Задание

Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant 1,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)\,, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\left.\left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = \alpha(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\left.\left(\beta_1(t)u + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=1} = \beta(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка $O(h^2{+}\tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- явную схему порядка $O(h^2 + \tau^2)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами порядка $O(h + \tau)$ и $O(h + \tau^2)$ при $\sigma = 0$, $\sigma = 1/2$, $\sigma = 1/4$ (с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$).

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий

1) Алгоритм решения задачи.
2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
3) Тестирование алгоритма, например, на решениях $u(x,t) = x^3 + t^3$, $u(x,t) = x^3 * t^3$, $\sin(2t+1) * \cos(2x)$, $\sin(2t+1) + \cos(2x)$, на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
4) Таблицы решения на «крупной» сетке независимо от шагов по t и x, с которыми строится решение, следующего вида ($N = 5, 10, 20$)[2] :

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1.0						

[2]В качестве M следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном N.

5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

h	τ	$\|\|J\_ex - u^{(h,\tau)}\|\|$	$\|\|u^{(h,\tau)} - u^{(2h,\tau_1)}\|\|$
0.2			————————
0.1			
0.05			

Здесь $\tau,\ \tau_1$ выбираются из условия устойчивости явной схемы.

J_ex — точное решение.

$||V|| = \max|V_{ik}|,\ i = \overline{0,5}, k = \overline{0,5}.$

Неявная схема

Таблица 3

h	τ	$\|\|J\_ex - u^{(h,\tau)}\|\|$	$\|\|u^{(h,\tau)} - u^{(2h,\tau)}\|\|$
0.2			————————
0.1			
0.05			

Здесь $\tau = 1/M, M = 10, 100$ (предусмотреть возможность менять M).

Проанализировать результаты.

Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

Вариант 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+3)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - xu + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant\ 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant\ 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2+1)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \ \ u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant \ 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x\, u + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(0,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 11

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \\
u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{gathered}
$$

Вариант 12

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \\
u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{gathered}
$$

Вариант 13

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \\
u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{gathered}
$$

Вариант 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 15

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 16

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant \; 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 18

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 19

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant \; 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 20

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2+1)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 21

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \ \ u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 22

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant \ 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 23

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+1)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 24

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x\, u + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(0,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 25

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 26

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 27

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 28

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 29

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant \; 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вариант 30

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа

Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \quad f(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \psi(x) \in C_{[0,1]}, \tag{3}$$

$$\alpha_1(t)u(0,t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t), \tag{4}$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geqslant 0, \;\; |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta(t), \tag{5}$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geqslant 0, \;\; |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где Lu может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а)} \quad a(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u, \quad a(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \quad a(x,t) \geqslant a_0 > 0, \\ \text{б)} \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + b(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u, \quad p(x) \in C^1_{[0,1]}, \;\; p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ \qquad b(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \;\; c(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}, \;\; c(x,t) \leqslant 0. \end{cases}$$

Требуется найти в $\bar{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1, \; 0 \leqslant t \leqslant T)$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), (3) и граничным условиям (4), (5).

Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьём отрезок $[0,1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N, \; x_i = ih, \; i = \overline{0,N}$.
Разобьём отрезок $[0,T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = T/M, \; t_k = k\tau, \; k = \overline{0,M}$.
Построим сетку узлов (рис. 1) $\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_i, t_k), \; i = \overline{0,N}; k = \overline{0,M}\}$.

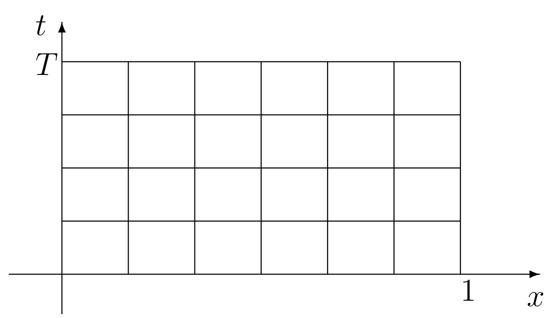

Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции $u^k = \left\{u_i^k\right\}$, определенной на слое k сеточной области $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а)} \;\; a(x_i,t_k)\dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i,t_k)\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i,t_k)u_i^k, \\ \text{б)} \;\; p_{i+\frac{1}{2}}\dfrac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}}\dfrac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i,t_k)\dfrac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i,t_k)u_i^k. \end{cases}$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке $(x_i,\, t_k)$ со вторым порядком аппроксимации, $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, M}$. Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе L достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле $(x_i,\, t_k)$

$$\frac{u_i^{k+1} - 2\,u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h u_i^k + f(x_i,t_k), \;\; i = \overline{1, N-1}, \;\; k = \overline{1, M-1}. \tag{6}$$

Каждое уравнение в (6) содержит значения решения лишь в пяти точках u_i^{k-1}, u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k, u_i^{k+1}, причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

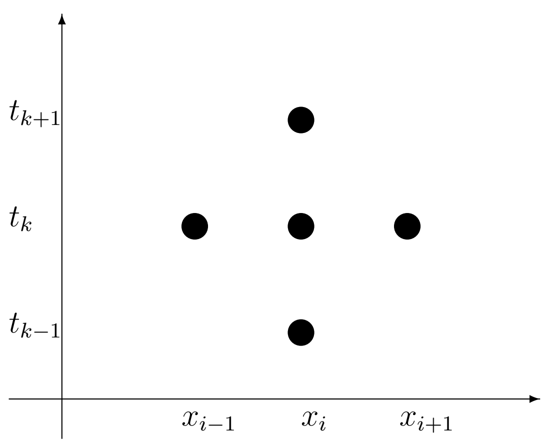

Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \;\; i = \overline{0, N}. \tag{7}$$

Начальное условие (3) аппроксимируем вначале с порядком $\mathrm{O}(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i), \;\; i = \overline{0, N}. \tag{8}$$

Граничные условия (4), (5) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$

$$\alpha_1(t_{k+1})u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} = \alpha(t_{k+1}), \tag{9}$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_N^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{3u_N^{k+1} - 4u_{N-1}^{k+1} + u_{N-2}^{k+1}}{2h} = \beta(t_{k+1}), \tag{10}$$

$k = \overline{1, M-1}$.

Схема (6)-(10) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (6)-(10), причем, вычислив решение при $k = 0$ из (7), при $k = 1$ из (8), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (6), в граничных из (9), (10).

При очевидной простоте реализации явная разностная схема условно устойчива.

Обозначим

$$A = \begin{cases} \max\{a(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\} \text{ в случае а)}, \\ \max\{p(x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \text{ в случае б)}. \end{cases}$$

Пусть $\nu = \dfrac{\tau}{h}$, тогда условие устойчивости имеет вид $\sqrt{A} \cdot \nu \leqslant 1$.

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{11}$$

но оно может быть использовано и при $b(x,t) \neq 0,\ c(x,t) \neq 0$, принимающих "небольшие" значения.

Порядок вычисления решения

1) Из (7) находим $u_i^0,\ i = \overline{0, N}$.

2) Из (8) находим $u_i^1,\ i = \overline{0, N}$.

3) Из (6) находим $u_i^{k+1} = 2\,u_i^k - u_i^{k-1} + \tau^2(L_h u_i^k + f(x_i, t_k)),\ i = \overline{1, N-1}$ при $k = 1$.

4) Из (9) находим u_0^{k+1} при $k = 1$.

5) Из (10) находим u_N^{k+1} при $k = 1$.

Тем самым, решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leqslant M - 1$.

Схема с весами

Пусть σ — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h(\sigma u_i^{k+1} + (1-2\sigma)u_i^k\ + \sigma u_i^{k-1}) + f(x_i, t_k)),\ \ i = \overline{1, N-1}, \tag{12}$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \;\; i = \overline{0, N}. \tag{13}$$

Начальное условие (3) аппроксимируем вначале с порядком $O(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i), \;\; i = \overline{0, N}. \tag{14}$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (4), (5) аппроксимируем с первым порядком

$$\alpha_1(t_k)u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} = \alpha(t_{k+1}), \tag{15}$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_N^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} = \beta(t_{k+1}). \tag{16}$$

Рассмотрим различные значения параметра σ.

1) $\sigma = 0$.

   В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях (4), (5) не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$. Шаблон разностной схемы приведен на рис.2.. .

2) Если $\sigma \neq 0$, то схема (12)-(16) называется неявной трехслойной схемой. Если $\sigma \neq 1/2$, то каждое уравнение в (12) содержит значения решения в девяти точках u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, u_{i+1}^{k+1}, причем в конфигурации, изображенной на рис. 3.

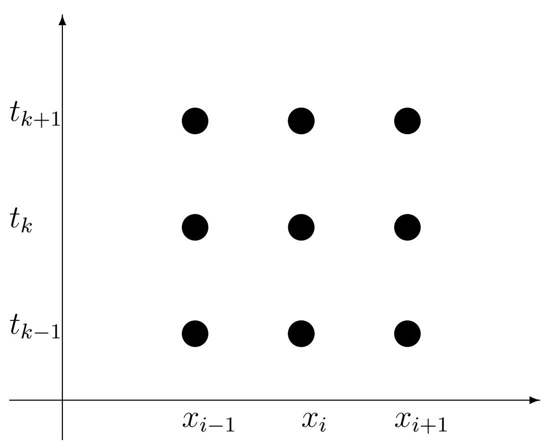

Рис. 3

Так как к моменту определения решения на $(k+1)$-ом слое решение на предыдущих слоях $(k-1)$ и k уже известно, систему (12) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^{k+1} - \frac{1}{\tau^2}u_i^{k+1} = G_i^{k+1}, \tag{17}$$

где

$$G_i^{k+1} = \frac{-2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} - (1-2\sigma)L_h u_i^k - \sigma L_h u_i^{k-1} - f(x_i, t_k), \ \ i = \overline{1, N-1}, \tag{18}$$

$k = \overline{1, M-1}$.

Граничные условия (15), (16) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^{k+1} + C_0 u_1^{k+1} &= G_0^{k+1}, \\ A_N u_{N-1}^{k+1} - B_N u_N^{k+1} &= G_N^{k+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом $(k+1)$-ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида[1]:

$$\begin{array}{rrrcll} & -B_0 u_0^{k+1} & +C_0 u_1^{k+1} & = & G_0^{k+1}, & \\ A_i u_{i-1}^{k+1} & -B_i u_i^{k+1} & +C_i u_{i+1}^{k+1} & = & G_i^{k+1}, & i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^{k+1} & -B_N u_N^{k+1} & & = & G_N^{k+1}, & \end{array} \tag{19}$$

$k = \overline{1, M-1}$.

Для решения системы (19)следует использовать метод прогонки .

Порядок вычисления решения

1) Из (13) находим $u_i^0, \ i = \overline{0, N}$.

2) Из (14) находим $u_i^1, \ i = \overline{0, N}$.

3) Из (19) находим $u_i^{k+1}, \ \ i = \overline{0, N}$ при $k = 1$.

Тем самым, решение на втором слое найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 3 до тех пор, пока $k \leqslant M-1$.

Рекомендуемые значения $\sigma = 1/2, \ \sigma = 1/4$.

При $\sigma = 1/2$ получаем неявную разностную схему с семиточечным шаблоном, изображенным на рис. 4.

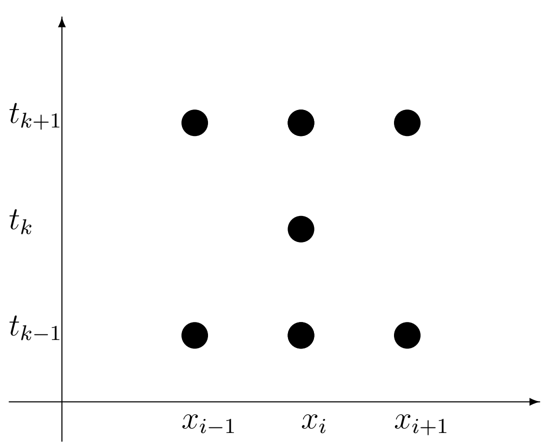

Рис. 4

[1]Коэффициенты A, B, C в линейной системе (19) могут зависеть от номера слоя k, но для краткости верхний индекс $k+1$ здесь и далее опущен.

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях (4), (5) не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$.

При $\sigma = 1/4$ получаем разностную схему с девятиточечным шаблоном, изображенным на рис. 3, устойчивую и имеющую тот же порядок аппроксимации.

Аппроксимация начального условия (3) с порядком $O(\tau^2)$

В рассмотренных выше схемах $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ в уравнении (1) аппроксимируется разностным выражением со вторым порядком по времени. В предыдущем рассмотрении начальное условие (3) аппроксимировалось лишь с первым порядком, т. е. итоговый порядок аппроксимации задачи (1)-(5) по времени был только первый.

Рассмотрим два варианта аппроксимации начального условия (3) со вторым порядком по времени. В обоих вариантах предполагаем, что решение может быть продолжено достаточно гладким образом за пределы области, указанной в (1) настолько, насколько это требуется используемым алгоритмом.

1) Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\left(L\varphi\,|_{x=x_i} + f(x_i, 0)\right). \tag{20}$$

Здесь

$$L\varphi = \begin{cases} \text{а)}\ \ a(x,0)\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + b(x,0)\dfrac{d\varphi}{dx} + c(x,0)\varphi, \\ \text{б)}\ \ \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{d\varphi}{dx}\right) + b(x,0)\dfrac{d\varphi}{dx} + c(x,0)\varphi. \end{cases}$$

2) Второй способ связан со сдвигом сетки по переменной t.