Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***

КАФЕДРА ***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

ДОМАШНЯЯ РАБОТА №2

«Метод разделения переменных для решения ДУЧП2»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б ________________ (Калашников А.С.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ________________ (Никитенко У.В.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

Цель: овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.
Задачи: решить методом разделения переменных задачи для ДУЧП2 гиперболического, параболического и эллиптического типов. Выбрать среду для проведения расчетов. Оценить результаты расчетов. Визуализировать результаты.

Вариант 10

Задача 1. Решить методом Фурье и методом отражений начально-краевую задачу для волнового уравнения.

Задание варианта:

Вариант	Начально-краевая задача
10	$u_{tt} = u_{xx}$ (1); $u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi sin\pi x(2);$ $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$ (3).

1. Отдельно выписать задачу Штурма-Лиувилля и решить её.
2. Ответ представить в максимально компактной форме
3. Построить профиль струны в различные моменты времени, начиная с нулевого.

Решение

Решим задачу методом Фурье.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$X(x)T''(t) = 1^2X''(x)T(t)$$

Разделим равенство на $1^2X(x) \cdot T(t)$:

$$X''(x) = \lambda X(x),$$

$$\frac{T''(t)}{1^2T(t)} = \frac{X''^{(x)}}{X(x)}$$

$$-\text{это равенство возможно только при условии, что оно равно константе,}$$
$$\text{положим } \lambda$$

В результате переменные разделяются, и получается два обыкновенных дифференциальных линейных уравнения:

$$X''(x) = \lambda X(x),$$

$$T''(t) = \lambda T(t),$$

Подставляя $u(x,t)$ в виде $X(x) \cdot T(t)$ в граничные условия, получим:

$$u_x(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0$$

$$u_x(3,t) = X(3)\cdot T(t) = 0$$

Поскольку равенства должны выполняться тождественно, то:

$$X(0) = 0, \quad X(3) = 0.$$

Таким образом, для функции $X(x)$ получили задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то общее решение уравнения (2) принимает вид:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(3) = 3C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = 0$$

Если $\lambda > 0$, то $k_{1,2}$ – действительные числа и общее решение уравнения (2) принимает вид:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Из (3): $\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(3) = C_1 e^{3\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-3\sqrt{\lambda}} \end{cases}$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_1\left(e^{3\sqrt{\lambda}} - e^{-3\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases}, e^{3\sqrt{\lambda}} - e^{-3\sqrt{\lambda}} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$X(x) = 0$$

Если $\lambda < 0$, то $k_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ – действительные числа и общее решение уравнения принимает вид:

$$X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right),$$

Неизвестные коэффициенты C_1, C_2 найдем из граничных условий:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 \\ X(3) = C_1 cos3\sqrt{-\lambda} + C_2 sin3\sqrt{-\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 sin3\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

Пусть $C_2 \neq 0$, тогда

$$sin3\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{-\lambda} = \pi n, n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, получаем следующее решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 (n = 1,2,\ldots)\ (4) \text{ - собственные числа;}$$

$$X_n(x) = C_n sin\frac{\pi n}{3}x\ (n = 1,2,\ldots) \text{ - собственные функции.}$$

Подставим значение λ_n в (4). Для каждого значения n = 1, 2, … получим ОДУ:

$$T_n''(t) = -\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 T_n(t)\ (n = 1,2,\ldots)$$

Решим ОДУ относительно функции $T_n(t)$, составим характеристическое уравнение:

$$k^2 = -\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2$$

$$k_{1,2} = \pm\frac{\pi n}{3}i$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n t}{3} + B_n \sin\frac{\pi n t}{3}.$$

Таким образом, получаем следующее решение, являющееся суммой множества решений:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A'_n cos\frac{\pi n t}{3} + B'_n sin\frac{\pi n t}{3}\right) sin\frac{\pi n}{3} x, \text{ где}$$
$$A'_n = A_n C_n, B'_n = B_n C_n$$

Подставим в (2), получим:

$$\mathrm{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n sin\frac{\pi n}{3} x = 0 \Rightarrow n = 1, 2.., \mathrm{A}_n = 0$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{3} \mathrm{B}_n sin\frac{\pi n}{3} x = \frac{\pi}{3} \mathrm{B}_1 sin\frac{\pi}{3} x + \frac{2\pi}{3} \mathrm{B}_2 sin\frac{2\pi}{3} x + \pi \mathrm{B}_3 sin\pi x$$
$$= 8\pi sin\pi x \Rightarrow \begin{cases} n = 3, \mathrm{B}_3 = 8 \\ n \neq 3, \mathrm{B}_n = 0 \end{cases}$$
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n cos\frac{\pi n t}{3} + 8 sin\frac{3\pi t}{3}\right) sin\frac{\pi n}{3} x =$$
$$= 0 + 8 sin\pi t * sin(3\pi x)$$

Построение графика для полученной функции:

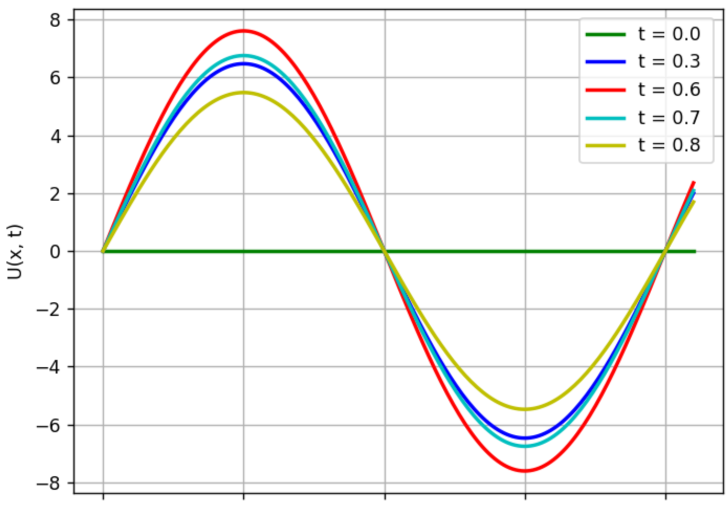

Рис.1. Профиль струны в различные моменты времени

Задача 2. Решить методом Фурье начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности.

1. Ответ представить в максимально компактной форме
2. Построить графики изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого.

Задание варианта:

Вариант	Начально-краевая задача
10	$u_t = 6u_{xx}$ (1); $u(0,t) = 9$ (2); $u(3,t) = -3$ (3); $u(x,0) = 10sin5\pi x + 9 - 4x(4)$;

С помощью замены U(x,t)=V(x,t)+W(x,t) (5), где V(x, t) - новая функция, W(x, t) - вспомогательная функция (наперед заданная), её необходимо подобрать таким образом, чтобы V(0,t) = V(l, t) =0 для новой функции (V(x, t)) оказалась с нулевыми граничными условиями.

$$T = 9\ ;$$
$$U = -3\ ;$$

$$W(x,t) = u_1(t) + \frac{x}{l}\left(u_2(t) - u_1(t)\right), \text{где } u_1(t) = T, u_2(t) = U$$

Тогда имеем:

$$W(x,t) = T + \frac{x}{l}(U - T), \text{где } u_1(t) = T, u_2(t) = U$$
$$V_t + W_t = a^2(V_{xx} + W_{xx})$$
$$V_t + 0 = a^2(V_{xx} + 0)$$
$$V_t = a^2(V_{xx})(1')$$
$$V(0,t) = V(l, t) = 0(2',3')$$
$$V(x,0)+W(x,0)=0;$$
$$V(x, 0) + T + \frac{x}{l}(U - T) = 9+\frac{x}{l}(-12) = 0;$$
$$V(x, 0) = \frac{x}{l}(T - U) - T = 12\frac{x}{l} - 9\ (4')$$

Итак, решение задачи (1') - (4') связано с решением исходной задачи (1) - (4)

$$V_{xt} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x (8)$$

(8) удовлетворяет (2'), (3')

$$T'_n(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t);$$
$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t};$$
$$V(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) sin\frac{\pi n}{l} x = \frac{x}{l}(T - U) - T = \varphi(x), \varphi(x) -$$
$$\text{разложим в ряд } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = sin\frac{\pi n}{l} x, \text{где } \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\frac{\varepsilon}{l}(T - U) - T\right) sin\frac{\pi n}{l}\varepsilon d\varepsilon =$$
$$\begin{pmatrix} du=\frac{1}{l}(T-U)d\varepsilon \\ V=-\frac{l}{\pi n}cos\frac{\pi n}{l}\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{2}{l}\left(\left(\frac{\varepsilon}{l}(12) - 9\right)\left(-\frac{l}{\pi n}cos\frac{\pi n}{l}\varepsilon\right)\Big| + \int_0^l \frac{l}{\pi n}cos\frac{\pi n}{l}\varepsilon\frac{1}{l}(12)d\varepsilon\right) =$$
$$\frac{2}{\pi n}(-3(-1)^n - 9$$

Сравнив два ряда, получаем что $T_n(0) = \varphi_n$ или $C_n = \frac{2}{\pi n}(-3(-1)^n - 9)$

Тогда

$$V(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-3(-1)^n - 9)e^{-(\frac{\sqrt{6}\pi n}{l})^2 t} sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$U(x,t) = 9 - 4x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-3(-1)^n - 9)e^{\frac{\sqrt{6}\pi n}{3}^2 t} sin\frac{\pi n}{3}x$$

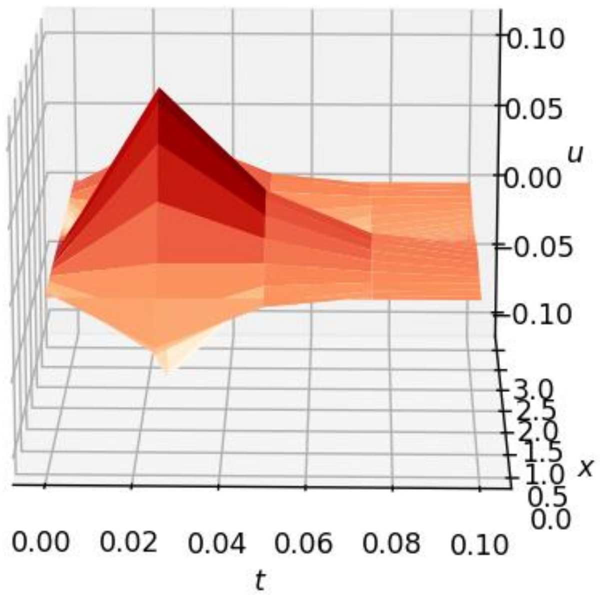

Рис.2. Демонстрация изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого

С течением времени температура стержня понижается до нуля, а для любого фиксированного времени распределение температуры в стержне подчиняется закону, описанному функцией: U(x, t0)

Задача 3. Решить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе 0<r<1, 0<φ< α

1. Ответ представить в максимально компактной форме
2. Построить графики изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого.

Задание варианта:

Вариант	Внутренняя задача Дирихле
10	$u(1,\varphi) = 10sin2\varphi;$ $u(r,0) = u(r,3\pi/2) = 0;$

Решение

Найдем решение уравнения:

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}$$

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Подставляя выражение в уравнение Лапласа и выполняя деление, получим задачу Штурма-Лиувилля на отрезке 0 < φ < α для определения Φ(φ)

(1):

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$
$$\Phi(0) = 0$$
$$\Phi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Из подстановки также получим R(r):

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0\ (2)$$

Решение задачи (1):

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{2k}{3}\right)^2, \Phi_k(\varphi) = \sin\left(\frac{2k\varphi}{3}\right), k = 1,2, \ldots$$

Подставим значение λ_k в (2), получим:

$$r^2R'' + rR' - \lambda_k R = 0\ (3)$$

которое представляет собой однородное ДУ Эйлера второго порядка. Его решение ищем в виде:

$$R(r) = r^{\mu}, \text{где } \mu - \text{некоторая постоянная}$$

Подставляя это уравнение в (3) и сокращая на r^{μ} приходим к уравнению:

$\mu^2 = \lambda_k$, корнями которого являются $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm\dfrac{k\pi}{\alpha} = \pm\dfrac{2k}{3}$

Общее решение уравнения Эйлера:

$$R_k(r) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}}\ (4), k = 1,2, \ldots$$

Подставим

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

частные решения исходного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \sin\left(\frac{2k\varphi}{3}\right)\ (5), k = 1,2, \ldots$$

Составим ряд из этих частных решений:

Подставляя в условие

$$u(1, \varphi) = 10sin2\varphi$$

, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k a^{\sqrt{\lambda_k}} \sin\left(\frac{2k\varphi}{3}\right) = 10sin2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1^{\sqrt{\lambda_k}} \sin\left(\frac{2k\varphi}{3}\right) = 10sin2\varphi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{2k\varphi}{3}\right) = 10sin2\varphi$$

а - $f(\varphi)$ разложенная в ряд Фурье по синусам. Тогда:

$$c_k = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi) sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} 10sin2\varphi \sin(\frac{2k\varphi}{3})\, d\varphi =$$

$$= \frac{60\sin(\pi k)}{\pi(9 - k^2)}, \text{если } k \neq 1$$

Подставим k = 1:

$$c_1 = \frac{60\sin(\pi)}{\pi(9-1)} = 0$$

Подставляем в (5), получаем решение задачи Дирихле:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{60\sin(\pi k)}{\pi(9-k^2)} r^{\sqrt{\left(\frac{2k}{3}\right)^2}} \sin\left(\frac{2k\varphi}{3}\right)$$

Вывод: в ходе выполнения данной домашней работы были приобретены практические навыки использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.

Приложения

Листинг:

Задание №1

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

def U(x, t):
    pi = np.pi
    r = 0.0
    r = 0 + 8*math.sin(pi*t)*math.sin(pi*x)
    print("r=",r)
    print(2/math.pi+t, "\n")
    return r

l = 4
a = 7

t = [0.0, 0.3, 0.6, 0.68, 0.76]
color = ['g-', 'b-', 'r-', 'c-', 'y-']
indx = 0
for tt in t:
     x = np.linspace(0, 2.1, num=200)
     print("x=",x)
     y = []
     print("tt=",tt)
     for i in x:
        y.append(U(i, tt))
     plt.plot(x, y, '%s' % color[indx], linewidth=2, label='t
= %.1f '% tt)
     indx+=1
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('U(x, t)')
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.show()
```

Задание №2

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

def U(x, t):
    pi = math.pi
```

```
    repetitions = 30
    r = 0.0
    for i in range(repetitions):
        n = i + 1
        temp = (-3*np.power(-1,n)-
9)*np.exp(np.power(6,0.5)*pi*np.power(n,2)*t)
        temp = 9-4*x + 2/pi * temp*np.sin((pi*n)/3*x)
        r += temp

    return r

t = [0.0, 1.3, 1.4, 1.5]
color = ['g-', 'b-', 'r-', 'c-']
indx = 0
for tt in t:
     x = np.linspace(0, math.pi/2, num=200)
     y = []
     for i in x:
        y.append(U(i, tt))
     plt.plot(x, y, '%s' % color[indx], linewidth=2, label='t
= %.2f '% tt)
     indx+=1
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('U(x, t)')
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.show()

fig = plt.figure()
ax = plt.axes()
X, Y = np.meshgrid(ts, xs)

for i in range(len(ts)):
    plt.plot([xs[i] for j in res[:, i]], res[:, i],
label=f"$t={ts[i]:.2f}$")

ax.set_xlabel("$x$")
ax.set_ylabel("$u(x, t)$")
plt.legend(framealpha=0.5, frameon=True)

plt.show()
```