Метод сеток для решения уравнения параболического типа

Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \quad f(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \tag{2}$$

$$\alpha_1(t)u(0,t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t), \tag{3}$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geqslant 0, \;\; |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta(t), \tag{4}$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geqslant 0, \;\; |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где Lu может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а)} \quad a(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u, \quad a(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \quad a(x,t) \geqslant a_0 > 0, \\ \text{б)} \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + b(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u, \quad p(x) \in C^1_{[0,1]}, \;\; p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ \quad\;\; b(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \;\; c(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \;\; c(x,t) \leqslant 0. \end{cases}$$

Требуется найти в $\overline{D} = [0,1] \times [0,T]$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3), (4).

Построение сетки ,равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьём отрезок $[0,1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N, \; x_i = i\,h, \; i = \overline{0,N}$.
Разобьём отрезок $[0,T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = T/M, \; t_k = k\,\tau, \; k = \overline{0,M}$.
Построим сетку узлов (рис. 1) $\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_i,t_k), \; i = \overline{0,N}; k = \overline{0,M}\}$.

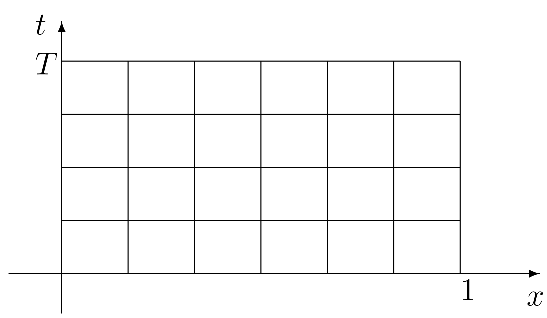

Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i,t_k) сеточной функции $u^k = \{u_i^k\}$, определенной на слое k сеточной области $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а)} \;\; a(x_i, t_k)\dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k)\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k)u_i^k, \\ \text{б)} \;\; p_{i+\frac{1}{2}}\dfrac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}}\dfrac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k)\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k)u_i^k. \end{cases}$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке $(x_i,\, t_k)$ со вторым порядком аппроксимации, $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, M}$. Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе L достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле $(x_i,\, t_{k-1})$

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}), \;\; i = \overline{1, N-1}, \;\; k = \overline{1, M}. \tag{5}$$

Каждое уравнение в (5) содержит решения лишь в четырех точках $u_{i-1}^{k-1},\; u_i^{k-1},\; u_{i+1}^{k-1},\; u_i^k$, причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

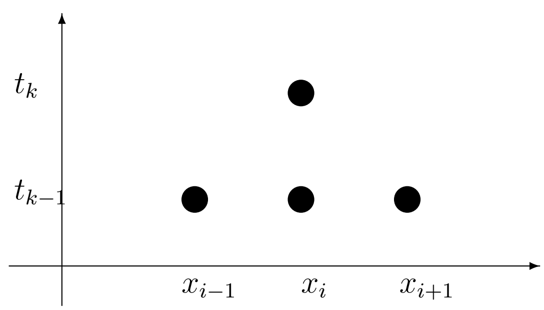

Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \;\; i = \overline{0, N}. \tag{6}$$

Граничные условия (3), (4) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k), \tag{7}$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k), \tag{8}$$

$k = \overline{1, M}$.

Схема (5)-(8) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (5)-(8), причём, вычислив решение при k=0 из (6), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (5), в граничных из (7), (8).

Очевидна простота реализации явной разностной схемы, но следует иметь в виду её условную устойчивость.

Обозначим

$$A = \begin{cases} \max\{a(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\} \text{ в случае а)}, \\ \max\{p(x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \text{ в случае б)}. \end{cases}$$

Пусть $\nu = \dfrac{\tau}{h^2}$, тогда условие устойчивости примет вид $A\nu \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{9}$$

но оно может быть использовано и при $b(x,t) \neq 0,\ c(x,t) \neq 0$, принимающих "небольшие" значения.

Порядок вычисления решения

1) Из (6) находим $u_i^0,\ i = \overline{0,N}$.

2) Из (5) находим $u_i^k = u_i^{k-1} + \tau(L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1})),\ i = \overline{1,N-1}$ при $k = 1$.

3) Из (7) находим u_0^k при $k = 1$.

4) Из (8) находим u_N^k при $k = 1$.

Тем самым, решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leqslant M$.

5.4. Схема с весами

Пусть σ — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1-\sigma)u_i^{k-1}) + f(x_i, \overline{t_k}),\ \ i = \overline{1,N-1}\ \ k = \overline{1,M}. \tag{10}$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i),\ \ i = \overline{0,N}. \tag{11}$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (3), (4) аппроксимируем с первым порядком

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k), \tag{12}$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta(t_k). \tag{13}$$

Рассмотрим различные значения параметра σ.

1) $\sigma = 0, \overline{t_k} = t_{k-1}$.

В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$.

2) Если $\sigma \neq 0$, то схема (10)-(13) называется неявной двуслойной схемой. Если $\sigma \neq 1$, то каждое уравнение в (10) содержит значения решения в шести точках $u_{i-1}^{k-1},\ u_i^{k-1},\ u_{i+1}^{k-1},\ u_{i-1}^k,\ u_i^k,\ u_{i+1}^k$, причем в следующей конфигурации:

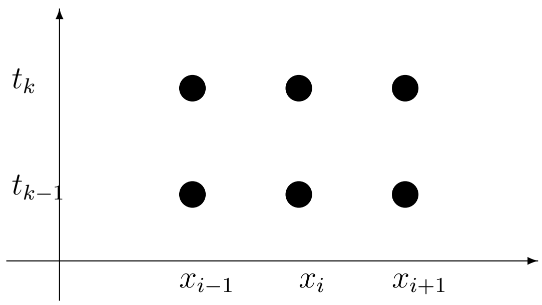

Рис. 3

Так как к моменту определения решения на k-ом слое решение на предыдущем $(k-1)$ - ом слое уже известно, систему (10) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k, \tag{14}$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1-\sigma) L_h u_i^{k-1} - f(x_i, \overline{t_k}),\ \ i = \overline{1, N-1},\ \ k = \overline{1, M}. \tag{15}$$

Граничные условия (12), (13) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом k-ом слое в данном случае приходится решать систему (N+1) порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида[1]

$$\begin{array}{rrrcll} & -B_0 u_0^k & +C_0 u_1^k & = & G_0^k, & \\ A_i u_{i-1}^k & -B_i u_i^k & +C_i u_{i+1}^k & = & G_i^k, & i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^k & -B_N u_N^k & & = & G_N^k, & \end{array} \tag{16}$$

$k = \overline{1, M}$.

Для решения системы используется метод прогонки, рассмотренный в 1.4.

Порядок вычисления решения

1) Из (11) находим $u_i^0,\ i = \overline{0, N}$.

[1]Коэффициенты A, B, C в линейной системе (16) могут зависеть от номера слоя k, но для краткости верхний индекс k здесь и далее опущен.

2) Из (16) находим $u_i^k,\ \ i=\overline{0,N}$ при $k=1$.

Тем самым, решение при $k=1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leqslant M$.

Рекомендуемые значения $\sigma=1,\ \ \sigma=1/2$.

При $\sigma=1,\ \overline{t_k}=t_k$ получаем разностную схему с опережением или чисто неявную схему с четырехточечным шаблоном (рис. 4).

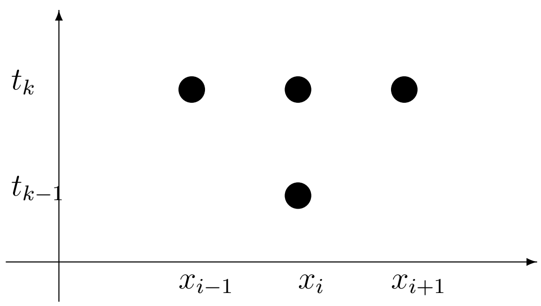

Рис. 4

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau+h^2)$, если $\alpha_2(t)=0$ и $\beta_2(t)=0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации — $O(\tau+h)$.

При $\sigma=1/2,\ \overline{t_k}=t_k-\tau/2$ получаем разностную схему Кранка-Никольсона с шеститочечным шаблоном (рис. 5).

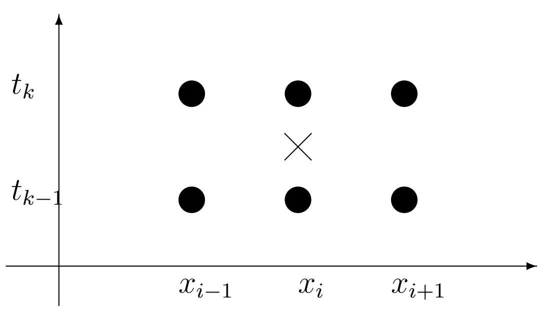

Рис. 5

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau^2+h^2)$, если $\alpha_2(t)=0$ и $\beta_2(t)=0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau^2+h)$.

Второй порядок аппроксимации по времени достигается за счет того, что аппроксимация уравнения (1) выполняется в точке $(x_i, t_k-\tau/2)$, отмеченной на рисунке крестиком.

Замечание. Пусть в уравнении (1)

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

а граничные условия (3), (4) имеют вид

$$u(0,t)=\alpha(t),\ \ u(1,t)=\beta(t).$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1-\sigma)u_i^{k-1}) + \Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}, \tag{17}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \tag{18}$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_N^k = \beta(t_k), \quad k = \overline{1, M}, \tag{19}$$

где свободный член

$$\Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}) = f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} L_h f_i^{k-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\left(f_{i-1}^{k-\frac{1}{2}} + f_{i+1}^{k-\frac{1}{2}}\right), \quad t_{k-\frac{1}{2}} = t_k - \frac{\tau}{2}. \tag{20}$$

Пусть $C_n^m(\overline{D})$ — класс функций, имеющих n производных по x и m производных по t, непрерывных в $\overline{D} = [0,1] \times [0,T]$.

Тогда, если $u \in C_6^3$, разностная схема (17)-(19) при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(h^4 + \tau^2)$ и называется схемой повышенного порядка точности.

Задание 1

Найти решение задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant 0.1,\\
&u(x,0) = \varphi(x)\,, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
&\left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0} = \alpha(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1,\\
&\left(\beta_1(t)u + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=1} = \beta(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1,
\end{aligned}$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка $O(h^2+\tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами при $\sigma = 0, \ \sigma = 1, \ \sigma = 1/2$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$.

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий:

1) Алгоритм решения задачи.

2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.

3) Тестирование алгоритма, например, на решениях $u(x,t) = x^3 + t^3$, $u(x,t) = x^3 * t^3$, $\sin(2t+1) * \cos(2x)$, $\sin(2t+1) + \cos(2x)$, на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.

4) Таблицы решения на “крупной” сетке независимо от шагов по t и x, с которыми строится решение, следующего вида $(N = 5, 10, 20)$[2]:

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.02						
0.04						
0.06						
0.08						
0.1						

5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

h	τ	$\|\|J\_ex - u^{(h,\tau)}\|\|$	$\|\|u^{(h,\tau)} - u^{(2h,\tau_1)}\|\|$
0.2			———————
0.1			
0.05			

Здесь τ, τ_1 выбираются из условия устойчивости явной схемы.

J_ex — точное решение.

$||V|| = \max|V_{ik}|,\ i = \overline{0,5},\ k = \overline{0,5}.$

Неявная схема

Таблица 3

h	τ	$\|\|J\_ex - u^{(h,\tau)}\|\|$	$\|\|u^{(h,\tau)} - u^{(2h,\tau)}\|\|$
0.2			———————
0.1			
0.05			

Здесь $\tau = 0.1/M, M = 10, 100$ (предусмотреть возможность менять M).
Проанализировать результаты.

[2]В качестве M следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном N.

Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

Вариант 1

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+3)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - xu + f(x,t),\\
u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.
\end{gathered}
$$

Вариант 2

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),\\
u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.
\end{gathered}
$$

Вариант 3

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),\\
u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.
\end{gathered}
$$

Вариант 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 5

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2+1)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) = \alpha(t),\ \ u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 7

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 8

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 9

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x\, u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(0,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 10

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 11

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 12

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 13

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 14

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 15

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+3)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 16

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cos x \, u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) + 2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 17

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 18

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+3)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - 2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 19

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 20

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2+1)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 21

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \; u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 22

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 23

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 24

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x\, u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(0,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 25

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 26

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 27

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 28

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 29

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Вариант 30

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+3)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$