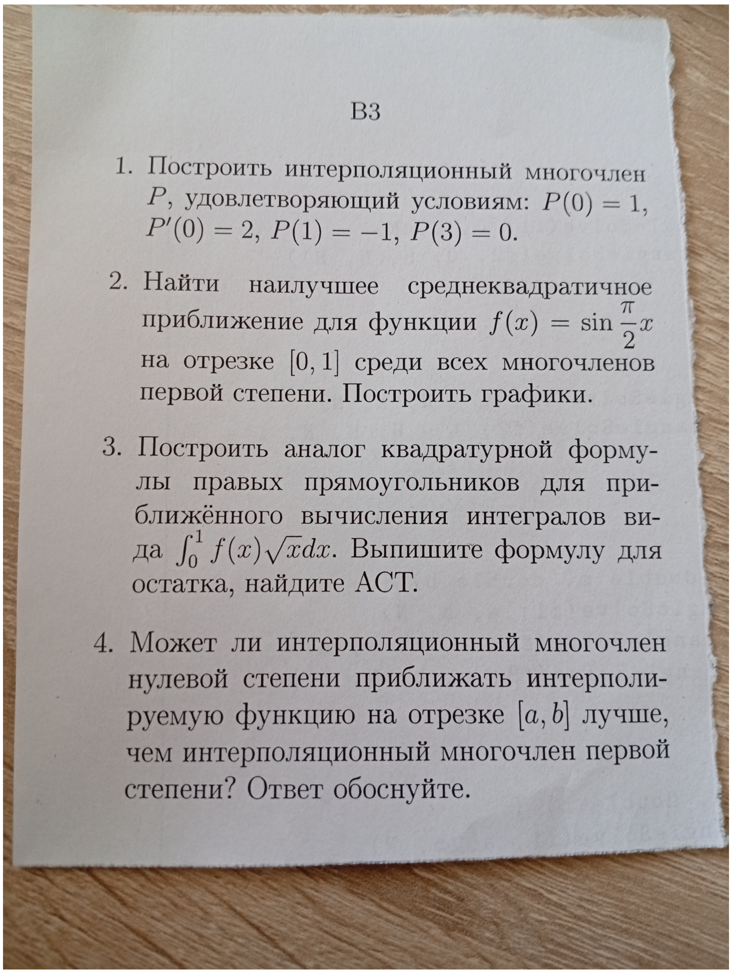
Условие контрольной работы



В3

1. Построить интерполяционный многочлен P, удовлетворяющий условиям: $P(0)=1$, $P'(0)=2$, $P(1)=-1$, $P(3)=0$.
2. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение для функции $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ на отрезке $[0,1]$ среди всех многочленов первой степени. Построить графики.
3. Построить аналог квадратурной формулы правых прямоугольников для приближённого вычисления интегралов вида $\int_0^1 f(x)\sqrt{x}dx$. Выпишите формулу для остатка, найдите АСТ.
4. Может ли интерполяционный многочлен нулевой степени приближать интерполируемую функцию на отрезке $[a,b]$ лучше, чем интерполяционный многочлен первой степени? Ответ обоснуйте.

1. Построить интерполяционный многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$P(0)=1, \quad P'(0)=2, \quad P(1)=-1, \quad P(3)=0.$$

2. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение для функции

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

на отрезке $[0,1]$ среди всех многочленов первой степени. Построить графики.

3. Построить аналог квадратурной формулы правых прямоугольников для приближённого вычисления интегралов вида:

$$\int_0^1 f(x)\sqrt{x}\,dx.$$

Выписать формулу для остатка, найти алгебраическую степень точности (АСТ).

4. Может ли интерполяционный многочлен нулевой степени приближать интерполируемую функцию на отрезке $[a,b]$ лучше, чем интерполяционный многочлен первой степени? Ответ обосновать.

1. Построение интерполяционного многочлена

Пусть требуется построить многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$P(0) = 1, \quad P'(0) = 2, \quad P(1) = -1, \quad P(3) = 0.$$

Пусть $P(x)$ — многочлен третьей степени:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Шаг 1: Учет условия $P(0) = 1$

Подставляя $x = 0$, получаем:

$$P(0) = d = 1 \Rightarrow d = 1.$$

Шаг 2: Учет условия $P'(0) = 2$

Находим производную:

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Подставляя $x = 0$:

$$P'(0) = c = 2 \Rightarrow c = 2.$$

Шаг 3: Учет условия $P(1) = -1$

$$P(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + 2(1) + 1 = a + b + 3 = -1 \Rightarrow a + b = -4. \tag{1}$$

Шаг 4: Учет условия $P(3) = 0$

$$P(3) = 27a + 9b + 6 + 1 = 27a + 9b + 7 = 0 \Rightarrow 27a + 9b = -7. \tag{2}$$

Шаг 5: Решение системы уравнений

Из уравнения (1): $\quad b = -4 - a.$

Подставим в (2):

$$27a + 9(-4 - a) = -7 \Rightarrow 27a - 36 - 9a = -7 \Rightarrow 18a = 29 \Rightarrow a = \frac{29}{18}.$$

$$b = -4 - \frac{29}{18} = \frac{-72 - 29}{18} = \frac{-101}{18}.$$

Ответ

$$\boxed{P(x) = \frac{29}{18}x^3 - \frac{101}{18}x^2 + 2x + 1}$$

2. Наилучшее среднеквадратичное приближение

Найдем многочлен $p(x) = a + bx$ наилучшего среднеквадратичного приближения функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

на отрезке $[0, 1]$. Такой многочлен минимизирует функционал:

$$E(a,b) = \int_0^1 \left(f(x) - (a+bx)\right)^2\, dx.$$

1. Нормальные уравнения

Многочлен $p(x)$ является наилучшим в среднеквадратичном смысле, если остаток

$$R(x) = f(x) - (a+bx)$$

ортогонален базисным функциям 1 и x, то есть:

$$\int_0^1 (f(x) - (a+bx))\, dx = 0, \qquad \int_0^1 x(f(x) - (a+bx))\, dx = 0.$$

Подставим $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ в первое уравнение:

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx - \int_0^1 (a+bx)\, dx = 0.$$

Вычислим:

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx = -\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi},$$

$$\int_0^1 (a+bx)\, dx = a + \frac{b}{2}.$$

Первое нормальное уравнение:

$$a + \frac{b}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

Теперь второе уравнение:

$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx - \int_0^1 x(a+bx)\, dx = 0.$$

Вычислим интеграл по частям:

$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx = -\frac{2}{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx.$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}.$$

$$\int_0^1 x(a+bx)\, dx = a\cdot\frac{1}{2} + b\cdot\frac{1}{3} = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}.$$

Второе нормальное уравнение:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{4}{\pi^2}.$$

2. Решение системы

Система:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = \frac{2}{\pi}, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{4}{\pi^2}. \end{cases}$$

Выразим $a = \frac{2}{\pi} - \frac{b}{2}$, подставим во второе:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{3} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$\frac{1}{\pi} - \frac{b}{4} + \frac{b}{3} = \frac{4}{\pi^2}, \quad \Rightarrow \frac{1}{\pi} + b\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{\pi^2},$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{b}{12} = \frac{4}{\pi^2}, \quad \Rightarrow b = 12\left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{12(4-\pi)}{\pi^2}.$$

Тогда:

$$a = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{12(4-\pi)}{\pi^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{6(4-\pi)}{\pi^2} = \frac{8(\pi-3)}{\pi^2}.$$

3. Результирующий многочлен

Наилучшее среднеквадратичное приближение:

$$p(x) = \frac{8(\pi-3)}{\pi^2} + \frac{12(4-\pi)}{\pi^2}x.$$

Ответ

$$\boxed{p(x) = \frac{8(\pi-3)}{\pi^2} + \frac{12(4-\pi)}{\pi^2}x.}$$

3. Квадратурная формула для интеграла с весом $\sqrt{x}$

Рассматривается интеграл:

$$I(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x}\, dx.$$

Аналог формулы правых прямоугольников для обычного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx f(b)(b-a)$$

предлагается в виде:

$$Q(f) = f(1) \cdot w, \quad \text{где } w = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

Найдём значение веса w:

$$w = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, квадратурная формула:

$$Q(f) = \frac{2}{3}f(1).$$

Формула остатка

Рассмотрим разложение Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x = 1$ до первого порядка:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + R_2(x),$$

где $R_2(x)$ — остаточный член.

Подставим в интеграл:

$$I(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 [f(1) + f'(1)(x-1) + R_2(x)] \sqrt{x}\, dx.$$

Разделим:

$$I(f) = f(1) \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + f'(1) \int_0^1 (x-1)\sqrt{x}\, dx + \int_0^1 R_2(x)\sqrt{x}\, dx.$$

Первый интеграл — это $w = \frac{2}{3}$, значит:

$$Q(f) = f(1) \cdot \frac{2}{3}.$$

Ошибка (остаток) равна:

$$R(f) = I(f) - Q(f) = f'(1) \int_0^1 (x-1)\sqrt{x}\, dx + \int_0^1 R_2(x)\sqrt{x}\, dx.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^1 (x-1)\sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{3/2}\, dx - \int_0^1 x^{1/2}\, dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}.$$

Таким образом, приближённая формула остатка:

$$R(f) = -\frac{4}{15} f'(1) + \text{высший порядок}.$$

Существование $\xi \in (0, 1)$, для которого:

$$R(f) = -\frac{4}{15} f'(\xi),$$

можно доказать строго при $f \in C^1[0, 1]$.

Алгебраическая степень точности (АСТ)

АСТ — наибольшая степень многочлена, для которого формула интегрирует точно.

Проверим:

- $f(x) = 1 \Rightarrow I(1) = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}, \quad Q(1) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow$ точно.
- $f(x) = x \Rightarrow I(x) = \int_0^1 x \cdot \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{3/2}\, dx = \frac{2}{5}, \quad Q(x) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow$ ошибка.

Следовательно,

$$\text{АСТ} = 0.$$

Ответ

- Квадратурная формула: $Q(f) = \frac{2}{3} f(1)$.
- Формула остатка: существует $\xi \in (0,1)$, такое что

$$R(f) = I(f) - Q(f) = -\frac{4}{15} f'(\xi).$$

- Алгебраическая степень точности: $\text{АСТ} = 0$.

4. Сравнение интерполяционных приближений

Рассмотрим два вида интерполяционных приближений для заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

Константное приближение (нулевая степень)

Многочлен нулевой степени (константный интерполянт) определяется как:

$$p_0(x) = f(x_0), \quad x_0 \in [a, b]$$

Обычно выбирают левый, правый или центральный узел. При разложении Тейлора:

$$f(x) = f(c) + f'(\eta)(x - c), \quad \eta \in [a, b]$$

Остаток имеет вид:

$$|f(x) - p_0(x)| = |f'(\eta)||x - c|$$

При оптимальном выборе $c = \frac{a+b}{2}$:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_0(x)| \approx \frac{b-a}{2} \max_{\eta \in [a,b]} |f'(\eta)|$$

Ошибка имеет **линейный порядок** по длине интервала.

Линейное приближение (первая степень)

Многочлен первой степени (линейный интерполянт) определяется по двум узлам:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

При $f \in C^2([a, b])$ для любого $x \in [a, b]$ существует $\xi \in (a, b)$ такое, что:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b)$$

А значит:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_1(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

Ошибка имеет **квадратичный порядок** по длине интервала.

Сравнение погрешностей

Если функция $f(x)$ не является константой, то обычно:

$$\frac{(b-a)^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \ll \frac{b-a}{2} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Таким образом, линейная интерполяция обычно существенно точнее константной.

Вывод

Ответ: В общем случае интерполяционный многочлен первой степени даёт лучшее приближение интерполируемой функции на отрезке $[a,b]$, чем многочлен нулевой степени.

Обоснование:

- Остаток линейной интерполяции:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

  Ошибка имеет порядок $(b-a)^2$.

- Остаток константной интерполяции:

$$|f(x) - p_0(x)| \approx |f'(\eta)(x-c)|$$

  Ошибка имеет порядок $(b-a)$.

Следовательно, если f не является константой, линейный интерполянт (на основе двух узлов) приближает f существенно точнее, чем константный интерполянт, так как учитывает наклон функции.