**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
***«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана***
***(национальный исследовательский университет)»***
***(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)***

**ФАКУЛЬТЕТ** ***ИУК «Информатика и управление»***

**КАФЕДРА** ***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

# ДОМАШНЯЯ РАБОТА №1

## «Модели – ДУЧП 2-го порядка»

**ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»**

Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б ________________ ( Калашников А.С. )
(Подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ________________ ( Никитенко У.В. )
(Подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

**Цель**:
Овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками презентации результатов вычислений.

**Задачи**:
Самостоятельно изучить синтаксис и важнейшие структуры библиотеки символьной математики; установление соответствия моделей и физических процессов; приведение ДУЧП2 2-го порядка к каноническому виду.

**Вариант 10**

**Задание:**
Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где тип уравнения сохраняется.
**Задание варианта:**

| Вариант | Дифференциальное уравнение в частных производных |
|---|---|
| 10 | $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0;$ |

**Приведение к каноническому виду:**

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0; \qquad (1)$$

Приведем уравнение в частных производных к каноническому виду.

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dy)^2 = 0 :$$

Коэффициенты в уравнении при вторых производных равны:

$$a = x^2, \qquad b = -xy, \qquad c = -3y^2$$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - ac = x^2y^2 + 3x^2y^2 = 4x^2y^2 \geq 0$

1) Если $D = 0$ то, это уравнение <u>параболистического</u> типа. $x^2y^2 = 0$, когда x = 0 или y=0 Т.е. точки координатных осей являются областью, где уравнение является уравнением параболического типа.

Для x=0; y≠0; $-3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0;$

Для x≠0; y=0; $x^2u_{xx} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0;$

Для x=0; y=0; уравнение вырождается в уравнение первого порядка $-2xu_x +$ $+ 4yu_y + 16x^4u$ = 0

Составим характеристическое уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{x^2} = \frac{-y}{x}$$

$$\int dy = \int \frac{-y}{x} dx = C$$

$$C = y(1+\ln(x))$$

Переменную $\eta$ выбираем любой функцией, $\psi(x,y) = \eta$, независимой от $\xi$ . Пусть $\eta = x$:

$$\xi_x = \frac{y}{x}, \qquad \xi_{xx} = -\frac{y}{x^2} \qquad \xi_y = \ln(x)+1, \qquad \xi_{yy} = \xi_{yx} = \xi_{xy} = 0$$

$$\eta_x = 1,\ \eta_{xx} = 0\ \eta_y = 0,\ \eta_{yy} = 0$$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = \frac{y}{x} u_\xi + u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = (\ln(x)+1)u_\xi$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot {\xi_x}^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \eta_x \cdot \xi_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

$$= u_{\xi\xi} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - \frac{y}{x^2} u_\xi$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot {\xi_y}^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \eta_y \cdot \xi_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

$$= (\ln(x)+1)^2 u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\,(\eta_y \cdot \xi_x + \eta_x \cdot \xi_y) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

$$= (\ln(x)+1\,)u_{\xi\eta}$$

Подставляем найденные частные производные в исходное уравнение

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0;$$

Получаем:

$$x^2\left(u_{\xi\xi}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - \frac{y}{x^2} u_\xi\right) + 2xy\Big((\ln(x)+1\,)u_{\xi\eta}\Big)$$
$$- 3y^2\big((\ln(x)+1)^2u_{\xi\xi}\big) - 2x\left(\frac{y}{x}u_\xi + u_\eta\right) + 4y\Big((\ln(x)+1)u_\xi\Big)$$
$$+ 16x^4u = 0;$$

$$u_{\xi\xi}\,y^2 + 2yx\,u_{\xi\eta} + x^2u_{\eta\eta} - y\,u_\xi + 2xy(\ln(x)+1\,)u_{\xi\eta} - 3y^2\,(\ln(x)+1)^2u_{\xi\xi}$$
$$- 2yu_\xi - 2xu_\eta + 4y(\ln(x)+1)u_\xi + 16x^4u = 0;$$

$$u_{\xi\xi}\,y^2 + 2yx\,u_{\xi\eta} + x^2u_{\eta\eta} - y\,u_\xi + 2xy(\ln(x)+1\,)u_{\xi\eta} - 3y^2\,(\ln(x)+1)^2u_{\xi\xi}$$
$$- 2yu_\xi - 2xu_\eta + 4y(\ln(x)+1)u_\xi + 16x^4u = 0;$$

$$y^2(1-3\,(\ln(x)+1)^2)u_{\xi\xi} + 2xy\big(1+(\ln(x)+1\,)\big)u_{\xi\eta} - y(3-4(\ln(x)+1))u_\xi$$
$$+ x(xu_{\eta\eta} - 2u_\eta) + 16x^4u = 0;$$

Приводим подобные слагаемые, получим:

$+2xy\big(1+(\ln(x)+1\,)\big)u_{\xi\eta}+x(xu_{\eta\eta}-2u_{\eta})+16x^4u$

$$=y(3-4(\ln(x)+1))u_{\xi}-y^2(1-3\,(\ln(x)+1)^2)u_{\xi\xi}\;-x(xu_{\eta\eta}-2u_{\eta})-16x^4u$$

2) Если $D>0$ то, это уравнение гиперболического типа на всей плоскости $(x,y)$. Составим характеристическое уравнение:

$$\frac{dy}{dx_1}=\frac{xy+2xy}{x^2}=\frac{3y}{x} \qquad \frac{dy}{dx_2}=\frac{xy-2xy}{x^2}=\frac{-y}{x}$$

$$\int dy=\int\frac{3y}{x}dx=C_1. \qquad \int dy=\int\frac{-y}{x}dx=C_2.$$

После интегрирования получим уравнение характеристики:

$$C_1=y(1-3\ln(x)) \qquad C_2=y(1+\ln(x))$$

В качестве одной новой переменной возьмем эту характеристику, вторую переменную можно взять произвольно, только чтобы преобразование координат не было вырожденным. Сделаем замену $z(x,y)=v(\xi,\eta)$, где:

$$\begin{cases}\xi=y(1-3\ln(x))\\ \eta=y(1+\ln(x))\end{cases}$$

$$\xi_x=\frac{-3y}{x},\;\; \xi_y=1-3\ln(x)\,,\xi_{xx}=\frac{3y}{x^2},\; \xi_{xy}=\;\xi_{yx}=\;\xi_{yy}=0,$$

$$\eta_x=\frac{y}{x},\;\; \eta_y=\ln(x)+1,\eta_{xx}=-\frac{y}{x^2},\;\; \eta_{yx}=\eta_{xy}=\eta_{yy}=0$$

Найдем вид уравнения в новых переменных $(\xi,\eta)$, для этого вычислим частные производные функции $u$:

$$u_x=v_{\xi}\cdot\xi_x+v_{\eta}\cdot\eta_x=v_{\xi}*\frac{-3y}{x}+v_{\eta}*\frac{y}{x}$$

$$u_y=v_{\xi}\cdot\xi_y+v_{\eta}\cdot\eta_y=v_{\xi}*(1-3\ln(x))+v_{\eta}*(\ln(x)+1)$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(u_x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v_{\xi}*\frac{-3y}{x}+v_{\eta}*\frac{y}{x}\right)=\frac{3yv_{\xi\xi}-yv_{\eta\eta}}{x^2}$$

$$u_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\big((v_{\xi}*(1-3\ln(x))+v_{\eta}*(\ln(x)+1)\big)=0$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{-3v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}}{x}$$

Подставляем найденные частные производные в исходное уравнение:

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4 u = 0$$

$$x^2 \frac{3yv_{\xi\xi} - yv_{\eta\eta}}{x^2} + 2xy\left(\frac{-3v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}}{x}\right) - 2x\left(v_\xi * \frac{-3y}{x} + v_\eta * \frac{y}{x}\right) + 4y(v_\xi * (1 - 3\ln(x)) + v_\eta * (\ln(x) + 1)) + 16x^4 u = 0$$

$$3yv_{\xi\xi} - yv_{\eta\eta} - 6yv_{\xi\xi} + 2yv_{\xi\eta} + 6yv_\xi - 2yv_\eta + 4y(v_\xi * (1 - 3\ln(x)) + v_\eta * (\ln(x) + 1)) + 16x^4 u = 0$$

$$2yv_{\xi\eta} = yv_{\eta\eta} + 3yv_{\xi\xi} - 10yv_\xi - 2yv_\eta + 12\, yv_\xi \ln(x) - 4yv_\eta * \ln(x) - 16x^4 u$$

Приводим подобные слагаемые, получим:

$$2yv_{\xi\eta} = yv_{\eta\eta} + 3yv_{\xi\xi} - 2yv_\xi(5 + 6\ln(x)) - 2yv_\eta(1 + 2 * \ln(x)) - 16x^4 u$$

**Вывод:** в ходе выполнения данной домашней работы были приобретены практические навыки использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений, выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования, навыками классификации ДУЧП2.