МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра вычислительной математики

Отчёт

Лабораторная работа

“Методы решения задачи Коши”

Вариант №5

Благодарный Артём Андреевич
студент 3 курса, 3 группы
специальности «Информатика»
дисциплина «Численные методы»

Минск, 2025

Постановка задачи

Дана задача Коши:

$$y'(x) = \frac{y}{x} + x(0.35e^x + 0.65\cos x)\,, x \in [0.35, 1.35]$$

$$y(0.35) = 0.35 * (0.35e^{0.35} + 0.65\sin 0.35) \approx 0.251845$$

1. Найти приближенное решение задачи Коши на сетке узлов при 10 разбиениях отрезка интегрирования, применяя методы:
   a. Явный метод Эйлера
   b. Явный метод Рунге-Кутта ($\beta = 1/2$)
   c. Явный метод Адамса
2. Используя таблицу результатов, получить погрешности методов, сравнивая приближенное решение с точным.
3. Оценивая величину истинной погрешности, сделать вывод о точности каждого используемого метода.

Листинг программы

```
import numpy as np
import math

def f(x, y):
    return y / x + x * (0.35 * math.exp(x) + 0.65 * math.cos(x))

def f_exact_expr(x):
    return 0.35 * math.exp(x) + 0.65 * math.sin(x)

def y_exact(x):
    return x * f_exact_expr(x)

def euler_method(a, b, n, f, y0):
    h = (b - a) / n
    x_vals = [a + i * h for i in range(n + 1)]
    y_vals = [y0]
    for i in range(n):
        y_next = y_vals[i] + h * f(x_vals[i], y_vals[i])
        y_vals.append(y_next)
    return x_vals, y_vals

def runge_kutta_2(a, b, n, f, y0):
    h = (b - a) / n
    x_vals = [a + i * h for i in range(n + 1)]
    y_vals = [y0]
    for i in range(n):
        k1 = f(x_vals[i], y_vals[i])
        k2 = f(x_vals[i] + h / 2, y_vals[i] + h / 2 * k1)
        y_next = y_vals[i] + h * k2
        y_vals.append(y_next)
    return x_vals, y_vals

def adams_bashforth_2(a, b, n, f, y0):
    h = (b - a) / n
    x_vals = [a + i * h for i in range(n + 1)]
    y_vals = [y0]

    _, rk_y = runge_kutta_2(a, b, n, f, y0)
    y_vals.append(rk_y[1])

    for i in range(1, n):
        fi = f(x_vals[i], y_vals[i])
        fi_1 = f(x_vals[i - 1], y_vals[i - 1])
        y_next = y_vals[i] + h * (1.5 * fi - 0.5 * fi_1)
        y_vals.append(y_next)

    return x_vals, y_vals

a = 0.35
b = 1.35
n = 10
h = (b - a) / n
y0 = y_exact(a)

sample_points = [0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15, 1.25, 1.35]
print("Точное решение в выбранных точках:")
```

```
for x in sample_points:
    print(f"y_exact({x:.2f}) = {y_exact(x):.8f}")

x_nodes = [a + i * h for i in range(n + 1)]
y_true = [y_exact(x) for x in x_nodes]

x_eu, y_eu = euler_method(a, b, n, f, y0)
x_rk, y_rk = runge_kutta_2(a, b, n, f, y0)
x_ad, y_ad = adams_bashforth_2(a, b, n, f, y0)

def print_results(name, x_vals, y_vals, y_exact_vals):
    print(f'\n{name}')
    print(f"{'x':>8} | {'y(x)':>14} | {'y_exact(x)':>14} | {'Ошибка':>14}")
    print("-" * 54)
    for x, y_num, y_ex in zip(x_vals, y_vals, y_exact_vals):
        error = y_num - y_ex
        print(f"{x:8.2f} | {y_num:14.8f} | {y_ex:14.8f} | {error:14.8f}")

print_results("Метод Эйлера", x_eu, y_eu, y_true)
print_results("Метод Рунге-Кутта (β=1/2)", x_rk, y_rk, y_true)
print_results("Метод Адамса", x_ad, y_ad, y_true)

print("\nАдамс - Рунге-Кутта:")
diff_ad_rk = np.array(y_ad) - np.array(y_rk)
print(diff_ad_rk)

print("\nЭйлер - Рунге-Кутта:")
diff_eu_rk = np.array(y_eu) - np.array(y_rk)
print(diff_eu_rk)
```

Результаты и их анализ

Точное решение в выбранных точках:

y_exact(0.35) = 0.25184503

y_exact(0.45) = 0.37423659

y_exact(0.55) = 0.52051189

y_exact(0.65) = 0.69147680

y_exact(0.75) = 0.88801140

y_exact(0.85) = 1.11112736

y_exact(0.95) = 1.36203254

y_exact(1.05) = 1.64220314

y_exact(1.15) = 1.95346369

y_exact(1.25) = 2.29807505

y_exact(1.35) = 2.67883081

Метод Эйлера

x	y(x)	y_exact(x)	Ошибка
0.35	0.25184503	0.25184503	0.00000000

0.45	0.36255505	0.37423659	-0.01168153
0.55	0.49416184	0.52051189	-0.02635005
0.65	0.64785232	0.69147680	-0.04362448
0.75	0.82473500	0.88801140	-0.06327640
0.85	1.02594075	1.11112736	-0.08518661
0.95	1.25270822	1.36203254	-0.10932431
1.05	1.50646602	1.64220314	-0.13573711
1.15	1.78891688	1.95346369	-0.16454681
1.25	2.10212657	2.29807505	-0.19594848
1.35	2.44861914	2.67883081	-0.23021167

Метод Рунге-Кутта (β=1/2)

x	y(x)	y_exact(x)	Ошибка
0.35	0.25184503	0.25184503	0.00000000
0.45	0.37347817	0.37423659	-0.00075842
0.55	0.51895127	0.52051189	-0.00156062
0.65	0.68907887	0.69147680	-0.00239792
0.75	0.88474349	0.88801140	-0.00326791
0.85	1.10695575	1.11112736	-0.00417162
0.95	1.35692021	1.36203254	-0.00511232
1.05	1.63610812	1.64220314	-0.00609501
1.15	1.94633764	1.95346369	-0.00712605
1.25	2.28986202	2.29807505	-0.00821302
1.35	2.66946619	2.67883081	-0.00936462

Метод Адамса

x	y(x)	y_exact(x)	Ошибка
0.35	0.25184503	0.25184503	0.00000000
0.45	0.37347817	0.37423659	-0.00075842
0.55	0.51917437	0.52051189	-0.00133752
0.65	0.68951461	0.69147680	-0.00196218
0.75	0.88533391	0.88801140	-0.00267749
0.85	1.10761618	1.11112736	-0.00351118
0.95	1.35753790	1.36203254	-0.00449464
1.05	1.63653848	1.64220314	-0.00566466

1.15	1.94640029	1.95346369	-0.00706340
1.25	2.28933679	2.29807505	-0.00873826
1.35	2.66808892	2.67883081	-0.01074189

Адамс - Рунге-Кутта:

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 2.23097016e-04 4.35743654e-04
 5.90420554e-04 6.60432505e-04 6.17686418e-04 4.30357674e-04
 6.26582460e-05 -5.25233836e-04 -1.37726664e-03]

Эйлер - Рунге-Кутта:

[0.   -0.01092311 -0.02478943 -0.04122655 -0.06000849 -0.081015
 -0.10421199 -0.1296421 -0.15742076 -0.18773545 -0.22084705]

Результаты численного решения показывают заметную разницу в точности между тремя методами: Эйлера, Рунге-Кутты (β = 1/2) и Адамса. Метод Эйлера, будучи простым и основанным на линейной аппроксимации, даёт наибольшую ошибку, которая нарастает по мере увеличения xxx, достигая -0.23 к x=1.35x = 1.35x=1.35. Это ожидаемо, так как метод Эйлера не учитывает искривление функции на интервале и склонен к накоплению погрешности.

Методы Рунге-Кутты и Адамса демонстрируют существенно лучшую точность, с максимальной ошибкой около -0.01. Разница между ними минимальна, однако Рунге-Кутта даёт немного более точные значения на всём отрезке. Интересно, что разность между Адамсом и Рунге-Куттой сначала немного увеличивается, достигая пика, а затем начинает снижаться, что может свидетельствовать о выравнивании ошибок. В целом, если требуется высокая точность — предпочтительны методы Рунге-Кутты и Адамса, тогда как метод Эйлера может использоваться лишь для грубых оценок или учебных целей.