Благодарный Артём 3 группа №8 список

Лабораторная работа №1

5.18 $((8+4) \bmod 20) + 1 = 13$

Доказать, что множество $X = \{x: 3x_1^2 - \frac{1}{4}x_1x_2 - 2x_2^2 \leq 0, x_2 \geq 0\}$ является выпуклым конусом и изобразить его на плоскости

Имеем: $\begin{cases} 3x_1^2 - \frac{1}{4}x_1x_2 - 2x_2^2 \leq 0 \quad (1) \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Решим (1) относительно x_1: $D = \frac{1}{16}x_2^2 + 24x_2^2 = x_2^2\,\frac{385}{16}$

$x^{1}_{2} = x_2\left(\frac{1 \pm \sqrt{385}}{24}\right)$

Получим: $\begin{cases} 3\left(x_1 - x_2\left(\frac{1+\sqrt{385}}{24}\right)\right)\left(x_1 + x_2\left(\frac{\sqrt{385}-1}{24}\right)\right) \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Эта система равносильна системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2\left(\frac{1+\sqrt{385}}{24}\right) \leq 0 \\ x_1 + x_2\left(\frac{\sqrt{385}-1}{24}\right) \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Подставим $y, z \in X$ в систему (2), как $y+z$:

$$\begin{cases} (y_1+z_1) - (y_2+z_2)\left(\frac{1+\sqrt{385}}{24}\right) \leq 0 \\ (y_1+z_1) + (y_2+z_2)\left(\frac{\sqrt{385}-1}{24}\right) \geq 0 \\ z_2 + y_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \underbrace{\left(y_1 - y_2\left(\frac{1+\sqrt{385}}{24}\right)\right)}_{\leq 0} + \underbrace{\left(z_1 - z_2\left(\frac{1+\sqrt{385}}{24}\right)\right)}_{\leq 0} \leq 0 \\ \underbrace{\left(y_1 + y_2\left(\frac{\sqrt{385}-1}{24}\right)\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(z_1 + z_2\left(\frac{\sqrt{385}-1}{24}\right)\right)}_{\geq 0} \geq 0 \\ z_2 + y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y+z \in X \Rightarrow X$ - выпуклый конус, т.к.

$$3(\lambda x_1)^2 - \frac{1}{4}(\lambda x_1)(\lambda x_2) - 2(\lambda x_2)^2 \leq 0 \iff \lambda^2\left(3(x_1)^2 - \frac{1}{4}x_1x_2 - 2x_2^2\right) \leq 0$$

Изобразим его на плоскости:

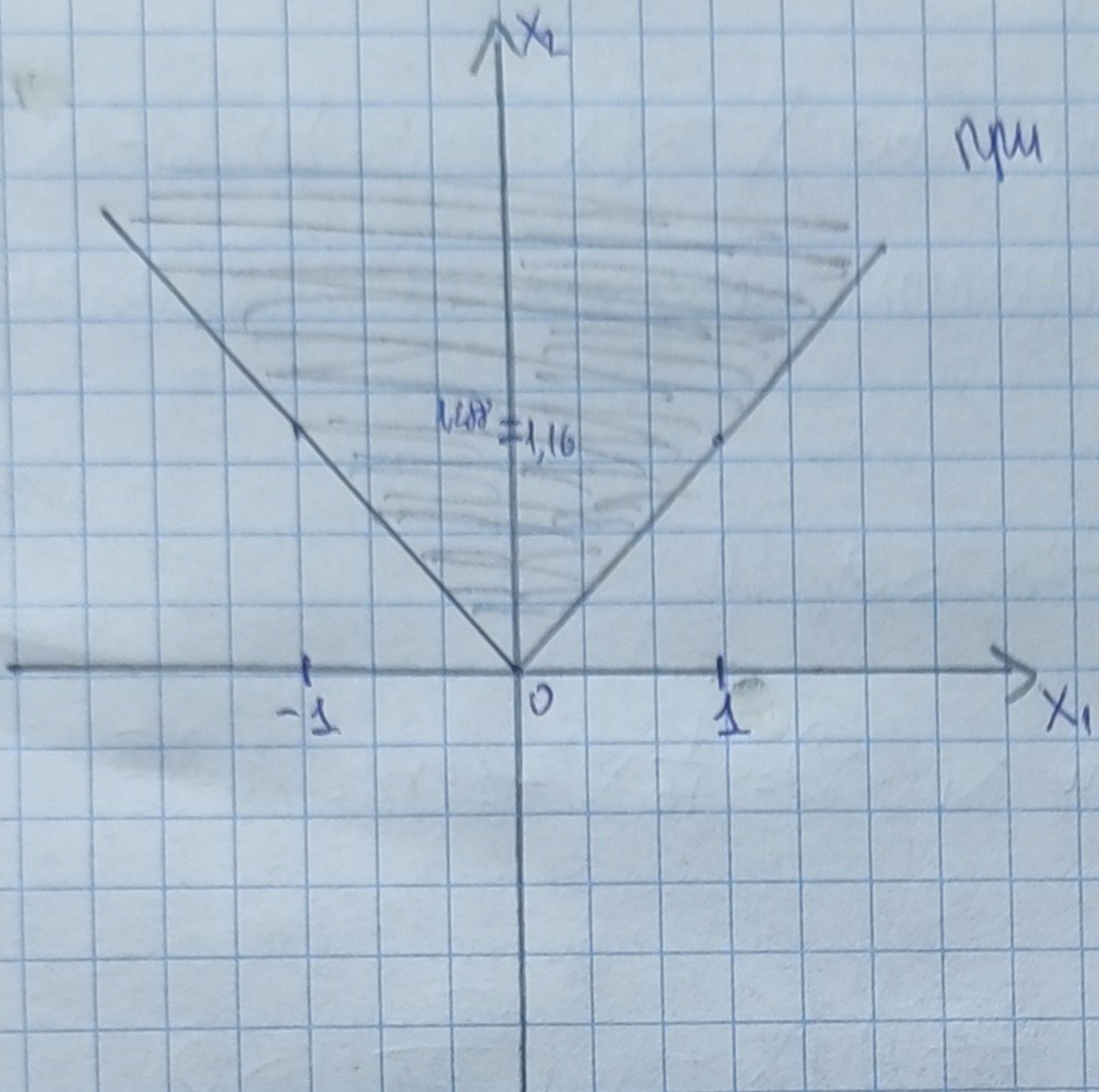
$$\begin{cases} 3x_1^2 - \frac{1}{4}x_1x_2 - 2x_2^2 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

при $x_1 = 1$: $3 - \frac{1}{4}x_2 - 2x_2^2 \leq 0$

$$x_2' = -\frac{1 + \sqrt{385}}{16} \qquad x_2'' = \frac{\sqrt{385} - 1}{16}$$

при $x_1 = -1$ $\quad 3 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_2^2 \leq 0$

$$x_2' = \frac{1 - \sqrt{385}}{16} \qquad x_2'' = \frac{1 + \sqrt{385}}{16}$$



№5.22

Вариант $((8+5) \bmod 30)+1=14$

Найти уравнение гиперплоскости, опорной к множеству $X=\{x: x_3 \geq x_1^2+x_2^2\}$ и отделяющей от точки $x^*=(2,1,2)$

1) Принадлежность точки к мн-ву X:

$x_1^2+x_2^2-x_3 \leq 0 \Rightarrow 2^2+1^2-2 \leq 0 \quad 1 \leq 0 \Rightarrow$

точка x^* не принадлежит мн-ву X.

2) Построим матрицу вторых производных ф-ии $f(x)=x_1^2+x_2^2-x_3$:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Матрица вторых производных неотрицательно определена $\Rightarrow$ ф-ия f выпуклая $\Rightarrow$ X - выпуклое множество

Спроецируем x^* на X по x_3:

$x_3=4+1=5 \Rightarrow$ граничная точка $\tilde{x}=(2,1,5)$

Запишем ур-ние гиперплоскости, опорной к мн-ву X в точке $\tilde{x}$:

$$\begin{pmatrix} 4, & 2, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2-1 \\ x_3-5 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow 4x_1+2x_2-x_3-5=0. \quad (1)$$

Рассмотрим внутреннюю точку X:

(1,1,2) и подставим в (1) и получим:

$-1 < 0$ – "знак –"

Рассмотрим нашу точки x^*:

(2,1,2) и подставим в (1) и получим:

$3 > 0$ – "знак +"

$\Rightarrow$ гиперплоскость отделяет мн-во X от точки x^*

Ответ: $4x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$.