ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА"
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

КУРСОВАЯ РАБОТА

"Исследование ценовых рядов на основании Математической Статистики и Теории Вероятностей"

Автор - Нарембеков Темирлан, студент 3-го курса кафедры Общих Проблем Управления, 312 группа

Научный руководитель - Заплетин Максим Петрович, доцент кафедры Общих Проблем Управления

Весна 2024

1 СБОР И ПОДГОТОВКА ДАННЫХ

1.1 Сбор данных

Выберем временной период для анализа: май 2009г - апрель 2024г. со 180 ежемесячными показателями USD/KZT. Таким образом, интервал времени $\Delta = 1$ месяц является регулярным.

USD/KZT 446,435 +0,135 (+0,03%)

Дата	Цена	Откр.	Макс.	Мин.	Объём	Изм. %
01.04.2024	446,435	447,405	448,555	445,950		+0.12%
01.03.2024	445,920	451,105	455,310	445,680		-1.03%
01.02.2024	450,580	449,755	455,590	445,860		+0.30%
01.01.2024	449,230	456,810	458,905	444,290		-0.92%
01.12.2023	453,400	459,360	462,510	452,150		-0.81%
01.11.2023	457,100	468,860	471,200	455,910		-2.39%
01.10.2023	468,290	477,910	481,060	467,990		-1.91%
01.09.2023	477,390	458,360	486,210	454,595		+4.27%
01.08.2023	457,840	444,600	467,110	441,975		+3.10%
01.07.2023	444,080	449,100	450,305	439,175		-1.39%
01.06.2023	450,330	447,755	455,265	443,600		+0.94%
01.05.2023	446,130	452,155	453,560	440,740		-1.21%

01.03.2010	147,040	147,350	147,460	146,850	-0.19%
01.02.2010	147,325	148,025	148,235	147,115	-0.48%
01.01.2010	148,030	148,490	148,850	147,850	-0.33%
01.12.2009	148,520	148,750	150,000	148,280	-0.11%
01.11.2009	148,685	150,695	150,935	148,635	-1.38%
01.10.2009	150,770	151,010	151,050	150,060	-0.11%
01.09.2009	150,940	150,820	150,990	150,670	+0.07%
01.08.2009	150,830	150,690	150,930	150,650	+0.05%
01.07.2009	150,755	150,395	150,945	150,245	+0.22%
01.06.2009	150,430	150,490	150,590	149,340	-0.06%
01.05.2009	150,515	150,665	150,955	149,775	-0.14%

Максимум: 527,125 Минимум: 145,135 Разница: 381,990 Среднее: 294,247 Изм. %: 196,202

1.2 Подготовка Данных

Мы имеем наблюдения ежемесячной стоимости валюты за последние 15 лет, но сами по себе эти данные интересуют нас лишь косвенно по следующей причине.

В середине 20 века появились работы, в которых было доказано, что в поведении цен акций и товаров нет ни ритмов, ни трендов, ни циклов, а суммы логарифмов цен - являются случайным блужданием, которые описывают всю эволюцию цен.

Поэтому при исследовании ценовых рядов используются логарифмы цен $H_{tk} = \ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)$.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ДОХОДНОСТИ ТЕНГЕ НА СЛУЧАЙНОСТЬ

Проверим логарифмическую доходность тенге разными статистическими методами $H_{t_k} = \ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)$ с общим числом наблюдений равным 179.

2.1 Ранговый критерий Вальда-Вольфовица

Проверка статистических гипотез заключается в том, чтобы решить какой из исходов влечет наибольшие риски, а затем ставят задачу отклонить этот исход.

Данный критерий использует понятие Ранга R_k наблюдения $\ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)$, которое является номером наблюдения в соответсвующем вариационном ряду, для вычисления статистики $R^{\star} = \frac{R}{\sqrt{D[R]}}$ и улучшении ее до статистики $R^{\star\star} = R^{\star} + 1.1216 \cdot n^{-0.523}$

1)Построим по известному ряду логарифмических доходностей вариационный ряд.

2) Введем гипотезу H_0 и альтернативу H_1:

H_0 : Тренд отсутствует - т.е.случайность ряда,

H_1 : Тренд присутствует - неслучайность ряда.

3) В нашем случае ошибка I рода - это наиболее критическая.

Значит, ошибка I рода - наиболее критическая

Таким образом наша (статистическая) задача сделать ошибку I рода α как можно меньше, однако это увеличит ошибку II рода β(что не несет рисков кроме возможной потери прибыли).

4)Выберем уровень значимости α (Ошибка I рода). Для объема выборки $100 < n < 1000$ рекомендуется $\alpha = 0.01$.

Критерий двусторонний, гипотеза об отсутствии тренда принимается, если $R^{\star\star} \in [-2.57, 2.57]$, где 2.57 - критическое значение нормального распределения, соответствующее $\alpha = 0{,}01$.

5)Построим статистику R $= \sum_{i=1}^{n-1} \left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1} - \frac{n+1}{2}\right)$ для$n = 179$: R $= 68436$

6)Вычислим D[R] $= \dfrac{n^2 \cdot (n+1) \cdot (n-3) \cdot (5n+6)}{720}$.

7)$R^{\star} = \dfrac{R}{\sqrt{D[R]}} = 1.9201840279563078$

8) улучшим $R^{\star}$ до $R^{\star\star}$: $R^{\star\star} = 1.9945879562302098$

Таким образом принимаем гипотезу H_0 об отсутствии тренда и получаем, что ряд логарифмических доходностей - случаен.

3 ПРОВЕРКА НА НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

3.1 Коэффициент Эксцесса(вытянутости)

коэффициент эксцесса

$$K_N = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^4\right)}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2\right)^2} - 3,$$

где r_i - это логарифмическая доходность в момент времени i, где $\overline{r}$ - средняя логарифмическая доходность, а n - количество наблюдений.

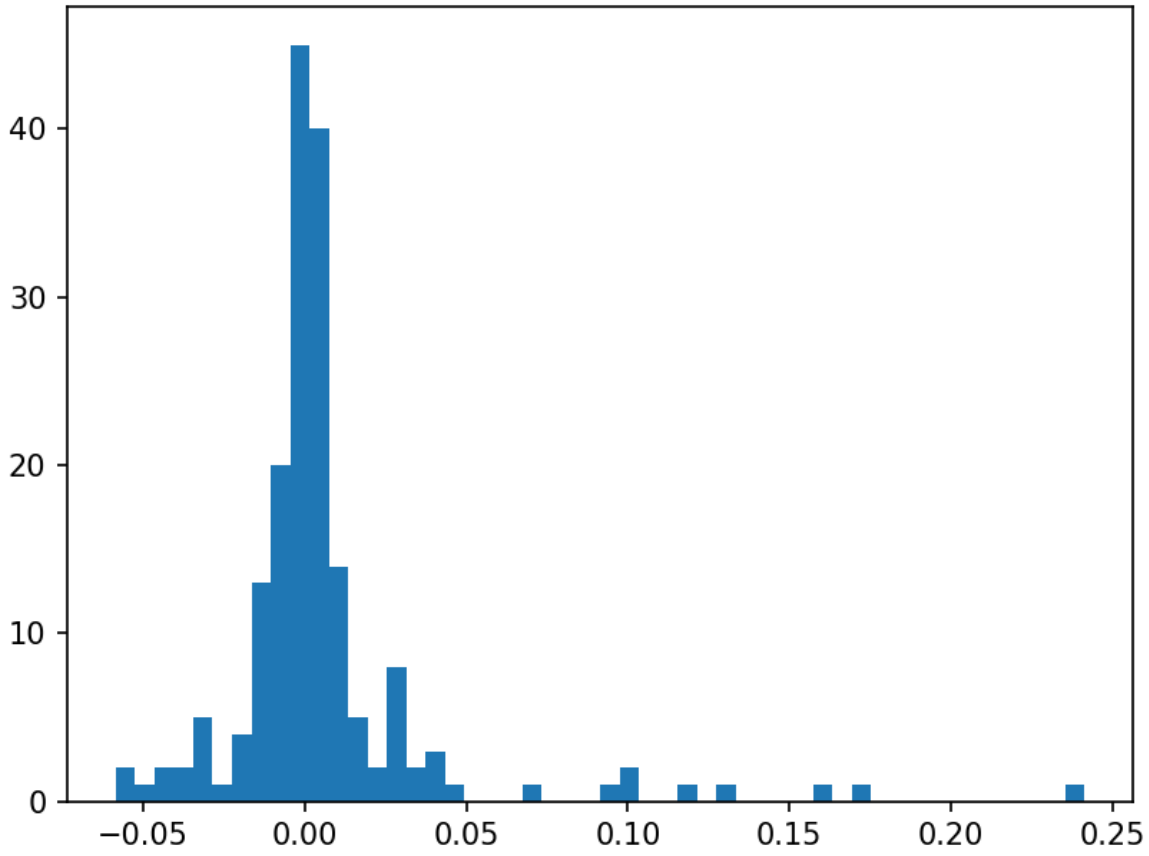
Для нормального распределения E = 0.

1) Для ряда логарифмических доходностей $H_{tk} = \ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)$. найдем величину $\overline{r}$ как среднеарифметическое логарифмов цен:
$\overline{r} = 0.00607391656991618$
2) Подставляем $\overline{r}$ в формулу:

$K_{179} = 16.38912221565546.$

3.2 Гистограмма

Рассмотрим гистограмму: Наблюдаются выбросы справа - это сигна-



лизирует о существенном отклонении от нормальности. Если от них избавится, то на практике можно считать что распределение условно нормально, так как гистограмма имеет колоколообразную форму и небольшую ассиметрию. Однако нашем случае распределение нормальным не будет, убедимся в этом:

Тест Шапиро-Уилка

H_0 : Распределение нормальное,
H_1 : Распределение не нормальное..

```
50    df = pd.DataFrame(logarithmic_returns_array, columns=['LogReturns'])
51    res = stats.shapiro(df)
52    print('p-value: ', res[1])
```

PROBLEMS 10 OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL PORTS

```
p-value:  4.006752775774608e-19
```

p-значение намного меньше, значит гипотеза отклоняется.

4 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ДОХОДНОСТЕЙ H_K

Было выяснено, что ряд логарифмических доходностей является случайным(с распределением отличным от нормального)

Это означает, что H $= (H_{t_k})$ - выборка случайных величин. Для дальнейшего анализа, проверим являются ли H_{t_k} независимыми одинаково распределенными случайными величинами(H.O.P.)

4.1 НЕЗАВИСИМОСТЬ

Проведем тест Льюнга-Бокса на наличие автокорреляции в остатках после внедрения модели линейной регрессии в структуру ряда.

Тест Бройша-Годфри

I.Модель регрессии

1)Модель линейной регрессии

Введем модель линейной регрессии с известной числовой матрицей X, строками которой являются предшествующие 13 значений i-го элемента, в качестве предиктора(независимой переменной) и лог.доходностью Y в качестве зависимой переменной.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{13} X_{13i} + \epsilon_i$$

$$Y = X * \beta + \epsilon$$

Преждем чем использовать эту модель, выясним является ли она статистически значимой, т.е. описывает ли Y. Для этого найдем коэффициенты и исследуем их значимость.

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Y	R-squared:	0.097
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.013
Method:	Least Squares	F-statistic:	1.156
Date:	Wed, 30 Oct 2024	Prob (F-statistic):	0.315
Time:	19:33:42	Log-Likelihood:	322.50
No. Observations:	165	AIC:	-615.0
Df Residuals:	150	BIC:	-568.4
Df Model:	14		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
const	0.0062	0.003	1.913	0.058	-0.000	0.013
LogReturns	0.1797	0.081	2.206	0.029	0.019	0.341
X1	-0.0191	0.083	-0.231	0.817	-0.183	0.144
X2	0.0191	0.083	0.231	0.817	-0.144	0.182
X3	0.2029	0.083	2.451	0.015	0.039	0.366
X4	-0.0608	0.084	-0.721	0.472	-0.228	0.106
X5	-0.0677	0.084	-0.803	0.423	-0.234	0.099
X6	-0.0317	0.084	-0.377	0.707	-0.198	0.135
X7	-0.1225	0.085	-1.449	0.149	-0.290	0.045
X8	0.0612	0.085	0.720	0.473	-0.107	0.229
X9	0.0527	0.085	0.620	0.536	-0.115	0.221
X10	0.0224	0.083	0.269	0.788	-0.142	0.187
X11	-0.0418	0.084	-0.500	0.618	-0.207	0.123
X12	-0.0486	0.084	-0.581	0.562	-0.214	0.117
X13	-0.0656	0.083	-0.795	0.428	-0.229	0.097

Omnibus:	150.501	Durbin-Watson:	2.001
Prob(Omnibus):	0.000	Jarque-Bera (JB):	2427.390
Skew:	3.341	Prob(JB):	0.00
Kurtosis:	20.562	Cond. No.	40.1

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

Обратим внимание на p-значение F-теста:

H_0 : Модель с одной только константой объясняет данные так же как и текущая модель, т.е. модель статитически незначима,

H_1 : Текущая модель значительно лучше модели с одной константой, т.е. модель статистически значима.

Для F-статистики p-значение $= 0{,}315 > 0.01$ и, следовательно, гипотеза H_0 принимается и модель требуется доработать.

Для этого оставим в модели только те коэффициенты, p-значения которых достаточно малы($p < 0.01$) - именно они являются статистически значимыми. Согласно результатам, таких коэффициентов нет, значит заключаем, что модель линейной регрессии не подходит для анализа ряда.

2)Модель регрессии Фурье

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{13} X_{13i} + \epsilon_i + \sum_{k=1}^{6} \left(\gamma_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{n}\right) + \delta_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{n}\right) \right)$$

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Y	R-squared:	0.278
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.148
Method:	Least Squares	F-statistic:	2.139
Date:	Tue, 03 Dec 2024	Prob (F-statistic):	0.00297
Time:	21:22:30	Log-Likelihood:	340.89
No. Observations:	165	AIC:	-629.8
Df Residuals:	139	BIC:	-549.0
Df Model:	25		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
const	0.0201	0.004	5.135	0.000	0.012	0.028
X1	-0.1946	0.083	-2.356	0.020	-0.358	-0.031
X2	-0.1599	0.082	-1.949	0.053	-0.322	0.002
X3	0.0214	0.083	0.258	0.797	-0.143	0.186
X4	-0.2096	0.084	-2.507	0.013	-0.375	-0.044
X5	-0.2236	0.083	-2.679	0.008	-0.389	-0.059
X6	-0.1784	0.083	-2.158	0.033	-0.342	-0.015
X7	-0.2702	0.084	-3.227	0.002	-0.436	-0.105
X8	-0.0968	0.084	-1.159	0.248	-0.262	0.068
X9	-0.0788	0.084	-0.936	0.351	-0.245	0.088
X10	-0.1112	0.085	-1.315	0.191	-0.278	0.056

```
X11          -0.1532      0.084     -1.826      0.070      -0.319       0.013
X12          -0.1461      0.083     -1.761      0.080      -0.310       0.018
X13          -0.1765      0.084     -2.104      0.037      -0.342      -0.011
sin_1         0.0104      0.004      2.681      0.008       0.003       0.018
cos_1        -0.0213      0.005     -4.321      0.000      -0.031      -0.012
sin_2        -0.0172      0.005     -3.789      0.000      -0.026      -0.008
cos_2        -0.0050      0.004     -1.350      0.179      -0.012       0.002
sin_3         0.0111      0.004      2.603      0.010       0.003       0.019
cos_3         0.0098      0.004      2.553      0.012       0.002       0.017
sin_4        -0.0057      0.004     -1.360      0.176      -0.014       0.003
cos_4        -0.0150      0.004     -3.620      0.000      -0.023      -0.007
sin_5         0.0031      0.004      0.762      0.447      -0.005       0.011
cos_5         0.0117      0.004      2.903      0.004       0.004       0.020
sin_6         0.0046      0.004      1.166      0.246      -0.003       0.013
cos_6        -0.0113      0.004     -2.596      0.010      -0.020      -0.003
==============================================================================
Omnibus:                      106.316   Durbin-Watson:                   2.105
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):              809.978
Skew:                           2.305   Prob(JB):                   1.30e-176
Kurtosis:                      12.827   Cond. No.                        46.6
==============================================================================
```

P-значение F-теста меньше чем 0.01 и тогда нулевая гипотеза отклоняется и данная модель хорошо объясняет природу данных.

II.Применив модель регрессии Фурье к ряду, получим остатки и проверим тестом Бройша-Годфри наличие автокорреляции в них.

H_0 : Автокорреляция отсутствует в остатках, данные независимы,
H_1 : Автокорреляция присутствует, данные зависимы..

Вычисляем статистику:

```python
bg_test = acorr_breusch_godfrey(initial_model, nlags=13)

print(f"Статистика теста Бреуша-Годфри: {bg_test[0]}")
print(f"P-значение теста: {bg_test[1]}")
```

```
Статистика теста Бреуша-Годфри: 51.27151119893768
P-значение теста: 1.8013798830419523e-06
```

Так же значение p-value < 0.01 значит нужно отклонить H_0 и тогда данные в выборке зависимы.

4.2 ОДИНАКОВАЯ РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Рассмотрим график ряда на временной шкале:

Видно явное различие между первыми 80 и оставшимися величинами. Проверим эти 2 подвыборки на однородность.

Тест Колмогорова-Смирнова Пусть эмпирическая функция распределения (ЭФР) F_n построенная по выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$, имеет вид: $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{X_i \leqslant x}$, где $I_{X_i \leqslant x}$ указывает, попало ли наблюдение X_i в область $(-\infty, x]$: $I_{X_i \leqslant x} = \begin{cases} 1, & X_i \leqslant x; \\ 0, & X_i > x. \end{cases}$

Таким образом имеем 2 эмпирические функции распределения F_{80} и F_{99}

H_0 : Распределения подвыборок совпадают и данные одинаково распределены.

H_1 : Распределения отличаются и данные не являются одинаково распределёнными.

Теорема Смирнова

Пусть $F_{1,n}(x), F_{2,m}(x)$ — эмпирические функции распределения, построенные по независимым выборкам объёмом n и m случайной величины ξ. Тогда, если $F(x) \in C^1(\mathbb{X})$, то

$$\forall t > 0 : \lim_{n,m\to\infty} P\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} \leqslant t\right) = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2},$$

где $D_{n,m} = \sup_x |F_{1,n} - F_{2,m}|$.

Построим критическое множество $\mathrm{R} = \mathrm{D} \mid \mathrm{D} \geq K_{0.01} = 0.121$

Вычислим статистику: $D = \sqrt{\frac{80 \cdot 99}{80+99}} \cdot D_{80,99}$ Результат: $D = 0.36$

Таким образом выборки не одинаково распределены.

5 ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РЯДА

5.1 ОЧИСТКА ДАННЫХ

Исключим выбросы основанные, например, на отклонении данных от среднего значения на более чем 3 стаднартных отклонения:

	LogReturns
56	0.170719
74	0.241325
75	0.127618
129	0.159723
152	0.116695

Теперь протестируем очищенный ряд на стационарность тестом Дики-Фуллера
гипотезаH_0 : существует единичный корень, ряд нестационарный.

```
df_cleaned = df[(df['LogReturns'] >= mean - 3 * std_dev) & (df['LogReturns'] <=
# Выполняем тест Дики-Фуллера на стационарность
result = adfuller(df['LogReturns'])
```

```
ADF Statistic: -10.986895194268861
p-value: 7.221386125274187e-20
Critical Values: {'1%': -3.467631519151906,
Ряд стационарен (отклоняем нулевую гипотезу)
```

Таким образом ряд доходностей стационарен, не имеет пропусков и выбросов, и не распределен нормально.

ЛИТЕРАТУРА

1. "Основы Стохастической Финансовой Математики Том 1, А.Н. Ширяев.
2. "Критерии проверки гипотез о случайности и отсутствии тренда Б.Ю. Лемешко, И.В. Веретельникова.