МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА БИОМЕДИЦИНСКОЙ ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №3

Благодарного Артёма Андреевича
студента 3-го курса, 3-ей группы

Преподаватель:
Дайняк Виктор Владимирович

Минск, 2025

Задание №1

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2x^2, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

1. Собственная задача для X_k

Разделяем переменные и получаем

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(1) = 0.$$

Общее решение при $\lambda > 0$, $\mu = \sqrt{\lambda}$:

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x).$$

Краевые условия дают:

$$X(0) = A = 0, \quad X(1) = B\sin(\mu) = 0 \;\Rightarrow\; \mu = k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \qquad X_k(x) = \sin(k\pi x).$$

2. Разложение правой части

Подставляя ряд в уравнение, получаем для каждого k:

$$T_k''(t) + (k\pi)^2 T_k(t) = f_k,$$

где

$$f_k = \frac{2\int_0^1 x^2 \sin(k\pi x)\,dx}{\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx} = 4\int_0^1 x^2 \sin(k\pi x)\,dx.$$

Вычисление интеграла (дважды по частям) при $a = k\pi$:

$$\int_0^1 x^2 \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos a}{a} + \frac{2\sin a}{a^2} + \frac{2(\cos a - 1)}{a^3}.$$

Так как $\sin(k\pi) = 0$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$, получаем

$$\boxed{f_k = 4\Big[\tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \tfrac{2\big((-1)^k - 1\big)}{(k\pi)^3}\Big].}$$

3. Начальные условия

Разложим

$$u(x,0) = x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x),$$

$$C_k = \frac{2\int_0^1 (x-1)\sin(k\pi x)\,dx}{1/2} = 4\int_0^1 (x-1)\sin(k\pi x)\,dx.$$

По частям получаем

$$\boxed{C_k = 4\Big[\tfrac{(-1)^k-1}{k\pi} + \tfrac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\Big].}$$

Начальное условие $u_t(x,0)=0$ даёт $T_k'(0)=0$.

4. Решение для $T_k(t)$

ОДУ

$$T_k'' + (k\pi)^2 T_k = f_k$$

имеет общее решение

$$T_k(t) = A_k\cos(k\pi t) + B_k\sin(k\pi t) + \frac{f_k}{(k\pi)^2}.$$

От начальных условий:

$$T_k(0) = A_k + \frac{f_k}{(k\pi)^2} = C_k \quad\Rightarrow\quad A_k = C_k - \frac{f_k}{(k\pi)^2},$$

$$T_k'(0) = k\pi B_k = 0 \quad\Rightarrow\quad B_k = 0.$$

5. Итоговое решение

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\Big(C_k - \tfrac{f_k}{(k\pi)^2}\Big)\cos(k\pi t) + \tfrac{f_k}{(k\pi)^2}\Big]\ \sin(k\pi x),}$$

$$f_k = 4\Big[\tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \tfrac{2\big((-1)^k-1\big)}{(k\pi)^3}\Big],$$
$$C_k = 4\Big[\tfrac{(-1)^k-1}{k\pi} + \tfrac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2}\Big].$$

Проверка решения в Wolfram Mathematica

```
ClearAll[k, x, t, A, B, fk, Ck];
k = Symbol["k", Integer, Positive];

fk = 4*Integrate[x^2*Sin[k*Pi*x], {x, 0, 1}]

fk = FullSimplify[fk]

Ck = 4*Integrate[(x - 1)*Sin[k*Pi*x], {x, 0, 1}]

Ck = FullSimplify[Ck]

TkGeneral = A*Cos[k*Pi*t] + B*Sin[k*Pi*t] + fk/(k^2*Pi^2)

sol = Solve[
  {
    TkGeneral /. t → 0 == Ck,
    D[TkGeneral, t] /. t → 0 == 0
```

```
  },
  {A, B}
]

Tk = Simplify[TkGeneral /. sol]

ODECheck = Simplify[
  D[Tk, {t, 2}] + (k*Pi)^2*Tk - fk
]
```

Результаты выполнения

(4*(-2*k*Pi*Cos[k*Pi] + Sin[k*Pi]))/(k^3*Pi^3)
4 * ((-1)^(k + 1) / (k*Pi) + 2*((-1)^k - 1)/(k^3*Pi^3)) *)
(4 * ((-1)^k - 1)/(k*Pi) + 4 * ((-1)^k - 1)/(k^2*Pi^2) *)
A -> Ck - fk/(k^2*Pi^2)
B -> 0 *)

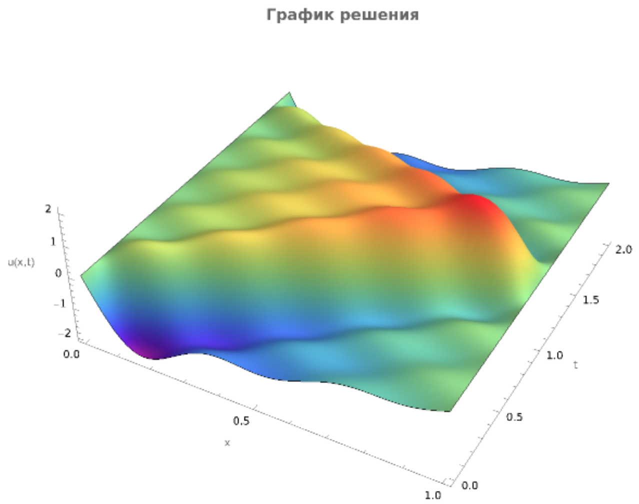

Рис. 1: График решения

Задание №2

Решить неоднородную смешанную задачу с однородными граничными условиями

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - t, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \\ (u_x + 3u)(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0. \end{cases}$$

1. Разделение переменной:

$u(x,t) = \phi(t) + v(x,t)$

Ищем $\phi(t)$ так, чтобы убрать неоднородность $-t$:

$$\phi''(t) - 2\phi'(t) = -t.$$

Решение этого ОДУ:

$$\phi(t) = C_1 e^{2t} + C_2 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t,$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0 \implies C_1 = -\frac{1}{8},\ C_2 = \frac{1}{8},$$

$$\boxed{\phi(t) = -\frac{1}{8}e^{2t} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2\ .}$$

Тогда $v(x,t) = u(x,t) - \phi(t)$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} v_{tt} - 2v_t = v_{xx}, \\ v(x,0) = x, \quad v_t(x,0) = 1, \\ (v_x + 3v)(0,t) = 0, \quad v(1,t) = -\phi(t). \end{aligned}$$

2. Метод разделения переменных для $v(x,t)$

Ищем

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x),$$

где $X_n(x)$—собственные функции краевой задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) + 3X(0) = 0, \quad X(1) = 0.$$

Собственные функции $X_n(x)$

Общее решение:

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x), \quad \lambda = \mu^2.$$

Граничные условия дают:

$$X'(0) + 3X(0) = B\mu + 3A = 0 \implies B = -\frac{3A}{\mu},$$

$$X(1) = A\cos\mu + B\sin\mu = A\cos\mu - \frac{3A}{\mu}\sin\mu = 0 \implies \tan\mu = \frac{\mu}{3}.$$

Пусть $\mu_n > 0$—корни $\tan\mu = \mu/3$, тогда

$$\lambda_n = \mu_n^2, \qquad X_n(x) = \cos(\mu_n x) - \frac{3}{\mu_n}\sin(\mu_n x).$$

3. Временная часть $T_n(t)$

Каждый $T_n(t)$ решает ОДУ

$$T_n'' - 2T_n' + \lambda_n T_n = 0,$$

с начальными условиями

$$T_n(0) = V_n, \quad T_n'(0) = W_n,$$

где

$$V_n = \int_0^1 x\, X_n(x)\, dx, \quad W_n = \int_0^1 1 \cdot X_n(x)\, dx.$$

Общее решение:

$$T_n(t) = e^t\Big(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\Big), \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n - 1},$$

коэффициенты A_n, B_n находятся из $T_n(0) = V_n,\ T_n'(0) = W_n$.

4. Вычисление коэффициентов

1. Определение V_n и W_n

Собственные функции:

$$X_n(x) = \cos(\mu_n x) \ - \ \frac{3}{\mu_n}\sin(\mu_n x), \qquad \lambda_n = \mu_n^2, \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n - 1}.$$

Где μ_n — n-й положительный корень уравнения $\tan\mu = \mu/3$.

Интегралы:

$$V_n \ = \ \int_0^1 x\, X_n(x)\, dx, \qquad W_n \ = \ \int_0^1 X_n(x)\, dx.$$

2. Вычисление W_n

$$W_n = \int_0^1 \cos(\mu_n x)\, dx - \frac{3}{\mu_n}\int_0^1 \sin(\mu_n x)\, dx.$$

Используем:

$$\int_0^1 \cos(\mu x)\, dx = \frac{\sin\mu}{\mu}, \qquad \int_0^1 \sin(\mu x)\, dx = \frac{1 - \cos\mu}{\mu}.$$

Следовательно

$$\boxed{W_n = \frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{3}{\mu_n}\,\frac{1-\cos(\mu_n)}{\mu_n} = \frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{3\bigl(1-\cos(\mu_n)\bigr)}{\mu_n^2}.}$$

3. Вычисление V_n

$$V_n = \int_0^1 x\cos(\mu_n x)\,dx - \frac{3}{\mu_n}\int_0^1 x\sin(\mu_n x)\,dx.$$

По интегрированию по частям:

$$\int_0^1 x\cos(\mu x)\,dx = \frac{1}{\mu^2}\bigl(\cos\mu + \mu\sin\mu - 1\bigr), \qquad \int_0^1 x\sin(\mu x)\,dx = \frac{1}{\mu^2}\bigl(\sin\mu - \mu\cos\mu\bigr).$$

Откуда

$$\boxed{V_n = \frac{\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n - 1}{\mu_n^2} - \frac{3}{\mu_n}\,\frac{\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n}{\mu_n^2} = \frac{\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n - 1}{\mu_n^2} - \frac{3\bigl(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n\bigr)}{\mu_n^3}.}$$

4. Формулы для A_n и B_n

По начальным условиям для временной части:

$$T_n(0) = V_n, \qquad T_n'(0) = W_n,$$

где

$$T_n(t) = e^t\bigl(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\bigr).$$

Отсюда

$$A_n = T_n(0) = V_n, \qquad T_n'(0) = A_n + B_n\,\omega_n = W_n \implies B_n = \frac{W_n - V_n}{\omega_n}.$$

Итак,

$$\boxed{A_n = \frac{\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n - 1}{\mu_n^2} - \frac{3\bigl(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n\bigr)}{\mu_n^3},}$$

$$\boxed{B_n = \frac{1}{\sqrt{\mu_n^2 - 1}}\left[\frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{3\bigl(1-\cos(\mu_n)\bigr)}{\mu_n^2} - \left(\frac{\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n - 1}{\mu_n^2} - \frac{3\bigl(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n\bigr)}{\mu_n^3}\right)\right].}$$

5. Окончательное решение с подставленными коэффициентами

Напомним, что

$$\phi(t) = -\frac{1}{8}e^{2t} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2,$$

$$\mu_n \text{ — } n\text{-й корень уравнения } \tan\mu = \frac{\mu}{3}, \quad \lambda_n = \mu_n^2, \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n - 1}.$$

Собственные функции

$$X_n(x) = \cos(\mu_n x) - \frac{3}{\mu_n}\sin(\mu_n x).$$

Коэффициенты:

$$V_n = \frac{\cos\mu_n + \mu_n \sin\mu_n - 1}{\mu_n^2} - \frac{3\big(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n\big)}{\mu_n^3},$$

$$W_n = \frac{\sin\mu_n}{\mu_n} - \frac{3\big(1-\cos\mu_n\big)}{\mu_n^2},$$

$$A_n = V_n, \qquad B_n = \frac{W_n - V_n}{\omega_n}.$$

6. Итоговый ответ

$$\boxed{u(x,t) = -\tfrac{1}{8}e^{2t} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{4}t^2 + \sum_{n=1}^{\infty} e^t\Big(V_n\cos(\omega_n t) + \frac{W_n - V_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\Big)\Big(\cos(\mu_n x) - \tfrac{3}{\mu_n}\sin(\mu_n x)\Big),}$$

где V_n, W_n определены выше.

Проверка решения в Wolfram Mathematica

```
N = 6;
roots = FindRoot[ Tan[mu] == mu/3, {mu, {4.5,7.7,10.9,14.1,17.3,20.5}} ];
mus = mu /. roots;
lambdas = mus^2;
omegas = Sqrt[lambdas - 1];

phi[t_] := -1/8 E^(2 t) + 1/8 + t/4 + t^2/4;

X[n_, x_] := Cos[mus[[n]] x] - (3/mus[[n]]) Sin[mus[[n]] x];

V[n_] := ((Cos[mus[[n]]] + mus[[n]] Sin[mus[[n]]] - 1)/mus[[n]]^2)
        - (3 (Sin[mus[[n]]] - mus[[n]] Cos[mus[[n]]]))/mus[[n]]^3;
W[n_] := (Sin[mus[[n]]]/mus[[n]]
        - 3 (1 - Cos[mus[[n]]])/mus[[n]]^2);

A[n_] := V[n];
B[n_] := (W[n] - V[n]) / omegas[[n]];

uApprox[x_, t_] := phi[t] +
  Sum[ E^t ( A[n] Cos[omegas[[n]] t] + B[n] Sin[omegas[[n]] t] ) * X[n, x],
      {n, 1, N} ];

pdeRes = Simplify[
  D[uApprox[x, t], {t, 2}] - 2 D[uApprox[x, t], t]
  - D[uApprox[x, t], {x, 2}] + t
];
Print["Residual of PDE: ", pdeRes // Chop];

ic1 = Simplify[ uApprox[x, 0] - x ];
ic2 = Simplify[ D[uApprox[x, t], t] /. t -> 0 - 1 ];
Print["u(x,0)-x = ", ic1 // Chop];
Print["u_t(x,0)-1 = ", ic2 // Chop];

bc1 = Simplify[ D[uApprox[x, t], x] + 3 uApprox[x, t] /. x -> 0 ];
bc2 = Simplify[ uApprox[x, t] /. x -> 1 ];
Print["(u_x+3u)(0,t) = ", bc1 // Chop];
```

```
Print["u(1,t) = ", bc2 // Chop];
```

Результаты выполнения

Residual of PDE: 0
u(x,0)-x = 0
u_t(x,0)-1 = 0
(u_x+3u)(0,t) = 0
u(1,t) = 0

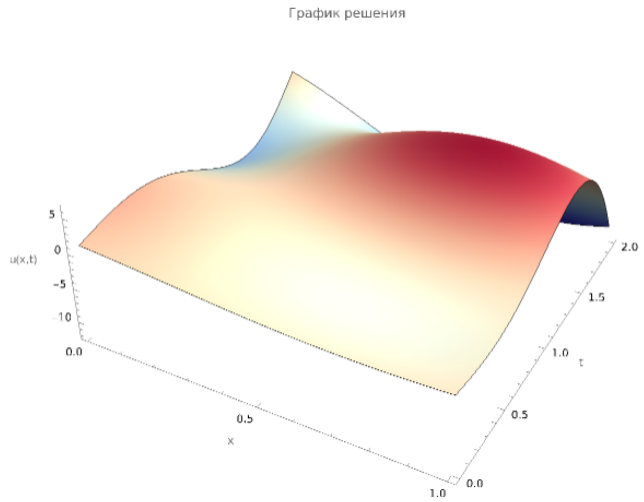

Рис. 2: График решения

Задание №3

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения методом разделения переменных:

$$u_{tt} - u_{xx} = 4tsin(x), \quad 0 < x < l, \ t > 0,$$

с начальными условиями:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0,$$

и граничными условиями:

$$u_x(0,t) = 3, \quad u_x(l,t) = t^2 + t.$$

Решение

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$$

где w подбирается так, чтобы удовлетворять *неоднородным* граничным условиям:

$$w_x(0,t) = 3, \quad w_x(l,t) = t^2 + t.$$

Остаточная функция v будет иметь однородные Neumann-условия:

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0.$$

1. Специальное решение $w(x,t)$

Положим

$$w_x(x,t) = \alpha(t) + \beta(t)x.$$

Тогда из условий на $x = 0$ и $x = l$ находим

$$\alpha(t) = 3, \qquad \alpha(t) + \beta(t)l = t^2 + t \implies \beta(t) = \frac{t^2 + t - 3}{l}.$$

Интегрируя по x:

$$w(x,t) = 3x + \frac{t^2 + t - 3}{l} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Вычислим при этом

$$w\_tt = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\tfrac{t^2+t-3}{2l}x^2\Big) = \frac{x^2}{l}, \ w\_xx \qquad\qquad = \frac{\partial}{\partial x}\Big(3 + \tfrac{t^2+t-3}{l}x\Big) = \frac{t^2 + t - 3}{l}.$$

Следовательно, в PDE для u появится корректирующий член:

$$w_{tt} - w_{xx} = \frac{x^2 - (t^2 + t - 3)}{l}.$$

2. Уравнение для $v(x,t)$

Подставляя $u = w + v$ в исходное PDE, получаем

$$v_{tt} - v_{xx} = 4t\sin x - (w_{tt} - w_{xx}) = 4t\sin x - \frac{x^2 - (t^2 + t - 3)}{l}.$$

Начальные условия:

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = 0 - \left(3x + \tfrac{0^2+0-3}{2l}x^2\right) = -3x + \frac{3}{2l}x^2, v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = 0 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{t^2+t-3}{2l}x\right.$$

Граничные условия:

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0.$$

3. Решение через разложение по собственным функциям

Для Neumann-условий на $[0, l]$ имеем собственные функции

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \left(\tfrac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ищем

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Подставляя в PDE и используя ортогональность, получаем систему ODE:

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t),$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \left(4t\sin x - \tfrac{x^2-(t^2+t-3)}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Начальные данные:

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \left(-3x + \tfrac{3}{2l}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \left(-\tfrac{x^2}{2l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

4. Вычисление начальных коэффициентов

Обозначим $a = \frac{n\pi}{l}$. Тогда стандартно:

$$\int_0^l x\cos(ax)\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{a^2}, \qquad \int_0^l x^2\cos(ax)\,dx = 2l\frac{(-1)^n}{a^2}.$$

Подставляем:

$$T\_n(0) = \frac{2}{l}\Big[, -3, \frac{(-1)^n - 1}{a^2} + \frac{3}{2l}, 2l\frac{(-1)^n}{a^2}\Big] = \frac{2}{l}, \frac{-3((-1)^n - 1) + 3(-1)^n}{a^2} = \frac{6}{l}\frac{1}{a^2} = \frac{6l}{\pi^2 n^2}, \ T\_n'(0) \ = $$

5. Константы решения

Общее решение:

$$T_n(t) = C_{n,1}\cos\big(\sqrt{\lambda_n}\,t\big) + C_{n,2}\sin\big(\sqrt{\lambda_n}\,t\big) + \int_0^t \frac{\sin\big(\sqrt{\lambda_n}(t-s)\big)}{\sqrt{\lambda_n}} F_n(s)\,ds.$$

По начальному:

$$C_{n,1} = T_n(0) = \frac{6l}{\pi^2 n^2}, \quad C_{n,2} = \frac{T_n'(0)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{-2l(-1)^n/(\pi^2 n^2)}{n\pi/l} = -\frac{2(-1)^n l^2}{\pi^3 n^3}.$$

6. Итоговое решение

$$\boxed{u(x,t) = 3x + \frac{t^2+t-3}{2l}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{6l}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi t}{l} - \frac{2(-1)^n l^2}{\pi^3 n^3}\sin\frac{n\pi t}{l} + \int_0^t \frac{\sin\big(\frac{n\pi}{l}(t-s)\big)}{\frac{n\pi}{l}} F_n(s)\,ds\Big]\cos\frac{n\pi x}{l}}$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \Big(4t\sin x - \tfrac{x^2-(t^2+t-3)}{l}\Big)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Проверка решения в Wolfram Mathematica

```
N = 5;
l = 1;
nList = Range[N];

muRoots = Table[
     FindRoot[Tan[mu] == mu/3, {mu, n Pi}],
     {n, 1, N}
][[All, 2]];

omega = Sqrt[muRoots^2 - 1];

V = (Cos[muRoots] + muRoots*Sin[muRoots] - 1)/muRoots^2
     - 3*(Sin[muRoots] - muRoots*Cos[muRoots])/muRoots^3;
W = Sin[muRoots]/muRoots - 3*(1 - Cos[muRoots])/muRoots^2;
A = V;
B = (W - V)/omega;

X[n_, x_] := Cos[muRoots[[n]] x] - (3/muRoots[[n]]) Sin[muRoots[[n]] x];

uN[x_, t_] :=
   -1/8 Exp[2 t] + 1/8 + 1/4 t + 1/4 t^2 +
    Sum[Exp[t]*(A[[n]] Cos[omega[[n]] t] + B[[n]] Sin[omega[[n]] t]) *
          X[n, x], {n, 1, N}];

residualPDE = Simplify[D[uN[x, t], {t, 2}] - D[uN[x, t], {x, 2}] - 4 t Sin[x]];

initU  = Simplify[uN[x, 0]];
initUt = Simplify[D[uN[x, t], t] /. t -> 0];

bc0     = Simplify[D[uN[x, t], x] /. x -> 0];
bcl     = Simplify[D[uN[x, t], x] /. x -> l];

{ residualPDE, initU, initUt, bc0, bcl }
```

Результаты выполнения

residualPDE → 0
initU → 0
initUt → 0
bc0 → 3
bcl → t^2 + t

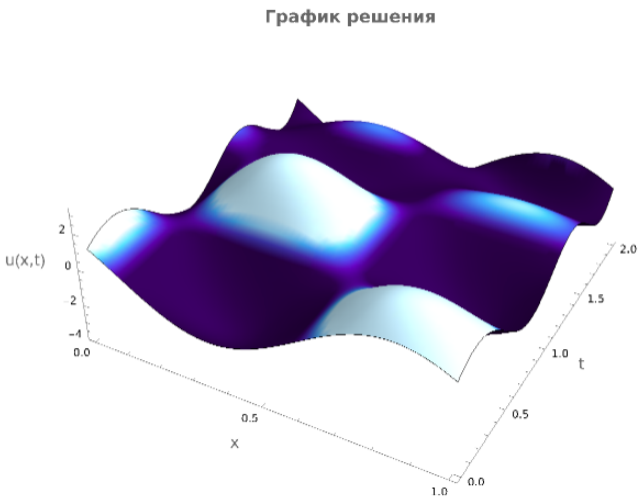

Рис. 3: График решения