

Листочек №1 “Теория множеств”

Стяжкин Артём Иванович, Матмех, группы 25.Б82-мм

Октябрь 2025

1 Задачи - Решения

Задача 1.1 [1]. Доказать, что

- а) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;
- б) $A \subseteq B \setminus C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \cap C = \emptyset$.

Решение 1.1 [1]. Решение, чтобы доказать это нужно подтвердить необходимость и достаточность каждого из утверждений:

- а) 1. $\forall a \in A : a \in (B \cap C) \Rightarrow (a \in B), (a \in C) \Rightarrow A \subseteq B, A \subseteq C$;
2. $\forall a \in A : a \in B, a \in C \Rightarrow (a \in B), (a \in C) \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$.
- б) 1. $\forall a \in A : a \in (B \setminus C) \Rightarrow (a \in B), (a \notin C) \Rightarrow A \subseteq B, A \cap C = \emptyset$;
2. $\forall a \in A : a \in B, a \notin C \Rightarrow (a \in B), (a \notin C) \Rightarrow A \subseteq (B \setminus C)$.

Задача 1.2 [2]. Доказать следующие равенства и включения:

- а) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
- б) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
- в) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

Привести примеры, когда указанные включения являются строгими.

Решение 1.2 [2]. По определению $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$, где X - подмножество A :

- а) $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow X \in A \cap B \Rightarrow X \in A, X \in B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A), X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$;
- б) $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in A$ or $X \in B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$;
- в) $X \in \mathcal{P}(A \setminus B) \Rightarrow X \in A$ and $X \notin B \Rightarrow X \in (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

add) б) в случае если ни одно из множеств не пустое, то включение строгое

- в) если A - непустое множество, то выполняется строгость включения, а также когда $A \neq B$.

Задача 1.3 [3]. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — конечный алфавит, A^n — множество слов длины n в алфавите A .

- (а) На A^n задано отношение R_1 : для $v = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \dots a_{j_n}$ положим $(v, w) \in R_1$ тогда и только тогда, когда $i_k \leq j_k$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $i_k < j_k$ для некоторого k . Является ли R_1 отношением частичного (линейного) порядка?
- (б) На A^* задано отношение R_2 : для $v = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \dots a_{j_r}$ положим $(v, w) \in R_2$ тогда и только тогда, когда существует k от 1 до n с $i_\ell = j_\ell$ при $1 \leq \ell < k$ и $i_k < j_k$, причём первые n символов w совпадают со словом v . Является ли R_2 отношением частичного (линейного) порядка?

Решение 1.3 [3]. Чтобы отношение было частичным порядком в множестве необходимо выполнение 3 условий:

- 1) Рефлексивность: $\forall a \in A (a, a) \in R$
- 2) Транзитивность: $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- 3) Антисимметричность: $\forall a, b \in A : (a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

Проверим отношения из задач на эти условия.

- а) $(v, w) \in R \Leftrightarrow \forall k \in 1 : n i_k \leq j_k \text{ and } \exists k : i_k < j_k$
- 1) Сразу видно, что условие рефлексивности не выполняется, так как все буквы в словах одинаковые, то мы не найдём такой k , для которого i_k и j_k будут в отношении "меньше".
 - 2) Выполняется
 - 3) Не выполняется

Мы поняли, что это строгий частичный порядок. Проверим, что отношение определено для всех двух элементов множества. Это отношение не определено, так как если $a_{i_1} > a_{j_1}$ и $a_{i_2} < a_{j_2}$, то они не будут в отношении находится.

- б) $(v, w) \in R \Leftrightarrow \exists k \in 1 : n i_l = j_l 1 \leq l < k, i_k < j_k$
- 1) рефлексивность не выполнена
 - 2) транзитивность выполнена
 - 3) антисимметричность не выполнена

Следовательно, это частичный порядок. Проверим на линейный порядок. Это нелинейный порядок, так как не все слова являются частью другого.

Задача 1.4 [2]. Для каждой из функций найти область значений и указать, является ли функция инъективной, сюръективной, биекцией.

- (а) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$;
- (б) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;
- (в) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$;
- (г) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$;
- (д) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$;

- (е) $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;
- (ж) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;
- (з) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$;
- (и) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \sin x$.

Решение 1.4 [4]. Что такое сюръекция, биекция и инъекция:

- 1) инъекция - отображение $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- 2) сюръекция - отображение $\forall y \exists x : f(x) = y$
- 3) биекция - это инъекция и сюръекция
- 1) $E(f) = \mathbb{R}$, инъекция и сюръекция \Rightarrow биекция
- 2) $E(f) = (1, +\infty)$, не инъекция, так как несколько x дают 1 y , и не сюръекция, так как y не поределен на отрицательных \mathbb{R}
- 3) $E(f) = \mathbb{R}$, инъекция и сюръекция \Rightarrow биекция
- 4) $E(f) = (0, +\infty)$ инъекция и не сюръекция
- 5) $E(f) = [1, +\infty)$ не инъекция и не сюръекция
- 6) $E(f) = [-1, 1]$ инъекция, не сюръекция
- 7) $E(f) = [0, 1]$ не инъекция (в 0 и в π значения равны 0), не сюръекция, так как y находится только на отрезке от 0 до 1, а не во всей \mathbb{R}
- 8) $E(f) = [-1, 1]$, не инъекция, зато сюръекция
- 9) $E(f) = \mathbb{R}$ не инъекция, сюръекция

Задача 1.5 [2]. Даны $g : A \rightarrow B$ и $f : B \rightarrow C$. Рассмотрим композицию $g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. Определить, какие утверждения верны:

- (а) Если g инъективна, то $g \circ f$ инъективна.
- (б) Если f и g сюръективны, то $g \circ f$ сюръективна.
- (в) Если f и g биекции, то $g \circ f$ биекция.
- (г) Если $g \circ f$ инъективна, то f инъективна.
- (д) Если $g \circ f$ инъективна, то g инъективна.
- (е) Если $g \circ f$ сюръективна, то f сюръективна.

Решение 1.5 [5]. Здесь мы видим, что утверждения представляют из себя импликации. Следовательно, чтобы импликация давала ложь нужно истинность посылки и ложность заключения:

- а) Неверно. Никто не наложил условий для отображения f , то есть в случае если $\exists b_1, b_2 \in B, g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2 : b_1 \neq b_2$, то они могут совпасть во множестве $C : f(b_1) = f(b_2) \Rightarrow (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow$ не выполняется инъективность, то есть композиция отображений не будет инъекцией.
- б) Верно. g - сюръекция $\Rightarrow \forall b \in B : \exists a \in A : g(a) = b$, f - сюръекция $\Rightarrow \forall c \in C : \exists b \in B : f(b) = c \Rightarrow \forall c \in C : \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$. Значит, композиция сюръекций сюръективна.
- в) Верно. Из всех $\forall a \in A$ мы переходим $\forall b \in B : g(a) = b$, дальше $\forall c \in C : f(b) = c$, то есть для $\forall a \in A : (g \circ f)(a) = c$. При этом выполняется условие инъекции.
- г) Пусть f - сюръекция. Это возможно, например, если g инъекция, которая будет попадать только в те элементы из B , которые дают разные элементы C . Значит, это утверждение неверно.
- д) Поступим также как и в предыдущем пункте: допустим, что g - сюръекция (биекция нам не интересна, так как это инъекция). Если это так, тогда мы не сможем полностью утверждать посылку. $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow f(g(a_1)) = f(g(a_2)) \Rightarrow$ не выполняется инъективность композиции. Следовательно, это утверждение верно
- е) Пусть f будет инъекцией. Значит, не вся область значений покрывается отображением $f \Rightarrow$ композиция не будет сюръекцией. Получаем верность утверждения

Задача 1.6 [3]. Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

Решение 1.6 [6]. Если рассматривать группу школьников, как пару школьников. Для решения этой задачи хорошо подойдут графы. Пусть дети из школы - это вершины нашего графа, а походы в кофе-мороженое - это наши рёбра. Тогда нашу задачу можно переформулировать: если рёбер больше чем одно, то количество всех ребер больше или равно, чем количество всех школьников. А это очевидно. Рассмотрим простой пример. Пусть у нас n школьников, то, для того чтобы связать одного школьника со всеми нужно $n - 1$ ребер и еще одно, так как мы рассматриваем граф из 3 вершин минимум (мы соединили 1 вершину 2 ребрами с двумя другими вершинами, а также соединили те две вершины между собой), нам необходимо как минимум n походов в кафе.

Задача 1.7 [3]. 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,

- а) четырёх вечеров недостаточно,
- б) пяти вечеров также недостаточно,
- в) а десяти вечеров достаточно,

г) и даже семи вечеров тоже достаточно.

Решение 1.7 [7]. Это пример направленных графов, то есть, чтобы каждый сходил к каждому, необходимо 2 ребра между каждыми двумя вершинами. Получается, нужно провести $(n * (n - 1)) * 2/2 \Rightarrow$ нам нужно провести 870 рёбер в целом.

- а) Получается, что нам необходимо за один вечер чертить $870 / 4 = 217$ рёбер. Давайте докажем, что это невозможно. Допустим, мы за первые 2 вечера проведем 450 ребер (поделим 30 на 2 равные группы, то есть $15 * 15 * 2$ ребер). Нам останется провести $870 - 450 = 420$ рёбер. Можно ли провести столько ребер за 2 вечера? Для максимализации количества ребер нам нужно делить группы на два ($1 * 14, 2 * 13... 8 * 7$, можно заметить, что в середине получается максимум. Так мы и выбрали для начала группы по 15 людей). $7 * 8 * 4 = 224$. То есть мы никак не сможем набрать 870 ребер за 4 итерации.
- б) Исходя из первого пункта, нам нужно набрать 196 ребер за один вечер, что невозможно, так как у нас будут группы 4 и 3, 4 и 4, 4 и 4, 4 и 3, а из них можно получить максимум 112 ребер. $196 - 56 = 140$. 5 дней недостаточно.
- в) Приведу пример, когда 10 вечеров достаточно. Возьмём и разделим 30 школьников на 2 группы по 15 человек. В первый вечер каждый школьник из 1 группы идёт к каждому из 2 группы. Во второй вечер повторяется только для 2 группы. Значит $870 - (15^2 * 2) = 420$. Дальше разделим группу из 15 человек на 2 группы: 8 и 7 человек соответственно. И проделаем ту же операцию. Получается, мы проведем еще $8 * 7 * 2 * 2$ (умножаем на 4, так как мы сделаем это за 2 вечера + так как у нас 2 группы по 8 и 7) $= 224$. $420 - 224 = 196$. Поделим 8 на группы 4 и 4, а 7 на группы 4 и 3. Опять за 2 вечера проведем из первой группы в другую. $(4 * 3 * 2 + 4 * 4 * 2) * 2 = 112$. $196 - 112 = 84$. Опять делим. У нас будет 6 групп по 2 и 2, а также 2 группы по 2 и 1 человеку. $2 * 2 * 6 * 2 + 2 * 2 * 2 = 56$. $84 - 56 = 28$. И заключительный этап: 14 пар по 1 и 1. $1 * 14 * 2 = 28$. $28 - 28 = 0$. То есть мы провели все возможные направленные ребра между вершинами, то есть за 10 вечеров мы справились (при разделении мы тратили по 2 вечера, чтобы каждая группа обменялась ребрами между собой, то есть было 5 разделений, следовательно $5 * 2 = 10$ вечеров)

г) Что-то мне кажется, что этого недостаточно...

Задача 1.8 [3]. У каждого из жителей города N число знакомых составляет не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

Задача 1.9 [3]. В Думе 1600 депутатов образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.

Примечание.

Напоминание: задачи, имеющие сложность 1 должны уметь решать все. На решение этих задач даётся дедлайн – две недели (на первый раз 09.10.2025).