МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра информационных систем управления

Лабораторная работа № 12

Выполнено Благодарным Артёмом, студентом 4 курса 3 группы,

дисциплина «Исследование операций»

Преподаватель: Доцент Исаченко А.Н.

Минск, 2025 г.

Задание 3

Условие: Определить кратчайшие расстояния между каждой парой вершин для графа со следующей матрицей расстояний:

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 15 & \infty & \infty \\ 20 & 0 & 7 & 1 & \infty \\ 8 & \infty & 0 & -10 & -3 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Алгоритм Флойда-Уоршелла

Алгоритм Флойда-Уоршелла позволяет найти кратчайшие пути между всеми парами вершин. На каждом шаге k (от 1 до $N = 5$) мы пытаемся улучшить пути, проходя через вершину k. Формула пересчета:

$$d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$$

Шаг 1: Проход через вершину 1

Используем 1-ю строку и 1-й столбец как опорные. Изменения:

- $d_{32} = \min(\infty, d_{31} + d_{12}) = \min(\infty, 8 + (-15)) = -7$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 15 & \infty & \infty \\ 20 & 0 & 7 & 1 & \infty \\ 8 & \mathbf{-7} & 0 & -10 & -3 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2: Проход через вершину 2

Используем 2-ю строку и 2-й столбец. Изменения:

- $d_{13} = \min(15, -15 + 7) = -8$
- $d_{14} = \min(\infty, -15 + 1) = -14$
- $d_{31} = \min(8, -7 + 20) = 8$ (без изменений)
- $d_{41} = \min(\infty, 2 + 20) = 22$
- $d_{43} = \min(\infty, 2 + 7) = 9$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & \mathbf{-8} & \mathbf{-14} & \infty \\ 20 & 0 & 7 & 1 & \infty \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -3 \\ \mathbf{22} & 2 & \mathbf{9} & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3: Проход через вершину 3

Используем 3-ю строку и 3-й столбец. Изменения:

- $d_{14} = \min(-14, -8 + (-10)) = -18$
- $d_{15} = \min(\infty, -8 + (-3)) = -11$
- $d_{21} = \min(20, 7 + 8) = 15$
- $d_{24} = \min(1, 7 + (-10)) = -3$
- $d_{25} = \min(\infty, 7 + (-3)) = 4$
- $d_{41} = \min(22, 9 + 8) = 17$
- $d_{44} = \min(0, 9 + (-10)) = -1$ **(Отрицательная диагональ!)**
- $d_{51} = \min(\infty, 14 + 8) = 22$
- $d_{52} = \min(\infty, 14 + (-7)) = 7$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -8 & \mathbf{-18} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{15} & 0 & 7 & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -3 \\ \mathbf{17} & 2 & 9 & \mathbf{-1} & 6 \\ \mathbf{22} & \mathbf{7} & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ

Так как в графе обнаружен контур отрицательной длины, кратчайшие расстояния между вершинами, входящими в этот контур или достижимыми из него, не определены (стремятся к $-\infty$).

Задача не имеет конечного решения.