

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра биомедицинской информатики

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

Лабораторная работа

Благодарного Артёма Андреевича  
студента 3-го курса

Преподаватель:  
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

### Задание 1. №1.5

Привести к одному из канонических видов уравнение:

$$3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u = -y$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$3(dy)^2 - dy \cdot dx = 0$$

$$3 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$3t^2 - t = 0$$

Дискриминант  $D = 1 > 0$ , следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

Решение уравнения:

$$t(3t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Соответствующие характеристические переменные:

$$t_1 = 0 : \quad y = C_1$$

$$t_2 = \frac{1}{3} : \quad y = \frac{1}{3}x + C_2$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y, & \xi_x &= 0, & \xi_y &= 1 \\ \eta &= y - \frac{x}{3}, & \eta_x &= -\frac{1}{3}, & \eta_y &= 1 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 3 & u_x = -\frac{1}{3}u_\eta \\ 1 & u_y = u_\eta + u_\xi \\ 3 & u_{xx} = \frac{1}{9}u_{\eta\eta} \\ 1 & u_{xy} = -\frac{1}{3}u_{\eta\xi} - \frac{1}{3}u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: 1 \\ u_\eta &: -1 + 1 = 0 \\ u_{\xi\xi} &: 0 \\ u_{\xi\eta} &: -\frac{1}{3} \\ u_{\eta\eta} &: \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}u_{\xi\eta} + u_\xi - u = -\xi$$

$$u_{\xi\eta} - 3u_\xi + 3u - 3\xi = 0$$

Ответ:  $u_{\xi\eta} - 3u_\xi + 3u - 3\xi = 0$ .

## Задание 2. №1.29

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} - 2 \sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + 2 \sin x \, dy dx - \cos^2 x \, (dx)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \sin x \frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$t^2 + 2 \sin x \, t - \cos^2 x = 0$$

Дискриминант  $D = 4 > 0$ , следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

Решение квадратного уравнения:

$$t_{1,2} = -\sin x \pm 1$$

Соответствующие характеристики:

$$t_1 = -\sin x - 1 : \quad y = \cos x - x + C_1$$

$$t_2 = -\sin x + 1 : \quad y = \cos x + x + C_2$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \cos x + x, & \xi_x &= \sin x + 1, & \xi_y &= 1, & \xi_{xx} &= \cos x \\ \eta &= y - \cos x - x, & \eta_x &= \sin x - 1, & \eta_y &= 1, & \eta_{xx} &= \cos x \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = (\sin x + 1)u_\xi + (\sin x - 1)u_\eta \\ -\cos x & u_y = u_\eta + u_\xi \\ 1 & u_{xx} = (\sin x + 1)^2 u_{\xi\xi} + 2(\sin x + 1)(\sin x - 1)u_{\xi\eta} + (\sin x - 1)^2 u_{\eta\eta} + \\ & \quad + \cos x \, u_\xi + \cos x \, u_\eta \\ -2 \sin x & u_{xy} = (\sin x + 1)u_{\xi\xi} + 2 \sin x \, u_{\xi\eta} + (\sin x - 1)u_{\eta\eta} \\ -\cos^2 x & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$u_\xi : -\cos x + \cos x = 0$$

$$u_\eta : -\cos x + \cos x = 0$$

$$u_{\xi\xi} : (\sin x + 1)^2 - 2 \sin x (\sin x + 1) - \cos^2 x = 0$$

$$u_{\xi\eta} : 2(\sin x + 1)(\sin x - 1) - 4 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -4$$

$$u_{\eta\eta} : (\sin x - 1)^2 - 2 \sin x (\sin x - 1) - \cos^2 x = 0$$

$$-4u_{\xi\eta} = 0$$

**Ответ:**  $u_{\xi\eta} = 0$ .

### Задание 3. №1.50

Привести к каноническому виду уравнение в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$\operatorname{sign} y u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$\operatorname{sign} y (dy)^2 - 2dydx + (dx)^2 = 0$$

$$\operatorname{sign} y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$\operatorname{sign} y \cdot t^2 - 2t + 1 = 0$$

Дискриминант:

$$D = 4 - 4 \operatorname{sign} y$$

I.  $\operatorname{sign} y = 0, \quad y = 0, \quad D = 4 > 0$ , следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

$$-2dy dx + (dx)^2 = 0$$

$$dx(dx - 2dy) = 0$$

Соответствующие характеристики:

$$dx = 0 \quad x = C_1$$

$$dy = \frac{1}{2}dx \quad y = \frac{1}{2}x + C_2$$

Выбираем новые переменные:

$$\xi = y - \frac{1}{2}x, \quad \xi_x = -\frac{1}{2}, \quad \xi_y = 1$$

$$\eta = x, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_y = 0$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = -\frac{1}{2}u_\xi + u_\eta \\ 0 & u_y = u_\xi \\ 0 & u_{xx} = \frac{1}{4}u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = -\frac{1}{2}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ 1 & u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$u_\xi : 0$$

$$u_\eta : 0$$

$$u_{\xi\xi} : 1 - 1 = 0$$

$$u_{\xi\eta} : 2$$

$$u_{\eta\eta} : 0$$

$$2u_{\xi\eta} = 0$$

**Ответ:**  $u_{\xi\eta} = 0$

II.  $\operatorname{sign} y = 1, \quad y > 0, \quad D = 0$ , следовательно, уравнение **параболического типа**.

Характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}t^2 - 2t + 1 &= 0 \\(t - 1)^2 &= 0 \\t &= 1\end{aligned}$$

Характеристики:

$$\begin{aligned}dy &= dx & y &= x + C_1 \\x &= C_2\end{aligned}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned}\xi &= y - x & \xi_x &= -1, & \xi_y &= 1 \\ \eta &= x & \eta_x &= 1, & \eta_y &= 0\end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l}0 & u_x = -u_\xi + u_\eta \\0 & u_y = u_\xi \\1 & u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\2 & u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\1 & u_{yy} = u_{\xi\xi}\end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned}u_\xi &: 0 \\u_\eta &: 0 \\u_{\xi\xi} &: 1 + 1 - 2 = 0 \\u_{\xi\eta} &: -2 + 2 = 0 \\u_{\eta\eta} &: 1\end{aligned}$$

$$u_{\eta\eta} = 0$$

**Ответ:**  $u_{\eta\eta} = 0$ .

III.  $\text{sign } y = -1, \quad y < 0, \quad D = 8$ , следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

Характеристическое уравнение:

$$-t^2 - 2t + 1 = 0$$

Решение квадратного уравнения:

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Соответствующие характеристически:

$$\begin{aligned}dy &= (-1 - \sqrt{2})dx & y &= (-1 - \sqrt{2})x + C_1 \\dy &= (-1 + \sqrt{2})dx & y &= (-1 + \sqrt{2})x + C_2\end{aligned}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned}\xi &= y + (1 + \sqrt{2})x, & \xi_x &= 1 + \sqrt{2}, & \xi_y &= 1 \\ \eta &= y + (1 - \sqrt{2})x, & \eta_x &= 1 - \sqrt{2}, & \eta_y &= 1\end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = (1 + \sqrt{2})u_\xi + (1 - \sqrt{2})u_\eta \\ 0 & u_y = u_\xi + u_\eta \\ -1 & u_{xx} = (1 + \sqrt{2})^2 u_{\xi\xi} + 2(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})u_{\xi\eta} + (1 - \sqrt{2})^2 u_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = (1 + \sqrt{2})u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + (1 - \sqrt{2})u_{\eta\eta} \\ 1 & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$u_\xi : 0$$

$$u_\eta : 0$$

$$u_{\xi\xi} : -(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + 1 = 0$$

$$u_{\eta\eta} : -(1 - \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + 1 = 0$$

$$u_{\xi\eta} : -2(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + 4 + 2 = 8$$

$$8u_{\xi\eta} = 0$$

**Ответ:**  $u_{\xi\eta} = 0$ .

**Канонический вид уравнения**

$$\text{sign } y \cdot u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} u_{\xi\eta} = 0, & y = 0, & D = 4 \\ u_{\xi\eta} = 0, & y < 0, & D = 8 \\ u_{\eta\eta} = 0, & y > 0, & D = 0 \end{cases}$$

#### Задание 4. №5

Привести к каноническому виду и упростить уравнение:

$$au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$ady^2 - 2adydx + a(dx)^2 = 0$$

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a\left(\frac{dy}{dx}\right) + a = 0$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$at^2 - 2at + a = 0$$

Дискриминант  $D = 4a^2 - 4a^2 = 0$ , следовательно, уравнение **параболического типа**.  
Решение квадратного уравнения:

$$a(t - 1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

Соответствующие характеристики:

$$dy = dx$$

$$y = x + C_1$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y - x, & \xi_x &= -1, & \xi_y &= 1 \\ \eta &= x, & \eta_x &= 1, & \eta_y &= 0 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} b & u_x = -u_\xi + u_\eta \\ c & u_y = u_\xi \\ a & u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 2a & u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ a & u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: -b + c \\ u_\eta &: b \\ u_{\xi\xi} &: a - 2a + a = 0 \\ u_{\eta\eta} &: -2a + 2a = 0 \\ u_{\xi\eta} &: a \end{aligned}$$

$$au_{\eta\eta} + bu_\eta + (c - b)u_\xi + u = 0$$

Подстановка  $u = e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta} \cdot v(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} u_\xi &= (\alpha_1 v + v_\xi) e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta}, \\ u_\eta &= (\alpha_2 v + v_\eta) e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta}, \\ u_{\eta\eta} &= (\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_\eta + v_{\eta\eta}) e^{\alpha_1\xi + \alpha_2\eta}. \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение:

$$(a(\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v_\xi + v_{\eta\eta}) + b(\alpha_2 v + v_\eta) + (c - b)(\alpha_1 v + v_\xi) + v)e^{\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta} = 0.$$

Группировка по  $v, v_\xi, v_\eta, v_{\eta\eta}$ :

$$v(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + (c - b)\alpha_1 + 1) + v_\eta(2\alpha_2 + b) + v_\xi(c - b) + v_{\eta\eta}a = 0.$$

Зануляем коэффициенты:

$$\begin{cases} a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + (c - b)\alpha_1 + 1 = 0 \\ 2\alpha_2 + b = 0 \end{cases} \begin{matrix} \implies \alpha_1 = -\frac{2b^2 - ab^2 - 4}{4(c - b)} \\ \implies \alpha_2 = -\frac{b}{2}, \end{matrix}$$

$$av_{\eta\eta} + (c - b)v_\xi = 0.$$

**Ответ:**  $v_{\eta\eta} + \frac{(c-b)}{a} v_\xi = 0.$



### Задание 5. №3.5

Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$(dx)^2 + 2d(xdy) = 0$$

$$dx(dx + 2dy) = 0$$

Рассмотрим случаи:

$$\begin{cases} dx = 0 & \Rightarrow x = C \\ dx = -2dy & \Rightarrow x = -2y + C \end{cases}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi = x, & \quad \xi_x = 1, & \quad \xi_y = 0 \\ \eta = x + 2y, & \quad \eta_x = 1, & \quad \eta_y = 2 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 2 & u_x = u_\xi + u_\eta \\ -1 & u_y = 2u_\eta \\ 0 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ -2 & u_{xy} = 2u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} \\ 1 & u_{yy} = 4u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: 2 \\ u_\eta &: 2 - 2 = 0 \\ u_{\xi\xi} &: 0 \\ u_{\eta\eta} &: -4 \\ u_{\xi\eta} &: -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4u_{\xi\eta} + 2u_\xi &= 4e^x \\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2}u_\xi &= -e^x \\ \left(u_\eta - \frac{1}{2}u\right)_\xi &= -e^x \end{aligned}$$

Сделаем замену:  $u_\eta - \frac{1}{2}u = v$

$$v_\xi = -e^x$$

Интегрируем:

$$v = \int -e^\xi d\xi = -e^\xi + C(\eta)$$

Обратная подстановка:

$$u_\eta - \frac{1}{2}u = -e^\xi + C(\eta)$$

Общее решение неоднородного уравнения представим в виде суммы:

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{частн}}$$

где  $u_{\text{общ}}$  — общее решение однородного уравнения, а  $u_{\text{частн}}$  — частное решение. Рассмотрим однородное уравнение:

$$\begin{aligned} u_\eta - \frac{1}{2}u &= 0 \\ u_\eta &= \frac{1}{2}u \\ \frac{du}{d\eta} &= \frac{1}{2}u \\ \frac{du}{u} &= \frac{d\eta}{2} \end{aligned}$$

Решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} \ln(u) &= \frac{1}{2}\eta + C_1(\xi) \\ u &= e^{\frac{1}{2}\eta + C_1(\xi)} \\ u &= e^{\frac{1}{2}\eta} C_2(\xi) \end{aligned}$$

Найдём частное решение:

$$\begin{aligned} u_\eta &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}C_2 + e^{\frac{1}{2}\eta}C_{2\eta}, \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}C_2 + e^{\frac{1}{2}\eta}C_{2\eta} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}C_2 &= -e^\xi + C(\eta), \\ e^{\frac{1}{2}\eta}C_{2\eta} &= -e^\xi + C(\eta), \\ C_{2\eta} &= (C(\eta) - e^\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta}, \\ C_2(\xi, \eta) &= \int (C(\eta) - e^\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} u &= e^{\frac{1}{2}\eta}(C_1(\xi) + C_2(\xi, \eta)) \\ u &= e^{\frac{1}{2}(x+2y)}(C_1(x) + C_2(x, x+2y)) \end{aligned}$$

**Ответ:**  $u = e^{\frac{1}{2}(x+2y)}(C_1(x) + C_2(x, x+2y)).$

### Задание 6. №3.30

В каждой из областей, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнения:

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x) u_{yy} - \cos x u_y = 0$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + 2 \sin x (dx \cdot dy) - (3 + \cos^2 x) (dx)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \sin x \left(\frac{dy}{dx}\right) - (3 + \cos^2 x) = 0$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$t^2 + 2 \sin x t - (3 + \cos^2 x) = 0$$

$$D = 4 \sin^2 x + 4 \cdot (3 + \cos^2 x) = 16 \Rightarrow \text{уравнение гиперболическое}$$

Корни уравнения:

$$t_{1,2} = -\sin x \pm 2$$

Рассмотрим уравнения характеристик:

$$\begin{cases} dy = (-\sin x + 2)dx, \\ dy = (-\sin x - 2)dx. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} y = -\cos x + 2x + C_1, \\ y = -\cos x - 2x + C_2. \end{cases}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \cos x + 2x, & \xi_x &= \sin x + 2, & \xi_y &= 1, & \xi_{xx} &= \cos x, \\ \eta &= y - \cos x - 2x, & \eta_x &= \sin x - 2, & \eta_y &= 1, & \eta_{xx} &= \cos x. \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = (\sin x + 2)u_\xi + (\sin x - 2)u_\eta \\ -\cos x & u_y = u_\xi + u_\eta \\ 1 & u_{xx} = (\sin x + 2)^2 u_{\xi\xi} + 2(\sin x + 2)(\sin x - 2)u_{\xi\eta} + (\sin x - 2)^2 u_{\eta\eta} + \\ & \quad + \cos x u_\xi + \cos x u_\eta \\ -2 \sin x & u_{xy} = (\sin x + 2)u_{\xi\xi} + 2 \sin x u_{\xi\eta} + (\sin x - 2)u_{\eta\eta} \\ -(3 + \cos^2 x) & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: -\cos x + \cos x = 0 \\ u_\eta &: -\cos x + \cos x = 0 \\ u_{\xi\xi} &: (\sin x + 2)^2 - 2 \sin x (\sin x + 2) - (3 + \cos^2 x) = 0 \\ u_{\xi\eta} &: 2(\sin x + 2)(\sin x - 2) - 4 \sin^2 x - 2(3 + \cos^2 x) = -16 \\ u_{\eta\eta} &: (\sin x - 2)^2 - 2 \sin x (\sin x - 2) - (3 + \cos^2 x) = 0 \end{aligned}$$

Подставляя, получаем:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_\xi = C(\xi)$$

$$u = \int C(\xi) d\xi$$

$$u = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

**Ответ:**  $u = C_1(y - \cos x + 2x) + C_2(y - \cos x - 2x).$

## Задание 7

Решить задачу Коши:

$$x u_{xx} + (x + y) u_{xy} + y u_{yy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u \Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad u_y \Big|_{y=\frac{1}{x}} = -x^4$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$x (dy)^2 - 2(x + y) (dy \cdot dx) + y (dx)^2 = 0.$$

$$x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2(x + y) \left( \frac{dy}{dx} \right) + y = 0.$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$xt^2 - 2(x + y)t + y = 0.$$

Дискриминант  $D = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 > 0$ , следовательно, уравнение **гиперболического типа**.

Решение уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{y}{x} \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Соответствующие характеристические переменные:

$$t_1 = \frac{y}{x} : \quad y = xC_1$$

$$t_2 = 1 : \quad y = x + C_2$$

Выбираем новые переменные:

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \xi_x = -\frac{y}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{x}, \quad \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\eta = y - x, \quad \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = -\frac{y}{x^2}u_\xi - u_\eta \\ 0 & u_y = \frac{1}{x}u_\xi + u_\eta \\ x & u_{xx} = \frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^2}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\xi \\ (x+y) & u_{xy} = -\frac{y}{x^3}u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\right) - u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2}u_\xi \\ y & u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: \frac{2y}{x^3}x - \frac{1}{x^2}(x + y) = \frac{(y-x)}{x^2} \\ u_\eta &: 0 \\ u_{\xi\xi} &: \frac{y^2}{x^3} - \frac{y(x+y)}{x^3} + \frac{y}{x^2} = 0 \\ u_{\xi\eta} &: \frac{2y}{x} + (x + y)\left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + \frac{2y}{x} = -\frac{(y-x)^2}{x^2} \\ u_{\eta\eta} &: x - (x + y) + y = 0 \end{aligned}$$

Обратная замена переменных:

$$x = \frac{\eta}{\xi - 1}, \quad y = \frac{\xi\eta}{\xi - 1}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{(y-x)^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{(y-x)}{x^2}u_{\xi} &= 0 \\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{y-x}u_{\xi} &= 0 \\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{\eta}u_{\xi} &= 0 \end{aligned}$$

Замена  $u_{\xi} = v$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\eta} &= \frac{v}{\eta} \\ v_{\eta} - \frac{1}{\eta}v &= 0 \\ \ln v &= \ln \eta + C \\ v &= \eta \cdot C(\xi) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= \eta \cdot C(\xi) \\ u &= \int \eta \cdot C(\xi) d\xi + C_2(\eta) \\ u &= \eta \cdot C_1(\xi) + C_2(\eta) \end{aligned}$$

Обратная замена:

$$u = (y-x) \cdot C_1\left(\frac{y}{x}\right) + C_2(y-x)$$

Используя начальные условия, подставим  $y = \frac{1}{x}$  в выражение для  $u(x, y)$ :

$$\left(\frac{1}{x} - x\right) C_1\left(\frac{1}{x^2}\right) + C_2\left(\frac{1}{x} - x\right) = x^3$$

Обозначим

$$\xi = y - x = \frac{1-x^2}{x}, \quad \eta = \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\xi C_1(\eta) + C_2(\xi) = x^3$$

Второе условие даёт производную:

$$C_1(\eta) + \frac{1-x^2}{x^2}C_1'(\eta) + C_2'(\xi) = -x^4$$

Используем замену переменных  $s = \xi$ ,  $t = \eta$  и выразим  $x$  через  $t$ :

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$$

Запишем уравнения в терминах  $t$ :

$$\begin{aligned}C_2(s) + sC_1(t) &= \frac{1}{t^{3/2}}, \\C_2'(s) + C_1(t) + (t-1)C_1'(t) &= -\frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

Решим систему уравнений.

1. Выразим  $C_2(s)$ :

$$C_2(s) = \frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t).$$

2. Подставим это выражение:

$$\left(\frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t)\right)' + C_1(t) + (t-1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Так как  $s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$ , имеем  $ds/dt = \frac{(t-1)'\sqrt{t} - (t-1)(\sqrt{t})'}{t} = \frac{\sqrt{t} - \frac{t-1}{2\sqrt{t}}}{t}$ , что упрощается до  $ds/dt = \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}$ .

3. Производная  $C_2(s)$  будет:

$$C_2'(s) = \left(\frac{1}{t^{3/2}} - sC_1(t)\right)' = -\frac{3}{2}t^{-5/2} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t) - sC_1'(t).$$

Подставляя это, получаем

$$-\frac{3}{2}t^{-5/2} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}C_1(t) - sC_1'(t) + C_1(t) + (t-1)C_1'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

4. Переписываем уравнение:

$$(t-1-s)C_1'(t) + \left(1 - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}}\right)C_1(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{3}{2}t^{-5/2}.$$

Так как  $s = \frac{t-1}{\sqrt{t}}$ , имеем  $t-1-s = \frac{(t-1)(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}$ .

5. Разделяем переменные и интегрируем уравнение относительно  $C_1(t)$ :

$$C_1'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

6. Подставляем  $C_1(t)$  в уравнение для  $C_2(s)$  и находим  $C_2(s) = 0$ .

Подставляя найденные функции, получаем решение:

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y}.$$

**Ответ:**  $u = \frac{x^2}{y}$ .

## Задание 8. №5

Решить задачу Гурса:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \quad y < 5x, \quad x > 0$$

$$u \Big|_{y=0} = \cos x, \quad u \Big|_{y=5x} = \cos 2x$$

**Решение:**

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + 6(dx \cdot dy) + 5(dx)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5 = 0$$

Подстановка  $t = \frac{dy}{dx}$ :

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \text{уравнение гиперболическое}$$

Корни уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения характеристик:

$$\begin{cases} dy = dx, \\ dy = 5dx. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} y = x + C_1, \\ y = 5x + C_2. \end{cases}$$

Выбираем новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= y - 5x, & \xi_x &= -5, & \xi_y &= 1 \\ \eta &= y - x, & \eta_x &= -1, & \eta_y &= 1 \end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = -5u_\eta - u_\xi \\ 0 & u_y = u_\eta + u_\xi \\ 1 & u_{xx} = 25u_{\xi\xi} + 10u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ 6 & u_{xy} = -5u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} \\ 5 & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

Пересчёт коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_\xi &: 0 \\ u_\eta &: 0 \\ u_{\xi\xi} &: 25 - 30 + 5 = 0 \\ u_{\xi\eta} &: 10 - 24 + 10 = -4 \\ u_{\eta\eta} &: 1 - 6 + 5 = 0 \end{aligned}$$



Подставляя, получаем:

$$-4u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi} = C(\xi)$$

$$u = \int C(\xi) d\xi$$

$$u = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

$$u = C_1(y - 5x) + C_2(y - x)$$

Используя начальные условия:

$$C_1(-5x) + C_2(-x) = \cos x$$

$$C_1(0) + C_2(4x) = \cos 2x$$

Выразим  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1(z) = \cos\left(-\frac{z}{5}\right) - C_2\left(\frac{z}{5}\right)$$

$$C_2(z) = \cos\left(\frac{z}{2}\right) + C_1(0)$$

Тогда имеем:

$$u = \cos\left(\frac{5x-y}{5}\right) - C_2\left(\frac{y-5x}{5}\right) + \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - C_1(0)$$

$$u = \cos\left(\frac{5x-y}{5}\right) - \cos\left(\frac{y-5x}{10}\right) + C_1(0) + \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - C_1(0)$$

$$u = \cos\left(\frac{5x-y}{5}\right) - \cos\left(\frac{y-5x}{10}\right) + \cos\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

**Ответ:**  $u = \cos\left(\frac{5x-y}{5}\right) - \cos\left(\frac{y-5x}{10}\right) + \cos\left(\frac{y-x}{2}\right).$

### Задание 9. №2.5

Привести к каноническому виду и упростить уравнение:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z + 4u = 0$$

**Решение:**

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 6t_1t_2 + 2t_1t_3 + 2t_2t_3 = \\&= (t_1^2 + 2t_1(3t_2 + t_3) + (3t_2 + t_3)^2) - (3t_2 + t_3)^2 + t_2^2 + t_3^2 + 6t_1t_2 + 2t_2t_3 = \\&= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - 9t_2^2 - 6t_2t_3 - t_3^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_2t_3 = \\&= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - 8t_2^2 - 4t_2t_3 = \\&= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - (8t_2^2 + 2(2\sqrt{2}t_2)(\frac{t_3}{\sqrt{2}}) + \frac{t_3^2}{2}) + \frac{t_3^2}{2} = \\&= (t_1 + 3t_2 + t_3)^2 - (\sqrt{8}t_2 + \frac{t_3}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{t_3}{\sqrt{2}})^2 = \tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2\end{aligned}$$

Замена  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= t_1 + 3t_2 + t_3 \\ \tau_2 &= \sqrt{8}t_2 + \frac{t_3}{2} \\ \tau_3 &= \frac{t_3}{2}\end{aligned}$$

Обратная замена  $t_1, t_2, t_3$ :

$$\begin{aligned}t_1 &= \tau_1 - \frac{3}{\sqrt{8}}\tau_2 - \frac{1}{\sqrt{8}}\tau_3 \\ t_2 &= \frac{\tau_2 - \tau_3}{2\sqrt{2}} \\ t_3 &= \sqrt{2}\tau_3\end{aligned}$$

Матрица преобразования:

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ B^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Замена переменных:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Тогда  $y_1, y_2, y_3$ :

$$\begin{aligned}y_1 &= x \\y_2 &= -\frac{3}{\sqrt{8}}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}y \\y_3 &= -\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}y + \sqrt{2}z\end{aligned}$$

Выразим  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}x &= y_1 \\y &= 2\sqrt{2}(y_2 + \frac{3}{\sqrt{8}}y_1) \\z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_2 + \sqrt{2}y_1)\end{aligned}$$

Преобразование производных:

$$\begin{aligned}2 \quad & u_x = u_{y_1} - \frac{3}{\sqrt{8}}u_{y_2} - \frac{1}{\sqrt{8}}u_{y_3} \\2 \quad & u_y = \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3} \\2 \quad & u_z = \sqrt{2}u_{y_3} \\1 \quad & u_{xx} = u_{y_1y_1} - \frac{3}{\sqrt{8}}u_{y_1y_2} - \frac{1}{\sqrt{8}}u_{y_1y_3} - \frac{3}{\sqrt{8}}u_{y_2y_1} + \frac{9}{8}u_{y_2y_2} + \frac{3}{8}u_{y_2y_3} - \frac{1}{\sqrt{8}}u_{y_3y_1} + \frac{3}{8}u_{y_3y_2} + \\& + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} = u_{y_1y_1} + \frac{9}{8}u_{y_2y_2} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} - \frac{6}{\sqrt{8}}u_{y_1y_2} - \frac{2}{\sqrt{8}}u_{y_1y_3} + \frac{3}{4}u_{y_2y_3} \\1 \quad & u_{yy} = \frac{1}{8}u_{y_2y_2} - \frac{1}{8}u_{y_2y_3} - \frac{1}{8}u_{y_2y_3} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} = \frac{1}{8}u_{y_2y_2} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} - \frac{1}{4}u_{y_2y_3} \\1 \quad & u_{zz} = 2u_{y_3y_3} \\6 \quad & u_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_2y_1} - \frac{3}{8}u_{y_2y_2} - \frac{1}{8}u_{y_2y_3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3y_1} + \frac{3}{8}u_{y_2y_3} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} = \\& = -\frac{3}{8}u_{y_2y_2} + \frac{1}{8}u_{y_3y_3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_1y_2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_1y_3} + \frac{1}{4}u_{y_2y_3} \\2 \quad & u_{yz} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3y_2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{y_3y_3} = \frac{1}{2}u_{y_3y_2} - \frac{1}{2}u_{y_3y_3} \\2 \quad & u_{xz} = \sqrt{2}u_{y_3y_1} - \frac{3}{2}u_{y_3y_2} - \frac{1}{2}u_{y_3y_3} = -\frac{1}{2}u_{y_3y_3} + \sqrt{2}u_{y_1y_3} - \frac{3}{2}u_{y_2y_3}\end{aligned}$$

Пересчет коэффициентов:

$$\begin{aligned}u_{y_1} &: 2 \\u_{y_2} &: -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\u_{y_3} &: -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \\u_{y_1y_1} &: 1 \\u_{y_2y_2} &: \frac{9}{8} + \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = -1 \\u_{y_3y_3} &: \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 2 + \frac{3}{4} - 1 - 1 = 1 \\u_{y_1y_2} &: -\frac{6}{\sqrt{8}} + \frac{6}{\sqrt{8}} = 0 \\u_{y_1y_3} &: -\frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{6}{\sqrt{8}} + 2\sqrt{2} = 0 \\u_{y_2y_3} &: \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{6}{4} + 1 - 3 = 0\end{aligned}$$

Подставляя, получаем:

$$u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} + u_{y_3y_3} + 2u_{y_1} - \sqrt{2}u_{y_2} + \sqrt{2}u_{y_3} + 4u = 0$$

Введем функцию  $u = e^{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3} v(y_1, y_2, y_3)$  и обозначим  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -$ ,  $v(y_1, y_2, y_3) = v$ , тогда  $u = e^- v$ . Посчитаем производные:

$$\begin{aligned}
u_{y_1} &= (\alpha_1 v + v y_1) e^- \\
u_{y_2} &= (\alpha_2 v + v y_2) e^- \\
u_{y_3} &= (\alpha_3 v + v y_3) e^- \\
u_{y_1 y_1} &= (\alpha_1^2 v + 2\alpha_1 v y_1 + v y_1 y_1) e^- \\
u_{y_2 y_2} &= (\alpha_2^2 v + 2\alpha_2 v y_2 + v y_2 y_2) e^- \\
u_{y_3 y_3} &= (\alpha_3^2 v + 2\alpha_3 v y_3 + v y_3 y_3) e^-
\end{aligned}$$

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^2 v + 2\alpha_1 v y_1 + v y_1 y_1 - \alpha_2^2 v - 2\alpha_2 v y_2 - v y_2 y_2 \\
&\quad + \alpha_3^2 v + 2\alpha_3 v y_3 + v y_3 y_3 + 2\alpha_1 v + 2v y_1 \\
&\quad - \sqrt{2}\alpha_2 v - \sqrt{2}v y_2 + \sqrt{2}\alpha_3 v + 2v y_3 + 4v) e^{-t} = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при  $v, v_{y_1}, v_{y_2}, v_{y_3}, v_{y_1 y_1}, v_{y_2 y_2}, v_{y_3 y_3}, \dots$ :

$$\begin{aligned}
v &: \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_1 - \sqrt{2}\alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_3 + 4 \\
v_{y_1} &: 2\alpha_1 + 2 \\
v_{y_2} &: -2\alpha_2 + \sqrt{2} \\
v_{y_3} &: 2\alpha_3 + \sqrt{2} \\
v_{y_1 y_1} &: 1 \\
v_{y_2 y_2} &: -1 \\
v_{y_3 y_3} &: -1
\end{aligned}$$

Возьмём  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда уравнение примет вид:

$$3v + v_{y_1 y_1} - v_{y_2 y_2} + v_{y_3 y_3} = 0$$

**Ответ:**  $v_{y_1 y_1} - v_{y_2 y_2} + v_{y_3 y_3} + 3v = 0$ .