МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра биомедицинской информатики

Лабораторная работа № 13

Выполнено Благодарным Артёмом, студентом 4 курса 3 группы,

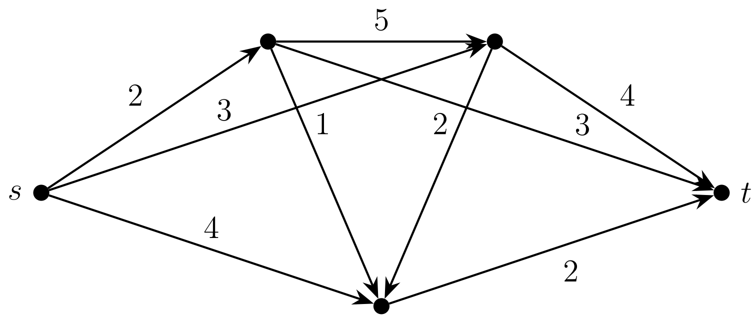
дисциплина «Исследование операций»

Преподаватель: Доцент Исаченко А.Н.

Минск, 2025 г.

Задача 1

Условие: В заданной сети найти максимальный поток из источника s в сток t и соответствующий минимальный разрез.



Решение:

Для поиска максимального потока воспользуемся методом дополняющих путей (алгоритм Форда-Фалкерсона).

1. **Путь** $s \to v_1 \to t$**:** Минимальная пропускная способность $\min(2, 3) = 2$. Пускаем поток $f_1 = 2$. Дуга (s, v_1) насыщена.

2. **Путь** $s \to v_2 \to t$**:** Минимальная пропускная способность $\min(3, 4) = 3$. Пускаем поток $f_2 = 3$. Дуга (s, v_2) насыщена.

3. **Путь** $s \to v_3 \to t$**:** Минимальная пропускная способность $\min(4, 2) = 2$. Пускаем поток $f_3 = 2$. Дуга (v_3, t) насыщена. Остаточная емкость $(s, v_3) = 4 - 2 = 2$.

Других путей из s в t в остаточной сети нет, так как все исходящие дуги из s, либо входящие в t, насыщены (кроме $s \to v_3$, но из v_3 единственный путь в сток перекрыт).

Величина максимального потока:

$$F_{max} = 2 + 3 + 2 = 7$$

Минимальный разрез: Минимальный разрез разделяет граф на два множества: S (вершины, достижимые из источника в остаточной сети) и T (остальные вершины). В нашем случае $S = \{s, v_3\}$, так как от s можно дойти до v_3 по недонасыщенной дуге. $T = \{v_1, v_2, t\}$.

Дуги, пересекающие разрез (S, T):

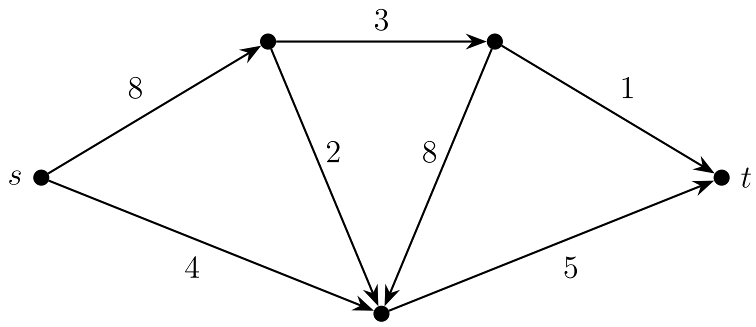
- (s, v_1) с пропускной способностью 2
- (s, v_2) с пропускной способностью 3
- (v_3, t) с пропускной способностью 2

Суммарная пропускная способность разреза: $C(S, T) = 2 + 3 + 2 = 7$. Согласно теореме Форда-Фалкерсона, величина макс. потока равна пропускной способности мин. разреза.

Ответ: Максимальный поток равен 7. Минимальный разрез проходит через ребра $(s, v_1), (s, v_2), (v_3, t)$.

Задача 2

Условие: Для заданной сети необходимо найти максимальный поток из источника s в сток t и определить соответствующий минимальный разрез.



Решение:

Для поиска максимального потока применим алгоритм Форда-Фалкерсона (поиск дополняющих путей):

1. **Путь** $s \to v_2 \to t$**:** Минимальная пропускная способность $\min(4,5) = 4$. Назначаем поток $f_1 = 4$. Дуга (s, v_2) полностью насыщена. Остаточная емкость $(v_2, t) = 5-4 = 1$.

2. **Путь** $s \to v_1 \to v_3 \to t$**:** Минимальная пропускная способность $\min(8,3,1) = 1$. Назначаем поток $f_2 = 1$. Дуга (v_3, t) полностью насыщена.

3. **Путь** $s \to v_1 \to v_2 \to t$**:** Минимальная пропускная способность $\min(7,2,1) = 1$ (так как на шаге 1 осталось 1 ед. емкости на (v_2, t)). Назначаем поток $f_3 = 1$. Дуга (v_2, t) полностью насыщена.

Все пути в сток t теперь перекрыты, так как обе входящие в него дуги ((v_2, t) и (v_3, t)) полностью насыщены ($5 + 1 = 6$).

Величина максимального потока:

$$F_{max} = 4 + 1 + 1 = 6$$

Минимальный разрез: В остаточной сети из источника s достижимы вершины $S = \{s, v_1, v_3, v_2\}$. Сток t недостижим. Разрез проходит между множествами вершин $S = \{s, v_1, v_2, v_3\}$ и $T = \{t\}$.

Дуги, пересекающие разрез из S в T:

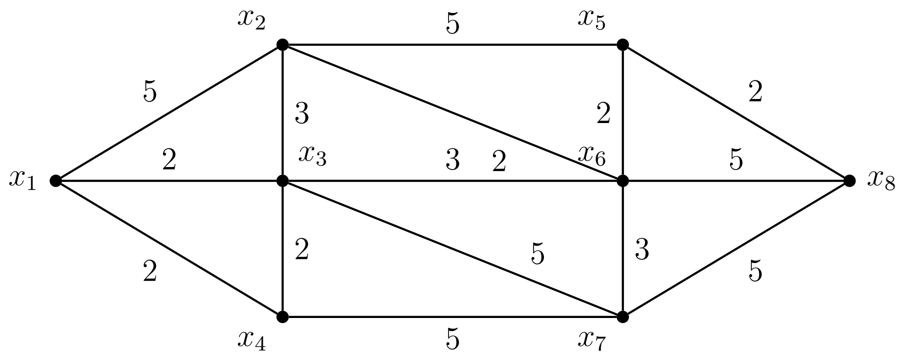
- (v_3, t) с пропускной способностью 1.
- (v_2, t) с пропускной способностью 5.

Суммарная пропускная способность разреза: $C(S, T) = 1 + 5 = 6$. Величина максимального потока совпадает с емкостью минимального разреза.

Ответ: Максимальный поток равен 6. Минимальный разрез состоит из ребер (v_3, t) и (v_2, t).

Задача 3

Условие: Найти максимальные потоки для всех пар вершин в заданной неориентированной сети.



Решение:

В неориентированной сети максимальный поток между любыми двумя вершинами равен минимальной пропускной способности разреза, разделяющего эти вершины.

1. **Анализ степеней вершин (локальные разрезы):** Суммарная пропускная способность инцидентных ребер для каждой вершины определяет верхнюю границу потока из этой вершины:

- $V(x_1) = 5 + 2 + 2 = 9$
- $V(x_2) = 5 + 3 + 5 + 2 = 15$
- $V(x_3) = 2 + 3 + 2 + 3 + 5 = 15$
- $V(x_4) = 2 + 2 + 5 = 9$
- $V(x_5) = 5 + 2 + 2 = 9$
- $V(x_6) = 2 + 3 + 2 + 3 + 5 = 15$
- $V(x_7) = 5 + 5 + 3 + 5 = 18$
- $V(x_8) = 2 + 5 + 5 = 12$

2. **Анализ главных разрезов:** Граф имеет «бутылочное горлышко» в центре. Разрез, отделяющий левую часть $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ от правой $\{x_5, x_6, x_7, x_8\}$, имеет емкость:

$$C_{mid} = c(x_2, x_5) + c(x_2, x_6) + c(x_3, x_6) + c(x_3, x_7) + c(x_4, x_7) = 5 + 2 + 3 + 5 + 5 = 20$$

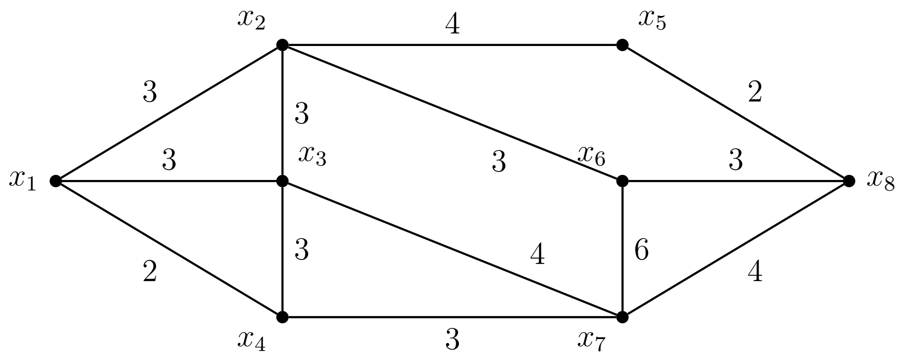
Так как $20 > V(x_i)$ для всех периферийных вершин, максимальные потоки между левой и правой сторонами будут ограничены именно локальными разрезами вокруг вершин x_1, x_4, x_5, x_8.

Итоговая матрица максимальных потоков F_{ij}:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	–	9	9	9	9	9	9	9
x_2	9	–	15	9	15	15	15	12
x_3	9	15	–	9	15	15	15	12
x_4	9	9	9	–	9	9	9	9
x_5	9	15	15	9	–	9	9	9
x_6	9	15	15	9	9	–	15	12
x_7	9	15	15	9	9	15	–	12
x_8	9	12	12	9	9	12	12	–

Задача 4

Условие: Найти максимальные потоки для всех пар вершин в заданной неориентированной сети.



Решение:

Для неориентированного графа величина максимального потока между вершинами i и j определяется минимальным разрезом.

1. **Анализ суммарных пропускных способностей вершин (степеней):**

- $V(x_1) = 3 + 3 + 2 = 8$
- $V(x_2) = 3 + 3 + 4 + 3 = 13$
- $V(x_3) = 3 + 3 + 3 + 4 = 13$
- $V(x_4) = 2 + 3 + 3 = 8$
- $V(x_5) = 4 + 2 = 6$
- $V(x_6) = 3 + 6 + 3 = 12$
- $V(x_7) = 4 + 3 + 6 + 4 = 17$
- $V(x_8) = 2 + 3 + 4 = 9$

2. **Анализ узких мест:** Разрез, отделяющий «левую» часть $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ от «правой» $\{x_6, x_7, x_8\}$, имеет емкость:

$$C = c(x_2, x_6) + c(x_3, x_7) + c(x_4, x_7) + c(x_5, x_8) = 3 + 4 + 3 + 2 = 12$$

Следовательно, любой поток между этими группами ограничен значением 12 (или меньшим значением локальных степеней вершин).

Матрица максимальных потоков для всех пар вершин:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	–	8	8	8	6	8	8	8
x_2	8	–	13	8	6	12	12	9
x_3	8	13	–	8	6	12	12	9
x_4	8	8	8	–	6	8	8	8
x_5	6	6	6	6	–	6	6	6
x_6	8	12	12	8	6	–	12	9
x_7	8	12	12	8	6	12	–	9
x_8	8	9	9	8	6	9	9	–

Ответ: Максимальные потоки в данной сети ограничены либо пропускной способностью инцидентных ребер периферийных вершин (x_1, x_4, x_5, x_8), либо центральным сечением емкостью 12.