МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕНЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДУЧП2

Цель: овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.

Задачи: решить методом разделения переменных задачи для ДУЧП2 гиперболического, параболического и эллиптического типов. Выбрать среду для проведения расчетов. Оценить результаты расчетов. Визуализировать результаты.

Задача 1. Решить методом Фурье и методом отражений начально-краевую задачу для волнового уравнения.

1.1 Отдельно выписать задачу Штурма-Лиувилля и решить её.

1. 2 Ответ представить в максимально компактной форме

1. 3 Построить профиль струны в различные моменты времени, начиная с нулевого.

1. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = 3 + 2\cos\pi x$; $u_t(x, 0) = 0$;
$u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$.
2. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 8\pi\cos\pi x + \pi$;
$u_x(0, t) = u_x(6, t) = 0$.
3. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 3\cos 2\pi x$; $u_t(x, 0) = 3\pi$;
$u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$.
4. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 5$; $u_t(x, 0) = 12\pi\cos 2\pi x$;
$u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$.
5. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x, 0) = 5\cos 3\pi x + 7$; $u_t(x, 0) = 0$;
$u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.
6. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$;
$u_t(x, 0) = 12\pi\cos 3\pi x + 2$;
$u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0$.
7. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 7\cos 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 8$;
$u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$.

8. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 1$; $u_t(x, 0) = 8\pi\cos 4\pi x$;
$u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.
9. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 9\cos 5\pi x + 1$; $u_t(x, 0) = 0$;
$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$.
10. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 5\pi\cos 5\pi x + 5$;
$u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$.

11. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 11\sin\pi x$; $u_t(x, 0) = 8\pi\sin\pi x$;
$u(0, t) = u(6, t) = 0$.

12. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 12\sin 2\pi x$; $u_t(x, 0) = 21\pi\sin 3\pi x$;
$u(0, t) = u(4, t) = 0$.

13. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 13\sin 2\pi x$; $u_t(x, 0) = 12\pi\sin 2\pi x$;
$u(0, t) = u(5, t) = 0$.

14. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x, 0) = 14\sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 20\pi\sin 4\pi x$;
$u(0, t) = u(3, t) = 0$.

15. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x, 0) = 15\sin 3\pi x$; $u_t(x, 0) = 12\pi\sin 4\pi x$;
$u(0, t) = u(4, t) = 0$.

16. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 16\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 15\pi\sin 5\pi x$;
$u(0, t) = u(2, t) = 0$.

17. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 17\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 8\pi\sin 4\pi x$;
$u(0, t) = u(3, t) = 0$.

18. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 18\sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 6\pi\sin 6\pi x$;
$u(0, t) = u(1, t) = 0$.

19. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 19\sin 7\pi x$; $u_t(x, 0) = 27\pi\sin 3\pi x$;
$u(0, t) = u(2, t) = 0$.

20. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 20\sin 9\pi x$; $u_t(x, 0) = 14\pi\sin 7\pi x$;
$u(0, t) = u(1, t) = 0$.

21. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 21\sin 6\pi x$; $u_t(x, 0) = 18\pi\sin 6\pi x$;
$u(0, t) = u(3, t) = 0$.

22. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u(x, 0) = 22\sin 6\pi x$; $u_t(x, 0) = 24\pi\sin 6\pi x$;
$u(0, t) = u(2, t) = 0$.

23. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x, 0) = 23\sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 25\pi\sin 5\pi x$;
$u(0, t) = u(4, t) = 0$.

24. $u_{tt} = 36u_{xx}$; $u(x, 0) = 24\sin 5\pi x$; $u_t(x, 0) = 30\pi\sin 5\pi x$;
$u(0, t) = u(3, t) = 0$.

25. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $u(x, 0) = 25\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 28\pi\sin 4\pi x$;
$u(0, t) = u(5, t) = 0$.

26. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $u(x, 0) = 26\sin 4\pi x$; $u_t(x, 0) = 32\pi\sin 4\pi x$;
$u(0, t) = u(4, t) = 0$.

27. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $u(x, 0) = 27\sin 3\pi x$; $u_t(x, 0) = 27\pi\sin 3\pi x$;
$u(0, t) = u(6, t) = 0$.

28. $u_{tt} = u_{xx}$; $u(x, 0) = 28\sin 3\pi x$; $u_t(x, 0) = 3\pi\sin 3\pi x$;
$u(0, t) = u(5, t) = 0$.

29. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 29\sin 2\pi x$; $u_t(x, 0) = 4\pi\sin 2\pi x$;
$u(0, t) = u(7, t) = 0$.

30. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u(x, 0) = 30\sin 2\pi x$;
$u_t(x, 0) = 6\pi\sin 2\pi x$;
$u(0, t) = u(6, t) = 0$.

32. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $u(x, 0) = 0$;
$u_t(x, 0) = 17\pi\sin 7\pi x - 3\pi\sin 3\pi x$;
$u(0, t) = u(3, t) = 0$.

Задача 2. Решить методом Фурье начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности.

2.1 Ответ представить в максимально компактной форме

2.2 Построить графики изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого.

1. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = \sin 3\pi x - 4 - 5x$;
   $u(0, t) = -4$; $u(1, t) = -9$.
2. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 2\sin 4\pi x + 2 - 3x$;
   $u(0, t) = 2$; $u(3, t) = -7$.
3. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 3\sin 5\pi x - 3 + 4x$;
   $u(0, t) = -3$; $u(2, t) = 5$.
4. $u_t = 4u_{xx}$; $u(x, 0) = 4\sin 6\pi x + 4 - 5x$;
   $u(0, t) = 4$; $u(1, t) = -1$.
5. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 5\sin 7\pi x - 5 + 2x$;
   $u(0, t) = -5$; $u(3, t) = 1$.
6. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 6\sin 8\pi x + 6 - 2x$;
   $u(0, t) = 6$; $u(4, t) = -2$.
7. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 7\sin 9\pi x - 7 + 3x$;
   $u(0, t) = -7$; $u(3, t) = 2$.
8. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = 8\sin 3\pi x + 8 - 3x$;
   $u(0, t) = 8$; $u(4, t) = -4$.
9. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 9\sin 4\pi x - 9 + 5x$;
   $u(0, t) = -9$; $u(2, t) = 1$.
10. $u_t = 6u_{xx}$; $u(x, 0) = 10\sin 5\pi x + 9 - 4x$;
    $u(0, t) = 9$; $u(3, t) = -3$.

В пунктах 11–20 рассмотреть смешанные ГУ:
$u(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0$.

11. $u_t = 4u_{xx} + 11\sin 5t\sin 9x$.
12. $u_t = 3u_{xx} + 12\cos 5t\sin 5x$.
13. $u_t = 2u_{xx} + 13e^{-18t}\sin 3x$.
14. $u_t = 11u_{xx} + 14e^{-12t}\sin x$.
15. $u_t = 10u_{xx} + 15\sin 6t\sin 7x$.
16. $u_t = 9u_{xx} + 16\cos 6t\sin 9x$.
17. $u_t = 8u_{xx} + 17e^{-40t}\sin 11x$.
18. $u_t = 7u_{xx} + 18e^{-175t}\sin 5x$.
19. $u_t = 6u_{xx} + 19\sin 7t\sin 3x$.
20. $u_t = 5u_{xx} + 20\cos 7t\sin x$.

В пунктах 21–30 рассмотреть ГУ

$u(x, 0) = 0$; $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$.

21. $u_t = 4u_{xx} + 21\sin 5t\cos 2x$.
22. $u_t = 3u_{xx} + 24e^{-27t}\cos 3x$.
23. $u_t = 10u_{xx} + 23e^{-16t}\cos 4x$.
24. $u_t = 9u_{xx} + 26\cos 6t\cos 5x$.
25. $u_t = 8u_{xx} + 30\cos 7t\cos 6x$.
26. $u_t = u_{xx} + 28e^{-49t}\cos 7x$.
27. $u_t = 2u_{xx} + 27e^{-128t}\cos 8x$.
28. $u_t = 3u_{xx} + 30\cos 8t\cos 9x$.
29. $u_t = 4u_{xx} + 22\cos 9t\cos x$.
30. $u_t = 5u_{xx} + 23e^{-10t}\cos 2x$.
32. $u_t = 5u_{xx}$; $u(x, 0) = \cos 7\pi x + \cos 9\pi x$;
$u_x(0, t) = u(4{,}5; t) = 0$.

Задача 3.

Решить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в кольце $1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

1. $u(1, \varphi) = 10\cos\varphi$; $u(2, \varphi) = 17\cos\varphi$.
2. $u(1, \varphi) = 8\cos 2\varphi$; $u(2, \varphi) = 17\cos 2\varphi$.
3. $u(1, \varphi) = 20\cos 3\varphi$; $u(2, \varphi) = 34\cos 3\varphi$.
4. $u(1, \varphi) = 52\cos 4\varphi$; $u(2, \varphi) = 67\cos 4\varphi$.
5. $u(1, \varphi) = 98\cos 5\varphi$; $u(2, \varphi) = 67\cos 5\varphi$.
6. $u(1, \varphi) = 20\sin\varphi$; $u(2, \varphi) = 34\sin\varphi$.
7. $u(1, \varphi) = 8\sin 2\varphi$; $u(2, \varphi) = 17\sin 2\varphi$.

Решить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0<r<1$, $0 <\varphi< \alpha$

8. $u(1, \varphi) = 8\sin\varphi$; $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$.
9. $u(1, \varphi) = 9\sin 16\varphi$; $u(r, 0) = u(r, 7\pi/4) = 0$.
10. $u(1, \varphi) = 10\sin 2\varphi$; $u(r, 0) = u(r, 3\pi/2) = 0$.
11. $u(1, \varphi) = 11\cos 24\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/6) = 0$.
12. $u(1, \varphi) = 12\cos 12\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/4) = 0$.
13. $u(1, \varphi) = 13\cos 18\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/3) = 0$.
14. $u(1, \varphi) = 14\cos 2\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/2) = 0$.
15. $u(1, \varphi) = 15\cos 9\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 2\pi/3) = 0$.
16. $u(1, \varphi) = 16\cos 16\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 3\pi/4) = 0$.
17. $u(1, \varphi) = 17\cos 6\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 5\pi/6) = 0$.
18. $u(1, \varphi) = 18\cos 3\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi) = 0$.
19. $u(1, \varphi) = 19\cos 8\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 7\pi/4) = 0$.
20. $u(1, \varphi) = 20\cos 4\varphi$; $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, 3\pi/2) = 0$.

Решить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

21. $u(1, \varphi) = 36\cos\varphi + 66\sin 5\varphi$.
22. $u(1, \varphi) = 24\cos 2\varphi + 66\sin 4\varphi$.
23. $u(1, \varphi) = 12\cos 3\varphi + 33\sin 3\varphi$.
24. $u(1, \varphi) = 49\cos 4\varphi + 19\sin 2\varphi$.
25. $u(1, \varphi) = 128\cos 5\varphi + 19\sin\varphi$.
26. $u(1, \varphi) = 18\cos 6\varphi + 33\sin\varphi$.
27. $u(1, \varphi) = 24\cos 7\varphi + 66\sin 2\varphi$.
28. $u(1, \varphi) = 24\cos 8\varphi + 66\sin 3\varphi$.
29. $u(1, \varphi) = 18\cos 9\varphi + 33\sin 4\varphi$.
30. $u(1, \varphi) = 128\cos 10\varphi + 19\sin 5\varphi$.
31. $u(1, \varphi) = 21 + 14\cos 6\varphi$. 32. $u(1, \varphi) = 22 + 12\cos 7\varphi$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Метод отражений

Метод отражений распространяет идеи графического решения задачи Коши для волнового уравнения на решение начально-краевой задачи для свободных колебаний полубесконечной или конечной струн при условии, что на их концах выполняются однородные граничные условия первого или второго рода.

Задачу о свободных колебаниях конечной струны можно заменить задачей Коши о колебаниях бесконечной струны. Начальные данные φ(x), ψ(x) следует продолжить по закону нечётности относительно каждого закреплённого конца и по закону чётности относительно каждого свободного. В результате, для начально-краевой задачи первого и второго родов начальные данные Φ(x), Ψ(x) окажутся периодическими функциями с периодом 2l, а в случае смешанных граничных условий — периодическими функциями с периодом 4l. Решение исходной задачи даётся формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\Phi(x-at) - \widetilde{\Psi}(x-at)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\Phi(x+at) + \widetilde{\Psi}(x+at)\Big)$$

где $\widetilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \Psi\,(t)dt$

функции Φ(x), Ψ(x) получены из функций φ(x), ψ(x) нечётным или чётным продолжением.

Для струны с закреплёнными концами (граничные условия первого рода):

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,l], \\ -\varphi(-x), & x \in [-l,0), \\ \Phi(x-2lk), & x \notin [-l,l], \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0,l], \\ -\psi(-x), & x \in [-l,0), \\ \Psi(x-2lk), & x \notin [-l,l], \end{cases} \qquad (*)$$

$$k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

Для струны с двумя свободными концами:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,l], \\ \varphi(-x), & x \in [-l,0), \\ \Phi(x-2lk), & x \notin [-l,l], \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0,l], \\ \psi(-x), & x \in [-l,0), \\ \Psi(x-2lk), & x \notin [-l,l], \end{cases} \qquad (**)$$

Для струны с закрепленным левым концом и свободным правым введем функции:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,l]; \\ \varphi(2l-x), & x \in (l,2l]; \end{cases} \quad \psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0,l]; \\ \psi(2l-x), & x \in (l,2l] \end{cases}$$

и подставим их в (*) вместо φ и ψ, заменив при этом *l* на *2l*. Если у струны свободен левый конец и закреплен правый, введем функции

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,l]; \\ -\varphi(2l-x), & x \in (l,2l]; \end{cases} \quad \psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in [0,l]; \\ -\psi(2l-x), & x \in (l,2l] \end{cases}$$

и аналогичным образом подставим их в (**).

Метод Фурье для однородного уравнения с однородными граничными условиями

$x \in [0, l]; t \geq 0$

$U_{tt} = a^2 U_{xx}$ (1)

U(0,t)=U(l, t)=0 (2)

$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) & (3) \\ U_t(x,0) = \psi(x) & (4) \end{cases}$

Решим её методом Фурье (метод разделения переменных)

U(x,t)=X(x) T(t) (5)

(5) → (1)

$X(x)\, T''(t)=a^2\, X''(x)\, T(t) \;\big|: (a^2\, X\, T)$

$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ - это равенство возможно только при условии, что оно равно константе, положим λ.

$T''(t)=a^2\, \lambda\, T(t)$ (6)

$X''(x)= \lambda X(x)$ (7)

(5) → (2)

$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$ поэтому, либо T(t) ≡ 0, а это противоречит физическому смыслу задачи, либо T(t) ≠ 0 и

X(0)=X(l)=0 (8)

(7, 8) - $\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0, \;\; x \in [0, l] \end{cases}$ - задача Штурма-Лиувилля: X(x) ≠ 0 - нетривиальное решение задачи (7,8), называется собственной функцией, а λ, при которой существует нетривиальное решение задачи, называется собственным числом.

Решим задачу (7, 8).

Составим характеристическое уравнение для (7)

$k^2 - \lambda=0 \rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ - корни характеристического уравнения.

а) если λ=0, то общее решение уравнения (7): $X(x)=C_1\, x+C_2$, найдем неизвестные константы из условий (8)

$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 l + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$. Окончательно имеем, что X(x) ≡ 0. Т.е λ=0 - не собственное число.

б) если λ>0, $k_{1,2}$- действительные числа, то общее решение уравнения (7):

$X(x) = C_1\, e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$. По условию (8) получим: $\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(l) = C_1\, e^{\sqrt{\lambda}\, l} + C_2\, e^{-\sqrt{\lambda}\, l} = 0 \end{cases} \rightarrow$ $\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_1\,(e^{\sqrt{\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{\lambda}\, l}) = 0 \end{cases}$, т.к. $e^{\sqrt{\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{\lambda}\, l} \neq 0$, при λ>0, то $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$. Имеем, что X(x) ≡ 0. Т.е среди λ>0 нет собственных чисел.

в) если λ<0, $k_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ - комплексные числа, то общее решение уравнения (7):

$X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, x$. Согласно условиям (8) имеем:

$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\, l + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0 \end{cases}$.

Пусть $C_2 \neq 0 \rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0 \rightarrow \sqrt{-\lambda}\, l = \pi n$, n=1,2,....

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \text{ (n=1, 2, ...) - собственные числа.} \quad (9)$$

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l} x \text{ - собственные функции.}$$

(9) → (6)

Для каждого значения n=1, 2, ... получим ОДУ:

$T_n''(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)$, (n=1, 2, ...). Решим относительно функции T(t), составим характеристическое уравнение:

$k^2 = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2$, $k_{1,2} = \pm i\frac{a\pi n}{l}$ - корни характеристического уравнения, поэтому общее решение имеет вид:

$T_n(t) = A_n cos\frac{a\pi n}{l} t + B_n sin\frac{a\pi n}{l} t$, n=1, 2, ...

Согласно (5) $U_n(x, t)=X_n(x)T_n(t)$ (n=1, 2, ...) - бесконечное множество решений, удовлетворяющих уравнению (1) и граничными условиям (2). Т. к. (1) и (2) однородные, то сумма всех решений тоже будет удовлетворять уравнениям (1) и (2).

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n cos\frac{a\pi n}{l} t + B_n sin\frac{a\pi n}{l} t\right] sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (10)$$

где $A_n= A_n\, C_n$; $B_n= B_n\, C_n$.

(10) → (3)

$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sin\frac{\pi n}{l} x = \varphi(x)$. Это возможно, при условии разложения функции *φ(x)* в ряд Фурье по системе функций $\left\{sin\frac{\pi n}{l} x\right\}$, n=1, 2,...

$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, sin\frac{\pi n}{l} x$, где $\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi -$ коэффициенты Фурье.

Тогда $A_n = \varphi_n$.

$U_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l} sin\frac{\pi n}{l} x = \psi(x)$.

Если

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\, sin\frac{\pi n}{l}x - \text{ряд Фурье,}$$

где $\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi -$ коэффициенты Фурье,

то $B_n\frac{a\pi n}{l}=\psi_n \to B_n=\frac{l}{a\pi n}\psi_n$.

Таким образом, решение вида (10) удовлетворяет всем условиям задачи (1 - 4).

Пример 1.

$x\in[0,l];t\geq 0$

$U_{tt}=a^2U_{xx}$

U(0,t)=U(l, t)=0

$$\begin{cases} U(x,0)=\frac{1}{8}\sin\frac{3\pi}{l}x \\ U_t(x,0)=0 \end{cases}$$

Решение. Так как ДУ однородное и граничные условия однородны, то решение ищем в виде (10):

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n cos\frac{a\pi n}{l}t+B_n sin\frac{a\pi n}{l}t\right]sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Найдем A_n и B_n.

$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\, sin\frac{\pi n}{l}x=\ A_1 sin\frac{\pi}{l}x+A_2 sin\frac{2\pi}{l}x+A_3 sin\frac{3\pi}{l}x+\cdots=\frac{1}{8}\sin\frac{3\pi}{l}x$, поэтому

$A_3=\frac{1}{8};\ A_n=0,$ при $n\neq 3$

$U_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{a\pi n}{l}sin\frac{\pi n}{l}x=0$, следовательно $B_n = 0$, n =1, 2 ...

Ответ $U(x,t)=\frac{1}{8}\cos\frac{3a\pi}{l}\ t\ \sin\frac{3\pi}{l}x$

Вывод. Точки струны с закрепленными концами, имеющие начальную форму отличную от положения равновесия, совершают гармонические колебания, характеризующиеся узловыми точками, точками пучности, частотой и амплитудой колебания. $\sin\frac{3\pi}{l}x=0$, $x=\frac{k\pi}{3\pi}l=\frac{k}{3}l$, k=1, 2, 3 - узловые точки, отклонения которых в любой момент времени равны нулю.

$\sin\frac{3\pi}{l}x=\pm 1,\ x=\frac{2k-1}{6}l$, k=1, 2, 3 - точки пучности, отклонения в которых максимально и равно $\frac{1}{8}\cos\frac{3a\pi}{l}\ t$. $\frac{3a\pi}{l}$ - частота колебания; $\frac{1}{8}\sin\frac{3\pi}{l}x_0$ - амплитуда колебания каждой точки. Такое движение называется стоячей волной.

Метод Фурье для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями.

Пример 2.

$x \in [0, l]; t \geq 0$

$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t)$

U(0,t)=U(l, t)=0

$\begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U_t(x,0) = 0 \end{cases},$

f(x, t)=x(x - l)

Решение. Воспользуемся выводом из предыдущего примера, решение будем искать в виде: $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x$. Такой вид удовлетворяет только граничным условиям, $T_n(t)$ необходимо выбрать таким образом, чтобы представленный ряд удовлетворял диф. уравнению. Для этого предварительно представим *f(x, t)* в виде аналогичного ряда:

$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x$, ряд Фурье, где где $f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$ – коэффициенты Фурье. Подставим эти ряды в уравнение, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) sin\frac{\pi n}{l}x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Такое равенство возможно при условии для любого n равенства коэффициентов при одинаковых гармониках: $T_n''(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) + f_n(t)$, n=1, 2, ...

Таким образом, для нахождения $T_n(t)$ таких, чтобы решение в виде ряда удовлетворяло ГУ необходимо решить ОДУ. Оно линейное неоднородное с постоянными коэффициентами.

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = \frac{2}{l}\int_0^l \xi(\xi - l)\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = \frac{4l^2}{(\pi n)^3}(\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{чётное} \\ -\frac{8l^2}{(\pi n)^3}, & n - \text{нечётное} \end{cases}.$$

$$T_n(t) = T_n^O + T_n^{Ч},$$

где T_n^O – общее решение однородного уравнения,
$T_n^{Ч}$ – частное решение неоднородного уравнения.

$T_n^O = A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t$. Частное решение находим методом неопределенных коэффициентов: $T_n^{Ч} = A$. Исходя из определения частного решения (оно обращает уравнение в тождество), найдем А:

$$T_n^{Ч} = -\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 A + f_n(t) \rightarrow$$

$$A = \frac{f_n(t) l^2}{(an\pi)^2} = \begin{cases} 0, & n - \text{чётное} \\ -\frac{8l^4}{a^2(\pi n)^5}, & n - \text{нечётное} \end{cases} \rightarrow T_n^{Ч} = \begin{cases} 0, & n - \text{чётное} \\ -\frac{8l^4}{a^2(\pi n)^5}, & n - \text{нечётное} \end{cases}.$$

Подставим найденное решение в ряд:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}(T_n^O+T_n^{Ч})sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}T_n^O sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^{Ч}sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{a\pi n}{l}t+B_n\sin\frac{a\pi n}{l}t)sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{8l^4}{a^2\pi^5(2n-1)^5}sin\frac{\pi(2n-1)}{l}x.$$

Решение такого вида удовлетворяет и уравнению и граничным условиям. Потребуем от этого решения выполнения начальных условий.

$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{8l^4}{a^2\pi^5(2n-1)^5}sin\frac{\pi(2n-1)}{l}x.$ такое равенство возможно для $A_{2n-1}=\frac{8l^4}{a^2\pi^5(2n-1)^5}$ и $A_{2n}=0.$

$U_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{a\pi n}{l}sin\frac{\pi n}{l}x=0$, следовательно $B_n=0.$

Ответ: $U(x,t)=\frac{8l^4}{a^2\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{a(2n-1)\pi}{l}t-1}{(2n-1)^5}sin\frac{\pi(2n-1)}{l}x.$

Метод Фурье для неоднородного уравнения с ненулевыми граничными условиями.

Пример 3.

$x\in[0,\pi];t\geq 0$

$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t)$

$\begin{cases}U(0,t)=\mu_1(t)=t^2\\U(\pi,t)=\mu_2(t)=t^3\end{cases},$

$\begin{cases}U(x,0)=\varphi(x)=\sin x\\U_t(x,0)=\psi(x)=0\end{cases},$

$f(x,t)=0$

Приведем эту задачу с помощью замены переменных к задаче решаемого типа.

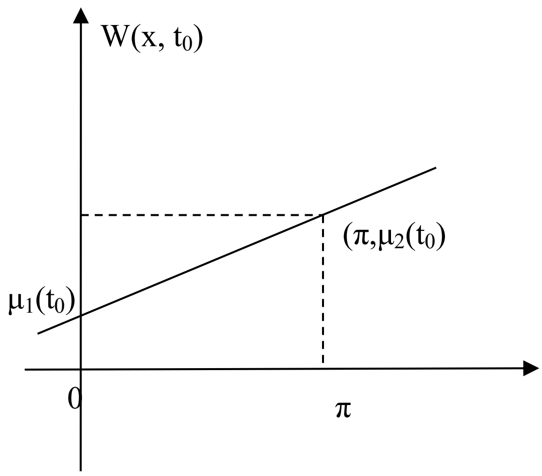
$U(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$, где $V(x,t)$ - новая функция, $W(x,t)$ - вспомогательная функция (наперед заданная), её необходимо подобрать таким образом, чтобы задача Дирихле для новой функции ($V(x,t)$) оказалась с нулевыми граничными условиями.

$U(0,t)=V(0,t)+W(0,t)=\mu_1(t)$, т.к. нам необходимо, чтобы $V(0,t)=0$, то $W(0,t)=\mu_1(t)$. Аналогично для $V(\pi,t)=0$: $U(\pi,t)=V(\pi,t)+W(\pi,t)=\mu_2(t)$ и $W(\pi,t)=\mu_2(t)$.

Для фиксированного $t=t_0$ необходимо подобрать функцию $W(x,t_0)$ такую, чтобы она проходила через две известные точки . и $(0,\mu_2(t_0))$. Такой функцией может быть прямая, проходящая через две точки:

$\frac{W(x,t_0)-\mu_1(t_0)}{\mu_1(t_0)-\mu_2(t_0)}=\frac{x-0}{0-\pi},$

$W(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{\pi}(\mu_2(t)-\mu_1(t)).$



Для нашей задачи

$W(x,t) = t^2 + \frac{x}{\pi}(t^3 - t^2).$

Проведем замену переменных во всех условиях задачи. Для этого потребуется следующие значения вспомогательной функции:

$W_t(x,t) = 2t + \frac{x}{\pi}(3t^2 - 2t);\ \ W_{tt}(x,t) = 2 + \frac{x}{\pi}(6t - 2); W_x(x,t) = t^3 - t^2;\ \ W_{xx}(x,t) = 0;$

$W(x,0) = 0;\ W_t(x,0) = 0.$

И теперь, $U_{tt} = V_{tt} + W_{tt} = V_{tt} + 2 + \frac{x}{\pi}(6t - 2)$ и $U_{xx} = V_{xx} + W_{xx} = V_{xx} + 0.$

$$V_{tt} = V_{xx} - 2 - \frac{x}{\pi}(6t - 2)$$

V(0,t)=V(π, t)=0;

V(x, 0) = U(x, 0) - W(x, 0)=U(x, 0)=sin x;

$V_t(x, 0) = U_t(x, 0) - W_t(x, 0)=U_t(x, 0)=0.$

Итак, мы получили первую краевую задачу относительно новой функции, которая связаня со старой уравнением *U(x, t)=V(x, t)+W(x, t)*. После решения задачи для функции *V(x, t)* имеем следующее выражение

$$V(x,t) = \cos t \sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}\frac{1}{n^3}\left(3t(-1)^n - 1 + \cos nt + \frac{3(-1)^n \sin nt}{n}\right)\sin nx.$$

Ответ: $U(x,t) = \cos t \sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}\frac{1}{n^3}\left(3t(-1)^n - 1 + \cos nt + \frac{3(-1)^n \sin nt}{n}\right)\sin nx + t^2 + \frac{x}{\pi}(t^3 - t^2).$

Метод Фурье для однородного уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями.

Пример 1. На концах изотропного однородного с теплоизолированной боковой поверхностью длиной *l* поддерживается нулевая температура. Найти распределение тепла в стержне, если в начальный момент времени оно задано функцией φ(x).

$U_t = a^2 U_{xx}, \qquad x \in [0, l]; t \geq 0$ (1)

U(0,t)=U(l, t)=0 (2)

$U(x,0) = \varphi(x) = A\,x$ (3)

Метод разделения переменных U(x,t)=X(x) T(t) (4)

(4) → (1)

$X(x)\,T'(t)=a^2\,X''(x)\,T(t)\ \big|: (a^2\,X\,T)$

$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ - это равенство возможно только при условии, что оно равно константе, положим λ.

$T'(t)=a^2\,\lambda\,T(t)$ (5)

$X''(x)=\lambda X(x)$ (6)

(4) → (2)

$\begin{cases} X(0)T(t)=0 \\ X(l)T(t)=0 \end{cases}$ поэтому, либо T(t) ≡ 0, а это противоречит физическому смыслу задачи, либо T(t) ≠ 0 и

$X(0)=X(l)=0$ (7).

(6), (7) - составляют задачу Штурма - Лиувилля, напомним, что её решением является собственное число $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ и собственные функции $X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l}x$ (n=1, 2, ...).

Для каждого из этих λ_n найдём соответствующее решение уравнения (5).

$T_n'(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)$; $\frac{dT_n}{dt} = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n$; $\frac{dT_n}{T_n} = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 dt$; $\ln T_n(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t + B_n$; $T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}$ n=1, 2, ...

На основании уравнения (4) получим

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n B_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ n=1, 2, ...}$$

Для каждого n $U_n(x, t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим граничному условию (2).

Т.к. (1) однородно, а (2) нулевое, то $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t)$ тоже будет удовлетворять (1) и (2).

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Для получения окончательного решения подставим (8) в начальное условие (3). Получим: $U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x$ (9).

Это возможно, при разложении функции φ(x) в ряд по системе функций $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$, n=1, 2, ...

(10) $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x$ - ряд Фурье, где φ_n - коэффициенты Фурье и $\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi$.

При сравнении рядов (9) и (10) можно сделать вывод, что $A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l A\,\xi\, sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = \frac{2Al}{n\pi}(-1)^n$.

Ответ. $U(x,t) = \frac{2Al}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x$

Вывод. С течением времени температура стержня понижается до нуля, а для любого фиксированного времени распределение температуры в стержне подчиняется закону, описанному функцией: $U(x, t_0)$.

Метод Фурье для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями.

Пример 2. Найти температуру стержня длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура концов равна нулю, а точке $x_0 \in (0, l)$находится сосредоточенный источник тепла с постоянной мощностью Q.

Поставим задачу

$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t), \qquad x \in [0, l]; t \geq 0 \qquad (1)$

$U(0,t)=U(l, t)=0 \qquad (2)$

$U(x, 0) = 0 \qquad (3)$

$f(x,t) = \frac{Q\delta(x-x_0)}{c\rho}$, где $\delta(x - x_0)$ - дельта - функция Дирака, с - удельная теплоемкость, ρ - удельная плотность. Свойство дельта - функции: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$.

Решение задачи (1)-(3) ищем в виде ряда $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$ (4), где X_n (x) для первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями равна $\sin\frac{\pi n}{l}x$. Итак, $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x$ (4'). Этот ряд удовлетворяет только условию (2).

Разложим f(x,t) в ряд Фурье по той же самой системе функций $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$, n=1, 2, ... , что и для U(x,t).

Тогда имеем $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x$ (5), где $f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\, sin\frac{\pi n}{l}x\, dx$ в нашем случае $f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{Q\delta(x-x_0)}{c\rho}\, sin\frac{\pi n}{l}x\, dx = \frac{2Q}{lc\rho}\int_0^l \delta(x - x_0)\, sin\frac{\pi n}{l}x\, dx = \frac{2Q}{lc\rho} sin\frac{\pi n}{l}x_0$ на основании свойства дельта-функции.

Чтобы найти $T_n(t)$ поставим (4), (5) в (1). Получим $\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin\frac{\pi n}{l}x = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} -T_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x$. Отсюда следует, что для каждого n должно выполняться равенство $T_n'(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) + f_n(t)$. Таким образом, необходимо решить семейство обыкновенных дифференциальных уравнений.

Т.к. $f_n(t) = \frac{2Q}{lc\rho} sin\frac{\pi n}{l}x_0$ - const, то решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

$$T_n(t) = T_n^O + T_n^Ч,$$

где T_n^O — общее решение однородного уравнения,
$T_n^Ч$ — частное решение неоднородного уравнения.

$T_n^{O\prime}(t) = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n^O(t); \quad k = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2$ - характеристическое уравнение. Ему соответствует решение $T_n^O(t) = C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}$.

Частное решение ищем в виде неопределенной константы $T_n^{ч} = A$. На основании определения частного решения, находим A. $(T_n^{ч})' = (A)' = 0;\ 0 = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 A + f_n(t);$ $A = \frac{f_n(t)}{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}$.

$$T_n^{ч} = \frac{2Q}{lc\rho} sin\frac{\pi n}{l} x_0 \frac{l^2}{(a\pi n)^2} = \frac{2Ql}{c\rho(a\pi n)^2} sin\frac{\pi n}{l} x_0.$$

Таким образом, $T_n(t) = T_n^{O} + T_n^{ч} = C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} + \frac{2Ql}{c\rho(a\pi n)^2} sin\frac{\pi n}{l} x_0$ и является той функцией, для которой ряд (4) становится решением ДУ (1), удовлетворяющее граничным условиям (2). Потребуем для ряда (4) выполнение начальных условий (3).

$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x$=0; $T_n(0)$=0; $T_n(0) = C_n + \frac{2Ql}{c\rho(a\pi n)^2} sin\frac{\pi n}{l} x_0 = 0;$ $C_n = -\frac{2Ql}{c\rho(a\pi n)^2} sin\frac{\pi n}{l} x_0$

Ответ. $U(x,t) = \frac{2Ql}{c\rho(a\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\frac{\pi n}{l} x_0}{n^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\right) sin\frac{\pi n}{l} x$

Метод Фурье для решения уравнения теплопроводности с ненулевыми граничными условиями (общая первая краевая задача).

Пример 3.

$U_t = a^2 U_{xx}$, $\quad x \in [0, l]; t \geq 0 \quad$ (1)

$U(0,t)=T;$ (2)

$U(l, t)=U$ (3)

$U(x,0) = 0$ (4)

Решение. С помощью замены *U(x,t)=V(x,t)+W(x,t)* (5), где *V(x, t)* - новая функция, *W(x, t)* - вспомогательная функция (наперед заданная), её необходимо подобрать таким образом, чтобы *V(0,t) = V(l, t) =0* для новой функции (*V(x, t)*) оказалась с нулевыми граничными условиями. Такую задачу мы уже рассматривали для уравнения колебаний. Воспользуемся этими результатами для первой задачи. $W(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, где $\mu_1(t) = T, \mu_2(t) = U$.

Тогда имеем: $W(x,t) = T + \frac{x}{l}(U - T)$.

(5) → (1)

$V_t + W_t = a^2(V_{xx} + W_{xx});$

$V_t + 0 = a^2(V_{xx} + 0);$

$V_t = a^2 V_{xx};$ (1')

$V(0,t) = 0$ (2')

$V(l, t) = 0$ (3')

(5) → (4)

V(x,0)+W(x,0)=0;

$V(x,0)+T+\frac{x}{l}(U-T)=0;$

$V(x,0)=\frac{x}{l}(T-U)-T$ (4')

Итак, решение задачи (1') - (4') связано с решением исходной задачи (1) - (4), уравнением (5) и (7).

$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$ (8) удовлетворяет (2'), (3').

(8) → (1')

$T_n'(t)=-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2T_n(t);\ T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2t};$

(8) → (4')

$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\frac{x}{l}(T-U)-T=\varphi(x),$ *φ(x)* - разложим в ряд $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$ где $\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\underbrace{\left(\frac{\xi}{l}(T-U)-T\right)}_{u}\underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}\xi\ d\xi}_{dV}=\begin{vmatrix}du=\frac{1}{l}(T-U)d\xi\\ V=-\frac{l}{\pi n}cos\frac{\pi n}{l}\xi\end{vmatrix}=$ $\frac{2}{l}\left(\left(\frac{\xi}{l}(T-U)-T\right)\left(-\frac{l}{\pi n}cos\frac{\pi n}{l}\xi\right)\Big|_0^l+\underbrace{\int_0^l\frac{l}{\pi n}cos\frac{\pi n}{l}\xi\frac{1}{l}(T-U)d\xi}_{=0}\right)=\frac{2}{\pi n}(U(-1)^n-T).$

Сравнив два ряда, получаем что $T_n(0)=\varphi_n$ или $C_n=\frac{2}{\pi n}(U(-1)^n-T)$. Тогда $V(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(U(-1)^n-T)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$

Ответ. $U(x,t)=T\left(1-\frac{x}{l}\right)+\frac{xU}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(U(-1)^n-T)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x$