Листочек №1 "Теория множеств"

Стяжкин Артём Иванович, Матмех, группы 25.Б82-мм

Октябрь 2025

1 Задачи - Решения

Задача 1.1 [1]**.** Доказать, что

а) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

б) $A \subseteq B \setminus C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$.

Решение 1.1 [1]**.** Решение, чтобы доказать это нужно подтвердить необходимость и достаточность каждого из утверждений:

a) 1. $\forall a \in A : a \in (B \cap C) \Rightarrow (a \in B), (a \in C) \Rightarrow A \subseteq B, A \subseteq C$;
   2. $\forall a \in A : a \in B, a \in C \Rightarrow (a \in B), (a \in C) \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$.

b) 1. $\forall a \in A : a \in (B \setminus C) \Rightarrow (a \in B), (a \notin C) \Rightarrow A \subseteq B, A \cap C = \varnothing$;
   2. $\forall a \in A : a \in B, a \notin C \Rightarrow (a \in B), (a \notin C) \Rightarrow A \subseteq (B \setminus C)$.

Задача 1.2 [2]**.** Доказать следующие равенства и включения:

а) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

б) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

в) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

Привести примеры, когда указанные включения являются строгими.

Решение 1.2 [2]**.** По определению $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$, где X - подмножество A:

a) $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow X \in A \cap B \Rightarrow X \in A, X \in B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A), X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$;

b) $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in A$ or $X \in B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$;

v) $X \in \mathcal{P}(A \setminus B) \Rightarrow X \in A$ and $X \notin B \Rightarrow X \in (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

add) b) в случае если ни одно из множеств не пустое, то включение строгое
   v) если A - непустое множество, то выполняется строгость включения, а также когда A != Б.

Задача 1.3 [3]**.** Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — конечный алфавит, A^n — множество слов длины n в алфавите A.

(а) На A^n задано отношение R_1: для $v = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \dots a_{j_n}$ положим $(v, w) \in R_1$ тогда и только тогда, когда $i_k \leq j_k$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $i_k < j_k$ для некоторого k. Является ли R_1 отношением частичного (линейного) порядка?

(б) На A^* задано отношение R_2: для $v = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \dots a_{j_r}$ положим $(v, w) \in R_2$ тогда и только тогда, когда существует k от 1 до n с $i_\ell = j_\ell$ при $1 \leq \ell < k$ и $i_k < j_k$, причём первые n символов w совпадают со словом v. Является ли R_2 отношением частичного (линейного) порядка?

Решение 1.3 [3]**.** Чтобы отношение было частичным порядком в множестве необходимо выполнение 3 условий:

1) Рефлексивность: $\forall a \in A (a, a) \in R$

2) Транзитивность: $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

3) Антисимметричность: $\forall a, b \in A : (a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

Проверим отношения из задач на эти условий.

а) $(v, w) \in R \Leftrightarrow \forall k \in 1 : ni_k \leq j_k$ and $\exists k : i_k < j_k$

   1) Сразу видно, что условие рефлексивности не выполняется, так как все буквы в словах одинаковые, то мы не найдём такой k, для которого i_k и j_k будут в отношении "меньше".

   2) Выполняется

   3) Не выполняется

   Мы поняли, что это строгий частичный порядок. Проверим, что отношение определено для всех двух элементво множества. Это отношение не определено, так как если $a_{i_1} > a_{j_1}$ и $a_{i_2} < a_{j_2}$, то они не будут в отношении находится.

б) $(v, w) \in R \Leftrightarrow \exists k \in 1 : ni_l = j_l 1 \leqslant l < k, i_k < j_k$

   1) рефлексивность не выполнена

   2) транзитивность выполнена

   3) антисимметричность не выполнена

   Следовательно, это частичный порядок. Проверим на линейный порядок. Это нелинейный порядок, так как не все слова являются частью другого.

Задача 1.4 [2]**.** Для каждой из функций найти область значений и указать, является ли функция инъективной, сюръективной, биекцией.

(а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1;$

(б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1;$

(в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1;$

(г) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x;$

(д) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3x^2 + 1};$

(е) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(ж) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(з) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$;

(и) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin x$.

Решение 1.4 [4]**.** Что такое сюръекция, биекция и инъекция:

1) инъекция - отображение $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
2) сюръекция - отображение $\forall y \exists x : f(x) = y$
3) биекция - это инъекция и сюръекция

1) $E(f) = \mathbb{R}$, инъекция и сюръекция $\Rightarrow$ биекция
2) $E(f) = (1, +\infty)$, не инъекция, так как несколько x дают 1 y, и не сюръекция, так как y не поределен на отрицательных $\mathbb{R}$
3) $E(f) = \mathbb{R}$, инъекция и сюръекция $\Rightarrow$ биекция
4) $E(f) = (0, +\infty)$ инъекция и не сюръекция
5) $E(f) = [1, +\infty)$ не инъекция и не сюръекция
6) $E(f) = [-1, 1]$ инъекция, не сюръекция
7) $E(f) = [0, 1]$ не инъекция (в 0 и в π значения равны 0), не сюръекция, так как y находится только на отрезке от 0 до 1, а не во всей $\mathbb{R}$
8) $E(f) = [-1, 1]$, не инъекция, зато сюръекция
9) $E(f) = \mathbb{R}$ не инъекция, сюръекция

Задача 1.5 [2]**.** Даны $g : A \to B$ и $f : B \to C$. Рассмотрим композицию $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. Определить, какие утверждения верны:

(а) Если g инъективна, то $g \circ f$ инъективна.

(б) Если f и g сюръективны, то $g \circ f$ сюръективна.

(в) Если f и g биекции, то $g \circ f$ биекция.

(г) Если $g \circ f$ инъективна, то f инъективна.

(д) Если $g \circ f$ инъективна, то g инъективна.

(е) Если $g \circ f$ сюръективна, то f сюръективна.

Решение 1.5 [5]**.** Здесь мы видим, что утверждения представляют из себя импликации. Следовательно, чтобы импликация давала ложь нужно истинность посылки и ложность заключения:

а) Неверно. Никто не наложил условий для отображения f, то есть в случае если $\exists b_1, b_2 \in B, g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2 : b_1 \neq b_2$, то они могут совпасть во множестве $C : f(b_1) = f(b_2) \Rightarrow (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow$ не выполняется инъективность, то есть композиция отображений не будет инъекцией.

б) Верно. g - сюръекция $\Rightarrow \forall b \in B : \exists a \in A : g(a) = b$, f - сюръекция $\Rightarrow \forall c \in C : \exists b \in B : f(b) = c \Rightarrow \forall c \in C : \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$. Значит, композиция сюръекций сюръективна.

в) Верно. Из всех $\forall a \in A$ мы переходим $\forall b \in B : g(a) = b$, дальше $\forall c \in C : f(b) = c$, то есть для $\forall a \in A : (g \circ f)(a) = c$. При этом выполняется условие инъекции.

г) Пусть f - сюръекция. Это возможно, например, если g инъекция, которая будет попадать только в те элементы из B, которые дают разные элементы C. Значит, это утверждение неверно.

д) Поступим также как и в предыдущем пункте: допустим, что g - сюръекция (биекция нам не интересна, так как это инъекция). Если это так, тогда мы не сможем полностью утверждать посылку. $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow f(g(a_1)) = f(g(a_2) \Rightarrow$ не выполняется инъекцтивность композиции. Следовательно, это утверждение верно

е) Пусть f будет инъекцией. Значит, не вся область значений покрывается отображение $f \Rightarrow$ композиция не будет сюръекцией. Получаем верность утверждения

Задача 1.6 [3]. Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

Решение 1.6 [6]. Для решения этой задачи хорошо подойдут графы. Пусть дети из школы - это вершины нашего графа, а походы в кофе-мороженое - это наши рёбра. Тогда нашу задачу можно переформулировать: если рёбер больше чем одно, то количество всех ребер больше или равно, чем количество всех школьников. А это очевидно. Рассмотрим простой пример. Пусть у нас n школьников, то, для того чтобы связать одного школьника со всеми нужно $n-1$ ребер и еще одно, так как мы рассматриваем граф из 3 вершин минимум (мы соединили 1 вершину 2 ребрами с двумя другими вершинами, а также соединили те две вершины между собой), нам необходимо как минимум n походов в кафе.

Задача 1.7 [3]. 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,

а) четырёх вечеров недостаточно,

б) пяти вечеров также недостаточно,

в) а десяти вечеров достаточно,

г) и даже семи вечеров тоже достаточно.

Задача 1.8 [3]**.** У каждого из жителей города N число знакомых составляет не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

Задача 1.9 [3]**.** В Думе 1600 депутатов образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.

Примечание.

Напоминание: задачи, имеющие сложность 1 должны уметь решать все. На решение этих задач даётся дедлайн – две недели (на первый раз 09.10.2025).