Листочек №1 "Теория множеств"

Матмех, группы 25.Б82-мм

Октябрь 2024

1 Задачи

Задача 1.1 [1]**.** Доказать, что

а) $A \subseteq B \cap C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

б) $A \subseteq B \setminus C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$.

Задача 1.2 [2]**.** Доказать следующие равенства и включения:

а) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

б) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

в) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

Привести примеры, когда указанные включения являются строгими.

Задача 1.3 [3]**.** Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — конечный алфавит, A^n — множество слов длины n в алфавите A.

(а) На A^n задано отношение R_1: для $v = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \dots a_{j_n}$ положим $(v, w) \in R_1$ тогда и только тогда, когда $i_k \leq j_k$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $i_k < j_k$ для некоторого k. Является ли R_1 отношением частичного (линейного) порядка?

(б) На A^* задано отношение R_2: для $v = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \dots a_{j_r}$ положим $(v, w) \in R_2$ тогда и только тогда, когда существует k от 1 до n с $i_\ell = j_\ell$ при $1 \leq \ell < k$ и $i_k < j_k$, причём первые n символов w совпадают со словом v. Является ли R_2 отношением частичного (линейного) порядка?

Задача 1.4 [2]**.** Для каждой из функций найти область значений и указать, является ли функция инъективной, сюръективной, биекцией.

(а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1$;

(б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$;

(в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1$;

(г) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$;

(д) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$;

(е) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(ж) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(з) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$;

(и) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin x$.

Задача 1.5 [2]**.** Даны $g : A \to B$ и $f : B \to C$. Рассмотрим композицию $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. Определить, какие утверждения верны:

(а) Если g инъективна, то $g \circ f$ инъективна.

(б) Если f и g сюръективны, то $g \circ f$ сюръективна.

(в) Если f и g биекции, то $g \circ f$ биекция.

(г) Если $g \circ f$ инъективна, то f инъективна.

(д) Если $g \circ f$ инъективна, то g инъективна.

(е) Если $g \circ f$ сюръективна, то f сюръективна.

Задача 1.6 [3]**.** Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

Задача 1.7 [3]**.** 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,

а) четырёх вечеров недостаточно,

б) пяти вечеров также недостаточно,

в) а десяти вечеров достаточно,

г) и даже семи вечеров тоже достаточно.

Задача 1.8 [3]**.** У каждого из жителей города N число знакомых составляет не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

Задача 1.9 [3]**.** В Думе 1600 депутатов образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.

Примечание.

Напоминание: задачи, имеющие сложность 1 должны уметь решать все. На решение этих задач даётся дедлайн – две недели (на первый раз 09.10.2025).