Численное дифференцирование

Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически

Предполагается, что функция $f(x)$ достаточно гладкая. Справедливы соотношения (формулы, равенства).

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h), \tag{1}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ — разность вперед.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x), \tag{2}$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \text{ — разность назад.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h), \tag{3}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ — симметричная разность.}$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x, x+2h). \tag{4}$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-2h, x). \tag{5}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h). \tag{6}$$

Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах

Пусть узлы $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ — равноотстоящие, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1)$, и пусть для функции $y = f(x)$ известны значения $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Формулы (1)-(6) перепишем в следующем виде:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \ \ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1a}$$

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h), \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2a}$$

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3a}$$

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + O(h^2), \ \ i = 0, \ldots, n-2. \tag{4a}$$

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2), \;\; i = 2, \ldots, n. \tag{5a}$$

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \;\; i = 1, \ldots, n-1. \tag{6a}$$

Задание

1) Вычислить приближенно значения

   а) первой производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h)$ (обозначим $\tilde{f}'$) и $O(h^2)$ (обозначим $\tilde{\tilde{f}}'$) при $i = 0, 1, \ldots, n$.

   б) второй производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h^2)$ (обозначим $\tilde{f}''$) при $i = 1, \ldots, n-1$.

   Напечатать таблицу значений узлов, "точных" значений производных в узлах, приближенных значений производных и их разностей (фактические погрешности) (см. образец). Проверить результаты на многочленах соответствующих степеней. Объяснить полученные результаты.

   Образец выполнения задания для функции $f(x) = x + 3$ представлен в таблице 1.

Таблица 1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\tilde{f}'$ $O(h)$	погр. $O(h)$	$\tilde{\tilde{f}}'$ $O(h^2)$	погр. $O(h^2)$	$f''(x)$	$\tilde{f}''$ $O(h^2)$	погр. $O(h^2)$
0	3	1	1	0	1	0	0		
0,1	3,1	1	1	0	1	0	0	0	0
0,2	3,2	1	1	0	1	0	0	0	0
0,3	3,3	1	1	0	1	0	0	0	0
0,4	3,4	1	1	0	1	0	0	0	0
0,5	3,5	1	1	0	1	0	0	0	0
0,6	3,6	1	1	0	1	0	0	0	0
0,7	3,7	1	1	0	1	0	0	0	0
0,8	3,8	1	1	0	1	0	0	0	0
0,9	3,9	1	1	0	1	0	0	0	0
1	4	1	1	0	1	0	0		

2) Пользуясь одной из формул (1)-(6) (указывается преподавателем) в заданной точке x вычислить разностную производную первого или второго порядка, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Пример:

   При использовании формулы (4) в результате ошибок, допускаемых в каждом значении функции и не превосходящих по модулю ε, оценка для суммарной погрешности будет выглядеть следующим образом:

$$|R_\varepsilon(x, h, f)| \leqslant \frac{8\varepsilon}{2h} + \frac{h^2}{3} M_3, \;\; M_3 = \max |f'''(\xi)|, \;\; \xi \in (x, x + 2h).$$

Оптимальный шаг, т. е. такой, при котором обеспечивается минимальная суммарная погрешность, находится обычным образом, как решение задачи на экстремум.

Напечатать таблицу значений h, “точных” значений производной в точке , приближенных значений производной и их разностей (фактические погрешности).

Образец выполнения задания для функции $f(x) = e^{2x}$ представлен в таблице 2.

Здесь $x = 1$, начальный шаг $h = 0.1$, “точное” значение производной $f'(1) = 14.778112$. Значения функции округляются до пятого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

Таблица 2

h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125
f_x пор. $O(h^2)$	14.5484	14.7249	14.765	14.774	14.7768	14.7744
погр.	0.22971	0.05321	0.01311	0.0037	0.0013122	0.003712

Из таблицы видно, что оптимальным экспериментально является шаг 0.00625, теоретически $h_{opt} \approx 0.0069$.

Варианты заданий

Вариант 1

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 2

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 3

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 4

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 5

1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:

2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 6

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{4x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 7

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{5x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 8

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 2$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 9

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 10

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 11

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 12

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_3$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 13

1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:

2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 14

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{4x}, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.