возьмем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Из определения двойного интеграла следует существование такого $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения прямоугольника P с диаметром меньшим $\delta(\varepsilon)$ любая интегральная сумма σ для $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\sigma - \iint_P f(x, y)dxdy\right| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ на n частей точками x_k с диаметром разбиения $\delta(\{x_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon)/2$ и построим интегральную сумму s для функции $F(x)$ на $[a, b]$

$$s = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Из интегрируемости функций $f(\xi_k, y)$ на отрезке $[c, d]$ при каждом k вытекает, что при каждом k существует разбиение отрезка $[c, d]$ точками y_{ki}, на m_k частей так, чтобы диаметр разбиения был бы меньше, чем $\delta(\varepsilon)/2$, и чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m_k} f(\xi_k, \eta_{ki})\,\Delta y_{ki} - \varepsilon \leqslant F(\xi_k) \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant m_k} f(\xi_k, \eta_{ki})\,\Delta y_{ki} + \varepsilon$$

где $y_{ki-1} \leqslant \eta_{ki} \leqslant y_{ki}$ (рис. 1.1).

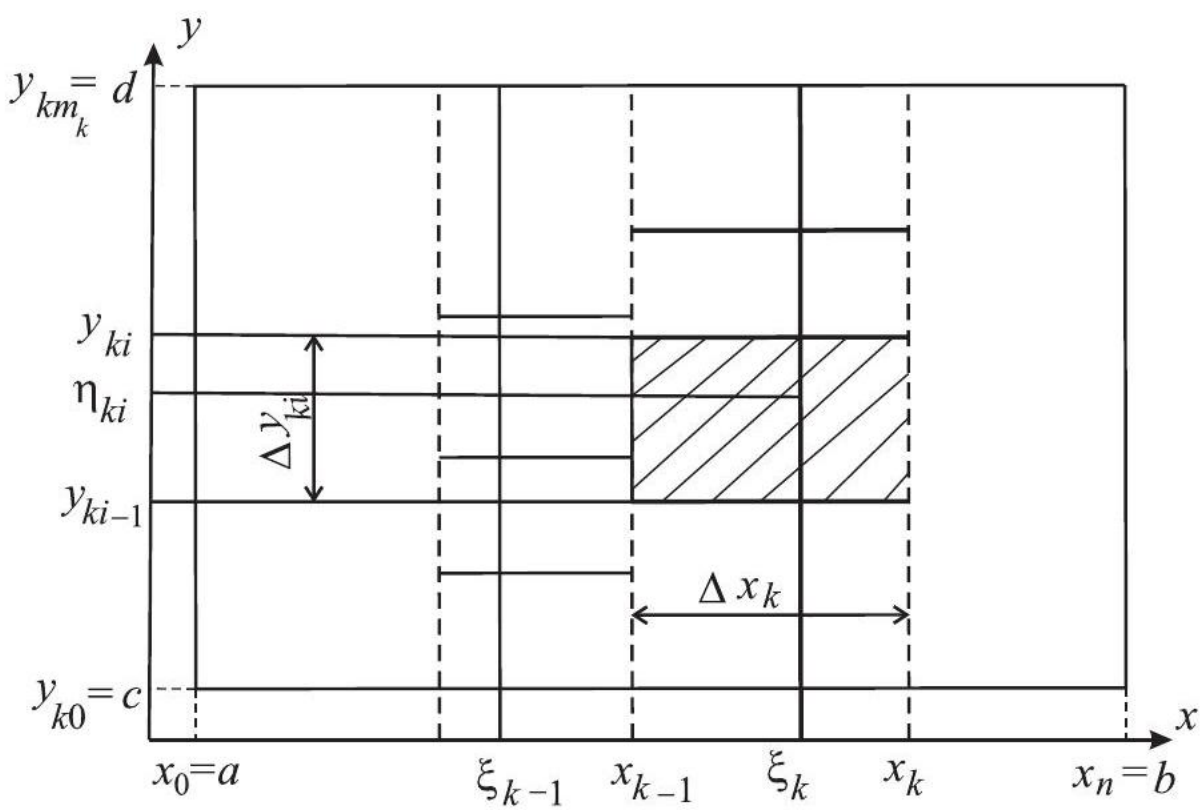


Рис. 1.1

Умножая неравенства на Δx_k и суммируя по k, получаем

$$\tau - \varepsilon(b-a) \leqslant s \leqslant \tau - \varepsilon(b-a),$$

где

$$\tau = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m_k} f\left(\xi_k, \eta_{ki}\right) \Delta y_{ki} \Delta x_k.$$

Сумма τ является интегральной суммой для $f(x, y)$ по P, соответствующей разбиению прямоугольника P на части с диаметром разбиения $\leqslant \delta(\varepsilon)$. На основании предыдущих формул имеем

$$\left| s - \iint_P f(x,y)dxdy \right| \leqslant |s - \tau| + \left| \tau - \iint_P f(x,y)dxdy \right| \leqslant (b-a)\varepsilon + \varepsilon.$$

Следовательно, функция $F(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b F(x)dx = \iint_P f(x,y)dxdy$$

■

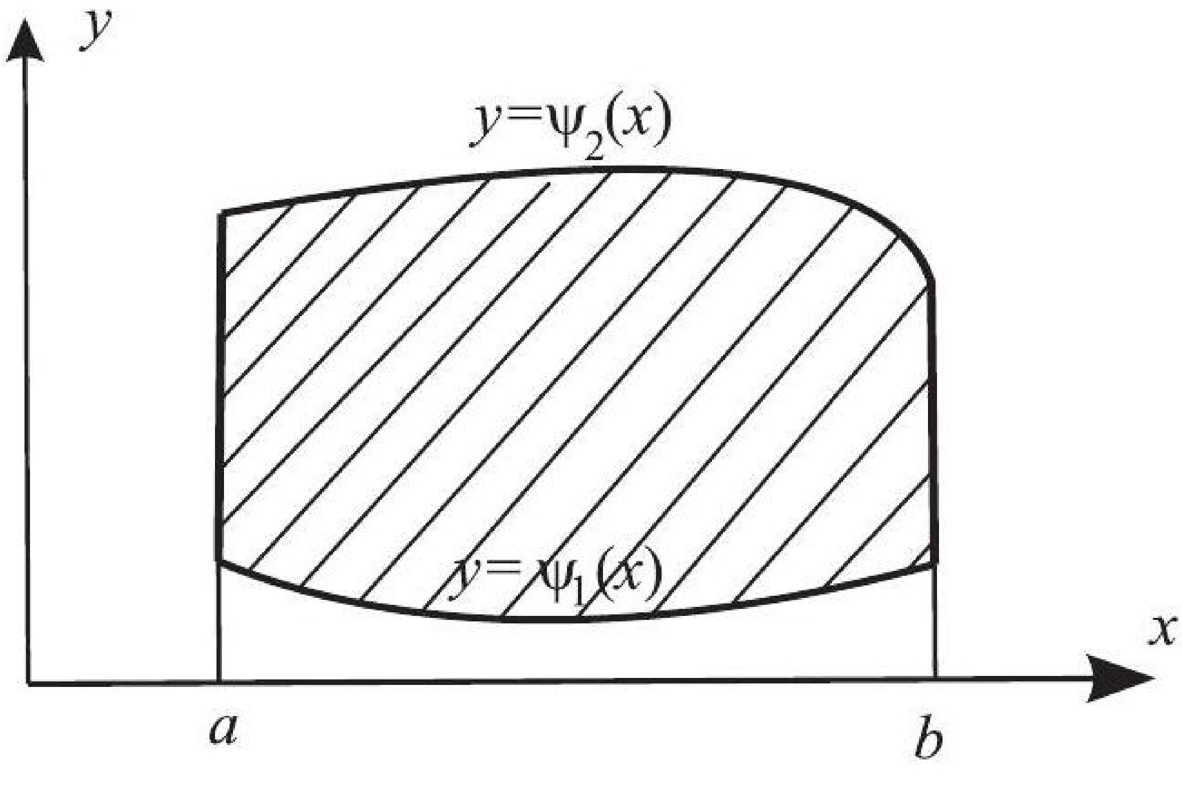


Рис. 2.1 Криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0y$

Теорема о сведении двойного интеграла к повторному интегралу

Теорема 8.1. *Пусть D - криволинейная трапеция и пусть $f(x,y)$ - функция интегрируема по Риману на D и такая, что при каждом фиксированном x функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$. Тогда*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy$$

$\diamondsuit$ Множество D содержится в прямоугольнике $P = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, где $c = \min_{x\in[a,b]} \psi_1(x), d = \max_{x\in[a,b]} \psi_2(x)$. Определим функцию

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \quad (x,y) \in D \\ 0, \quad (x,y) \in P\backslash D \end{cases}$$

Функция g интегрируема на P, так как она интегрируема на D и на $P\backslash D$, причем в силу аддитивности 2

$$\iint_P g(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{P\backslash D} 0dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

На основании леммы о 2И по прямоугольнику

$$\iint_P g(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d g(x,y)dy =$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^{\psi_1(x)} g(x,y)dy + \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy + \int_{\psi_2(x)}^d g(x,y)dy \right) dx =$$
$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy.$$

$\blacksquare$

9 Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим фигуры D и E: первая расположена в плоскости Oxy, вторая – в плоскости Ouv. Пусть функции $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ осуществляют взаимно однозначное отображение фигуры E в фигуру D, тогда $\begin{cases} u = \xi(x,y) \\ v = \eta(x,y) \end{cases}$ есть обратное преобразование фигуры D в фигуру E.

Определение 9.1. *Отображение фигуры E в фигуру D $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ называется диффеоморфным, если оно взаимно однозначно, функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемы на E, а функции $u = \xi(x,y)$, $v = \eta(x,y)$ непрерывно дифференцируемы на D.*
В таком случае говорят, что фигуры E и D диффеоморфны.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ — отображение фигуры E в фигуру D.

Определение 9.2. *Матрица вида*

$$\begin{bmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{bmatrix}$$

называется матрицей Якоби отображения $\binom{\varphi}{\psi}$.
Определитель матрицы Якоби

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$

называется якобианом отображения $\binom{\varphi}{\psi}$,
а определитель

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix}$$

– якобианом обратного преобразования.

Покажем, что якобианы для диффеоморфного отображения не обращаются в ноль. Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ — диффеоморфное отображение фигуры E в фигуру D и $\begin{cases} u = \xi(x,y) \\ v = \eta(x,y) \end{cases}$ — обратное преобразование, тогда верны тождества:

$$x \equiv \varphi(\xi(x,y), \eta(x,y)), \quad y \equiv \psi(\xi(x,y), \eta(x,y)).$$

Вычислим производные:
$1 = \varphi'_u \cdot \xi'_x + \varphi'_v \cdot \eta'_x, \quad 0 = \varphi'_u \cdot \xi'_y + \varphi'_v \cdot \eta'_y,$
$0 = \psi'_u \cdot \xi'_x + \psi'_v \cdot \eta'_x, \quad 1 = \psi'_u \cdot \xi'_y + \psi'_v \cdot \eta'_y.$
Действительно, $I(u,v) \cdot J(x,y) = 1$. Следовательно, якобианы для диффеоморфного отображения не равны 0.

Лемма 9.1. *Пусть* $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ *— диффеоморфное отображение замкнутого прямоугольника* P *в фигуру* D*, тогда существует точка* $(\overline{u}, \overline{v}) \in P$ *такая, что*

$$\text{пл.}D = |I(\overline{u}, \overline{v})| \cdot \text{пл.}P.$$

Лемма 9.2. *Пусть* $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ *— диффеоморфное отображение простой компактной фигуры* E *в фигуру* D *и пусть функции* $f(x,y)$ *и* $f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|I(u,v)|$ *интегрируемы соответственно на* D *и* E*, тогда*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_E f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|I(u,v)|\,du\,dv.$$

$\diamondsuit$ Возьмём последовательность разбиений $\{E_k^m\}$ простой компактной фигуры E на замкнутые прямоугольники с диаметрами $\delta_m = diam\{E_k^m\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Действует отображение $\binom{\varphi}{\psi}$: последовательности разбиений $\{E_k^m\}$ соответствует некоторая последовательность разбиений $\{D_k^m\}$ фигуры D, то есть $E_k^m \xrightarrow{\binom{\varphi}{\psi}} D_k^m$.

Докажем, что $diam\{D_k^m\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Отобразим произвольные точки $M_1(u_1, v_1), M_2(u_2, v_2) \in E$ в соответствующие точки $M_1'(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1)), M_2'(\varphi(u_2, v_2), \psi(u_2, v_2)) \in D$. Применяя формулу конечных приращений, вычислим расстояние между M_1' и M_2':

$$\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(\varphi(u_2, v_2) - \varphi(u_1, v_1))^2 + (\psi(u_2, v_2) - \psi(u_1, v_1))^2} =$$
$$= ((\varphi_u'(u_1 + \theta_1(u_2 - u_1), v_1) \cdot (u_2 - u_1) + \varphi_v'(u_2, v_1 + \theta_2(v_2 - v_1)) \cdot (v_2 - v_1))^2 +$$
$$+ (\psi_u'(u_1 + \theta_3(u_2 - u_1), v_1) \cdot (u_2 - u_1) + \psi_v'(u_2, v_1 + \theta_4(v_2 - v_1)) \cdot (v_2 - v_1))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно определению диффеоморфизма производные φ_u', φ_v', ψ_u', ψ_v' непрерывны на компакте E, тогда по теореме Вейерштрасса $\exists M$ такое, что $|\varphi_u'|, |\varphi_v'|, |\psi_u'|, |\psi_v'| \le M$. Используя $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{|u_2 - u_1|^2 + |v_2 - v_1|^2}$ и неравенство Коши, имеем:

$$\rho(M_1', M_2') \le M\sqrt{2(|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|)^2} \le M \cdot 2\rho(M_1, M_2).$$

Из последнего неравенства вытекает, что $diam\{D_k^m\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Возьмём теперь точку $(\xi_k^m, \eta_k^m) \in D_k^m$. Построим интегральную сумму

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m, \eta_k^m) \cdot \text{пл.} D_k^m, \quad \sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Поскольку действует отображение $\binom{\varphi}{\psi}$, найдётся соответствующая точка $(u_k^m, v_k^m) \in E_k^m$ такая, что $(\xi_k^m, \eta_k^m) = (\varphi(u_k^m, v_k^m), \psi(u_k^m, v_k^m))$. Из леммы 1 имеем пл.$D_k^m = |I(\overline{u_k^m}, \overline{v_k^m})| \cdot$ пл.E_k^m. Тогда σ_m переписывается в виде:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\varphi(u_k^m, v_k^m), \psi(u_k^m, v_k^m)) \cdot |I(\overline{u_k^m}, \overline{v_k^m})| \cdot \text{пл.} E_k^m.$$

Без ограничения общности положим $\overline{u_k^m} = u_k^m$, $\overline{v_k^m} = v_k^m$, имеем:

$$\sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|\, du\, dv.$$

Таким образом, интегралы равны. ■

Пример 9.1. *Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру D, которая задаётся уравнением $x^2 + y^2 \le 1$. Отображение криволинейного сектора на плоскости Oxy в криволинейную трапецию такую, что $0 \le r \le 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, на плоскость $Or\varphi$ с помощью полярного преобразования $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ обладает якобианом*

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Это отображение не является диффеоморфным, так как якобиан может обращаться в 0.

Определение 9.3. *Отображение $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ называется ε-диффеоморфизмом фигуры E в фигуру D, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon \subset E$, $D_\varepsilon \subset D$: пл. $E_\varepsilon \le \varepsilon$, пл. $D_\varepsilon \le \varepsilon$, $E \setminus E_\varepsilon$ есть простая компактная фигура и отображение $\binom{\varphi}{\psi}$ является диффеоморфизмом между $E \setminus E_\varepsilon$ и $D \setminus D_\varepsilon$.*

Теорема 9.1. *(о замене переменных в 2И)*

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ *— ε-диффеоморфизм фигуры E в фигуру D и пусть функции f(x, y) и* $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|$ *ограничены и интегрируемы соответственно на D и E, тогда*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\iint\limits_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|\,du\,dv.$$

♢ Возьмём $\varepsilon > 0$ и множества E_ε, D_ε из определения ε-диффеоморфизма.
По свойству аддитивности 2И имеем:

$$G_1 = \iint\limits_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|\,du\,dv \;= \iint\limits_{E_\varepsilon}\cdots\; + \iint\limits_{E\setminus E_\varepsilon}\cdots = I_1 + I_2,$$

$$G_2 = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \;= \iint\limits_{D_\varepsilon}\cdots\; + \iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon}\cdots = I_3 + I_4.$$

Заметим, что $I_2 = I_4$ согласно лемме 2.
Рассмотрим теперь I_1 и I_3. По условию теоремы функции $f(x,y)$ и $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|$ ограничены, а следовательно, $|I_1| \le M\varepsilon$ и $|I_3| \le M\varepsilon$. Таким образом, имеем:

$$|G_1 - G_2| = |I_1 + I_2 - I_3 - I_4| = |I_1 - I_3| \le |I_1| + |I_3| \le 2M\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то из последнего равенства вытекает $G_1 = G_2$. ■

10 Кратные интегралы. Тройной интеграл

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Всякую совокупность точек T в $\mathbb{R}^n$ будем называть телом.

Определение 10.1. *Тело* $\Pi = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$, $a_i,\ b_i \in \mathbb{R}$ *называется замкнутым параллелепипедом в* $\mathbb{R}^n$.

За объем такого параллелепипеда принимают число $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$. Тело называют простым, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся (либо пересекающихся по границе) замкнутых параллелепипедов. Объем простого тела равен сумме объемов параллелепипедов, из которых оно составлено. Пусть $T \in \mathbb{R}^n$ — ограниченное тело. Простые тела Π_* и Π^* такие, что $\Pi_* \subset T \subset \Pi^*$ называют соответственно вписанным и описанным для тела T.

Определение 10.2. *Тело* $T \in \mathbb{R}^n$ *называется измеримым (кубируемым), если*

$$V_* = \sup_{\Pi_* \subset T}\{об.\Pi_*\} = \inf_{\Pi^* \supset T}\{об.\Pi^*\} = V^*.$$

Объем тела T *в таком случае равен величине* $V = V_* = V^*$

Пусть $T \in \mathbb{R}^n$ – ограниченное измеримое тело, $\{T_k\}_{k=1}^n \subset T$ – разбиение тела T (т.е. объединение всех T_k составляет T и никакие две части разбиения не имеют общих внутренних точек), об.$T = \sum\limits_{k=1}^{n}$ об.T_k. Величину $\delta(\{T_k\}) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\mathrm{diam} T_k\}$, где $\mathrm{diam} T_k = \sup\limits_{x_1, x_2 \in T_k} \rho(x_1, x_2)$, называют диаметром разбиения. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ — ограниченная на T функция от n переменных. Построим интегральную сумму, соответствующую разбиению $\{T_k\}_{k=1}^n$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \text{об.} T_k$$

Определение 10.3. *Функция f интегрируема на T, Если существует число I такое, что*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{T_k\}_{k=1}^n : \delta(\{T_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon), \forall x_k \in T_k \Rightarrow |\sigma - I| \leqslant \varepsilon$$

. *Число I называют n-кратным интегралом от f по T и обозначают*

$$\int\limits_T f(X) dX \text{ или } \int \cdots \int\limits_T f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Если $n = 3$, то соответствующий кратный интеграл называют тройным.

Определение 10.4. *Тело $T = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in D, \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \leqslant \leqslant x_n \leqslant \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\}$, где D — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$, а $\psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $\psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ — непрерывные на D функции, называют циллиндроидом, элементарным относительно оси Ox_n.*

Теорема 10.1. *(о сведении кратного интеграла к повторному интегралу)*
Пусть T — циллиндроид, элементарный относительно оси Ox_n, $f(X)$ — непрерывная на T функция. Тогда

$$\int \cdots \int\limits_T f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = \int \cdots \int\limits_D dx_1 dx_2 ... dx_{n-1} \int\limits_{\psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1})}^{\psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1})} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_n$$

Пусть $T, E \in \mathbb{R}^n, G : E \to T$ – отображение тела E в тело T, $Y = G(X), Y \in T$, $X \in E$. $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$, $G_i = G_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда

$$\frac{dG}{dX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{— Матрица Якоби отображения } G, \text{ а}$$

$\det \frac{dG}{dX}$ — якобиан отображения

Определение 10.5. *Отображение G: $E \to T$ называют диффеоморфизмом из E в T, если оно взаимно однозначно и если функция $Y = G(X)$ непрерывно дифференцируема на E, а обратная ей функция $X = H(Y)$ непрерывно дифференцируема на T.*

Определение 10.6. *Отображение G: $E \to T$ называют ε-диффеоморфизмом из E в T, Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ множества E_ε, T_ε такие, что об.$T_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, об.$E_\varepsilon \leqslant \varepsilon, E \setminus E_\varepsilon$ — простое компактное тело и Gявляется диффеоморфизмом из $E \setminus E_\varepsilon$ в $T \setminus T_\varepsilon$*

Теорема 10.2. *(О замене переменных в кратном интеграле)*
Пусть T, $E \in \mathbb{R}^n$ — ограниченные измеримые тела, $G : E \to T$ — ε-диффеоморфизм из E в T. Пусть также функции $f(X)$ и $f(G(X))|\det \frac{dG}{dX}|$ интегрируемы соответственно на T и на E. Тогда имеет место формула замены переменных в кратном интеграле:

$$\int\limits_T f(X)dX = \int\limits_E f(G(X))|\det \frac{dG}{dX}|dY$$

Рассмотрим несколько ε-диффеоморфных преобразований в пространстве $\mathbb{R}^3$:
1. Переход к сферическим координатам
Преобразование вида $\begin{cases} x = r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ y = r\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ z = r\sin(\psi) \end{cases}$, обладающее якобианом

$$I = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) & -r\sin(\varphi)cos(\psi) & -r\cos(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) & r\cos(\varphi)\cos(\psi) & -r\sin(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & 0 & r\cos(\psi) \end{pmatrix} = r^2\cos(\psi),$$

Является ε-диффеоморфным преобразованием.
2. Переход к циллиндрическим координатам
Преобразование вида $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = h \end{cases}$, обладающее якобианом

$$I = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r,$$

Является ε-диффеоморфным преобразованием.

11 Криволинейный интеграл первого типа (КРИ-1)

Пусть на отрезке [a,b] заданы две непрерывные функции гладкой кривой с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

x(t), y(t) непрерывно дифференцируемые функции. Их производные одновременно не обращаются в 0, т. е. $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \geqslant 0$.

Запись $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \geqslant 0$ равносильна записи $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \geqslant 0$.

Будем рассматривать также кусочно гладкие кривые, т.е. отрезок [a,b] можно разбить на конечное число отрезков так, что на каждом из них кривая будет гладкой.

Введём понятие пути.

Пример 11.1.

$$\begin{cases} x = cos\varphi, \\ y = sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

$$\begin{cases} x = cos\varphi, \\ y = sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 4\pi],$$

Отличие кривой от пути.

В обоих случаях кривая одна и та же — окружность, но пути разные. Во втором случае мы проходим два раза по окружности.

В дальнейшем речь будет идти о пути.

Рассмотрим некоторую гладкую кривую на плоскости.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

Возьмём разбиение отрезка [a,b] точками $\{t_k\}_{k=1}^{n} \subset$ [a, b]. Получили соответствующее разбиение кривой.

Рассмотрим фрагмент кривой $M_{k-1}M_k$, где

$$M_{k-1}(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$$

$$M_k(x(t_k), y(t_k))$$

Возьмём произвольную точку ξ_k.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k), y(\xi_k))\text{дл.}M_{k-1}M_k \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k].$$

$$\text{дл.}M_{k-1}M_k = \int\limits_{t_{k1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt =$$

$$= [\text{применим теорему о среднем}] = \sqrt{\dot{x}^2(\tilde{\xi_k}) + \dot{y}^2(\tilde{\xi_k})}\Delta t_k$$

Не нарушая общности будем считать, что $\xi_k = \tilde{\xi_k}$.

Тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), y(\xi_k))\sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k)}\Delta t_k =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t_k) + \dot{y}^2(t_k)}dt$$

$\int\limits_{AB} f(x, y)ds$ — КРИ-1

Свойства КРИ-1

Свойство 11.1. *Аддитивность*

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds$$

Это свойство можно переписать через интеграл Римана:

$$\int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt = \int\limits_a^c f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt + \int\limits_c^b f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$$

Свойство 11.2. *Замена переменных*

Введём понятие замены переменных в случае кривой. Рассмотрим некоторую гладкую (или кусочно гладкую) кривую.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b],$$

Рассмотрим функцию $t = \varphi(\tau) \quad \tau \in [\alpha, \beta]$

$\varphi(\tau)$ *- непрерывно дифференцируемая функция, которая биективно отображает один отрезок в другой.*

$\varphi'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta]$ *за исключением конечного числа точек* γ_i.

$$\begin{cases} x = \xi(\tau) = x(\varphi(\tau)), \\ y = \eta(\tau) = y(\varphi(\tau)). \end{cases}$$

Замечание 11.1. *При замене переменных множество точек сохраняется, поскольку меняем только параметр:*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad AB$$

$$\begin{cases} x = \xi(\tau), \\ y = \eta(\tau). \end{cases} \quad CD$$

Но формально это разные пути, поскольку рассматриваются разные функции.

$\diamondsuit$ *Нужно доказать, что*

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{CD} f(x,y)ds$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \text{[сводим к определённому интегралу]} =$$

$$= \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t_k)+\dot{y}^2(t_k)}dt =$$

$$= [\text{сделаем замену переменных } t = \varphi(\tau)] =$$

$$= \sum_i \int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} f(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)))\sqrt{(x'_t(\varphi(\tau)))^2 + y'_t(\varphi(\tau)))^2}\varphi'(\tau)d\tau =$$

$$= [\textit{воспользовавшись тем, что } \varphi'(\tau) > 0, \textit{внесём множитель под знак корня}] =$$

$$= \sum_i \int\limits_{\gamma i-1}^{\gamma_i} f(\xi(\tau), \eta(\tau))\sqrt{(x'_t(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2 + (y'_t(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2}d\tau =$$

$$= [\xi'_\tau = x'_t(\varphi(\tau))\varphi'(\tau), \eta'_\tau = y'_t(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)] =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f(\xi(\tau), \eta(\tau))\sqrt{(\xi'_\tau)^2 + (\eta'_\tau)^2)}d\tau =$$

$$= [\textit{по определению КРИ-1 по пути} CD] = \int\limits_{CD} f(x, y)ds$$

■

Тем самым мы показали, что в КРИ-1 можно ввести замену пути.

Свойство 11.3. *Независимость от ориентации пути*
КРИ-1 не зависит от того направления, в котором мы двигаемся
Рассмотрим путь

$$AB^+ : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

И рассмотрим на ряду с ним путь противоположной ориентации

$$AB^- : \begin{cases} x = x(a + b - t), \\ y = y(a + b - t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

$$\int\limits_{AB^+} f(x, y)ds = \int\limits_{AB^-} f(x, y)ds$$

Физический смысл КРИ-1
Если f(x,y) — линейная плотность кривой, то КРИ-1 $\int\limits_{AB} f(x, y)ds$ *— масса кривой.*
Ясно, что масса кривой не зависит от направления, в котором мы двигаемся.

Свойство 11.4. *Экономический смысл КРИ-1*
Если $f(x, y)$ *- удельная стоимость провоза груза в точке* (x, y) *по пути* AB^+*, то* $\int\limits_{AB^+} f(x, y)ds-$ *цена провоза груза по всему пути* AB^+*.*

12 Криволинейный интеграл второго типа (КРИ-2)

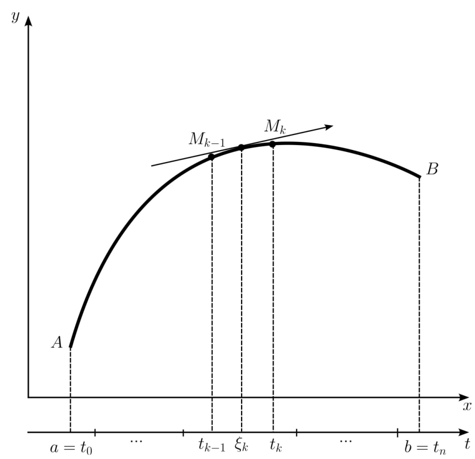
Рассмотрим кусочно-гладкий путь AB:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Предположим, что существует силовое поле, определённое на этом пути:

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Необходимо найти работу, которую совершит силовое поле при перемещении по этому пути.



Возьмём разбиение отрезка $\{t_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$. Тогда весь путь можно разбить на дуги $M_{k-1}M_k$, где $M_k(x(t_k), y(t_k))$. На каждом интервале (t_{k-1}, t_k) выберем точку $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$. Получим уравнение касательной в точке ξ_k:

$$\begin{cases} x = x(\xi_k) + x'(\xi_k)\tau, \\ y = y(\xi_k) + y'(\xi_k)\tau \end{cases} \quad t_{k-1} - \xi_k <= \tau <= t_k - \xi_k$$

$(x'(\xi_k), y'(\xi_k))$ – направляющий вектор секущей. Точки, через которые проходит секущая, определяются следующим образом:

$$\begin{cases} x = \frac{x(\xi_k + \Delta\xi_k) - x(\xi_k)}{\Delta\xi_k} \\ y = \frac{y(\xi_k + \Delta\xi_k) - y(\xi_k)}{\Delta\xi_k} \end{cases}$$

Заменим дугу $M_{k-1}M_k$ на отрезок $[N_{k-1}, N_k]$ и будем считать работу силового поля при перемещении по вектору этого отрезка, которую обозначим через ΔA_k.

$$\Delta A_k = P(x(\xi_k), y(\xi_k))x'(\xi_k)\Delta t_k + Q(x(\xi_k), y(\xi_k))y'(\xi_k)\Delta t_k$$

Предполагаем, что P и Q непрерывны.

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k \to \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)dt = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

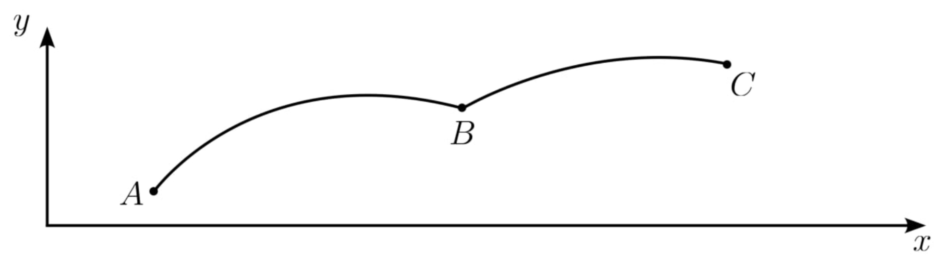
Выражение $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ называется *криволинейным интегралом второго типа* по пути AB.

Свойства криволинейного интеграла второго типа

1. *Аддитивность*

   Пусть AC – составной кусочно-гладкий путь. Тогда

$$\int\limits_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$



2. *Зависимость от пути интегрирования*

$$\int\limits_{AB^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{AB^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

   где AB^+ – путь от A к B, а AB^- – путь от B к A.

   $\diamondsuit$ Доказательство следует из физического смысла, так как при изменении направления на противоположное работа изменяет знак. $\blacksquare$

3. *Замена пути*

   Рассмотрим кусочно-гладкий путь AB:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

   Пусть $t = \phi(\tau)$ – биективное отображение одного отрезка в другой, при этом $\phi(\tau)$ непрерывно дифференцируема и $\phi'(\tau) > 0$.

$$\begin{cases} x = x(\phi(t)) = \xi(\tau), \\ y = y(\phi(t)) = \eta(\tau) \end{cases} \quad \tau \in [\alpha, \beta]$$

   Получаем биективное отображение пути AB в путь CD. Здесь используется тот же класс замен, что и в криволинейном интеграле первого типа.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{CD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$\diamondsuit$ Доказательство аналогично доказательству свойства криволинейного интеграла первого типа. $\blacksquare$

4. Пусть путь AB – это часть графика функции $y = f(x), x \in [a, b]$. Запишем уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Тогда криволинейный интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} (P(t, f(t)) \cdot 1 + Q(t, f(t))f'(t)dt = \int\limits_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx$$

5. *Параллельность оси Oy*

Если путь AB параллен оси Oy, то $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0$.

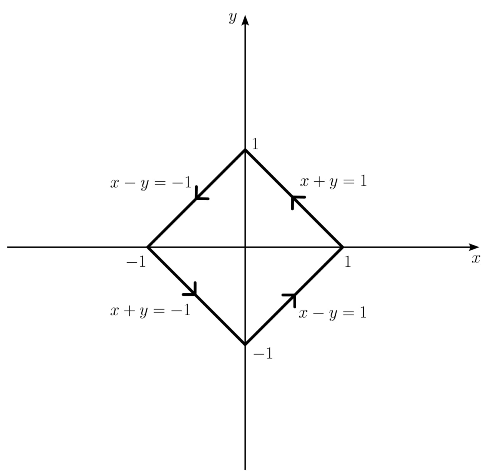
$\diamondsuit$ Доказательство следует из того факта, что $x'(t) = 0$. $\blacksquare$

Пример 12.1. *Номер 4255 из Демидовича. Вычислить криволинейный интеграл, взятый вдоль указанной кривой в направлении возрастания параметра:*

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$$

где $ABCDA$ – контур квадрата с вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.

Решение.



Воспользуемся свойством аддитивности:

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int\limits_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

1. $\int\limits_{AB} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \begin{bmatrix} x = 1-t, \\ y = t, \\ t \in [0,1] \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 \frac{-dt+dt}{(1-t)+t} = 0$

2. $\int\limits_{BC} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \begin{bmatrix} x = t, \\ y = 1+t, \\ t \text{ от 0 до -1} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{-1} \frac{dt+dt}{-t+(1+t)} = \int\limits_0^{-1} 2dt = 2t\Big|_0^{-1} = -2$

3. $\int\limits_{CD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \begin{bmatrix} x = t, \\ y = -1-t, \\ t \in [-1,0] \end{bmatrix} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dt-dt}{-t-(-1+t)} = 0$

4. $\int\limits_{DA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \begin{bmatrix} x = t, \\ y = t-1, \\ t \in [0,1] \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 \frac{dt+dt}{t-(t-1)} = \int\limits_0^1 2dt = 2t\Big|_0^1 = 2$

Ответ: $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0.$

13 Формула Грина

Лемма 13.1. *Пусть есть криволинейная трапеция G, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$, $\psi_1(x) \le \psi_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$\diamondsuit$

∂G^+ - замкнутый кусочно-гладкий путь. Разобьём его на 4 части.

$$\partial G^+ = AB \cup BC \cup CD \cup DA$$

$\int\limits_{\partial G^+} P\,dx = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{CD} P\,dx$ *– по свойсту 5 криволинейного интеграла 2го рода.*

Кривая $AB : y = \psi_1(x)$, $x \in [a,b]$, тогда $\int\limits_{AB} P\,dx = \int\limits_a^b P(x,\psi_1(x))\,dx$.

Кривая DC : $y = \psi_2(x)$, $x \in [a,b]$, тогда $\int\limits_{CD} P\,dx = -\int\limits_{DC} P\,dx = -\int\limits_a^b P(x,\psi_2(x))\,dx$ *– по свойству 2 криволинейного интеграла 2го рода.*

В итоге получеам:

$$\int\limits_{\partial G^+} P\,dx = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{CD} P\,dx = \int\limits_a^b (P(x,\psi_1(x)) - P(x,\psi_2(x)))\,dx$$

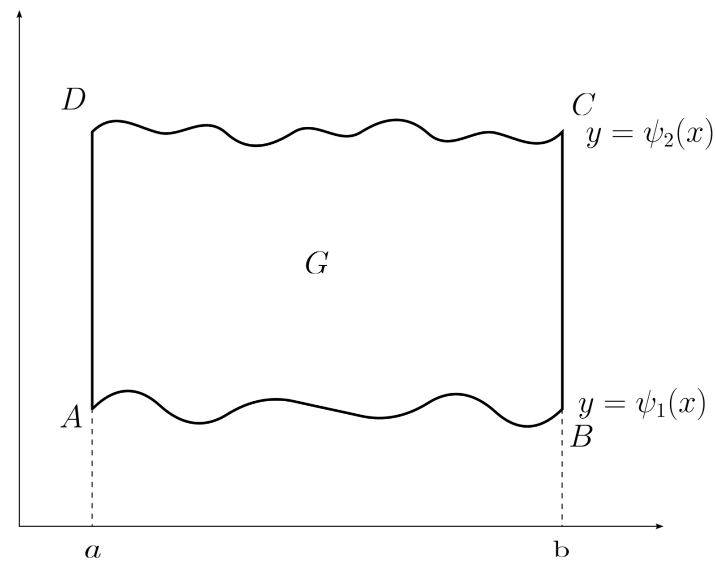


Рис. 2: криволинейная трапеция G

Разложим двойной интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$.

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\,\frac{\partial P}{\partial y} = \int\limits_a^b (P(x,\psi_2(x)) - P(x,\psi_1(x)))\,dx$$

Приравнием уравнения, получаем:

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

■

Теорема 13.1. *(формула Грина)*
Пусть D – ограниченая замкнутая область. ∂D – простая кусочно-гладкая кривая.

Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемые на D. Тогда

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$$

♢ *Докажем для D – составной области (область, которую можно разбить на конечное число элементарных криволинейных трапеция относительно O_x, и на конечное число элементарных криволинейных трапеций относительно O_y).*

Пусть D – элементарная криволинейная трапеция относительно O_y.

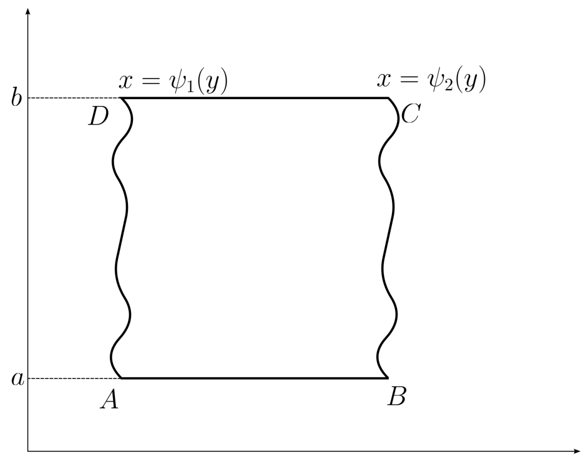


Рис. 3: криволинейная трапеция D

Рассмотрим криволинейный интеграл $\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy$

Имеем $\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\partial D^+} P\,dx + \int\limits_{\partial D^+} Q\,dy$.

$\int\limits_{\partial D^+} Q\,dy = \int\limits_{BC} Q\,dy + \int\limits_{DA} Q\,dy$ *– используя всё то же 2е свойство криволиненого интеграла 2го рода.*

$$\int\limits_{BC} Q\,dy = \int\limits_a^b Q(\psi_2(y), y)\,dy$$

$$\int\limits_{DA} Q\,dy = -\int\limits_a^b Q(\psi_1(y), y)\,dy$$

Тогда $\int\limits_{\partial D^+} Q\,dy = \int\limits_{BC} Q\,dy + \int\limits_{DA} Q\,dy = \int\limits_a^b (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y))\,dy$.

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$.

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} = \int\limits_a^b dy\,(Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) = \int\limits_{\partial D^+} Q\,dy$$

Теперь рассмотрим случай с несколькими элементарными криволинейными трапециями

Используя лемму и 5е свойство криволинейного интеграла 2го рода, получаем:

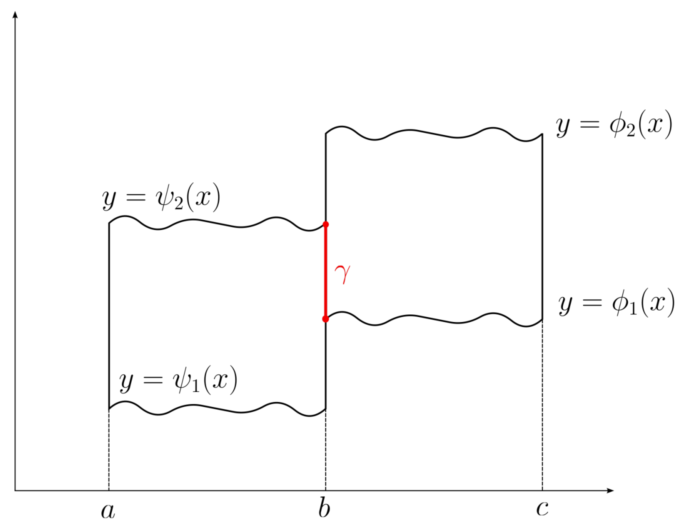


Рис. 4: криволинейная трапеция D

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx = \int\limits_{\partial D^+ \cup \gamma} P\,dx = \int\limits_{\partial D_1^+} P\,dx + \int\limits_{\partial D_2^+} P\,dx = -\iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Равенство $\int\limits_{\partial D^+} Q\,dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$ *доказывается аналогично.*

По Лемме 13.1 $\int\limits_{\partial D^+} P\,dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$

Объединяя получаем

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$$

■

14 Условия независимости КРИ-2 от пути интегрирования. Выражение площадей через КРИ-2

Лемма 14.1. *(Лемма о ломаной) Любые две точки в D можно соединить ломаной, содержащейся в D.*

⧫ Пусть точки A и B принадлежат D и пусть $l : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, – кривая, содержащаяся в D и соединяющая точки A и B, т.е. такая кривая, что для $\forall t \in [a, b]$ точка $((x(t), y(t))$ принадлежит D и $(x(a), y(a)) = A, (x(b), y(b)) = B$. Точку $t \in [a, b]$ отнесём к множеству T, если дугу кривой $AM(t), M(t) = (x(t), y(t))$ можно покрыть конечным числом кругов положительного радиуса, содержащихся в D. Пусть $t^* = \sup T$. Поскольку $((x(t^*), y(t^*))$ – внутренняя точка множества D, то точка t^* может быть лишь точкой b. Через круги, покрывающие кривую, проводим искомую ломанную, лежащую в D ■

Пусть $P(x,y), Q(x,y)$ – две непрерывные функции, определенные в D. Возьмём две произвольные точки $A = (x_0, y_0)$ и $B = (x, y)$, принадлежащие D. Соединим эти точки кусочно-гладким путём AB^+, содержащимся в D, и рассмотрим интеграл

(1)
$$\int\limits_{AB^+} P\,dx + Q\,dy$$

Его значение зависит как от точек A и B, так и от пути AB^+, по которому мы из точки A приходим в точку B. Если для произвольных фиксированных точек $A, B \in D$ интеграл (1) принимает одно и тоже значение для любого кусочно-гладкого пути AB^+, принадлежащего D, то говорят, что КРИ-2 не зависит от пути интегрирования. В этом случае интеграл обозначают:

(2)
$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

Определение 14.1. *Область D называют* ***односвязной****, если любая простая замкнутая кривая, содержащаяся в D, ограничевает множество, состоящее лишь из точек, принадлежащих D*

Теорема 14.1. *(о независимости КРИ-2 от пути интегрирования) Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области D. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

1) Для любого замкнутого ломаного пути $L^+ \in D$ интеграл

$$\int_{L^+} P\,dx + Q\,dy$$

равен нулю;

2) Для $\forall A, B \in D$ интеграл $\int_{AB^+} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от ломаного пути, лежащего в D и соединяющего точки A и B.

3) Существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y)$ такая, что

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \forall (x,y) \in D$$

;

4) Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют условию Эйлера

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in D$$

♦ Доказательство проводится по схеме: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒1)

1) ⇒ 2). Пусть $(AB^+)_1 : x = x_1(t), y = y_1(t), t \in [a_1, b_1], \quad (AB^+)_2 : x = x_2(t), y = y_2(t), t \in [a_2, b_2]$, – два ломанных пути, соединяющих точки A и B. Построим замкнутый ломаный путь $L^+ : x = x_3(t), y = y_3(t), t \in [a_1, b_1 + b_2 - a_2]$, где

$$x_3(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in [a_1, b_1], \\ x_2(-t + b_1 + b_2), t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{cases}$$

$$y_3(t) = \begin{cases} y_1(t), t \in [a_1, b_1], \\ y_2(-t + b_1 + b_2), t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{cases}$$

составленный из путей $L_1^+ = (AB^+)_1$, $L_2^+ : x = x_2(-t + b_1 + b_2), y = y_2(-t + b_1 + b_2), t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]$. Пусть L_2^+ получен из AB^- с помощью допустимой замены параметра, следовательно, $-\int_{(AB^+)_2} = \int_{L_2^+}$. Отсюда, используя аддитивность КРИ-2, имеем

$$0 = \int\limits_L = \int\limits_{(AB^+)_1} - \int\limits_{(AB^+)_2} \Rightarrow \int\limits_{(AB^+)_1} = \int\limits_{(AB^+)_2}$$

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $A = (x_0, y_0)$ – произвольная фиксированная точка, а $B = (x, y)$ – точка из D. Тогда интеграл $\int_{AB^+} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования, следовательно определена функция:

$$u(x, y) = \int\limits_{AB^+} P\,dx + Q\,dy, \quad AB^+ \in D$$

Тогда частичное приращение $\Delta_x u$ функции $u(x, y)$ есть:

$$\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int\limits_{AB_1^+} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{AB^+} P\,dx + Q\,dy, \quad B_1 = (x + \Delta x, y)$$

AB_1^+ – путь, соединяющий A и B_1.

Соединим точки $(x_0, y_0), (x, y)$ некоторым ломаным путём, а $(x_0, y_0), (x + \Delta x, y)$ – путём, составленным из вышеупомянутого пути и пути, параллельного O_x и соединяющего B и B_1. Тогда, используя свойство аддитивности у КРИ-2, имеем

$$\Delta_x u = \int\limits_{BB_1^+} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_x^{x+\Delta x} P(\tau, y)\,d\tau$$

По теореме о среднем для интеграла Римана имеем

$$\frac{1}{\Delta x} \Delta_x u = P(x + \theta \Delta x, y) \quad 0 < \theta < 1$$

Переходя к пределу $\Delta x \longrightarrow 0$ в последнем равенстве, имеем $u'_x(x, y) = P(x, y)$, $u'_y(x, y) = Q(x, y)$

3) $\Rightarrow$ 4). По теореме о смешанных производных:

$$P'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = Q'_x \quad \forall (x, y) \in D$$

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть L^+ – простой ломаный замкнутый путь. Множество, которое описывает ломаная L^+ есть некая составная фигура E. По формуле Грина, так как $E \subset D$ и D - односвязанная, имеем

$$\int\limits_{L+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_E (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy = 0$$

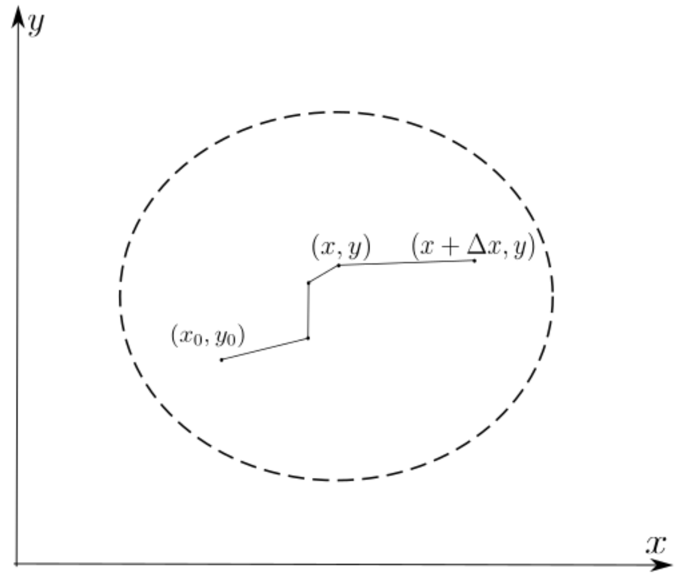


Рис. 5: Путь AB_1^+

$$\int\limits_{L+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

■

Следствие 14.1. *Если выполнится хотя бы одно условие теоремы, то КРИ-2 – интеграл, не зависящий от пути.*

♦ $L^+ : x(t), y(t), t \in [a,b]$, где L^+ – кусочно-гладкий путь, который соединяет (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Отсюда

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b (P(x(t),y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\dot{y}(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b (\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t))\dot{y}(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b (u(x(t),y(t)))'_t\,dt = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) \quad ■$$

Замечание 14.1. *Если D не является односвязной, то теорема о независимости КРИ-2 от пути интегрирования в общем случае не верна.*

Замечание 14.2. *Функцию $u(x,y)$, где $du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad \forall (x,y) \in D$, называют первообразной для выражения $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, следовательно, из теоремы:*

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy, \quad \forall (x_0,y_0) \in D$$

Замечание 14.3. *Если для $\forall (x,y) \in D$, существует ломаная, принадлежащая D, соединяющая $(x_0,y_0) \in D$ и (x,y), и состоящая из двух отрезков, один из которых параллелен O_x, а второй – O_y, то*

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\tau, y_0)\,d\tau + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\psi)\,d\psi,$$

Выражение площадей через КРИ-2

Пускай D – ограниченная область, ограниченная кусочно-гладкой кривой ∂D. И пускай $\exists P, Q \in F$, где F – поле всех рациональных функций, где P и Q такие, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\forall (x,y) \in D$. Используем формулу Грина: пл.$D = \int_{\partial D^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

В частности:

$$\text{пл.}D = \int\limits_{\partial D^+} xdy$$

Лемма 14.2. *Пусть E – ограниченная замкнутая область с простой кусочно-гладкой границей ∂E, а*

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v) \qquad (*)$$

– диффеоморфное преобразование E в D. Тогда $\exists (\overline{u}, \overline{v}) \in E$ такая, что пл.$D = |I(\overline{u},\overline{v})|$пл.$E$, где $I(u,v)$ – Якобиан преобразования $(*)$

♦ Пусть $\partial E^+ : u = u(t), v = v(t), t \in [a,b]$ – параметрическое уравнение пути. Тогда кривая

$$L : \begin{cases} x = \varphi(u(t), v(t)), \\ y = \psi(u(t), v(t)), \\ t \in [a,b], \end{cases}$$

является границей D. Пусть L^+ – путь на кривой L. Если при движении по данной кривой при возрастании t фигура D остается слева, то $\partial D^+ = L^+$, иначе $\partial D^+ = L^-$. На основе определения КРИ-2 и пл.$D = \int_{\partial D^+} xdy$ получим

$$\text{пл.}D = \int\limits_{\partial D^+} xdy = \left| \int\limits_{L^+} xdy \right| = \left| \int\limits_{a}^{b} \varphi(u(t), v(t))(\psi'_u u'(t) + \psi'_v v'(t))\,dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\partial E^+} \varphi(u,v)\psi'_u(u,v)du + \varphi(u,v)\psi'_v(u,v)dv \right|$$

Использовав формулу Грина, получим

$$\text{пл.}D = \left| \iint\limits_E (\frac{\partial}{\partial u}(\varphi\psi'_v)) - (\frac{\partial}{\partial v}(\varphi\psi'_u))dudv \right| =$$

$$= \left| \iint\limits_E (\varphi'_u\psi'_v + \varphi\psi''_v u - \varphi'_v\psi'_u - \varphi\psi''_u v) \right| = \iint\limits_E |I(u,v)|\, dudv$$

По теореме о среднем $\exists(\overline{u}, \overline{v}) \in E$:

$$\iint\limits_E |I(u,v)|\, dudv = |I(\overline{u}, \overline{v})|\, \text{пл.}E$$

Из данных равенств удобно получить формулу пл.$D = |I(\overline{u}, \overline{v})|$пл.$E$ ■

Доказательства оценок

Пример 14.1. *Доказать, что верна следующая оценка:*

$$|\int\limits_C Pdx + Qdy| \leq LM$$

где $M = max\sqrt{P^2 + Q^2}$ *на дуге* C *и* L *– длина пути.*

♢ Воспользуемся следующей заменой и перейдем от КРИ-2 к КРИ-1:

$$\begin{cases} dx = \dot{x}(t)ds \\ dy = \dot{y}(t)ds \\ ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \end{cases}$$

Зафиксируем некоторое α, для которого верна система, приведенная выше. Получим следующее равенство:

$$|\int\limits_C Pdx + Qdy| = |\int\limits_C (P\sin\alpha + Q\cos\alpha)ds|$$

При помощи разбиения на интегральные суммы получим:

$$|\int\limits_C (P\sin\alpha + Q\cos\alpha)ds| \leq \int\limits_C |P\sin\alpha + Q\cos\alpha|ds$$

Оценим $(P\sin\alpha + Q\cos\alpha)^2$. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$(P\sin\alpha + Q\cos\alpha)^2 \leq P^2 + Q^2$$

$$|P\sin\alpha + Q\cos\alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Так как $M = max\sqrt{P^2 + Q^2}$, получим, что $|P\sin\alpha + Q\cos\alpha| \leq M$.

Вычислим $\int\limits_C |P\sin\alpha + Q\cos\alpha| ds$:

$$\int\limits_C |P\sin\alpha + Q\cos\alpha| ds \leq M \int\limits_C ds = LM$$

□

Пример 14.2. *Оценить*

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

♢ Аналогично предыдущему примеру можно показать, что:

$$\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2} \leq LM$$

где $M = max\sqrt{P^2+Q^2}$ и L – длина окружности $x^2+y^2=R^2$.

$$P = \frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\ Q = \frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

Найдём сумму P^2+Q^2:

$$P^2+Q^2 = \frac{y^2+x^2}{(x^2+xy+y^2)^4} = \frac{R^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

Оценим x^2+xy+y^2 относительно выражения x^2+y^2. Пусть существует альфа, для которого верно следующее:

$$x^2+xy+y^2 \geq \alpha(x^2+y^2)$$

Предположим, $\alpha = \frac{1}{2}$. Так как

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \geq 0$$

то верно следующее:

$$x^2+xy+y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\frac{R^2}{(x^2+xy+y^2)^4} \geq \frac{R^2}{\frac{1}{16}(x^2+y^2)^4} = \frac{R^2}{\frac{1}{16}R^8} = \frac{16}{R^6}$$

Получаем, что:

$$M = \sqrt{\frac{16}{R^6}} = \frac{4}{R^3}$$

Вычислим I_R и $\lim\limits_{R\to\infty} I_R$:

$$I_R \leq LM = 2\pi R \frac{4}{R^3} = \frac{8\pi}{R^2}$$

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \frac{8\pi}{R^2} = 0$$

$\square$

15 Непрерывные и дифференцируемые векторные функции

Множество столбцов $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$, с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Это векторное пространство обозначают $\mathbb{R}^n$, а его элементы называют векторами или точками. Задав в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Величина $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|$ называется *нормой* вектора

Функцию вида $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$, называют *функцией векторного аргумента* или скалярной функцией от n переменных и обозначают $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ или $y = f(\mathbf{x})$.

Все теоремы и утверждения, которые были доказаны для ф2п, переносятся на функции n переменных.

Пример 15.1. *Формула конечных приращений*

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y) + f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y), \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$$

Аналогично для функции n переменных:

$$\Delta f = f'_{x_1}(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2, \ldots, x_n) \Delta x_2 +$$
$$+ \ldots + f'_{x_n}(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \theta_n \Delta x_n) \Delta x_n, \quad 0 < \theta_i < 1, i = 1, \ldots, n$$

Пример 15.2. *Дифференциал функции n переменных:*

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n$$

Функцию вида $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ называют *векторной функцией* и обозначают $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n), \\ \ldots \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

Задание векторной функции f равносильно заданию m скалярных функций от n переменных $y_i = f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., m$.

Допустим, что $\mathbf{x_0}$ - предельная точка множества D. Вектор $\mathbf{A}$ называют *пределом при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}$ *вдоль множества* D, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \mathbf{x} \in D : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f(\mathbf{x}), \mathbf{A}) \leqslant \varepsilon$$

Функцию f называют *непрерывной в точке* $\mathbf{x_0}$ *вдоль множества* D, если

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}, \mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$$

Теорема 15.1 (Теорема о непрерывности векторной функции)**.** *Векторная функция f непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$ вдоль множества D тогда и только тогда, когда все ее компоненты $f_i(\mathbf{x}), i = 1, ..., m$, непрерывны в этой точке вдоль множества D.*

$\diamondsuit$ Достаточность. Если все компоненты $f_i(\mathbf{x}), i = 1, ..., m$ векторной функции непрерывны в точке $\mathbf{x_0}$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_i(\varepsilon) > 0, \forall \mathbf{x} \in D : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) \leqslant \delta_i(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{x_0})) \leqslant \varepsilon$$

Отсюда

$$\rho(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x_0})) = \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x_0}))^2 + ... + (f_m(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x_0}))^2} \leqslant \sqrt{m}\varepsilon,$$

при $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) \leqslant min\{\delta_1(\varepsilon), ..., \delta_m(\varepsilon)\},\ \mathbf{x} \in D$, т.е.

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}, \mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$$

Обратное утверждение очевидно. $\blacksquare$

$$\frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Матрицу $\frac{df}{dx}$ называют *матрицей Якоби* векторной функции. Если $m = n$, то $det\frac{df}{dx}$ называют *Якобианом* векторной функции

Таким образом

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \dots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix} = \frac{df}{dx} dx$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна $\Leftrightarrow \forall f_i$ непрерывна

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема $\Leftrightarrow \forall f_i$ дифференцируема

16 Матрица Якоби сложной векторной функции

Пусть заданы две векторные функции

$$y = F(x),\ x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ F(D) = E \subset \mathbb{R}^m,$$

$$z = G(y),\ y \in E,\ G(E) \subset \mathbb{R}^k$$

Можно построить сложную векторную функцию $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\ H(x) = G(F(x))$.

Теорема 16.1. *(теорема о матрице Якоби сложной векторной функции) Пусть функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $G(x)$ дифференцируема в точке y_0 и $y_0 = F(x_0)$. Тогда $H(x)$ дифференцируема в точке x_0 и матрица Якоби вычисляется следующим образом*

$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \cdot \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}$$

♢ Имеем

$$\Delta y = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(||\Delta x||)$$

$$\Delta z = G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \Delta y + o(||\Delta y||)$$

$$\Delta H = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left(\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(||\Delta x||) \right) + o(||\Delta y||) = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(||\Delta x||) + o\left(\left\| \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(||\Delta x||) \right\| \right)$$

Так как $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$, получаем

$$\left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(||\Delta x||) + o\left(\left\| \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x \right\| \right) + o(||\Delta x||) = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(||\Delta x||)$$

Таким образом,

$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \cdot \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}$$

■

Инвариантность формы первого дифференциала

Найдем dz в двух случаях:

1) $z = G(y)$, y - независимый аргумент

$$dz = \frac{dG}{dy} dy$$

2) $z = G(y),\ y = F(x)$

$$dz = \frac{dG}{dy}\frac{dF}{dx} dx = \frac{dG}{dy} dy$$

Пример 16.1.

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix},\ G(y) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \\ g_3(y_1, y_2) \end{pmatrix},\ g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$H(x) = G(F(x)),\ H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dF}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x1 \end{pmatrix} \quad \frac{dG}{dy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial g_3}{\partial y_1} & \frac{\partial g_3}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

17 Дифференциалы высших порядков векторной функции

Допустим, что компоненты $f_i(\mathbf{x})$ векторной функции $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = f_m\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{cases}$$

имеют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad j = 1, \ldots, m; i = 1, \ldots, n$. Производные $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), j = 1, \ldots, m; k, i = 1, \ldots, n$, называют частными производными второго порядка для функции $F(\mathbf{x})$ и обозначают $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}$ или $(f_j)''_{x_i x_k}$. Аналогично вводятся частные производные любого порядка.

Векторную функцию F называют l раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D, если все частные производные до порядка l включительно всех компонент $f_i, i = 1, \ldots, m$, векторной функции F непрерывны на D. Векторную функцию F, заданную на произвольном множестве D, называют l раз непрерывно дифференцируемой на D, если существует l раз непрерывно дифференцируемое продолжение $\bar{F}$ функции F с D на некоторое открытое множество $D_1 \supset D$.

Если функция $F(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве D, то по теореме о смешанных производных.

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, m; \quad k, i = 1, \ldots, n$$

Аналогичное утверждение справедливо для частных производных высших порядков. Дифференциал векторной функции $d\mathbf{y} = \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x}$ зависит от $\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}$. Если считать $d\mathbf{x}$ фиксированным, то $d\mathbf{y}$ является лишь функцией от $\mathbf{x}$. Дифференциал этой функции называют в т оры м д и ф ф е рен ци алом функции $F(\mathbf{x})$ и обозначают $d^2 F(\mathbf{x})$, при этом предполагается, что при вычислении второго дифференциала приращения $\Delta\mathbf{x}$ выбираются такими же, как и при вычислении первого дифференциала,

$$d^2F = \begin{pmatrix} d^2 f_1 \\ \ldots\ldots \\ d^2 f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1} dx_n\right)^2 f_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1} dx_n\right)^2 f_m \end{pmatrix}$$

где $\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n = d$ - оператор дифференцирования, вторая степень которого определяется по формуле $d^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k$.

Для скалярной функции векторного аргумента $f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ построим матрицу

$$\begin{pmatrix} (f_i)''_{x_1^2} & (f_i)''_{x_1 x_2} & \ldots & (f_i)''_{x_1 x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ (f_i)''_{x_n x_1} & (f_i)''_{x_n x_2} & \ldots & (f_i)''_{x_n^2} \end{pmatrix}$$

которую обозначают $\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mathbf{x}^2}$. С помощью этой матрицы второй дифференциал скалярной функции векторного аргумента $d^2 f_i(\mathbf{x})$ можно записать в виде

$$d^2 f_i = (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}$$

Действительно,

$$df_i = \frac{df_i}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x} = (d\mathbf{x})^\top \left(\frac{df_i}{d\mathbf{x}}\right)^\top$$

$$d^2 f_i = d\left(df_i\right) = (d\mathbf{x})^\top \frac{d\left(\left(\frac{df_i}{d\mathbf{x}}\right)^\top\right)}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x} = (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}$$

Таким образом

$$d^2F = \begin{pmatrix} (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_m}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \end{pmatrix}$$

По индукции, отправляясь от дифференциала первого порядка, определяют дифференциалы любого порядка

$$d^s F = d\left(d^{s-1} F\right), s > 1$$

Воспользовавшись схемой рассуждений из п. 7.6, при выводе формулы Тейлора для функций двух переменных, можно получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $(p+1)$ раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ скалярной функции векторного аргумента $y = f(\mathbf{x})$

$$f\left(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}\right) - f\left(\mathbf{x}_0\right) = \left.\frac{df}{1!}\right|_{\mathbf{x}_0} + \ldots + \left.\frac{d^p f}{p!}\right|_{\mathbf{x}_0} + \left.\frac{d^{p+1} f}{(p+1)!}\right|_{(\mathbf{x}_0 + \theta \Delta \mathbf{x})}, 0 < \theta < 1.$$

18 Теорема о неявной векторной функции

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,y)=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m \tag{2}$$

Пусть $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$. Тогда указанное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f_1(x_1\dots x_n,y_1\dots y_m)=0\\ f_2(x_1\dots x_n,y_1\dots y_m)=0\\ \dots\\ f_m(x_1\dots x_n,y_1\dots y_m)=0\end{cases} \tag{3}$$

Выделим теперь параллелепипеды $\Pi_x=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$, $\Pi_y=[c_1,d_1]\times\dots\times[c_m,d_m]$.
Пусть $\Pi=\Pi_x\times\Pi_y\subset\mathbb{R}^{n+m}$.
Уравнение 2 однозначно разрешимо в Π, если $\forall x\in\Pi_x\ \exists! y\in\Pi_y:\ F(x,y)=0$.
Имеем также

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{bmatrix}$$

Теорема 18.1. *Пусть $x_0\in\mathbb{R}^n, y_0\in\mathbb{R}^m$ и выполняются следующие условия:*

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. *F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0)*
3. $\det\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\neq 0$

Тогда $\exists$ параллелепипед $\Pi\subset\mathbb{R}^{n+m}$, содержащий (x_0,y_0), в котором 3 задает неявную непрерывно дифференцируемую функцию $y=\phi(x)$ и $\frac{\partial\phi}{\partial x}=-(\frac{\partial F}{\partial y})^{-1}(\frac{\partial F}{\partial x})$

$\diamond$ Доказательство проведем методом математической индукции по m:
База индукции: $m=1$ и $F(x_1\dots x_n,y_1)=0$
При $n=1$ верно по теореме о неявной скалярной функции.
При $n>1$ теорема о неявной скалярной функции обобщается на случай векторного аргумента.
Таким образом база индукции верна.
Пусть теорема доказана для $1,2\dots m-1$. Докажем её для m.
Имеем $0\neq\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\iff\exists$ минор порядка $m-1$ не равный нулю (иначе определитель был бы равен нулю).
Для удобства (и не умаляя общности) полагаем что он расположен в правом нижнем углу, т.е

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_2(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Так как $\Delta \neq 0$ и $f_2 \dots f_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$, то выполняется предположение индукции (m - 1) $\Rightarrow$ 4 однозначно разрешима относительно $y_2 \dots y_m$. Имеем

$$\begin{cases} y_2 = \phi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \\ \dots \\ y_m = \phi_m(x_1 \dots x_n, y_1) \end{cases} \tag{5}$$

Подставим 5 в равенство $F(x_0, y_0) = 0$:

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n, y_1, \phi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \dots \phi_m(x_1 \dots x_n, y_1)) = g(x_1 \dots x_n, y_1) \\ f_2(x_1 \dots x_n, y_1, \phi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \dots \phi_m(x_1 \dots x_n, y_1)) \equiv 0 \\ \dots \\ f_m(x_1 \dots x_n, y_1, \phi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \dots \phi_m(x_1 \dots x_n, y_1)) \equiv 0 \end{cases} \tag{6}$$

(причем здесь $g(x_1 \dots x_n, y_1) \not\equiv 0$, так как в 3 f_1 не фигурирует).
Продифференцируем уравнение (первое) и тождества (все остальные) 6 по y_1:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} + \frac{\partial f_m}{y_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Это эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

По условию теоремы $\det \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$. Тогда в точке (x_0, y_0) верны следующие рассуждения:

Если $\frac{\partial g}{\partial y_1}\Big|_{(x_0, y_0)} = 0$, то 8 превращается в уравнение вида

$$\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0} \cdot X = 0 \tag{9}$$

У этого уравнения в силу невырожденности матрицы коэффициентов существует единственное решение $X = 0$. Но из равенства 9 имеем, что $X = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1} \end{bmatrix} \neq 0$ подходит. Получили противоречие, значит, $\frac{\partial g}{\partial y_1}\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$

Рассмотрим уравнение

$$g(x_1 \dots x_n, y_1) = 0 \tag{10}$$

Оно однозначно разрешимо относительно y_1 (см. случай $m = 1$ этой теоремы), т.е

$$y_1 = \phi_1(x_1 \dots x_n) \tag{11}$$

Подставим 11 в 6. В силу того, что $g(x_1 \dots x_n, \phi_1(x_1 \dots x_n)) \equiv 0$, имеем следующее решение исходного уравнения 2

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x_1 \dots x_n) \\ y_2 = \phi_2(x_1 \dots x_n, \phi_1(x_1 \dots x_n)) \\ \dots \\ y_m = \phi_m(x_1 \dots x_n, \phi_1(x_1 \dots x_n)) \end{cases} \tag{12}$$

Иными словами, получили, что $y = \phi(x)$ - решение 2.

Подставляя в 2, имеем

$$F(x, \phi(x)) \equiv 0 \tag{13}$$

Дифференцируя это тождество по x получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

Отсюда в силу обратимости $\frac{\partial F}{\partial y}$ имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \tag{15}$$

■

19 Матрица Якоби обратной векторной функции

Рассмотрим функцию $x = g(y)$, где $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Теорема 19.1. *Пусть $y_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 = g(y_0)$, $g(y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки y_0 и при этом* $\det \frac{dg}{dy}\Big|_{y_0} \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 $\exists!$ обратная к g непрерывно дифференцируемая (в некоторой окрестности точки x_0) функция $y = f(x)$ и $\frac{df}{dx}\Big|_{x_0} \cdot \frac{dg}{dy}\Big|_{y_0} = E$

$\diamond$ Рассмотрим функцию $F(x, y) = g(y) - x$ и уравнение $F(x, y) = 0$.
Верно, что

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0)
3. $\det \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \neq 0$

Тогда по теореме о неявной векторной функции имеем функцию $y = f(x)$ такую, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки x_0 (иными словами, f является обратной к g). При этом $\frac{df}{dx} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = -\left(\frac{dg}{dy}\right)^{-1} \cdot (-E) = \left(\frac{dg}{dy}\right)^{-1}$.
Тогда

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dy} = E \tag{16}$$

■

20 Признаки зависимости и независимости системы функций

Рассмотрим совокупность скалярных непрерывно дифференцируемых функций векторного аргумента:

$$f_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, y_i = f_i(\mathbf{x}), D \subset \mathbb{R}^n$$

Определение 20.1. *Функциональную совокупность называют зависимой на множестве D, если одна функция выражается через конечное число других функций. Другими словами, система $\{f_i(\mathbf{x})\}, i = 1, 2, \ldots,$ зависима, если для некоторой функции $f_m(\mathbf{x})$ можно указать систему функций, например, $f_1, \ldots, f_{m-1}$ и непрерывно дифференцируемую функцию*

$$\Phi : G \to \mathbb{R}, G = \{(y_1, \ldots, y_{m-1}) : y_1 = f_1(\mathbf{x}), \ldots, y_{m-1} = f_{m-1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$$

такие, что

$$f_m(\mathbf{x}) = \Phi\left(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_{m-1}(\mathbf{x})\right) \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

В противном случае совокупность $\{f_i(\mathbf{x})\}, i = 1, 2, \ldots,$ называют независимой на D. Рассмотрим совокупность, состоящую из m непрерывно дифференцируемых скалярных функций $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset R^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Построим векторную функцию $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, компонентами которой являются функции $f_i(\mathbf{x})$, и найдём матрицу Якоби этой векторной функции.

$$\frac{dF}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \cdots & \frac{df_m}{dx_n} \end{pmatrix}$$

Теорема 20.1. *(признак независимости функций). Если*

$$(\frac{dF}{d\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}_0}) = m$$

в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in D$, *то совокупность функций* $f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, ..., m$, *независима на* D.

$\diamondsuit$ Из условия без ограничения общности рассуждений (дело сводится к перенумерации переменных x_k) следует, что

$$\det \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{df_m}{dx_1} & \dots & \frac{df_m}{dx_n} \end{pmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \neq 0.$$

Допустим вместе с тем, что система зависима, т.е.$\exists$ непрерывно дифференцируемая функция Φ такая, что

$$\Phi(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x})) - f_m(\mathbf{x}) = 0 \,\forall \mathbf{x} \in D$$

Продифференцировав последнее тождество по $x_1, \dots, x_m$ и положив $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$, получим в точке $\mathbf{x_0}$

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dy_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{d\Phi}{dy_{m-1}}\frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d\Phi}{dy_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{d\Phi}{dy_{m-1}}\frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} - \frac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0. \end{cases}$$

Из системы соотношений следует, что однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}z_1 + \dots + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1}z_{m-1} + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}z_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m}z_1 + \dots + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m}z_{m-1} + \frac{\partial f_m}{\partial x_m}z_m = 0 \end{cases}$$

с определителем, не равным нулю, имеет ненулевое решение

$$z_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \dots, z_{m-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}, z_m = -1,$$

что невозможно. Полученное противоречие показывает независимость функциональной совокупности $f_i(\mathbf{x})$ на D.$\blacksquare$

Признак зависимости функциональной совокупности

Рассмотрим совокупность, состоящую из m непрерывно дифференцируемых скалярных функций $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset R^n$, $i = 1, 2, \dots, m$. Как и в предыдущем пункте, построим векторную функцию $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, компонентами которой являются функции $f_i(\mathbf{x})$, и построим матрицу Якоби этой векторной функции.

$$\frac{dF}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{df_m}{dx_1} & \dots & \frac{df_m}{dx_n} \end{pmatrix}$$

Определение 20.2. *Пусть ранг* $\frac{dF}{d\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}_0} = r < m$. *Точку* $\mathbf{x_0}$ *называют точкой стабильного ранга для матрицы* $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$, *если существует клетка* $P = \mathbf{x} : x_{0i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a, i = 1, \dots, n, a > 0$, *такая, что ранг* $\frac{dF}{d\mathbf{x}} = r$ *для всех* $\mathbf{x} \in P$

Теорема 20.2. *(признак зависимости функций) Если ранг* $\frac{dF}{d\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{x}_0} = r < m$ *и* $\mathbf{x}_0$ *является точкой стабильного ранга для матрицы* $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$*, то система функций* $f_i(\mathbf{x})$ *зависима в некоторой окрестности точки* $\mathbf{x}_0$*.*

$\diamondsuit$ Существует минор порядка r матрицы $\frac{dF}{d\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{x}_0}$, не равный нулю. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\det J(\mathbf{x}_0) \neq 0, \text{ где } J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (f_1')_{x_1} & \dots & (f_1')_{x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_r')_{x_1} & \dots & (f_r')_{x_r} \end{pmatrix}.$$

На основании теоремы о неявной векторной функции, система соотношений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) - y_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) - y_r = 0 \end{cases}$$

в некоторой клетке $T = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : x_{0i} - a_1 \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a_1, i = 1, \dots, r, x_{0i} - b \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + b, i = r+1, \dots, n, y_{0j} - b \leqslant y_j \leqslant y_{0j} + b, j = 1, \dots, r, 0 < a_1 \leqslant a, 0 < b \leqslant a,$ где $y_{0j} = f_j(\mathbf{x}_0),$ задаёт неявно непрерывно дифференцируемую функцию

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = \varphi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \end{cases}$$

$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1 =: (x_{r+1}, \dots, y_1, y_r) : x_{0i} - b \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + b, i = r+1, \dots, n, y_{0j} - b \leqslant y_j \leqslant$ $\leqslant y_{0j} + b, j = 1, \dots, r$. Поскольку для всех $\det J(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то из теоремы о стабилизации знака следует, что $\det J\mathbf{x}_0 \neq 0$ для всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Можно считать (уменьшим в случае необходимости a, что $\det J(\mathbf{x}) \neq 0 \, \forall \mathbf{x} \in P$.

Возьмём k такое, что $r+1 \leqslant k \leqslant m$, и построим функцию

$$g(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) =$$
$$= f_k(\varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n), (*)$$

$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$. Покажем, что функция g не зависит от переменных $(x_{r+1}, \dots, x_n)$. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \forall (x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1, \;\; j = r+1, \dots, n.$$

Составим систему тождеств

$$\begin{cases} f_1(\varphi_1), \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r(\varphi_1), \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = y_r \\ f_k(\varphi_1), \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = g(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \end{cases}$$

$x_{r+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in P_1$. Возьмём j такое, что $r+1 \leqslant j \leqslant n$, и продифференцируем эти тождества по x_j, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} + \frac{\partial f_r}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} + \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j}, \end{cases} \quad (**)$$

$(x_{r+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in P_1$. При каждых фиксированных $(x_{r+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in P_1$ рассмотрим следующую систему линейных функций относительно переменных $t_1,\dots,t_{r+1}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}t_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_r}t_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_j}t_{r+1} = u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}t_1 + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_r}t_1 + \frac{\partial f_r}{\partial x_j}t_{r+1} = u_r, \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}t_1 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_r}t_1 + \frac{\partial f_k}{\partial x_j}t_{r+1} = u_{r+1}. \end{cases} \quad (***)$$

Поскольку ранг $\frac{dF}{d\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x_0}} = r < m$ и $\mathbf{x_0}$ является точкой стабильного ранга для $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$, то для любой точки $(x_{r+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_r)$ из клетки P_1 определитель матрицы системы линейных функций $(***)$ равен нулю, в то же время $\det J(\mathbf{x}_0) \neq 0 \,\forall \mathbf{x} \in P$. По признаку независимости функций первые r функций системы независимы, а из доказательства достаточности теоремы о зависимости линейных функций следует, что функция u_{r+1} является линейной комбинацией предыдущих функций $u_1,\dots,u_r$ при каждых $(x_{r+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in P_1$. Из системы $(**)$ следует, что в каждой точке $(x_{r+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in P_1$ производная $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ является линейной комбинацией нулей и, следовательно, равна нулю. Таким образом, функция g не зависит от x_j. Аналогичным образом устанавливается независимость g от $x_{r+1},\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n$. Из соотношения $(*)$ следует $f_k(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}),\dots,f_r(\mathbf{x}))$ для всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$. $\square$

Замечание 20.1. *При доказательстве теоремы была использована процедура, позволяющая фактическое нахождение отображения, связывающего функции $f_k, k = 1,\dots,m$.*

Пример 20.1. *Покажем, что функции*

$$f_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$f_2 = x_1 - x_2$$

$$f_3 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1 - x_2 - x_3$$

зависимы. Действительно, так как

$$rank\frac{dF}{d\mathbf{x}} = rank\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 1 & 2x_2 - 2x_1 - 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \;\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

и все точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ являются точками стабильного ранга, то зависимость функций f_1, f_2, f_3 вытекает из признака локальной зависимости функций. Найдём отображение, связывающее эти функции. Из системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - y_1 = 0, \\ x_1 - x_2 - y_2 = 0 \end{cases}$$

выразим

$$\begin{cases} x_1 = 1/2(y_1 + y_2 - x_3), \\ x_2 = 1/2(y_1 - y_2 - x_3) \end{cases}$$

и построим функцию g, подставив найденные выражения для x_1, x_2 в функцию f_3, получим

$$g = (\frac{1}{2}(y_1 + y_2 - x_3))^2 + (\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - x_3))^2 - (y_1 + y_2 - x_3)(\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - x_3)) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - x_3) -$$

$$-\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - x_3) - x_3 = y_2^2 - y_1,$$

следовательно, $f_3 = f_2^2 - f_1$.

21 Условия локального экстремума функции векторного аргумента

Рассмотрим скалярную функцию векторного аргумента $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^k$. Внутреннюю точку $x_0 \in D$ называют *точкой локального максимума* функции f , если существует δ-окрестность $B(x_0, \delta)$ такая, что $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in B(x_0, \delta)$.

Аналогично определяются точки локального минимума, строгого локального минимума и строгого локального максимума.

Теорема 21.1. *(необходимое условие локального экстремума функции векторного аргумента). Если функция f дифференцируема в точке локального экстремума x_0, x_0 – стационарная точка функции f, то есть $\frac{\partial f}{\partial x_1}|_{x_0} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_0} = 0$.*

$\diamondsuit$

Если $(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ - точка локального экстремума, то для каждого $i = \overline{1, n}$ точка x_{0i} – точка локального экстремума для скалярной функции $y = f(x_{01}, \ldots, x_{0(i-1)}, x_{0i}, x_{0(i+1)}, \ldots, x_{0n})$. Из необходимого условия локального экстремума скалярной функции следует, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x_0} = 0, i = \overline{1, n}$.

$\blacksquare$

Таким образом, подозрительными на локальный экстремум точками для дифференцируемой функции являются точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

Если функция не дифференцируема в некоторых внутренних точках множества D, то такие точки, как и в случае скалярных функций, являются подозрительными на точки локального экстремума.

Квадратичные формы Функцию $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида

$$h(t_1, \ldots, t_n) = a_{11}t_1^2 + 2a_{12}t_1t_2 + \ldots + 2a_{1n}t_1t_n + a_{22}t_2^2 + \ldots + 2a_{2n}t_2t_n + \ldots + a_{nn}t_n^2$$

называют *квадратичной формой*, а матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрицей квадратичной формы.

Квадратичная форма может быть записана в матричном виде

$$h(t) = t^T At, t \in \mathbb{R}^n$$

Если для любого ненулевого вектора $t \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $h(t) = t^T At > 0, t \neq 0$, то квадратичную форму называют положительно определенной, если $h(t) = t^T At < 0$, то квадратичную форму называют отрицательно определенной. Если же $h(t)$ меняет знак, то её называют знакопеременной. Остальные квадратичные формы $h(t) = t^T At \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}^n$ или $h(t) = t^T At \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}^n$ называют полуопределенными.

Критерий Сильвестра

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно(отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры её матрицы были положительными(все главные угловые миноры нечётного порядка были отрицательными, а четного порядка – положительными).

Теорема 21.2. *(достаточное условие локального экстремума). Пусть x_0 – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности этой точки функции f.*

Если $h(t)$ – положительно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка локального минимума.

Если $h(t)$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка локального максимума.

Если $h(t)$ – знакопеременная квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума.

$\diamondsuit$

Докажем теорему для локального минимума. Доказательство для локального максимума аналогично.

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(x_0 + \theta\Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0 + \theta\Delta x)}{2!}$$

$$df(x_0) = 0, d^2 f(x_0 + \theta\Delta x) = \Delta x^T \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta\Delta x)}{\partial x^2} \Delta x, 0 < \theta < 1$$

По критерию Сильвестра все главные угловые миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$ положительны. Миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$ являются непрерывными в точке x_0 формами. По теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0$ такое, что для каждого вектора $w, w \leq \delta$, все угловые миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(x_0+w)}{\partial x^2}$ положительны. По критерию Сильвестра функция $f(\Delta x) =$

$\Delta x \frac{\partial^2 f(x_0+\Delta x)}{\Delta x^2} \Delta x$ при всех $\Delta x, x \leq \Delta x \leq \delta$, принимает лишь положительные значения. Отсюда из соотношения

$$f(x_0 + \theta \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0 + \theta \Delta x)}{2!}$$

следует неравенство

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \forall \Delta x, \Delta x \leq \delta$$

то есть x_0 – точка локального минимума.

Пусть теперь существуют векторы t^+, t^- такие, что

$$(t^+)^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} (t^+) = a > 0, (t^-)^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} (t^-) = b < 0$$

непрерывны в точке $w = 0$. По теореме о стабилизации знака существует $\delta_1 > 0$ такое, что $g_1(w) \geq \frac{a}{2}, g_2(w) \leq \frac{b}{2}$ для всех $w, w \leq \delta_1$. Положим в равенстве

$$f(x_0 + \theta \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0 + \theta \Delta x)}{2!}$$

сначала, что $\Delta x = \alpha t^+$, а затем $\Delta x = \beta t^-, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < |\alpha| ||t^+|| \leq \delta_1, 0 < |\beta| ||t^-|| \leq \delta_1$, получим

$$f(x_0 + \alpha t^+) - f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0 + \alpha \theta t^+)}{2!} \geq \alpha^2 \frac{a}{4} > 0$$

$$f(x_0 + \beta t^-) - f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0 + \beta \theta t^-)}{2!} \leq \beta^2 \frac{a}{4} < 0$$

Из данных соотношений следует, что в любой окрестности точки x_0 всегда найдутся две точки вида $x_0 + \alpha t^+, x_0 + \beta t^-$, в который $f(x_0 + \alpha t^+) - f(x_0) > 0$, $f(x_0 + \beta t^-) - f(x_0) < 0$, поэтому в точке x_0 экстремум невозможен.

■

22 Условный локальный экстремум

Рассмотрим скалярную функцию $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пусть M - подмножество множества E, $M \neq \emptyset$.

Определение 22.1. *x_0 - точка условного минимума функции f относительно M, если $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in M$.*

Определение 22.2. *Точка x_0 - точка локального условного минимума, если существует окрестность точки x_0 $B(x_0, \delta)$ такая, что x_0 - точка условного минимума относительно $M \cap B(x_0, \delta)$, то есть $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in M \cap B(x_0, \delta)$.*

Аналогичным образом задаются точки условного максимума и условного локального максимума.
Зачастую, M задаётся с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Определение 22.3. *Уравнения $F_i(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots, m,$ называют уравнениями связей.*

Введём вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и разобьём его на $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ и $t = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Далее введём векторную функцию $F(x) = F(z, t) = \begin{pmatrix} F_1(z, t) \\ \vdots \\ F_m(z, t) \end{pmatrix}$.

Введённые определения позволяют записать функцию $y = f(x)$ в виде $y = f(z, t)$, а систему (17) в виде $F(z, t) = 0, F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$.
Пусть в дальнейшем выполняются условия:

1. Функции $f, F_i, i = 1, \ldots, m.$ непрерывно дифференцируемы на множестве E;
2. $\operatorname{rank} \frac{dF(x)}{dx} = m \quad \forall x \in M.$

Согласно признаку независимости системы функций, система функций $F_i(z, t), i = 1, \ldots, m,$ независима на E.
Из второго условия следует, что хотя бы один из миноров порядка m матрицы $\frac{dF(x)}{dx}$ отличен от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\det \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.
Исходя из теоремы о неявной функции соотношение $F(z, t) = 0$ в некоторой окрестности точки $x_0 = (z_0, t_0)$ задаёт непрерывно дифференцируемую функцию $z = \Phi(t)$ в некоторой окрестности T точки t_0.
Введённые обозначения позволяют записать функцию

$$f(t) = f(\Phi(t), t), \, t \in T. \tag{18}$$

Видно, что точка x_0 является точкой условного локального экстремума относительно множества M тогда и только тогда, когда точка t_0 является точкой локального экстремума для функции $f(t)$, что позволяет найти такие точки, используя достаточное условие локального экстремума.

Пример 22.1. *Найти точки условного локального экстремума.*

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 + z^2 - yz = 0, \\ x + y = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Из второго уравнения выразим $x = 1 - y$ и подставим его в функцию u, получим $g(y,z) = 2y^2 - 2y + 1 + z^2 - yz$.
Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} = 4y - 2 - z = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial z} = 2z - y = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Получим $z = \frac{2}{7}$, $y = \frac{4}{7}$.
Проверим точки на наличие экстремума:
$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4, \frac{\partial^2 g}{\partial y * \partial z} = -1, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 2$. *Из этого следует, что* $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *видно, что* $\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 7 > 0$.
Исходя из достаточного условия локального экстремума, $(\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ - точка локального минимума для функции g, следовательно, $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ - точка условного локального минимума.

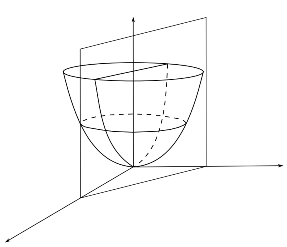
Таким образом, введённый метод нахождения условного локального экстремума сводится к нахождению локального экстремума. Наиболее трудным этапом является нахождение неявной функции $z = \Phi(t)$.

23 Метод Лагранжа

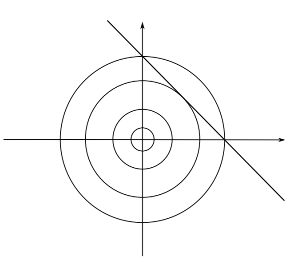
Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода Лагранжа. Для это рассмотрим случай, когда у нас задана функция от двух переменных, которую мы исследуем на эстремум, и уравнение связи:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + y^2 \to extr \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Построим график в осях $Oxyz$:



Перейдем к проекциям на Oxy:



Рассмотрим точку касания окружности прямой $x + y = 1$. Для того, чтобы две прямые касались, должно выполняться одно из двух условий:

$$gradf \parallel gradF \vee gradf = \lambda gradF$$

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$$

Если $gradL = 0$, то

$$\begin{cases} gradf = \lambda gradF \\ -F(x, y) = 0 \end{cases}$$

Предположим, что $f(x_1, \ldots, x_n) \to extr$ и что у нас есть m уравнений связи вида

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, m = \overline{1, m}$$

f_i, F_i непрерывно дифференцируемы на области определения и выполняется условие, что $rank\frac{dF}{dx} = m \ \forall x_0 \in M$.

Определим функцию Лагранжа.

Определение 23.1. *Функцией Лагранжа называется функция вида*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= f(z, t) + \lambda^T F(z, t)$$

где $F(x) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \cdots \\ F_m \end{pmatrix}$ *– векторная функция, состоящая из компонентов,* $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ *– вектор,* $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Теорема 23.1. *(необходимое условие локального условного экстремума). Если* x_0 *– точка локального условного экстремума, то существует* $\lambda_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$, *такое, что* $L(x_0, \lambda_0) = 0$.

$\diamondsuit$

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(z, t, \lambda) = f(z, t) + \lambda^T F(z, t)$$

Возьмём частную производную по z

$$\frac{\partial L(z_0, t_0, \lambda)}{\partial z} = \frac{\partial f(z_0, t_0)}{\partial z} + \lambda^T \frac{\partial F(z_0, t_0)}{\partial z}$$

Определитель системы

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

в множестве M, следовательно, существует единственное λ_0 такое, что

$$\frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial z}+\lambda_0^T\frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial z}=0$$

Пусть $z=\Phi(t)$ – непрерывно дифференцируемая неявная функция, определяемая соотношением $F(z,t)=0$ в окрестности точки (z_0,t_0). Существование такой функции $\Phi(t)$ следует из теоремы о неявной векторной функции. Тогда

$$F(\Phi(t),t)=0$$

для всех t из некоторой окрестности точки t_0.

Точка t_0 является точкой локального экстремума функции $g(t)=F(\Phi(t),t)$ и функции

$$p(t)=f(\Phi(t),t)+\lambda_0^TF(\Phi(t),t)$$

Возьмем производную по t от функции $p(t)$. Имеем:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda_0^T(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t})$$

Подставим точку t_0

$$0=\frac{dp}{dt}=\frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial z}\frac{d\Phi(t_0)}{dt}+\frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial t}+\lambda_0^T(\frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial z}\frac{d\Phi(t_0)}{dt}+\frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial t})=$$

$$=(\frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial t}+\lambda_0^T\frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial t})+\frac{d\Phi(t_0)}{dt}(\frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial z}+\lambda_0^T\frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial z})=$$

$$=\frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial t}+\lambda_0^T\frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial t}=0$$

Следовательно, $L(x_0,\lambda_0)=0$.

□

Теорема 23.2. *(достаточное условие локального условного экстремума). Пусть задана функция и её уравнение связи*

$$\begin{cases} y=f(x)\to extr \\ F(x)=0 \end{cases}$$

Также пусть для функции задана функция Лагранжа

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda^TF(x)$$

и (x_0,λ_0) *– стационарные точки.* $x_0=\begin{pmatrix} z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$, $z_0=\Phi(t_0), g(t)=f(\Phi(t),t)$.

Тогда x_0 *– точка локального условного экстремума функции* $f(x)$ *при условии, что* $F(x)=0$, *тогда и только тогда, когда* t_0 *– точка локального условного экстремума функции* $g(t)$.

$\diamondsuit$

Рассмотрим случай, когда t_0 – точка максимума. Для того, чтобы достаточное условие выполнялось, нам надо, чтобы $gradF(x) = 0$, $df(t_0) = 0$ и $d^2f(t_0)$ являлся положительно определенной квадратичной формой.

Для этого распишем $dg(t)$ через дифференциал функции Лагранжа:

$$dg(t) = dg(t) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(\Phi(t), t) = dL(\Phi(t), t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial L(\Phi(t), t)}{\partial x_k} dx_k$$

Фактически, это градиент функции Лагранжа. Возьмем точку $t_0 : z_0 = \Phi(t_0), (\Phi(t_0), t_0) = x_0$. Из необходимого условия локального экстремума следует, что $gradL(x_0, \lambda_0) = 0$. Следовательно, $dg(t_0) = 0$.

Рассмотрим $d^2g(t)$:

$$d^2g(t) = d^2g(t) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k d^2F_k(\Phi(t), t) = d^2L(\Phi(t), t) = d(dL(\Phi(t), t)) =$$

$$= d(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L(\Phi(t), t)}{\partial x_k} dx_k) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\Phi(t), t)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L(\Phi(t), t)}{\partial x_k} d^2x_k$$

Рассмотрим точку t_0 :

$$d^2g(t_0) = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(z_0, t_0)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j, F_i(x) = 0, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0, i = \overline{1, m}$$

$\blacksquare$

24 Глобальный экстремум векторной функции

Определение 24.1. *Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называют выпуклым, если*

$$\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D, \forall \tau : 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \Rightarrow \mathbf{x}_\tau = \mathbf{x}_0 + \tau (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \in D$$

Определение 24.2. *Функцию $f : D \to \mathbb{R}$ называют выпуклой, если множество D - выпукло и для любых $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D$, для любых $\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1$, выполняется неравенство*

$$f(\mathbf{x}_\tau) \leqslant f(\mathbf{x}_0) + \tau (f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0))$$

Теорема 24.1 (Достаточное условие выпуклости скалярной функции векторного аргумента)**.** *Пусть $f : D \to \mathbb{R}-$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на выпуклом множестве D. Если для любого $\mathrm{x} \in D$ все главные угловые миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}$ положительны, то функция f является выпуклого.*

Доказательство. Из критерия Сильвестра следует, что при каждом $\mathrm{x} \in \in D$ квадратичная форма $\mathbf{u}^\top \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{u}$ является положительно определенной. Пусть $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1-$ две различные точки из D. Рассмотрим скалярную функцию $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)), 0 \leqslant t \leqslant 1$, и вычислим $\varphi''(t)$. Используя теорему о матрице Якоби сложной векторной функции, имеем

$$\varphi'(t) = \frac{df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^\top \left(\frac{df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))}{d\mathbf{x}}\right)^\top,$$

$$\varphi''(t) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^\top \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

Отсюда и из критерия Сильвестра следует, что $\varphi''(t) > 0 \quad \forall t \in [0,1]$. По критерию выпуклости скалярных дважды дифференцируемых отображений функция $\varphi(t)$ выпукла на $[0,1]$, т.е. для любых $t_0, t_1 \in [0,1]$, для любых $\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1$, выполняется неравенство $\varphi(t_0 + \tau(t_1 - t_0)) \leqslant \varphi(t_0) + \tau(\varphi(t_1) - \varphi(t_0))$. Полагая в последнем неравенстве $t_0 = 0, t_1 = 1$, получим $f(\mathbf{x}_\tau) \leqslant f(\mathbf{x}_0) + +\tau(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)) \cdot$ □

Теорема 24.2 (Теорема о глобальном минимуме выпуклой функции)**.** *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}-$ *дифференцируемая выпуклая функция,* $\mathbf{x}_0-$ *внутренняя стациотарная точка функции. Тогда* $\mathbf{x}_0-$ *точка глобалъного минимума* f *на* D.

Доказательство. Предположим, что существует точка $\mathrm{x}_1 \in D$ такая, что

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0).$$

Точка $t = 0$ является стационарной точкой скалярной функции $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)), t \in [-\delta, 1]$, где $\delta > 0$ такое число, что точка $\mathbf{x}_0 - \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ принадлежит D. Кроме того, $\varphi-$ выпуклая функция на $[-\delta, 1]$, докажем этот факт. Требуется проверить свойство: $\varphi(t_0\tau + (1-\tau)t_1) \leqslant \tau\varphi(t_0) + (1-\tau)\varphi(t_1)$. Перепишем левую часть выражения используя определение φ:

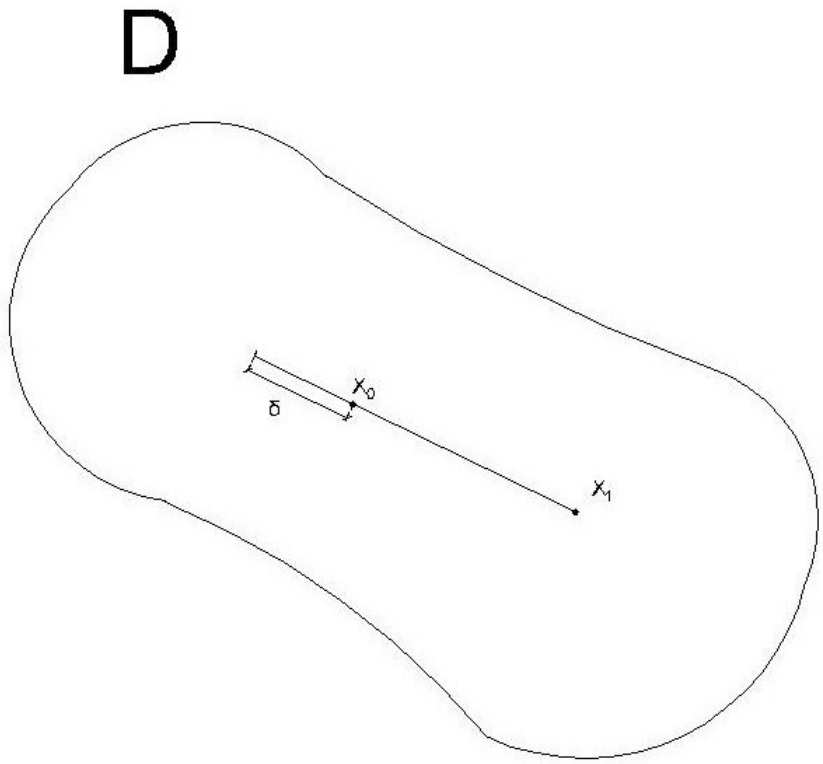
$$f(x_0 + t_0\tau(x_1 - x_0) + (1-\tau)t_1(x_1 - x_0)) = f(\tau(x_0 + t_0(x_1 - x_0)) + (1-\tau)(x_0 + t_1(x_1 - x_0))$$

Тогда так как f выпукла, то $\varphi(t_0\tau + (1-\tau)t_1) = f(\tau(x_0 + t_0(x_1 - x_0)) + (1-\tau)(x_0 + t_1(x_1 - x_0)) \leqslant \tau f(x_0 + t_0(x_1 - x_0)) + (1-\tau)f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)) = \tau\varphi(t_0) + (1-\tau)\varphi(t_1)$, следовательно $\varphi(t)$ выпукла.

По теореме о глобальном минимуме скалярной выпуклой функции, $t = 0$ - точка глобального минимума для $\varphi(t), t \in [-\delta, 1]$. Следовательно, $\varphi(1) \geqslant \varphi(0)$, отсюда $f(\mathbf{x}_1) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$, что противоречит $f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0)$.

Предположим x_0 не является точкой глобального минимума, тогда
$\exists x_1 \in D$ такой, что $f(x_1) < f(x_0)$. Рассмотрим $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$:
$t_0 = 0$ стационарная точка $\varphi(t)$

$$\varphi'(t) = \frac{df(x_0 + t(x_1 - x_0))}{dx}(x_1 - x_0), \quad \varphi'(0) = \frac{df(x_0)}{dx}(x_1 - x_0) = 0$$



□

25 Поверхности

Пусть $D \subseteq \mathrm{R}^2$ - ограниченная область на плоскости Ouv, $\overline{D} = D \cup \partial D$. И пусть *x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)* - три непрерывные функции, определенные на $\overline{D}$:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in \overline{D} \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{21}$$

Тогда говорят, что данная система является *параметрическим уравнением поверхности.*//
Векторную функцию

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{pmatrix}, (u,v) \in \overline{D}, \tag{22}$$

называют *векторным уравнением поверхности.*

Определение 25.1. *Поверхность называется простой, если у нее нет точек самопересечения. Т.е не существует пар точек, в которых функция принимает одинаковое значение.*

Определение 25.2. *Поверхность называется гладкой, если функции x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) являются непрерывно-дифференцируемыми.*

Определение 25.3. *Поверхность называется кусочно-гладкой, если D можно разбить на фрагменты, на которых функции x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) являются непрерывно-дифференцируемыми.*

Определим кривые в трехмерном пространстве. Пусть

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] - \text{кривая в пространстве } \mathrm{R}^3.$$

Тогда если данная прямая является гладкой, то ее длину можно посчитать по формуле:

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt$$

Аналогично вводятся криволинейные интергалы 1-го и 2-го типа.

КРИ-1 в пространстве:

$$\int_l f(x, y, z)\, ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt$$

Замечание 25.1. *КРИ-1 сохраняет все свойства, которыми он обладает и на поверхности*

КРИ-2 в пространстве:

$$\int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz :=$$

$$\int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t)\, dt$$

Замечание 25.2. *КРИ-2 сохраняет все свойства, которыми он обладает и на поверхности*

Замечание 25.3. *Формула Грина (и все вытекающие из нее) для КРИ-2 не работает в трехмерном просранстве*

Рассмотрим поверхность:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \overline{D}$$

Зафиксируем точку $(u_0,v_0) \in D$ (точка (u_0,v_0) - внутренняя точка D) и рассмотрим две кривые в пространстве:

$$l : \begin{cases} x = x(u_0, t), \\ y = y(u_0, t), \\ z = z(u_0, t), \end{cases} \quad t \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta], \quad l_1 : \begin{cases} x = x(t, v_0), \\ y = y(t, v_0), \\ z = z(t, v_0), \end{cases} \quad t \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$$

Замечание 25.4. *Кривые не должные выйти за пределы D*

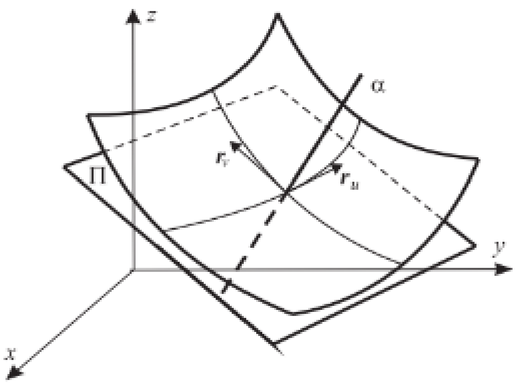


Рис.24.1.Касательная плоскость (П) и нормальная прямая (α)

Рассмотрим касательные к прямым l, l_1 в точке $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ и получим векторы r_v, r_u, задающие касательную поверхность:

$$r_v = x'_v(u_0, v_0) \cdot \overrightarrow{i} + y'_v(u_0, v_0) \cdot \overrightarrow{j} + z'_v(u_0, v_0) \cdot \overrightarrow{k}$$

$$r_u = x'_u(u_0, v_0) \cdot \overrightarrow{i} + y'_u(u_0, v_0) \cdot \overrightarrow{j} + z'_u(u_0, v_0) \cdot \overrightarrow{k}$$

Тогда уравнение касательной плоскости к исходной поверхности S, составленное по двум векторам r_v, r_u и по точке $M(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

А векторное произведение векторов r_v, r_u даст направление ветора нормали:

$$[r_v, r_u] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} + \overrightarrow{j} \cdot \begin{vmatrix} x'_v & z'_v \\ x'_u & z'_u \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}, \text{ где}$$

$A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ (транспонирование не меняет определитель)

Тогда можно записать уравнение нормали:

$$n : \begin{cases} x = At + x_0, \\ y = Bt + y_0, \\ z = Ct + z_0, \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{matrix} x_0 = x(u_0, v_0) \\ y_0 = y(u_0, v_0) \\ z_0 = z(u_0, v_0) \end{matrix}$$

Рассмотрим частный случай, когда исходная поверхность задается как $z = f(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}$:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \overline{D}$$

Тогда уравнение касательной имеет вид: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)\cdot(-f'_u) - (y - y_0)\cdot f'_v + (z-z_0)\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'_u = f'_x \\ f'_v = f'_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + z_0 = z$

Уравнение нормали имеет вид: $[r_v, r_u] = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, где $A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_u & f'_v \end{vmatrix} = -f'_u, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_v, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Получаем $n: \begin{cases} x = -f'_x(x_0,y_0) + x_0, \\ y = -f'_y(x_0,y_0) + y_0, \\ z = t + z_0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Замечание 25.5. *На практике часто берут направляющий вектор нормали* $(f'_x, f'_y, -1)$

26 Площадь поверхности

Пусть простая гладкая поверхность S задается следующим образом:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in \overline{D}, \quad D - \text{ограниченная область} \tag{24}$$

Разобъем область D на конечное число компактных частей n прямыми, параллельными осям Ov, Ou. Если какие-то части разбиения не являются прямоугольниками, то мы дополним все такие части до прямоугольников. Рассмотрим произволный прямоугольник D_k из разбиения. Пусть точка M_k имеет координаты (u_k, v_k), точка $M'_k = (u_k + \Delta u_k, v_k)$, точка $M''_k = (u_k, v_k + \Delta v_k)$ (рис. 25.1).

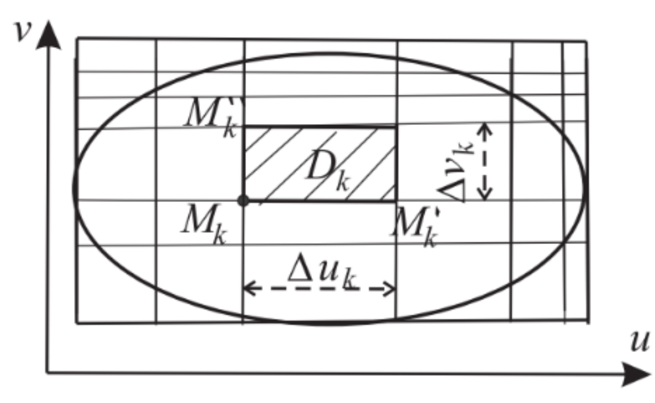


Рис.25.1.

Теперь рассмотрим нашу поверхность. Ясно, что каждому прямоугольнику D_k соответствует область S_k на поверхности S. Заменим S_k на параллелограмм Q_k, который строится слудующим образом: в точке $P_k = (x_k, y_k, z_k), x_k = x(u_k, v_k), y_k = y(u_k, v_k), z_k = z(u_k, v_k)$ проведем две касательные и на их направляющих векторах r_u, r_v построим параллелограмм.

На касательных выберем точки $P_k' = (x_k + x_u' \cdot \Delta u_k, y_k + y_u' \cdot \Delta u_k, z_k + z_u' \cdot \Delta u_k)$, $\quad P_k'' = (x_k + x_v' \cdot \Delta v_k, y_k + y_v' \cdot \Delta v_k, z_k + z_v' \cdot \Delta v_k)$ (рис. 25.2).

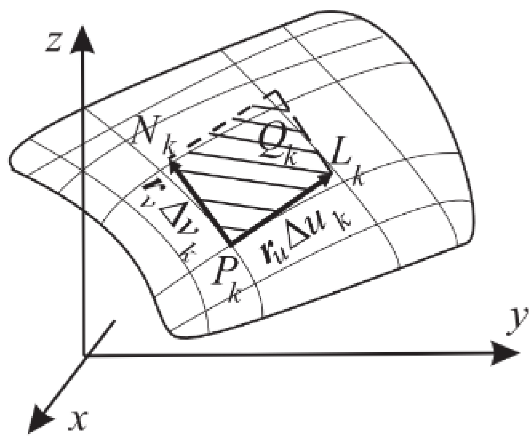


Рис.25.2. (на рисунке точка N_k соответствует точке P_k'', а точка L_k - точке P_k')

Тогда

$$\text{пл.}Q_k = \big|[r_u, r_v]\big|_{(u_k,v_k)} \cdot \big|\Delta u_k \cdot \Delta v_k\big| \tag{25}$$

Найдем сумму σ площадей всех параллелограммов Q_k

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \big|[r_u, r_v]\big|_{(u_k,v_k)} \cdot \big|\Delta u_k \cdot \Delta v_k\big|$$

Тогда получаем:

$$\text{пл.}S := \iint_D \big|[r_u, r_v]\big| \, du \, dv \tag{26}$$

Заметим, что $\big|[r_u, r_v]\big|^2 = \big|r_u\big|^2 \cdot \big|r_v\big|^2 \cdot \sin^2\varphi = \big|r_u\big|^2 \cdot \big|r_v\big|^2 - \big(r_u, r_v\big)^2$. Пусть $\big|r_u\big|^2 = E, \quad \big|r_v\big|^2 = G, \quad \big(r_u, r_v\big) = F$. Тогда

$$\text{пл.}S := \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \tag{27}$$

Если же поверхность задается явно, т.е. $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$, то

$$\text{пл.}S := \iint_D \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2} \, dx \, dy \tag{28}$$

Замечание 26.1. *Доказательство последнего утверждения дается в качестве упражнения*

Пример 26.1. *Пусть в пространстве заданы два цилиндра:* $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$. *Требуется найти площадь фигуры* S, *по которой пересекаются данные цилиндры.*

Для начала поймем, какая фигура получается при пересечения заданных поверхностей. Для этого зафиксируем $z = z_0$. *Получаем две функции* $x^2 + z_0^2 = a^2, \quad y^2 + z_0^2 = a^2$, *которые задают в координатной плоскости* Oxy *квадрат с центром в начале координат и длиной стороны, равной* $2\sqrt{a^2 - z_0^2}$. *Теперь, меняя значение* z_0 *от* a *до* $-a$, *мы получим искомую фигуру. Для наглядности изобразим поверхности при* $a = 4$ *(рис. 25.3):*

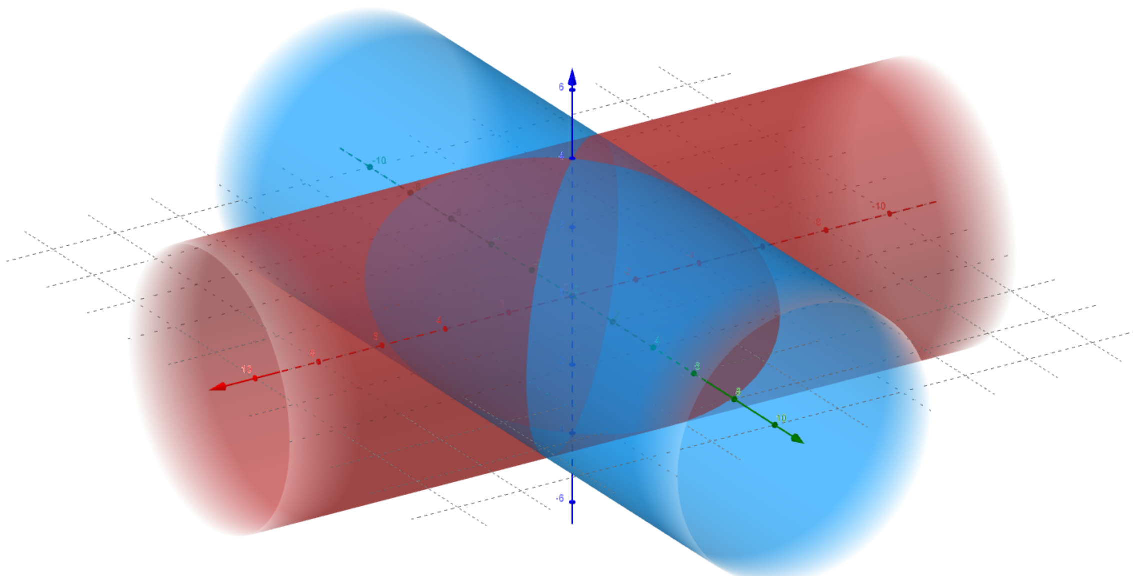


Рис.25.3. Графики функций $\quad x^2 + z^2 = a^2$ *(синий)* , $\quad y^2 + z^2 = a^2$ *(красный)* $\quad$ *при* $\quad a = 4$

Теперь рассмотрим только ту часть, для которой $x > 0, y > 0, z > 0$, *а проекция этой части на плоскость* Oxy *будет ограничена прямыми* $x = 0, y = 0, x = a, y = a, y \leqslant x$ *(т.е мы рассматриваем* $\dfrac{1}{16}$ *часть всей искомой фигуры). Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 \leqslant a^2, \end{cases} \tag{29}$$

Из нее получаем, что $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. *Осталось только посчитать искомую площадь:*

$$\text{пл.}S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy = 16 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} + 0\, dx\, dy} =$$

$$= 16 \int_0^a dx \int_0^x dy \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = 16a \int_0^a dx \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \cdot (-\sqrt{a^2 - x^2})\Big|_0^a = 16a^2$$

27 Поверхностный интеграл 1 рода

Пусть $w = f(x, y, z)$ - скалярная функция, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}^3$, а

$$\rho : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), u, v \in \overline{D} \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

- кусочно-гладкая поверхность, лежащая в E. Предположим, что функция

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

интегрируема по Риману на $\overline{D}$. Отображение $\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}, u, v \in \overline{D}$ ограничено и имеет множество точек разрыва нулевой площади $\Rightarrow$ оно тоже интегрируемо по Риману на $\overline{D}$. Функция $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}$ интегрируема по Риману на $\overline{D}$ как произведение интегрируемых функций.

- *Двойной интеграл вида*

$$\iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv$$

прнимают за поверхностный интеграл 1 рода от f по поверхности ρ и обозначают

$$\iint\limits_{\rho} f(x, y, z)d\rho$$

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_{\rho} f(x, y, z)d\rho := \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv$$

Свойства ПОВИ-1:

1. *Аддитивность*

   Рассмотрим поверхность $\rho : r = r(u, v), u, v \in \overline{D}$ Пусть $\overline{D}_1, ..., \overline{D}_k$ - некоторое разбиение замкнутой области $\overline{D}$ кусочно-гладкими кривыми на замкнутые области, не имеющие общих внутренних точек. Мы говорим, что поверхность ρ составлена из поверхностей f_i, если f_i, i от 1 до k, - поверхности с векторными уравнениями $\rho : r = r(u, v), u, v \in \overline{D}$.

   Если кусочно-гладкая поверхность ρ составлена из поверхностей f_i, i от 1 до k и определен интеграл $\iint\limits_{\rho} \rho(x, y, z)d\rho$, то из определения ПОВИ-1 и из аддитивности двойного интеграла вытекает аддитивность ПОВИ-1, то есть

$$\iint\limits_{\rho} \rho(x, y, z)d\rho = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{f_i} \rho(x, y, z)d\rho$$

2. *Физический смысл*

   Пусть $\rho(x.y.z)$ - плотность простой кусочно-гладной поверхности ρ в точке (x, y, z), тогда ПОВИ-1 $\iint\limits_{\rho} \rho(x, y, z)d\rho$ равен массе поверхности ρ.

28 Поверхностный интергал 2 типа

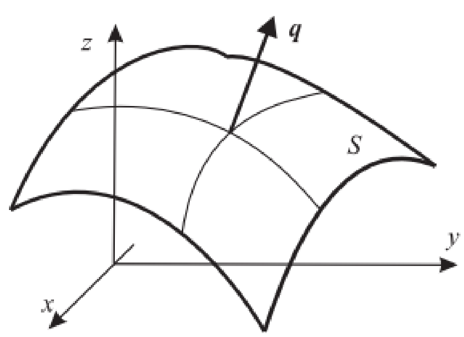
Рассмотрим простую гладкую поверхность

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), u, v \in \overline{D}\textbf{(27.1)} \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Пусть (u_0, v_0) - граничная точка множества $\overline{D}$. Точку L $= (x(u_0, v_0), (y(u_0, v_0)), z(u_0, v_0))$ называют траевой для поверхности S. Множество краевых точек называют краем поверхности. Точки M$(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$, называют внутренними точками поверхности. В каждой точке M(u, v) поверхности S определены два противоположно направленных единичных нормальных вектора

$$n(u, v) = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}$$

и $-\mathbf{n}(u, v)$. Так как поверхность гладкая, то функция $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ непрерывна на $\overline{D}$. Фиксируем один из единичных нормальных векторов, т. е. $\mathbf{n}(u, v)$ или -$\mathbf{n}(u, v)$, и обозначаем его через $-\mathbf{q}(u, v)$. Пару (S,$\mathbf{q}$) называют положительной стороной поверхности и её обозначают S+.



Пара (S,-$\mathbf{q}$) - противоположная отрицательная сторона, которую обозначают S−. При выборе стороны поверхности достаточно указать нормаль в одной точке этой поверхности.

Пусть S-простая гладкая поверхность с краем ∂s. Предположем что край - это простая кусочно-гладкая замкнутая кривая. Выбрав положительную сторону поверхности S+, мы зададим положительное направление движения по краю ∂s - то направление, двигаясь по которому наблюдатель, который находиться на положительной стороне поверхности, видит поверхность S слева от себя. И обратно: по положительному направлению движения по краю однозначно востанавливается положительная сторона поверхности. Напрвление движения по ∂s, противоположное положительному - отрицательное.

Теперь пусть S - кусочно-гладкая поверхность, составленная из простых гладких поверхностей $S_1, ..., S_k$, причём край ∂s_i, каждой поверхности - простая кусочно-гладкая кривая и любые две части S_i, S_j, которые имеют общие точки, примыкают друг к другу по некоторой кусочно-гладкой кривой. Пусть S_1+ - это положительная сторона части S_1. Выбор этой стороны задал положительное направление на крае ∂s_1. Далее выбирем положительные направления движения на края частей, смежных с S_1+, а именно, выбираем те направления, которые противоположны направлению на ∂S_i+ и т. д. Эта кусочно-гладкая поверхность S будет двухсторонней, если по указанному выше правилу можно однозначно установить положительноедвижение по краю каждой части S_i, i=1,...,k. По положительным направлениям на краях найдём соответствующие стороны S_i+ каждой части. Совокупность $(S_1+, ..., S_k+$ назовём положительной стороной кусочно-гладкой двусторонней поверхности S. Далее будем рассматривать только лишь кусочно-гладкие двухсторонние поверхности.

Пусть на множестве E $\subset \mathbf{R}^3$ заданы три скалярные функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ и пусть $S_1+ = (S, \mathbf{q})$ - положительная сторона простой гладкой поверхности, $S \subset E$. Поверхностные интегралы первого рода

$$\iint\limits_S P(x,y,z)cos(\widehat{\mathbf{qi}})ds, \iint\limits_S P(x,y,z)cos(\widehat{\mathbf{-qi}})ds$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)cos(\widehat{\mathbf{qj}})ds, \iint\limits_S Q(x,y,z)cos(\widehat{\mathbf{-qj}})ds$$

$$\iint\limits_S R(x,y,z)cos(\widehat{\mathbf{qk}})ds, \iint\limits_S R(x,y,z)cos(\widehat{\mathbf{-qk}})ds$$

относятся к **поверхностным интеграла второго типа** и обозначаются соответственно

$$\iint\limits_{S+} P(x,y,z)dydz, \iint\limits_{S-} P(x,y,z)dydz$$

$$\iint\limits_{S+} Q(x,y,z)dxdz, \iint\limits_{S-} Q(x,y,z)dxdz$$

$$\iint\limits_{S+} R(x,y,z)dxdy, \iint\limits_{S-} R(x,y,z)dxdy$$

Чаще всего рассматривают сумму интегралов $\iint\limits_{S+} Pdydz + \iint\limits_{S+} Qdxdz + \iint\limits_{S+} Rdxdy$ и обозначают её как:

$$\iint\limits_{S+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Свойства ПОВИ-2:

1. *ПОВИ-2 меняет знак при замене стороны поверхности на противоположную.*

$\diamondsuit$ докажем для интеграла $\iint\limits_{S+} Rdxdy$

Поскольку $\widehat{(\boldsymbol{qk})} + \widehat{(\boldsymbol{qk})} = \pi$, *то*

$$cos(\widehat{\boldsymbol{qk}}) = -cos(\widehat{\boldsymbol{-qk}}), \iint\limits_{S+} Rdxdy = -\iint\limits_{S-} Rdxdy$$

$\blacksquare$

2. **Формулы сведения ПОВИ-2 к двойному интегралу.**
Если функции P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)), Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)), R(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) интегрируемы по Риману на $\overline{D}$ *и нормаль* $\boldsymbol{q}$*, которая соответствует положительной стороне* $S^{+} = (S, \boldsymbol{q})$ *простой гладкой поверхности* ***(27.1)****, совпадает с вектором*

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{A}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{i} + \frac{B}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{j} + \frac{C}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{k},$$

то

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{\overline{D}} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Adudv, \; \textbf{(27.2)}$$

$$\iint\limits_{S^+} Q(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{\overline{D}} Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Bdudv, \; \textbf{(27.3)}$$

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Cdudv. \textbf{(27.4)}$$

Если же $\boldsymbol{q}$*=-*$\boldsymbol{n}$*, то в правых частях формул* ***(27.2)-(27.4)*** *знак меняется на противоположный.*

$\diamondsuit$ для интеграла $\iint\limits_{S^+} Rdxdy$

Поскольку

$$cos(\widehat{(\boldsymbol{nk})}) = \frac{([\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v], \boldsymbol{k})}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{C}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{i} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)cos(\widehat{(\boldsymbol{nk})})ds =$$

$$\iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}\sqrt{EG - F^2}dudv =$$

$$\iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Cdudv.$$

$\blacksquare$

3. *Пусть поверхность S является графиком непрерывно дифференцируемой функции z = f(x,y),* $(x, y) \in \overline{D}$*, и пусть* $(S, \boldsymbol{n}) = S^{+}$*- сторона поверхности, которая соответствует вектору*

$$\boldsymbol{n} = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}\boldsymbol{i} + \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}\boldsymbol{k}.$$

Эту сторону S^{+} *называют верхней, и формулы сведения ПОВИ-2 к 2И в этом случае имеют вид*

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz = -\iint\limits_{\overline{D}} P(x,y,f(x,y))f'_x(x,y)dxdy,$$

$$\iint\limits_{S^+} Q(x,y,z)dxdz = -\iint\limits_{\overline{D}} Q(x,y,f(x,y))f'_y(x,y)dxdy,$$

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} R(x,y,f(x,y))f'_z(x,y)dxdy,$$

Если $S^+ = (S, -\boldsymbol{n})$-нижняя сторона поверхности, то

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{\overline{D}} R(x,y,f(x,y))f'_z(x,y)dxdy.$$

4. *Рассмотрим гладкую поверхность S: x = x(u,v), y = (u,v), z = (u,v) $\in \overline{D}$, и диффеоморфное преобразование*

$$\begin{cases} u = \varphi(t,\tau), \\ v = \psi(t,\tau) \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(27.5)}}$$

*ограниченной замкнутой области $\overline{E} = E \cup \partial E$ в $\overline{D}$. Якобиан этого преобразования $I(t,\tau)$ непрерывен и не равен нулю **(п.9)**. Диффеоморфное преобразование **(27.5)** называют допустимой заменой параметров, если для любых $(t,\tau) \in \overline{E}$ его якобиан положителен. Пусть $u = \varphi(t,\tau), v = \psi(t,\tau), (t,\tau) \in \overline{E}$, - допустимая замена параметров. Рассмотрим поверхность $L : x = \xi(t,\tau) = x(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)), y = \eta(t,\tau) = y(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)), z = \chi(t,\tau) = z(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))$, $(t,\tau) \in \overline{E}$. Она является гладкой, и множества в пространстве Oxyz, которые пробегают точки M(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) и $N(t,\tau) = (\xi(t,\tau),\eta(t,\tau),\chi(t,\tau))$, когда (u,v) и (t,τ) принимают значения соответственно из множеств $\overline{D}$ и $\overline{E}$, совпадают. В дальнейшем говорим, что поверхность L получена из поверхности S с помощью допустимой замены параметров. Если поверхность L получена из простой гладкой поверхности S с помощью допустимой замены параметров $u = \varphi(t,\tau), v = \psi(t,\tau), (t,\tau) \in \overline{E}$, и определён интеграл*

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{L^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

, где $L^+ = (L, \boldsymbol{q}(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)))$.

♢ для интеграла $\iint\limits_{S^+} Rdxdy$ в случае $\mathbf{q}$=$\mathbf{n}$=$\frac{A}{|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|}\mathbf{i} + \frac{B}{|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|}\mathbf{j} + \frac{C}{|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|}\mathbf{k}$

*По формуле **(27.4)***

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C(u,v)dudv.$$

Используем замену переменных

$$\begin{cases} u = \varphi(t,\tau), \\ v = \psi(t,\tau), \end{cases} \qquad (t,\tau) \in \overline{E}$$

в двойном интеграле последней формулы ***(п. 9)****:*

$$\iint_{S^+} Rdxdy = \iint_{\overline{E}} R(x(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)),y,z)C(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))I(t,\tau)dtd\tau$$

Так как $C(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))I(t,\tau) = \xi_t'\eta_\tau' - \eta_t'\xi\tau' = C_1(t,\tau)$*, то*

$$\iint_{S^+} Rdxdy = \iint_{\overline{E}} R(\xi(t,\tau),\eta(t,\tau),\chi(t,\tau))C_1(t,\tau)dtd\tau = \iint_{L^+} R(x,y,z)dxdy$$

■

Замечание 28.1. *Согласно четвертому свойству поверхностных интегралов второго типа, значения интеграла для всех поверхностей, параметрические уравнения которых связаны допустимыми заменами параметров, совпадают. Поэтому часто при задании поверхностного интеграла задают лишь множество точек в пространстве, соответствующее поверхности, не указывая параметрические уравнение поверхности. В этом случае предполагается, что существует такое параметрическое уравнение, соответствующее указанному множеству, что поверхность с этим уравнением является простой гладкой. В этом случае интеграл вычисляется по этой поверхности или по любой другой, полученной из нее допустимой заменой параметров.*

5. *Если* S *– цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси* Oz*, то* $cos(\widehat{nk}) = 0$*, тогда* $\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = 0$.

6. *Если* $(S_1+,...,S_k+)$*-положительная сторона кусочно-гладкой поверхности* S*, то по определению полагают*

$$\iint_{S^+} Pdydz := \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i+} Pdydz,$$

$$\iint_{S^+} Qdxdz := \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i+} Qdxdz,$$

$$\iint_{S^+} Rdxdy := \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i+} Rdxdy,$$

Пример 28.1. *Вычислим ПОВИ-2*

$$I = \iint_{S^+} xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

где S^+ *- внутренняя сторона цилиндра:*

$$x^2 + y^2 = a^2, -h \le z \le h$$

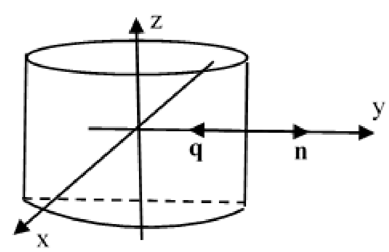
Параметрическое уравнение поверхности S:

$$\begin{cases} x = acos(u), \\ y = asin(u), \\ z = v, \end{cases} \quad D: \begin{cases} 0 \le u \le 2\pi \\ -h \le v \le h \end{cases}$$

Найдём коэфициенты A,B и C для S:

$$A = det\begin{pmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = acos(u), B = det\begin{pmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{pmatrix} = asin(u), C = 0.$$

Вектор $\boldsymbol{n} = (\frac{A}{|[\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{i} + \frac{B}{|[\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{j} + \frac{C}{|[\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v]|}\boldsymbol{k})\Big|_{(\frac{\pi}{2},0)}$*, образует острый угол с осью 0y, а вектор* $\boldsymbol{q}$*, соответствующий внутренней стороне цилиндра в той же точке поверхности, образует тупой угол с этой осью, следовательно,* $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{n}$*. Используя формулы сведения ПОВИ-2 к двойному интегралу, имеем*



$I = -\iint\limits_D a^2 dudv = -a^2 \;\; пл.D = -4\pi a^2 h$

29 Формула Остроградского

Пусть есть $T \in \mathbb{R}^3$ - ограниченное замкнутое тело, граница которого ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью. За положительную сторону ∂T^+границы тела T принимаем внешнюю сторону $(\partial T, \vec{n})$.

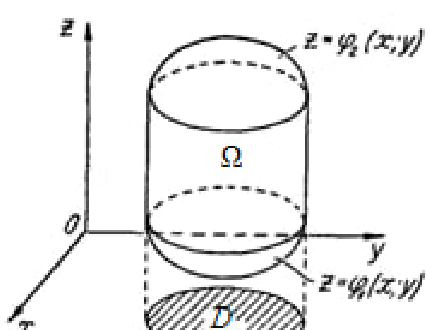


Рис. 1

Лемма 29.1. *Предположим, что есть цилиндроид T, элементарный относительно оси $0z$. S - поверхность этого цилиндроида. $S = \partial T$. Предположим, что есть $R(x, y, z)$ - непрерывно дифференцируемая на T функция. Тогда верна следующая формула:*

$$\iint\limits_{S^+} Rdxdy = \iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

$\diamondsuit$

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D} dxdy (R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))) =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dxdy - \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dxdy =$$

$$= [\iint\limits_{S^+} Rdxdy = \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dxdy, C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, \text{но} \quad x = u, y = v, \text{тогда} \quad C = 1] =$$

$$= \iint_{S_1^+} Rdxdy - \iint_{S_2^+} Rdxdy$$

$$\text{Причем} \quad \iint\limits_{S_3} Rdxdy = 0 (\text{из свойства ПОВИ-2}), \text{т.е} S^+ = S_1^+ \cup S_2^- \cup S_3$$

$\square$

Из леммы получим общее утверждение, которое называется формулой Остроградского.

Теорема 29.1. *(формула Остроградского) Пусть тело $T \in \mathbb{R}^3$ - ограниченное замкнутое тело, граница которого ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью. Предположим есть $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ - непрерывно дифференцируемые на S функции. Тогда верна следующая формула:*

$$\int\limits_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iiint\limits_{T} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz$$

$\diamondsuit$ *Будем говорить, что тело T называется составным, если его можно разбить на конечное число цилиндроидов, элементарных относительно каждой из осей. Доказательство приведем для случая, когда T - составное. Разобъем T на конечное объединение цилиндроидов, элементарных относительно оси $0z$. $T = \bigcup\limits_{j=1}^{n} T_j, T_j -$элементы относительно $Oz, \forall j = \overline{1, n}$*

К каждой части применим лемму:

$$\iint\limits_{\partial T_j^+} Rdxdy = \iiint\limits_{T_j} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

Используя свойство аддитивности получаем:

$$\iint\limits_{\partial T^+} R dxdy = \iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

Аналогично относительно оси $0y$*:*

$$\iint\limits_{\partial T^+} Q dxdz = \iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz$$

Аналогично относительно оси $0x$*:*

$$\iint\limits_{\partial T^+} P dydz = \iiint\limits_T \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

□

30 Формула Стокса

Предположим, что есть гладкая поверхность S в пространстве:

$$S : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \bar{D}, \ \ D - \text{ограниченная область} \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

S - простая кусочно-гладкая поверхность $l = \partial D, l : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} t \in [a,b]$ Будем считать, что l - простая кусочно-гладкая кривая. Край поверхности S есть кривая в пространстве, а именно:

$$L : \begin{cases} x = x(u(t),v(t)), \\ y = y(u(t),v(t)), \quad t \in [a,b], \\ z = z(u(t),v(t)), \end{cases}$$

Край поверхности S можно рассматривать как L, т.е граница $\partial S = L$

Теорема 30.1. *(формула Стокса) Пусть* S *- гладкая поверхность.* ∂S *- простая кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{R}^3$*. И предположим, что есть функции* $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ *- непрерывно дифференцируемые на* S*. Тогда верна следующая формула:*

$$\int\limits_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S^+} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz$$

♢ *Доказательство для случая, когда* S *- дважды непрерывно дифференцируемая поверхность. Возьмем первое слагаемое:*

$$\int\limits_{\partial S^+} Pdx = \int\limits_{L^+} Pdx = \int\limits_a^b P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))(x'_u(u(t),v(t))u'(t) + x'_v(u(t),v(t))v'(t))dt =$$

$$= [\textit{сводим КРИ-2 в пространстве к КРИ-2 на плоскости}] =$$
$$= \int\limits_{l^+} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(x'_u(u,v)du + x'_v(u,v)dv \right) =$$
$$= [\textit{применим формулу Грина}] =$$
$$= \iint\limits_D (\frac{\partial}{\partial u}(Px'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_u)dudv =$$
$$= \iint\limits_D ((\frac{\partial P}{\partial x}x'_u + \frac{\partial P}{\partial y}y'_u + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u)x'_v + Px''_{vu} - ((\frac{\partial P}{\partial x}x'_v + \frac{\partial P}{\partial y}y'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_v)x'_u + Px''_{uv}))dudv =$$
$$= [\textit{поскольку } S \textit{ - дважды непрерывно дифференцируема, то } Px''_{vu} = Px''_{uv}, \textit{ сокращаем}] =$$
$$= \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}y'_u x'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u x'_v - \frac{\partial P}{\partial y}y'_v x'_u - \frac{\partial P}{\partial z}z'_v x'_u =$$
$$= [C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}] =$$
$$= \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}(-C) + \frac{\partial P}{\partial z}B = -\iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz$$

Аналогично проделать для Q и R и получим формулу. $\square$

31 Элементы теории поля

Рассмотрим Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, возьмём $T \in \mathbb{R}^3$ - ограниченное замкнутое тело, граница которого ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью.

$$f : T \to \mathbb{R} \qquad \text{Скалярное поле}$$
$$F : T \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{Векторное поле}$$
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

f, F – непрерывно дифференцируемые
1) Градиент скалярного поля

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$\mathrm{grad}(f) : T \to \mathbb{R}$
Градиент указывает направление масимального роста функции f
2) Дивергенция векторного поля

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$\operatorname{div}(\mathbf{F}) : T \to \mathbb{R}$
Это мера того, насколько выходящий поток отличается от входящего в окрестности точки
$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \lim\limits_{V \to 0} \frac{\phi_F}{V}$, где $\phi_F = \iint\limits_{\partial V} (F, \vec{n}) ds -$поток векторного поля F через границу объёма V в направлении вне
Если $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$, значит входящий и выходящий потоки практически одинаковы. Движение не поступательное, а вращательное.
3) Ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{i}} & \tilde{\mathbf{j}} & \tilde{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \tilde{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \tilde{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \tilde{\mathbf{k}}$$

F - поле скорости, тогда $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ - угловая скорость, $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 2\omega$
4) Циркуляция векторного поля
Пусть есть $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ и l^+ - замкнутый кусочно-гладкй путь в $\mathbb{R}^3$. Тогда циркуляция - $\oint\limits_{l^+} (F, dr)$, где $dr = (dx \quad dy \quad dz)$, т.е КРИ-2 $\oint\limits_{l^+} Pdx + Qdy + Rdz$ Т.е циркуляция - это работа, которую совершает векторное поле F при перемещении точки вдоль пути l^+ Формула Остроградского:

$$\int\limits_{\partial V^+} (F, \vec{n}) ds = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz$$

Формула Стокса:

$$\oint\limits_{l^+} (F, dr) = \iint\limits_{S^+} (\operatorname{rot} \mathbf{F}, \vec{n}) ds$$

Векторное поле $F : T \to \mathbb{R}^3$ называется потенциальным, если для любого простого замкнутого кусочно-гладкого пути $l^+ : \oint\limits_{l^+} (F, dr) = 0$.
Векторное поле $F : T \to \mathbb{R}^3$ называется соленоидальным, если для любого ограниченного замкнутого тела $V \in T : \iint\limits_{\partial V^+} (F, \vec{n}) ds = 0$.

Теорема 31.1. *(о независимости КРИ-2 от пути интегрирования) Пусть $F : T \to \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемая в односвязной области $T \in \mathbb{R}^3$. Тогда следующие условия равносильны:*
1) *Векторное поле F потенциально в T;*
2) $\int\limits_{AB^+} (F, dr)$ *не зависит от кусочно-гладкого пути, соединяющего точки $A, B \in T$;*
3) *Существует потенциал $u : T \to \mathbb{R}$, т.е $\operatorname{grad}(u) = F \ \forall (x, y, z) \in T$*
4) *F - безвихревое, т.е $\operatorname{rot}(F) = 0$*
$\diamondsuit$ *Упражнение* $\square$

Теорема 31.2. *(критерий соленоидальности) Пусть $F : T \to \mathbb{R}$ непрерывное дифференцируемое в односвязной области T. Тогда F соленоидальное в T тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}(F) = 0 \ \forall (x, y, z) \in T$*
$\diamondsuit \to$ *Пусть векторное поле соленоидальное, т.е $\forall V \subseteq T \ \iint\limits_{\partial V^+} (F, \vec{n}) ds = 0$*

Пусть $\exists(x_0,y_0,z_0)$: $\operatorname{div}(F)\neq 0$. *Пусть для определенности* $\operatorname{div}(\mathbf{F})|_{(x_0,y_0,z_0)}>0$. *По теореме о стабилизации знака существует шар* $B(x_0,y_0,z_0)$, *принадлежащий* T, *такой что* $\operatorname{div}(\mathbf{F})>0$

$\iint\limits_{\partial B^+}(\vec{F},\vec{n})ds=\iiint\limits_{B}\operatorname{div}(\mathbf{F})dxdydz\neq 0$. *Противоречие.*

$\leftarrow$ *Предположим, что* $\operatorname{div}(F)=0$, *применим формулу Остроградского. Возьмем* $\forall V\subseteq T$, $\iint\limits_{\partial V^+}(F,\vec{n})ds=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}(\mathbf{F})dxdydz=0 \quad \square$

Пример 1:

$$\iint\limits_{S^+} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

Где S^+ - внутренняя сторона цилиндра $x^2+y^2=a^2, -h\leq z\leq h$

$$S:\begin{cases} x=a\cos\phi, \\ y=a\sin\phi, \quad (\phi,v)\in\bar{D}=[0,2\pi]*[-h,h] \\ z=v \end{cases}$$

$$A=\begin{vmatrix} y'_\phi & y'_v \\ z'_\phi & z'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=a\cos\phi, B=\begin{vmatrix} z'_\phi & z'_v \\ x'_\phi & x'_v \end{vmatrix}=a\sin\phi, C=\begin{vmatrix} x'_\phi & x'_v \\ y'_\phi & y'_v \end{vmatrix}=0.$$

$$\vec{n}=\frac{A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}}{\left|[r_\phi,r_v]\right|}$$

$$I=-\iint\limits_{D}(a^2\cos^2\phi+a^2\sin^2\phi+v*0)d\phi dv=-4\pi a^2h$$

Пример 2:

Вычислить интеграл:

$$I=\iint\limits_{S} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

S - внешняя сторона куба: $0\leq x,y,z\leq a$

$$I=2\iiint\limits_{0\leq x,y,z\leq a}(x+y+z)dxdydz=3a^4$$

Пример 3:

$$I=\oint\limits_{C} ydx+zdy+xdz, \quad C-\text{окружность} \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases},$$

Пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox

Изобразим нашу поверхность, потом используем формулу Стокса:

$$\oint\limits_{l^+}(F,dr)=\iint\limits_{S^+}(\operatorname{rot}\mathbf{F},\vec{n})ds$$

Найдем ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{i}} & \tilde{\mathbf{j}} & \tilde{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \vec{i} * (-1) + \vec{j} * (-1) + \vec{k} * (-1)$$

Вектор нормали $\vec{n} = (1,1,1)$, тогда вектор единичной нормали $\vec{q} = (1\sqrt{3}, 1\sqrt{3}, 1\sqrt{3})$. Тогда получаем:

$$I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz = -\sqrt{3}\iint\limits_S ds = -\pi\sqrt{3}$$

Пример 4:
$T \subseteq \mathbb{R}^3, \quad u(t,x)$ - температура тела в момент времени t в точке $x \in T$
Закон Фурье: $\omega = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \quad \omega$ - плотснoть потока тепла в направлении единичной нормали $\vec{n}$ за единицу времени через границу ∂V объема V, k- коэффициент теплопроводности.
$V \subseteq T, \Delta t = t_2 - t_1, f(t,x,u)$ - плотность источников тепла.
$Q_1 = \int\limits_V c\rho u dx|_{t=t_1}^{t=t_2}$ - расход тепла на изменение температуры, где c - коэффициент теплоемкости, ρ - плотность вещества.
$Q_2 = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\partial V} k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dsdt$- изменение тепла за счет выходящего из V потока.
$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V f(t,x,u)dxdt$ - изменение тепла за счет источников.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \Leftrightarrow \int\limits_V c\rho u dx|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\partial V} k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dsdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V f(t,x,u)dxdt$$

$$\int\limits_{\partial V} k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = k\int\limits_V \operatorname{div}\operatorname{grad}(\mathbf{u})dx = k\int\limits_V \Delta u dx;$$

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u)dxdt$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V (\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - k\Delta u - f)dxdt = 0$$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + f, \text{где} \quad c\rho = 1, k = a^2$$

Значит

$$u_t = a^2\Delta u = f$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

32 Числовые ряды

Пусть есть последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, ... \in \mathbb{R}$.

Формальное выражение $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$ будем называть рядом и записывать кратко $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$, а a_n будем называть общим членом ряда.

Определение 32.1. *Пусть есть числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ *(ряд числовой, если* $\forall a_n \in \mathbb{R}$*), тогда* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *будем называть частной(частичной) суммой ряда.*

Определение 32.2. *Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится (*$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n < \infty$*), если* (S_n) *сходится к конечному числу* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, S \in \mathbb{R}$*. Иначе говорят, что ряд рассходится, то есть* (S_n) *не является сходящейся.*

Определение 32.3. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *называется суммой ряда*

Теорема 32.1. *(необходимое условие сходимости)*
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
$\diamondsuit$
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *сходится* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S - S = 0.$
$\square$

Однако, это условие не является достаточным, например, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ рассходится.

Для краткости на практике ряд будем записывать как $\sum a_n$.

Определение 32.4. *Положительный числовой ряд - числовой ряд, где* $\forall a_n \geqslant 0$*. Если* $\forall a_n > 0$*, то говорят, что ряд строго положительный.*

Теорема 32.2. *(критерий сходимости положительного ряда)*
Пусть есть положительный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$*.*
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Longleftrightarrow (S_n)$ *ограниченная.*
$\diamondsuit$
Если ряд положительный, то (S_n) *является монотонно возрастающей. Тогда ряд сходится* $\Longleftrightarrow (S_n)$ *сходится* $\Longleftrightarrow (S_n)$ *является ограниченной.*
$\square$

Теорема 32.3. *(признак сравнения)*
Пусть есть 2 положительных ряда $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\forall a_n \geqslant 0$, $\forall b_n \geqslant 0$ *а также* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ $\forall n$*, тогда* $\sum b_n$ *сходится* $\Rightarrow \sum a_n$ *сходится,* $\sum a_n$ *расходится* $\Rightarrow \sum b_n$ *расходится.*
$\diamondsuit$
Пусть S_n^1 *- частные суммы* $\sum a_n$, S_n^2 *- частные суммы* $\sum b_n$.

$\sum b_n$ сходится $\Rightarrow$ (S_n^2) ограниченная по критерию сходимости положительного ряда.
$0 \leqslant S_n^1 \leqslant S_n^2\ \forall n \Rightarrow$ (S_n^1) ограниченная $\Rightarrow \sum a_n$ сходится по критерию сходимости.
Вторая часть доказывается аналогично
$\square$

Определение 32.5. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовой ряд, тогда $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ - остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*

$\sum a_n$ сходится $\iff$ остаток ряда сходится.
Если $\exists$ m: $a_n \geqslant 0\ \forall n \geqslant m$, то такой ряд тоже будем называть положительным.

Теорема 32.4. *(предельный признак сравнения)*
$\sum a_n, \sum b_n$ строго положительны, тогда

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l,\ 0 < l < \infty$

   Тогда $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся либо расходятся одновременно.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

   Тогда если $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится, $\sum a_n$ расходится $\Rightarrow \sum b_n$ расходится.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

   Тогда $\sum a_n$ сходится $\Rightarrow \sum b_n$ сходится, $\sum b_n$ расходится $\Rightarrow \sum a_n$ расходится.

$\diamondsuit$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l,\ 0 < l < \infty$

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)$*:* $\forall n \geqslant n_0(\varepsilon)\ \left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow$

   $l - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant l + \varepsilon \implies (l-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (l+\varepsilon)b_n \implies S_n^2(l-\varepsilon) \leqslant S_n^1 \leqslant S_n^2(l+\varepsilon) \Rightarrow$

   S_n^1 и S_n^2 ограничены и не ограничены одновременно $\Rightarrow$

   $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

   Например: $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow$ (S_n^2) ограниченная $\Rightarrow$ (S_n^1) ограниченная $\Rightarrow \sum a_n$ сходится.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)$*:* $\forall n \geqslant n_0(\varepsilon)\ \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \varepsilon \implies -\varepsilon b_n \leqslant a_n \leqslant \varepsilon b_n \implies -\varepsilon S_n^2 \leqslant S_n^1 \leqslant \varepsilon S_n^2$

   Тогда если $\sum b_n$ сходится, то (S_n^2) ограниченная $\Rightarrow$ (S_n^1) ограниченная $\Rightarrow \sum a_n$ сходится.

   Если $\sum a_n$ расходится, то (S_n^1) неограниченная $\Rightarrow$ (S_n^2) неограниченная $\Rightarrow \sum b_n$ расходится.

3. *Доказывается аналогично пункту 2*

□

Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ имеет частные суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q} \tag{30}$$

При $|q| < 1$ $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-q}$ и в этом случае геометрический ряд сходится, а при $|q| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} \neq 0$ и геометрический ряд расходится.

Теорема 32.5. *(признак Коши)*
$\sum a_n$ *- положительный ряд. Пусть* $\sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q$, *тогда*

1. $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ *сходится.*
2. $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ *расходится.*

♢

1. $q < 1 \Rightarrow \exists r$*:* $q < r < 1$
   $\exists m$*:* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant r \ \forall n \geqslant m \Rightarrow a_n \leqslant r^n$
   $\sum r^n$ *сходится, так как* $|r| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ *сходится.*
2. $q > 1 \Rightarrow \exists m$*:* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \ \forall n \geqslant m \Rightarrow a_n \geqslant 1 \ \forall n \geqslant m$
   $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ *- нарушается необходимое условие сходимости* $\Rightarrow \sum a_n$ *расходится.*

□

Лемма 32.1. $\sum a_n, \sum b_n, a_n > 0, b_n > 0 \ \forall a_n, b_n$
Пусть $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, *тогда*

1. $\sum b_n$ *сходится* $\Rightarrow \sum a_n$ *сходится.*
2. $\sum a_n$ *расходится* $\Rightarrow \sum b_n$ *расходится.*

♢

1. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \ \forall n$
   $\sum b_n$ *сходится.*
   $\dfrac{a_2}{a_1} \leqslant \dfrac{b_2}{b_1}, \ \dfrac{a_3}{a_2} \leqslant \dfrac{b_3}{b_2}, \ \dfrac{a_4}{a_3} \leqslant \dfrac{b_4}{b_3}, \ \ldots, \ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \dfrac{b_n}{b_{n-1}} \Rightarrow$
   $\dfrac{a_n}{a_1} \leqslant \dfrac{b_n}{b_1}$*(перемножим все неравенства)* $\Rightarrow$
   $a_n \leqslant \dfrac{a_1}{b_1} b_n \Rightarrow \sum a_n$ *сходится.*
2. *Предлагается в качестве упражнения*

□

Теорема 32.6. *(признак Даламбера)*
Пусть есть числовой ряд $\sum a_n, a_n > 0$ *и* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q$*, тогда*

1. $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ *сходится.*
2. $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ *расходится.*

♢

1. $\exists\, r$*:* $q < r < 1$
   $\exists\, m$*:* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r\ \forall n \geqslant m$*, тогда* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{r^{n+1}}{r^n}$
   Если $b_n = r^n$*, то по Лемме* $\sum b_n$ *сходится* $\Rightarrow \sum a_n$ *сходится.*
2. $q > 1 \Rightarrow \exists\, m$*:* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1\ \forall n \geqslant m$*. Тогда* $a_{n+1} \geqslant a_n$ *и* $a_n \nearrow$
   $a_n \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0 \Rightarrow \sum a_n$ *расходится.*

□

Определение 32.6. *Функцию* $f(x), x \geqslant 1$*, называют производящей для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, если* $f(x) = a_n$

Теорема 32.7 (Интегральный критерий)**.** *Если функция* $f(x), x \geqslant 1$ *производящая для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, (a_n \geqslant 0)$*, убывает, то для сходимости ряда необходимо и достаточно чтобы сходился интеграл*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^A f(x)dx.$$

♢ Поскольку функция $f(x)$ убывет, то

$$a_k \geqslant f(x) \geqslant a_{k+1} \quad \forall x \in [k, k+1] \Rightarrow a_k \geqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \geqslant a_{k+1}.$$

Отсюда

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \geqslant s_{n+1} - a_1 \quad (1)$$

Последовательность s_n и функция $F(A) = \int_1^A f(x)dx$ являются возрастающими. Из неравенств (1) вытекает, что последовательность s_n и функция $F(A)$ одновременно ограничены или неораничены, т.е. ряд и интеграл сходятся или расходятся одновременно. □

Пример 32.1. *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится, хотя его члены стремятся к нулю. Действительно,*

$$\int_1^A \frac{dx}{x} = \ln A \underset{A\to\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \neq 1$*, сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha < 1$*, так как*

$$\int_1^A \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{A^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \underset{A\to\infty}{\rightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если} \quad \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

Теорема 32.8 (Степенной признак ($a_n \geqslant 0$)). *Если* $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{M}{n^\alpha}, M-$ *const,* $0 < M < +\infty$, *то при* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $\alpha \leqslant 1$ *расходится.*

$\diamondsuit$ Доказательство сразу следует из условий сходимости и расходимости обобщенного гармонического ряда, расходимости гармонического ряда и предельного признака сравнения. $\square$

Лемма 32.2. *Если* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *и*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n.$$

то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, а из расходимости* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

$\diamondsuit$

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим эти неравенства, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_1}, a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_{n+1} \quad \forall n.$$

Теперь требуемое утверждение вытекает из признака сравнения. $\square$

Теорема 32.9 (Признак Раабе ($a_n \geqslant 0$)). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q,$$

то при $q > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $q < 1$ *расходится.*

$\diamondsuit$ Пусть $q > 1$. Возьмем числа p и s такие, что $1 < s < p < q$. Существует номер m, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant p,$$
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{p}{n} + 1 \quad \forall n \geqslant m. \quad (2)$$

Из степенного замечательного предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^s - 1}{1/n} = s$$

Существует номер $m_1 \geqslant m$ такой, что

$$\frac{(1+1/n)^s - 1}{1/n} \leqslant p \Rightarrow (1+1/n)^s \leqslant \frac{p}{n} + 1 \quad \forall n \geqslant m_1 \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) следует

$$(1+1/n)^s \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1}{(1+1/n)^s} = \frac{1/(n+1)^s}{1/n^s}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ сходится. По лемме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходящийся. Пусть теперь $q < 1$. Существует номер m такой, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1 \quad \forall n \geqslant m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{1}{1+1/n} = \frac{1/(n+1)}{1/n}$$

Гармонический ряд расходится. По лемме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходящийся. □

Замечание 32.1. *Если*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (признак Гаусса).

Замечание 32.2. *Если $a_n \leqslant 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют отрицательным. Из соотношения $\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} (-a_k)$ следует, что сходимость отрицательного ряда равносильна сходимости положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$.*

33 Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля

Определение 33.1. *Ряд, у которого бесконечное число слагаемых одного и другого знака, называется знакопеременным.*

Определение 33.2. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n \geq 0$ называется знакочередующимся.*

Теорема 33.1. *(критерий Коши сходимости ряда). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} : |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| \leq \varepsilon$$

♢
Из критерия Коши для последовательности

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$$

□
Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_n|$. Из критерия Коши следует, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Также если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_n|$ расходится.

Теорема 33.2. *(признак Лейбница). Если последовательность a_n является монотонной и бесконечно малой, то знакочередующийся ряд сходится и для его остатков имеют место оценки:*

$$|\sum_{k=1+n}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k| \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$\diamondsuit$

Последовательность a_n может быть лишь монотонно убывающей. Четные частные суммы ряда можно записать следующими двумя образами:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Из первого равенства следует, что последовательность S_{2m} – монотонно возрастающая: $0 \leq S_{2m} \leq S_{2m+2}$, а из второго – её ограниченность сверху: $S_{2m} \leq a_1, \forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \overline{S}, -\infty < \overline{S} < +\infty$ Нечетные частные суммы записываем также двумя способами:

$$S_{2m+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m} - a_{2m+1}) = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) + a_{2m+1}$$

Из первого равенства следует, что последовательность S_{2m+1} – положительно убывающая: $S_{2m-1} \geq S_{2m+1}$, а из второго – её ограниченность снизу: $S_{2m-1} \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \underline{S}, -\infty < \underline{S} < +\infty$. Поскольку $S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} \to 0$, то пределы $\overline{S}, \underline{S}$ совпадают, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S = \overline{S} = \underline{S}$

Из неравенств $S_{2m} \leq S \leq S_{2m+1}$ следует, что $|S_{2m} - S| \leq S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1}, |S_{2m-1} - S| \leq S_{2m-1} - S_{2m} = a_{2m}$. Отсюда вытекает требуемое неравенство.

$\square$

Лемма 33.1. *Пусть $a_1, \ldots, a_p$ монотонная, $b_1, \ldots, b_p$ – произвольная совокупности чисел, $S = a_1b_1 + /ldots + a_pb_p, p \in \mathbb{N}, B_k = b_1 + \ldots + b_n, |B_k| \leq M - const, \forall k = 1, \ldots, p$, Тогда $|S| \leq M(|a_1| + 2|a_p|)$*

$\diamondsuit$

Для возрастающей совокупности чисел a_i:

$$S = a_1b_1 + a_2(b_2 - b_1) + \ldots + a_p(b_p - b_{p-1}) = (a_1 - a_2)b_1 + \ldots + (a_{p-1} - a_p)b_{p-1} + a_pb_p$$

$$|S| \leq |a_1 - a_2||b_1| + \ldots + |a_{p-1} - a_p||b_{p-1}| + |a_p||b_p| \leq M(|a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots a_p - a_{p-1}| + |a_p|) \leq M(|a_1| + 2|a_p|)$$

$\square$

Теорема 33.3. *(признак Дирихле). Если*

1) последовательность a_n является монотонной и бесконечно малой 2) частные суммы B_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, то есть, то ряд сходится.

$\diamondsuit$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\varepsilon) : |a_n| \leq \varepsilon$

Из второго условия признака Дирихле имеем $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i| \leq |\sum_{i=1}^{n+p} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i| \leq 2M$$

Используя лемму и неравенства, полученные выше, получаем

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i| \leq 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 6M\varepsilon, \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}$$

На основании критерия Коши ряд $\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i$ сходится.

$\square$

Теорема 33.4. *(признак Абеля). Если*

1) последовательность a_n является монотонной и бесконечно малой 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i b_i$ также является сходящимся.

$\diamondsuit$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то согласно критерию Коши сходимости ряда

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon), \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} : |\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i| \leq \varepsilon$$

Пусть $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, тогда используем лемму и неравенство, имеем

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i| \leq \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 3M\varepsilon, \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}$$

На основании критерия Коши ряд $\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i$ сходится.

$\square$

34 Действия над числовыми рядами

1. **Линейная комбинация рядов**
   Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

   Действительно, $\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} a_k$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем требуемое равенство.

2. **Группировка членов ряда**
   В ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сгруппируем слагаемые, объединив без изменения порядка следования по несколько(конечное число) слагаемых. Получим новый ряд, последовательность частных сумм которого является подпослетовательностью частных сумм исходного ряда. Поэтому, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и имеет ту же сумму преобразованный ряд. Раскрытие скобок в общем случае недопустимо. К примеру, ряд $(1-1)+(1-1)+(1-1)+...$ сходится, но ряд $1-1+1-1+1-1+...$ расходится. Однако в двух частных случаях раскрытие скобок возможно:

   (a) После раскрытия скобок получается сходящийся ряд

   (b) В каждой скобке все слагаемые имеют один и тот же знак

3. **Перестановка членов ряда**
   Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть

$$b_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$$

Тогда $|a_n| = b_n + c_n, a_n = b_n - c_n, b_n \geq 0, c_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма 34.1. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$*

$\diamondsuit$ Докажем необходимость. $|a_n| \geq b_n \geq 0, |a_n| \geq c_n \geq 0$. По признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся.
Докажем достаточность. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ как разность этих рядов. $\square$

Следствие 34.1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ являются расходящимися.*

$\diamondsuit$ Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся, то согласно лемме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Если один из рядов сходится, а второй расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет бесконечную сумму и следовательно рассходится. Таким образом, условная сходимость возможна лишь при одновременной расходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. $\square$

Определение 34.1. *Последовательность (m_n) называют перестановкой последовательности натуральных чисел, если каждое натуральное число встречается в (m_n), причём ровно один раз.*

Определение 34.2. *Если (m_n) - перестановка последовательности натуральных чисел, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$ называют перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Теорема 34.1. (о перестановке ряда) *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка является сходящися рядом с той же сумой.*

$\diamondsuit$ Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительный, то $\sum_{k=1}^{n} a_{m_k} \le \sum_{k=1}^{Q} a_k$, где $Q = max(m_1, m_2, \dots, m_n)$, и поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$, то обе суммы совпадают
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ знакопеременный, то представив его в виде $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и воспользовавшись первой частью доказательства, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{m_n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$$

$\square$

4. **Произведение рядов**

Определение 34.3. *Возьмём два ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Построим последовательность*

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *называется произведением рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 34.2. (о произведении рядов) *если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *также сходится абсолютно и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$\diamondsuit$ Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right| \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} |a_i||b_{k-i}| \le (\sum_{k=1}^{n} |a_k|)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|) \le ST$$

Частные суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$ ограничены, следовательно по критерию сходимости положительных рядов этот ряд сходится. Из неравенства

$$(\sum_{k=1}^{n} |a_k|)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|) \le ST$$

вытекает, что ряд

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 + \\ &a_0 b_1 + a_1 b_0 + \\ &a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \\ &a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + \dots \end{aligned} \tag{31}$$

является абсолютно сходящимся. Воспользовавшись теоремой о перестановке членов ряда, представим этот ряд в виде

$$\begin{aligned} &a_0b_0+\\ &a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1+\\ &a_0b_2+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_2b_0+\\ &a_0b_3+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1+a_3b_0\dots \end{aligned} \tag{32}$$

Этот ряд является сходящимся по теореме о перестановке ряда. Если обозначить через L_k частные суммы последнего ряда, то

$$L_1 = a_0b_0$$

$$L_4 = a_0b_0 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_1b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$

$$L_9 = a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1+a_0b_2+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_2b_0 = (a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2)$$

$$L_{n^2} = (\sum_{k=0}^{k=n-1} a_k)(\sum_{k=0}^{k=n-1} b_k)$$

.

$$\lim_{n\to\infty} L_{n^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Значит сумма ряда (32) равна $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$. Так как ряд (32) является перестановкой ряда (31), то по теореме о перестановке ряда их суммы равны. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ получается из ряда (31) группировкой членов, значит по теореме о перестановке ряда его сумма равна сумме ряда (31). То есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

□

35 Двойный ряды и бесконечные произведения

Определение 35.1. *Если каждой паре натуральных чисел n, m поставлено в соответствие вещественное число a_{mn}, то говорят, что задана **двойная последовательность** (a_{nm}).*

Определение 35.2. *Число A называют **пределом двойной последовательности**, если*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall n, m \geq \delta(\epsilon) \implies |a_{nm} - A| \leq \epsilon$$

Пишут

$$A = \lim_{n,m\to\infty} a_{nm}$$

Определение 35.3. *Двойную последовательность, имеющую предел $A \in \mathbb{R}$, называют **сходящейся**.*

Определение 35.4. *Наряду с последовательностью (a_{nm}) рассмотрим последовательности (b_m), (c_n), где*

$$b_m = \lim_{n\to\infty} a_{nm}$$

$$c_n = \lim_{m\to\infty} a_{nm}$$

Пределы $\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{nm})$ и $\lim_{n\to\infty} c_n = lim_{n\to\infty}(lim_{m\to\infty}a_{nm})$ называют ***повторными пределами*** *двойной последовательности.*

Теорема 35.1 (о двойной последовательности)**.** *Если двойная последовательность a_{nm} сходится и при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует предел $b_m = \lim_{n\to\infty} a_{nm}$, то*

$$\lim_{n,m\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{nm})$$

$\diamondsuit$ Пусть $A = \lim_{n,m\to\infty} a_{nm}$. Это значит, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall n, m \geq \delta(\epsilon) \implies |a_{nm} - A| \leq \epsilon$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получим, что $|b_m - A| \leq \epsilon$. Значит $\lim_{m\to\infty} b_m = A$. $\square$

Определение 35.5. *Двойную последовательность a_{mn} называют* ***монотонно возрастающей****, если*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq n, \forall j \geq m \implies a_{nm} \leq a_{ij}$$

Теорема 35.2 (о возрастающей ограниченной двойной последовательности)**.** *Если монотонно возрастающая двойная последовательность ограничена, то есть $|a_{nm}| \leq M \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$, то она сходится.*

$\diamondsuit$ Пусть $A = \sup_{m,n\in\mathbb{N}}\{a_{nm}\}$. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists l n(\epsilon), m(\epsilon) : \quad a_{n(\epsilon)m(\epsilon)} > A - \epsilon$$

Поскольку последовательность (a_{nm}) монотонно возрастает, то

$$\forall i, j \geq \max(n(\epsilon), m(\epsilon)) \implies A - \epsilon < a_{ij} \leq A \implies |a_{ij} - A| \leq \epsilon$$

Значит последовательность сходится к A. $\square$

Определение 35.6. *Выражение вида $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ называют* ***двойным рядом****.*

Частные суммы этого ряда $s_{nm} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{nm}$ образуют двойную последовательность.

Определение 35.7. *Если существует предел частных сумм $\lim_{n,m\to\infty} s_{nm} = A$, то двойной ряд называется* ***сходящимся****, а число A его* ***суммой****.*

Поскольку последовательность частных сумм положительного двойного ряда($a_{nm} \geq 0$) монотонно возрастает, то двойной ряд, для которого последовательность частных сумм ограничена, является сходящимся.

Определение 35.8. *Ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ называют* ***абсолютно сходящися****, если сходится ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|$.*

Абсолютно сходящийся двойной ряд является сходящимся (самостоятельно). Из теоремы о двойной последовательности сразу вытекает следующее утверждение:

Теорема 35.3 (о двойном ряде)**.** *Если двойной ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится и при каждом m сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$, то*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm})$$

Определение 35.9. *Будем называть* ***бесконечным произведением*** *формальное выражение вида $p_1 p_2 \dots p_n \dots$ и обозначать его как*

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

Определение 35.10. *Последовательность*

$$P_n = \prod_{k=0}^{\infty} p_k = p_1 p_2 p_3 \dots p_n$$

называют ***последовательностью частных произведений*** *бесконечного произведения.*

Определение 35.11. *Будем говорить, что бесконечное произведение* ***сходится****, если существует предел $\lim_{n\to\infty} P_n$, отличный от нуля и бесконечности.*

Определение 35.12. *В противном случае бесконечное произведение* ***расходится****.*

Свойства бесконечных произведений:

1. **Теорема 35.4** (**необходимое условие сходимости**)**.**
   Если $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

   $\diamondsuit$ Произведение сходится, значит $\lim_{n\to\infty} P_n = A$, $A \neq 0$

   $$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} P_n}{\lim_{n\to\infty} P_{n-1}} = \frac{A}{A} = 1$$

   $\square$

2. **Теорема 35.5.** $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ $(p_n > 0)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится* $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n)$

   $\diamondsuit$ Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n)$ сходится к S. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \ln(p_k) = S_n$ Тогда $P_n = e^{S_n}$

   $$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} e^{S_n} = e^S \neq 0$$

   Значит произведение сходится.
   И наоборот, если произведение сходится к P, то

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln P_n = \ln P$$

   $\square$

3.

Теорема 35.6. *Запишем p_n в виде $1+\alpha_n$. Если $\alpha_n > 0$ или $-1 < \alpha_n < 0$, то для сходимость бесконечного произведения необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.*

$\diamondsuit$ Поскольку $\alpha_n \sim \ln(1+\alpha_n)$ при $\alpha_n \to 0$, то по предельному признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$ сходятся или расходятся одновременно. Теперь утверждение теоремы вытекает из второго свойства. $\square$

4. **Определение 35.13.** *Говорят, что бесконечное произведение* ***сходится абсолютно****, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n)$ сходится абсолютно.*

Для абсолютной сходимости бесконечного произведения необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходился абсолютно.

Теорема 35.7. *Пусть (m_n) - перестановка последовательности натуральных чисел. Если произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка $\prod_{n=1}^{\infty} p_{m_n}$ сходится и $\prod_{n=1}^{\infty} p_{m_n} = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$.*

$\diamondsuit$ Самостоятельно $\square$

36 Теорема Римана. Формулы Валлиса и Стирлинга

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим положительные члены ряда как $a_1^+, a_2^+, \dots a_n^+ \dots$ Отрицательные члены ряда обозначим как $-a_1^-, -a_2^-, \dots - a_n^-$

Лемма 36.1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.*

$\diamondsuit$ Пусть S — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда последовательность частных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to S$ при $n \to \infty$. Пусть S_m^+ и S_k^- — частные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ соответственно ($S_0^+ = S_0^- = 0$). Тогда

$$\forall n \quad \exists m = m(n), k = k(n): \quad S_n = S_m^+ - S_k^-,\, n = m + k$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то

$$\tilde{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S_m + S_k \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Значит $S_n^+ - > \infty$, $S_n^- - > \infty$ при $n \to \infty$. Значит ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся. $\square$

Теорема 36.1 (Римана)**.** *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого действительного A существует перестановка ряда, сходящаяся к A:*

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$$

$\diamondsuit$ Пусть $A \geq 0$. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Они расходятся по лемме.
Возьмём наименьшее n_1 такое, что
$a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ \geq A$.
Возьмём наименьшее n_2 такое, что
$a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - a_1^- \dots - a_{n_2}^- \leq A$.
Возьмём наименьшее n_3 такое, что
$a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - a_1^- \dots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+ \geq A$.
Возьмём наименьшее n_4 такое, что
$a_1^+ + \dots + a_{n_1}^+ - a_1^- \dots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \dots + a_{n_3}^+ - a_{n_2+1}^- - \dots - a_{n_4}^- \leq A$.
И так далее. Полученный ряд будет являться перестановкой $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Докажем, что он сходится к A. Для этого рассмотрим частные суммы этого ряда $S_{n_1}, S_{n_1+n_2}, S_{n_2+n_3} \dots S_{n_k+n_{k+1}} \dots$
$S_{n_1} > A$, $S_{n_1+n_2} < A$, $S_{n_2+n_3} > A$ и так далее.
Так как на каждом шаге построения ряда мы брали наименьшее возможное число, то

$$|A - S_{n_k+n_{k+1}}| <= a_{n_{k+1}}^{\pm}$$

Так как $a_{n_{k+1}}^{\pm} \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = A$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое k, что

$$n_k + n_{k+1} \leq n \leq n_{k+1} + n_{k+2}$$

Тогда выполняется одно из двух неравентсв:

$$S_{n_k+n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

$$S_{n_k+n_{k+1}} \geq S_n \geq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

Так как $\lim_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A$$

$\square$

Теорема 36.2 (Формула Стирлинга)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n, \quad n \to \infty$$

Лемма 36.2. *Для любого натурального m*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

$\diamondsuit$ Пусть $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = [u = \sin^{n-1} x, du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx, dv = \sin x,] =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Для $n = 2k+1$ получаем

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3} = \dots = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Для чётных n формула доказывается аналогично $\square$

Лемма 36.3 (формула Валлиса)**.**

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}} = \sqrt{\pi}$$

$\diamondsuit$ По предыдущей лемме

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

Пусть $\mu_m = \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \le \sin x \le 1 \implies \sin^{2m+1} x \le \sin^{2m} x \le \sin^{2m-1} x$$

$$I_{2m+1} \le I_{2m} \le I_{2m-1}$$

$$1 \le \mu_m = \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \le \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m} \implies \mu_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

$$2\mu_m \frac{((2m)!!)^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!} = \pi$$

Следовательно при $m \to \infty$

$$\pi \sim 2\frac{((2m)!!)^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!} = 2\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 \frac{4m^2}{2m+1} \sim 4m\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2$$

$$\sqrt{\pi} \sim 2\sqrt{m}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} = 2\sqrt{m}\frac{((2m-2)!!)^2}{(2m-1)!} =$$

$$= 2\sqrt{m}\frac{((2m)!!)^2}{(2m)!}\frac{1}{2m} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!\sqrt{m}}$$

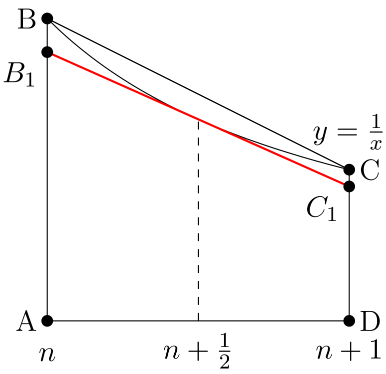
$\square$

Лемма 36.4.

$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \le n! \le \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{1}{4n}}$$

$\diamondsuit$ Пусть $a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$. Тогда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$.

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1$$



Рассмотрим гиперболу $y = \frac{1}{x}$ и прямые $x = n$, $x = n+1$, $y = 0$. Они ограничивают криволинейную трапецию с площадью $S = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \ln(1+\frac{1}{n})$. Площадь трапеции $ABCD$ (см. рисунок) равна $\frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$. Проведем касательную к гиперболе в точке $(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{n+\frac{1}{2}})$. Пусть она пересекает прямые $x = n$, $x = n+1$ В точках B_1, C_1 соответственно. $S_{AB_1C_1D} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ (прямая $x = n+\frac{1}{2}$ является средней линией трапеции). Сравнивая площади, получаем:

$$S_{AB_1C_1D} < S < S_{ABCD}$$

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$$

$$0 < (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1 < \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$0 < \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})}$$

Значит последовательность (a_n) монотонно убывает. Так как она положительна, то она ограничена снизу. Следовательно она сходится к некоторому α.

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})}$$

Устремляя k к бесконечности, получим

$$1 < \frac{a_n}{\alpha} < e^{\frac{1}{4n}}$$

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{(n!)^2(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{n^{2n+1}e^{-2n}(2n)!\sqrt{2}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} [\text{Формула Валлиса}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\pi}$$

Устремляя n к бесконечности в последнем неравенстве получим

$$\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\alpha = \sqrt{2\pi}$$

$$1 < \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} < e^{\frac{1}{4n}}$$

$$1 < \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}} < e^{\frac{1}{4n}}$$

Преобразуя получаем требуемое неравенство □
Перейдем к доказательству формулы Стирлинга

$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{1}{4n}}$$

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq e^{\frac{1}{4n}}$$

Так как $e^{\frac{1}{4n}}$ стремится к 1 при $n \to \infty$, мы получаем, что

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n, \quad n \to \infty$$

37 Примеры решения задач

Дифференцирование

Пример 37.1. *Исследовать на дифференцируемость в точке* $(0,0)$ *функцию*

$$f(x,y) : \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2>0 \\ 0, \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Для начала найдем в этой точке частные производные.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

Аналогично получаем, что и $f'_y(0,0) = 0$.

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Так как обе частные производные равны нулю, остается проверить, является ли это выражение $o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$. Проверим:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = [\Delta x = \Delta y] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2\sqrt{2\Delta x^2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}|\Delta x|} = \infty$$

Таким образом, функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Пример 37.2. *Требуется найти* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *в точке* $u=1, v=1$, *если* $\begin{cases} x = u+\ln v, \\ y = v-\ln u, \\ z = 2u+v. \end{cases}$

Имеем три уравнения и пять переменных — следовательно, заданы три функции, зависящие от других двух переменных. Из условия нетрудно видеть, что z, u, v *– функции, зависящие от* x, y. *Введём обозначения* $\tilde{x} = (x,y), \tilde{y} = (z,u,v)$. *Рассмотрим два способа решения задачи.*

Способ I. Введём векторную функцию $F(\tilde{x},\tilde{y}) = (f_1, f_2, f_3)^T$, имеем систему соотношений:

$$\begin{cases} f_1(\tilde{x},\tilde{y}) = 0, \\ f_2(\tilde{x},\tilde{y}) = 0, \\ f_3(\tilde{x},\tilde{y}) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u + \ln v - x = 0, \\ v - \ln u - y = 0, \\ 2u + v - z = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу Якоби функции $F(\tilde{x},\tilde{y})$:

$$\frac{dF}{d(\tilde{x},\tilde{y})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{v} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{u} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\right|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\right|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По теореме о неявной векторной функции система соотношений задаёт неявную непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$, *матрицу Якоби которой найдём по формуле:*

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{x}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\right)^{-1} \frac{\partial F}{d\tilde{x}} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Итак, искомые производные есть соответственно элементы первой строки матрицы $\frac{d\varphi}{d\tilde{x}}$.

Способ II. *Продифференцируем данную в условии систему по переменным* x *и* y:

$$\begin{cases} 1 = u'_x + \frac{v'_x}{v}, \\ 0 = v'_x - \frac{u'_x}{u}, \\ z'_x = 2u'_x + v'_x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = u'_y + \frac{v'_y}{v}, \\ 1 = v'_y - \frac{u'_y}{u}, \\ z'_y = 2u'_y + v'_y. \end{cases}$$

Подставляя $u = 1, v = 1$ *и решая системы, имеем* $z'_x = \frac{3}{2}$ *и* $z'_y = -\frac{1}{2}$.

Пример 37.3. *Демидович 3407.2*

Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *в точке* $u = 2, v = 1$, *если* $\begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 - v^3 \\ z = 2uv \end{cases}$.

u, v, z - функции от x, y.

$$z''_x y = 2u''_{yx} v + 2u'_x v'_y + 2u'_y v'_x + 2uv''_{xy}$$

$\begin{cases} 1 = u'_x + 2vv'_y \\ 0 = 2uu'_x - 3v^2 v'_x \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = u'_y + 2vv'_y \\ 1 = 2u'_y u - 2v^2 v'_y \end{cases}$ Подставим в равенства известные значения u и v.

Получаем $v'_x = \frac{4}{11}, u'_x = \frac{5}{11}, u'_y = \frac{2}{11}, v'_y = -\frac{1}{11}$.

Дифференцируем второй раз.

$\begin{cases} 0 = u''_{xy} + 2v'_y v'_x + 2''_{xy} \\ 0 = 2u'_y u'_x + 2uu''_{xy} - 6(v'_y)^2 - 2v^2 v''_{xy} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = u'_{xy} - \frac{8}{121} + 2v''_{xy} \\ 0 = 4u''_{xy} - 3v''_{xy} + \frac{36}{121} \end{cases}$

Отсюда $u''_{xy} = -\frac{48}{1331}, v''_{yx} = \frac{68}{1331}$.

Подставляем и получаем $z''_{yx} = \frac{26}{121}$.

Кратные и криволинейные интегралы

Пример 37.4. *Вычислить тройной интеграл*

$$J = \iiint\limits_T zdxdydz$$

Где T - тело, ограниченное плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Тело T - цилиндроид, элементарный относительно оси Oz:

$$0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y, (x, y) \in D,$$

где D - фигура, получаемая проецированием области интегрирования на плоскость Oxy. Эта фигура ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 1$. Используя теорему о сведении тройного интеграла к повторному, имеем:

$$J = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \frac{1}{2} \iint\limits_D (1 - x - y)^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy = \frac{1}{6} \int\limits_0^1 (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)dx = \frac{1}{24}.$$

Пример 37.5. *Найти объем тела T, ограниченного поверхностями*

$$S_1 : z = x^2 + y^2, S_2 : z = 2 - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

S_1 - эллиптический параболоид, S_2 - конус.Найдем уравнение кривой, по которой пересекаются наши поверхности:

$$x^2 + y^2 = 2 - \sqrt{x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Проекция тела T на плоскость Oxy - круг $K : x^2 + y^2 \leqslant 1$. Вычислим объем тела через тройной интеграл, используя цилиндрическое преобразование:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi), \quad |I| = r. \\ z = h, \end{array} \right.$$

Поверхности S_1 и S_2 перепишутся соответственно в виде $h = r^2$ и $h = 2 - r$, а фигура $K-$ в виде $L : r^2 \leqslant 1$. По теореме о сведении тройного интеграла к повторному, имеем:

$$\text{об.}T = \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_K dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2-y^2}} dz = \iint\limits_L drd\varphi \int\limits_{r^2}^{2-r} dh \cdot |I| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{r^2}^{2-r} dh = 2\pi \int\limits_0^1 (2r - r^2 - r^3)dr = \frac{5\pi}{6}.$$

Пример 37.6. *Найти объем тела T, ограниченного конусами второго порядка $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}, z = \sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостями $z = 1, z = \frac{1}{2}$*

Используем цилиндрическое преобразование:

$$\begin{cases} h = r\sqrt{3}, \\ h = r, \\ h = 1, \\ h = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad |I| = r.$$

Имеем:

$$\text{об.}T = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_E rdrd\varphi dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dh \int\limits_{\frac{h}{\sqrt{3}}}^h rdr = 2\pi \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{6})dh = \frac{7\pi}{36}.$$

Пример 37.7. *Вычислить криволинейный интеграл 1-ого рода*

$$\int\limits_C x^2 ds$$

Где C - окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

$$\int\limits_C f(x,y,z)ds$$

$$C : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

Имеем:

$$\int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt$$

Попробуем сферические координаты:

$$\begin{cases} x = a\cos(\varphi)\cos(\psi), \\ y = a\sin(\varphi)\cos(\psi), \\ z = a\sin(\psi). \end{cases}$$

$$\cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi) = 0$$

вышло не совсем красиво :(Попробуем $x = t$

$$\begin{cases} t^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ t + y + z = 0. \end{cases}$$

Делаем замену

$$\begin{cases} t^2 + (-z-t)^2 + z^2 = a^2, \\ y = -z - t. \end{cases}$$

$$t^2 + (-z-t)^2 + z^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 + z^2 + 2zt + t^2 + z^2 = a^2 \quad \Rightarrow$$

$$2z^2 + 2zt + 2t^2 - a^2 = 0$$

$D = 4t^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2t^2 - a^2) = 8a^2 - 12t^2$ $z_{1,2} = \frac{-2t \pm 2\sqrt{2a^2-3t^2}}{4} = \frac{-t \pm \sqrt{2a^2-3t^2}}{2}$ $z = -\frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{2a^2-t^2}}{2}$ $y = -\frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{2a^2-t^2}}{2}$

$$8a^2 - 12t^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 12t^2 \leq 8a^2 \quad \Rightarrow \quad t \leq \frac{2}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad |t| \leq a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Решим наиболее удобным методом :)

$$\int\limits_C x^2 ds = \int\limits_C y^2 ds = \int\limits_C z^2 ds$$

- в силу симметрии

$$c : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_C x^2 ds = \frac{1}{3}\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2) ds =$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_C a^2 ds = \frac{1}{3}a^2 l = \frac{1}{3}a^2 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi a^3$

Пример 37.8. *Пусть в пространстве заданы два цилиндра:* $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$. *Требуется найти площадь фигуры* S, *по которой пересекаются данные цилиндры.*

Для начала поймем, какая фигура получается при пересечения заданных поверхностей. Для этого зафиксируем $z = z_0$. *Получаем две функции* $x^2 + z_0^2 = a^2, \quad y^2 + z_0^2 = a^2$, *которые задают в координатной плоскости* Oxy *квадрат с центром в начале координат и длиной* *стороны, равной* $2\sqrt{a^2 - z_0^2}$. *Теперь, меняя значение* z_0 *от* a *до* $-a$, *мы получим искомую фигуру. Для наглядности изобразим поверхности при* $a = 4$ *(рис. 25.3):*

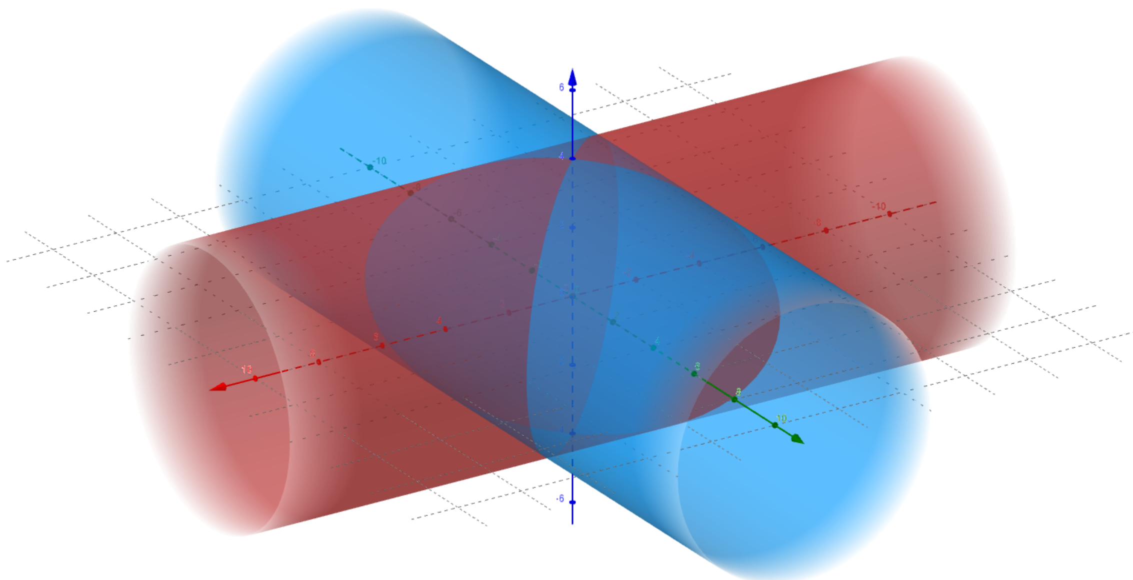


Рис.25.3. Графики функций $x^2 + z^2 = a^2$ *(синий)* , $y^2 + z^2 = a^2$ *(красный)* *при* $a = 4$

Теперь рассмотрим только ту часть, для которой $x > 0, y > 0, z > 0$, *а проекция этой части на плоскость* Oxy *будет ограничена прямыми* $x = 0, y = 0, x = a, y = a, y \leqslant x$ *(т.е мы рассматриваем* $\frac{1}{16}$ *часть всей искомой фигуры). Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 \leqslant a^2, \end{cases} \tag{33}$$

Из нее получаем, что $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. *Осталось только посчитать искомую площадь:*

$$\text{пл.}S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy = 16 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} + 0}\, dx\, dy =$$

$$= 16 \int_0^a dx \int_0^x dy \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = 16a \int_0^a dx \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \cdot (-\sqrt{a^2 - x^2})\Big|_0^a = 16a^2$$

Экстремумы

Пример 37.9. *Демидович 3663.6*
Найти точки условного экстремума функци $u = xy + yz$, *если* $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Составим функцию Лагранжа. Количество фиктивных переменных равно количеству уравнений связи.

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 - y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$$

Дифференцируем:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2x\lambda_1 = 0 \\ L'_y = x + z + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ L'_z = y + \lambda_2 = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ L'_{\lambda_2} = y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получили $M(1,1,1,-\frac{1}{2},-1)$.

$$L''_{x^2} = 2\lambda_1 = -1$$
$$L''_{y^2} = 2\lambda_1 = -1$$
$$L''_{z^2} = 0$$
$$L''_{xy} = 1$$
$$L''_{xz} = 0$$
$$L''_{yz} = 1$$

$$d^2L = 2dxdy + 2dydz + \lambda_1(2dx^2 + 2dy^2)$$

Продифференцируем уравнения связи для того, чтобы выразить dy и dz через dx.

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dx + 2dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} dy = -dx \\ dz = dx \end{cases}$

Теперь подставим во второй дифференциал:

$$d^2L\Big|_M = -2(dx)^2 - 2(dx)^2 - \frac{1}{2}(2dx^2 + 2dx^2) = -6(dx)^2 < 0$$

Таким образом, M - точка локального максимума.

Ряды

Пример 37.10. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} sin(nx), x \in \mathbb{R}$$

Докажем, что при $x \neq \pi k$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$a_{n+1} = sin(n+1)x = sin(nx)cosx + cos(nx)sinx \to 0$$

Понятно, что $sin(nx)cosx \to 0$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Покажем, что $cos(nx)sinx \to 0$. Тогда если $sinx \geq 0$, то $\lim\limits_{n\to 0} |cos(nx)| = 0$. Для этого должно выполняться условие $sinx = 0$, следовательно, $x = \pi k$, значит, ряд сходится, так как состоит из нулей.

Пример 37.11. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ln(n)}}$$

Как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ln(n)}}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходится по степенному признаку. Так как $lnn < n$, то

$$\frac{1}{\sqrt[n]{ln(n)}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 37.12. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{p+q}}, p \in \mathbb{R}$$

Покажем, что $a_n \sim \frac{M}{n^{\alpha}}$. Для этого преобразуем n-ый член при помощи формулы Стирлинга

$$a_n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^n}{n^{p+q}} = \sqrt{2\pi}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$$

Ряд сходится, когда $p > \frac{3}{2}$.

Пример 37.13. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}}$$

Сравним n-ый член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}}$ с n-ым членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} \vee \frac{1}{n}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} \vee n$$

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} \vee e^{ln(n)}$$

Получаем, что

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} > e^{ln(n)}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} > n$$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} < \frac{1}{n}$$

Сравним с n-ым членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} \vee \frac{1}{n^2}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} \vee n^2$$

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} \vee e^{2ln(n)}$$

Получаем, что

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} > e^{2ln(n)}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} > n^2$$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} < \frac{1}{n^2}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}}$ сходится по признаку сравнения.

Пример 37.14. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(ln(n))^p(ln(ln(n)))^q}, p, q \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x(ln(x))^p(ln(ln(x)))^q}$$

Воспользуемся интегральным признаком сходимости

$$\int\limits_A^{\infty} \frac{dx}{x(ln(x))^p(ln(ln(x)))^q} = \int\limits_A^{\infty} \frac{dln(x)}{(ln(x))^p(ln(ln(x)))^q} = \int\limits_{lnA}^{\infty} \frac{dt}{t^p(ln(t)))^q}$$

Следовательно, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(ln(n))^p(ln(ln(n)))^q}$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(ln(n))^q}$

Рассмотрим 3 случая:

1. $p > 1$

$$\frac{1}{n^p(ln(n))^q} \leq \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}$$

$$p - \varepsilon > 1$$

Если $p > 1$, то $\forall q$ ряд сходится.

2. $p < 1$

$$\frac{1}{n^p(ln(n))^q} \geq \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}$$

Если $p > 1$, то $\forall q$ ряд расходится.
2. $p = 1$
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(ln(n))^q}$ и функцию

$$f(x) = \frac{1}{x(ln(x))^q}$$

По интегральному признаку

$$\int\limits_A^{\infty} \frac{dx}{x(ln(x))^q} = \int\limits_A^{\infty} \frac{dln(x)}{(ln(x))^q} = \int\limits_{lnA}^{\infty} \frac{dt}{t^q}$$

Это равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$
Ряд сходится при $p = 1, q > 1$ и расходится при $p = 1, q \leq 1$

Пример 37.15. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n!)}$$

Из того, что $f(x) \sim g(x)$, следует, что $ln(f(n)) \sim ln(g(n))$

$$a_n \sim \frac{1}{ln(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)} = \frac{1}{ln(\sqrt{2\pi n} + n(ln(n) - 1)} \sim \frac{1}{nln(n)}$$

Ряд расходится по интегральному признаку.

Пример 37.16. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

Главный член ряда – $e^{-\sqrt{n}}$. Докажем, что $a_n \leq \frac{1}{n^2}$

$$a_n \leq \frac{1}{n^2}$$

$$e^{\sqrt{n}} \geq n^4$$

$$\sqrt{n} = t$$

$$e^t \geq t^8$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^8}{e^t} = 0$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ сходится.

Пример 37.17. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^{\alpha}} - 1$$

Найдем α, при котором общий член не стремится к 0.
При $\alpha \geq 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{n^{\alpha}} - 1$ расходится.
Рассмотрим $\alpha < 0$

$$a_n = e^{n^{\alpha} ln(n)} - 1 \sim n^{\alpha} ln(n) = \frac{ln(n)}{n^{-\alpha}}$$

Если $-\alpha > 1$, то ряд сходится.
Если $-\alpha \leq 1$, то $a_n = \frac{1}{n}$, значит, ряд расходится.

Пример 37.18. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}), k \in \mathbb{R}$$

Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = 0$$

Необходимое условие выполняется.

$$a_n = sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n + \pi n) = (-1)^n sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n) =$$

$$= (-1)^n sin(\frac{\pi^2 k^2}{\pi\sqrt{n^2+k^2}+n})$$

$\frac{\pi^2 k^2}{\pi\sqrt{n^2+k^2}+n}$ – бесконечно малая последовательность, следовательно, она монотонно стремится к нулю, значит, $sin(\frac{\pi^2 k^2}{\pi\sqrt{n^2+k^2}+n})$ монотонно стремится к нулю. Из этого следует, что ряд сходится по признаку Лейбница.

Пример 37.19. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

Проверим выполнение необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \neq 0$$

Ряд расходится.

Пример 37.20. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n+\frac{1}{n})}{ln(ln(n))}$$

Для начала рассмотрим ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n^{\alpha}}$, $0 < x < \pi$, $\alpha > 0$

Применим признак Дирихле:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

Рассмотрим частные суммы синусов:

$$\sum_{n=1}^{k} |sin(nx)| = |sin(x) + \ldots + sin(kx)| = |\frac{2sin(\frac{x}{2})(sin(x) + \ldots + sin(kx))}{2sin(\frac{x}{2})}| =$$

$$= |\frac{cos(\frac{x}{2}) - cos(\frac{3x}{2}) + cos(\frac{3x}{2}) - cos(\frac{5x}{2}) + \ldots + cos(nx - \frac{x}{2}) - cos(nx - \frac{x}{2})}{2sin(\frac{x}{2})}| =$$

$$= |\frac{cos(\frac{x}{2}) - cos(nx - \frac{x}{2})}{2sin(\frac{x}{2})}| \leq \frac{1}{sin(\frac{x}{2})} = M$$

Следовательно, ряд Фурье сходится.

Вернемся к исходному ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n + \frac{1}{n})}{ln(ln(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)cos(\frac{1}{n}) + cos(n)sin(\frac{1}{n})}{ln(ln(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)cos(\frac{1}{n})}{ln(ln(n))} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)sin(\frac{1}{n})}{ln(ln(n))}$$

Рассмотрим первый ряд. По признаку Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)}{ln(ln(n))}$ сходится. Применим признак Абеля: $a_n = \frac{sin(n)}{ln(ln(n))}$, $b_n = cos(\frac{1}{n})$. $cos(\frac{1}{n})$ монотонно стремится к 1, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cos(\frac{1}{n})$ ограничена. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)cos(\frac{1}{n})}{ln(ln(n))}$ сходится по признаку Абеля.

Аналогично $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{ln(ln(n))}$ сходится по признаку Дирихле, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)sin(\frac{1}{n})}{ln(ln(n))}$ сходится по признаку Абеля.

Исходный ряд сходится.

Пример 37.21. *Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p})$$

При $p \leq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Начинаем с абсолютной сходимости. Рассмотрим случай, когда $p > 0$:

$$|a_n| = |ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p})| \sim |\frac{(-1)^n}{n^p})| = \frac{1}{n^p})$$

Ряд сходится абсолютно при $p > 1$.

Рассмотрим случай $0 < p \leq 1$:

$$a_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o(\frac{1}{n^{2p}})$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}}$ сходится $\forall p > 0$ по признаку Лейбница.

$$-\frac{1}{2n^{2p}} + o(\frac{1}{n^{2p}}) \sim -\frac{1}{2n^{2p}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{2n^{2p}}$ сходится $\forall p > \frac{1}{2}$.

Получается, что ряд расходится при $0 < p \leq \frac{1}{2}$ и сходится условно при $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$.

Пример 37.22. *Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p + sin(\frac{n\pi}{4})}$$

При $p \leq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Начинаем с абсолютной сходимости. Рассмотрим случай, когда $p > 0$:

$$|a_n| \sim \frac{|sin(\frac{n\pi}{4})|}{n^p} = b_n$$

Если $p > 1$, то ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим случай $0 < p \leq 1$:

$$b_n \geq \frac{sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^p} = \frac{1 - cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^p}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ расходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^p}$ сходится по признаку Дирихле. Из этого следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Значит, при $0 < p \leq 1$ абсолютной сходимости нет.

Исследуем ряд на условную сходимости при $0 < p \leq 1$:

$$a_n = \frac{sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p + sin(\frac{n\pi}{4})} - \frac{sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p} + \frac{sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p} = -\frac{sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^p(n^p + sin(\frac{n\pi}{4})} + \frac{sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p}$ сходится по признаку Дирихле.

$$\frac{sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^{2p}} = \frac{1 - cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^{2p}} = \frac{1}{2n^{2p}} - \frac{cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^{2p}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^{2p}}$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}}$ сходится при $p > \frac{1}{2}$.

Получается, что при $p \leq \frac{1}{2}$ расходится, при $\frac{1}{2} < p \leq 1$ сходится условно и при $p > 1$ сходится условно.