杭州电子科技大学

实验报告

课程名称：密码学课程设计　　姓名：苏展　　学号：　18271329

实验地点：科技馆 620　　实验时间：2020-6-2

一、实验名称：RSA 密码实验

二、实验要求：

1、了解公钥密码的起源与涵义。

2、掌握 RSA 密码的加解密原理。

3、用 Visual C++实现 RSA 密码并输出结果。

三、实验内容：

1、公钥密码体制的概念由 Diffie 和 Hellman 于 1976 年提出，用于解决对称密码体制中密钥分配的问题。在公钥密码体制中，密钥被分为公钥与私钥，公钥是公开的，用于加密；私钥是保密的，用于解密。经过四十余年的研究发展，RSA 密码、ElGamal 密码、椭圆曲线密码等等公钥密码体制在商业、军事上都已经得到了广泛的应用。

2、RSA 密码由 R. Rivest、A. Shamir 和 L. Adleman 于 1977 年提出，是最著名的公钥密码，能够抵抗到目前为止已知的绝大多数密码攻击，已被 ISO 推荐为公钥数据加密标准。RSA 密码的安全性基于这样一个事实：将两个大素数 p, q 相乘十分容易，但对其乘积 N=pq 作因子分解却极其困难。在本实验中，假设 p,q 均为 len 比特素数，具体描述如下：

系统参数

大素数 p、q：len 比特素数（即 $2^{len-1} \le p,q < 2^{len}$ 且 p、q 为素数）

乘积 N：N = p*q，约为 2*len 比特

N 的欧拉函数值 $\varphi(N)$： $\varphi(N)=(p-1)(q-1)$

公钥

(N,e)：其中 e 满足 1<e< $\varphi(N)$ 且 gcd (e, $\varphi(N)$) = 1

私钥

(N,d)：其中 d 满足 1<d< $\varphi(N)$ 且 $ed \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \varphi(N))$，即 $d = e^{-1} \bmod \varphi(N)$

明文

正整数 m：满足 1<m<N

加密

密文 $c = m^e (\mathrm{mod}\ N)$

解密

密文 $m = c^d (\mathrm{mod}\ N)$

思考题：

为什么 RSA 密码能正确解密？请在此写出详细的证明过程。

pq = N　p,q 为两个质数

记[N,e], [N,d]分别为算法中的公钥和私钥，根据算法性质知 ed = 1 mod (p-1)(q-1)　这里的等号为模等，下同

则 ed=1 mod (p-1)　ed=1 mod (q-1)

记 n 为明文，则 n^e=c mod N，　c 为密文

设 ed = a(p-1) + 1 a > 1

则解密过程 c^d = n^e^d = n^(ed) = n^[a(p-1)+1]=n*n^[a(p-1)]

因 p 为质数，根据欧拉定理有 n^(p-1) = 1 mod p

故 n^[a(p-1)] = 1 mod p

n*n^[a(p-1)] = n mod p，即 c^d = n mod p

同理可证 c^d = n mod q

因为 p,q 都为质数，　所以　c^d = n mod pq，即　c^d = n mod N

3、使用 Visual C++编写程序，实现 RSA 密码并输出结果。

编程的关键是实现大整数运算，包括模加、模乘、模幂等等运算，所以考虑使用无符号字符数组表示大整数，即使用 256 进制表示大整数，用结构体实现。

1) 新建一个空项目，取名 rsa。

2) 添加 cpp 文件，取名为 rsa.cpp。

3) 在 rsa.cpp 文件中先写入

```
#include<time.h>
#include<iostream>
using namespace std;

#define  SIZE  33            //SIZE 是数组长度,能表示的最大整数的bit 数是 8*SIZE,
                             //SIZE 可自由选取

typedef struct Bigint        //用于表示大整数的无符号字符数组
{
    unsigned char num[SIZE];
}Bigint;

typedef struct Bigint2       //大整数乘法可能需要的数组长度是原数组的两倍
{
    unsigned char num[2*SIZE];
}Bigint2;
```

4) 可能需要的函数

```
//初始化
Bigint Init(unsigned char a[], int length);
//复制
void Copy(Bigint &a, Bigint b);
//打印输出
void Print(Bigint a);
//计算数组长度
int Length(Bigint a);
int Length(Bigint2 a);
//比较大小
int Compare(Bigint a, Bigint b);   //a>b,a=b,a<b 分别输出 1,0,-1
int Compare(Bigint2 a, Bigint2 b); //a>b,a=b,a<b 分别输出 1,0,-1
//左移 loop 个字节
Bigint MoveLeft(Bigint a, int loop);
Bigint2 MoveLeft(Bigint2 a, int loop);
//右移一个比特
void BitMoveRight(Bigint &a);
//扩充数组
Bigint2 Extend(Bigint a);
//截断数组
Bigint Narrow(Bigint2 a);
//生成随机数
```

```
Bigint BigRand(Bigint n);  //生成 1 到 n 之间的随机数
Bigint BigRandOdd(int bytes); //生成 bit 数是 8*bytes 的随机奇数

//基本运算
Bigint Add(Bigint a, Bigint b); // 加法: 输入 a,b, 返回 a + b
Bigint Sub(Bigint a, Bigint b); // 减法: 输入 a>b, 返回 a - b
Bigint2 Sub(Bigint2 a, Bigint2 b); // 减法: 输入 a>b, 返回 a - b
Bigint2 Mul(Bigint a, Bigint b); // 乘法: 输入 a,b, 返回 a * b
Bigint Div(Bigint a, Bigint b); // 除法: 输入 a,b, 返回 a / b
Bigint Mod(Bigint a, Bigint b); // 求余: 输入 a,b, 返回 a % b
Bigint2 Mod(Bigint2 a, Bigint2 b); // 求余: 输入 a,b, 返回 a % b

Bigint AddMod(Bigint a, Bigint b, Bigint n); // 模加: 计算 a + b mod n
Bigint SubMod(Bigint a, Bigint b, Bigint n); // 模减: 计算 a - b mod n(要求 a>b)
Bigint Sub2Mod(Bigint a, Bigint b, Bigint n); // 模减: 计算 a - b mod n
Bigint MulMod(Bigint a, Bigint b, Bigint n); // 模乘: 计算 a * b mod n
Bigint PowMod(Bigint a, Bigint b, Bigint n); // 模幂: 计算 a ^ b mod n

//MillerRabin 素性检测
bool MillerRabinKnl(Bigint &n);          //单次素性检测，通过返回 1，否则返回 0
bool MillerRabin(Bigint &n, long loop); //loop 次素性检测，通过返回 1，否则返回 0

//生成 bit 数是 8*bytes 的素数
Bigint GenPrime(int bytes);

//生成私钥
bool Inverse(Bigint e, Bigint phiN, Bigint &d); //计算 d = e^-1 mod φ(N)
//加密
Bigint Encrypt(Bigint m, Bigint e, Bigint N);  //计算 c = m^e mod N
//解密
Bigint Decrypt(Bigint c, Bigint d, Bigint N);  //计算 m = c^d mod N
```

5) 编写主函数，主要步骤有

生成并输出大素数 p、q 及其乘积 N=pq；

输出公钥 e；

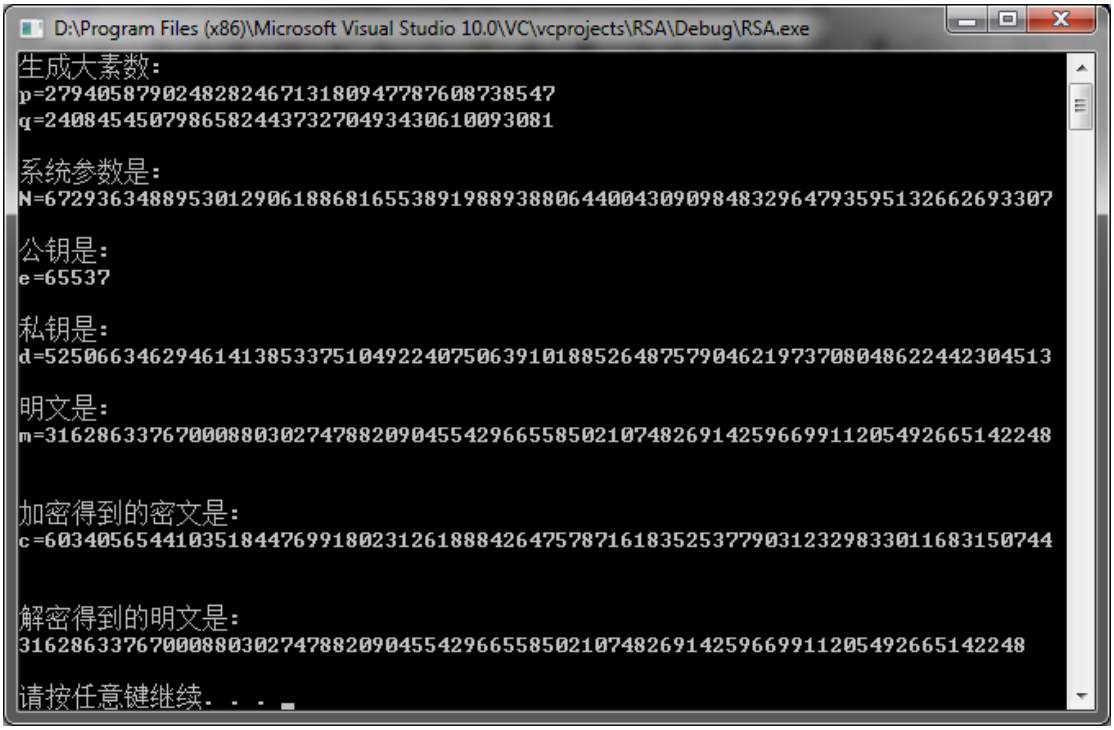
输出私钥 d；

随机生成并输出明文；

加密并输出密文；

解密并输出解密后的明文。

如下所示：



提示点：

1) 无符号字符的范围是 0~255，所以大整数是用 256 进制表示的。

   假设数组 a 里元素分别为 a.num[0], a.num[1],……,a.num[SIZE-1]

   则 a 表示的数为

   a.num[0] * 1 + a.num[1] * 256 + a.num[SIZE-1] * 256^{SIZE-1}

2) 为了加密速度快，本次实验的公钥 e 可选定 65537(实际当中也很常用)，其 256 进制表示是{1,0,1}。

3) 实验中涉及到的数都是非负数，所以减法运算需要先判断大小。

4) 大整数乘法已用 2 倍长数组保证不溢出，而大整数加法可能会溢出，所以 SIZE 定义时要比 N 的实际大小多一点。比如 N 是 80bit(10 字节)，那么 SIZE 应该定义成 11。

4) 测试小整数示例时可用 Bigint a = {0}, Bigint a = {1}, Bigint a={15}类似的初始化命令。

5) 部分函数参考代码在”RSA 密码_部分参考代码.doc”中有提供

四、实验报告：

本次实验要求实现 p,q 均为 128bit(16 字节)的情形，SIZE 可定义为 33。

1) RSA 密码程序代码如下：

```python
#!/usr/bin/python
# -*- coding: UTF-8 -*-

from PyQt5 import QtCore, QtGui, QtWidgets
import sys
from Ui_RSA import Ui_MainWindow
import random
import secrets

class Min(QtWidgets.QMainWindow,Ui_MainWindow):
    def __init__(self,parent=None): #ui 部分
        super().__init__()
        self.setupUi(self)
        self.sj.clicked.connect(self.func1)
        self.jm.clicked.connect(self.func2)
        self.jm2.clicked.connect(self.func3)
        self.m1=[]
        self.c=[]

    def func1(self):
        """
        生成随机密钥
        """
        self.nump=self.GenPrime(16)
        self.numq=self.GenPrime(16)
        self.numN=self.nump*self.numq
        self.numPhiN=(self.nump-1)*(self.numq-1)
        self.nume=self.GenE(self.numPhiN)
        self.numd=self.Inverse(self.nume,self.numPhiN)
        #显示
        self.P.setPlainText(str(self.nump))
        self.Q.setPlainText(str(self.numq))
        self.N.setPlainText(str(self.numN))
        self.e.setPlainText(str(self.nume))
        self.d.setPlainText(str(self.numd))


    def func2(self):
        """
        加密
        """
        self.m=list(self.mw.toPlainText())
        for ms in self.m:
```

```
            self.c.append(str(self.fast_power(ord(ms) , self.nume, self
.numN)))
        self.mw2.setPlainText(''.join(self.c))

    def func3(self):
        """
        解密
        """
        for cs in self.c:
            cs=int(cs)
            self.m1.append(chr(self.fast_power(cs , self.numd, self.num
N)))
        self.jmw.setPlainText(''.join(self.m1))

    def Inverse(self, e, N):

        r1 = e
        r2 = N
        s1 = 1
        s2 = 0
        while (1):
            if (r1 == 0):
                return 0
            if (r1 == 1):
                d = s1
                return d
            q = r1 // r2
            s = self.Sub2Mod(s1, (q* s2% N), N)
            r = r1-(q* r2)
            r1 = r2
            s1 = s2
            s2 = s
            r2 = r

    def Sub2Mod(self, a, b, n):

        while (a - b < 0):
            a += n
        return (a - b)

    def GenE(self, PhiN):
        e = random.randint(0,PhiN)
        g = self.GCD(PhiN,e)
        while g != 1:
```

```
            e = random.randint(0,PhiN)
            g = self.GCD(PhiN,e)
        return e


    def GCD(self,a,b):
        if a%b == 0:
            return b
        else :
            return self.GCD(b,a%b)

    def fast_power(self, base, power, n):
        """
        快速模幂运算
        """
        result = 1
        tmp = base
        while power > 0:
            if power&1 == 1:
                result = (result * tmp) % n
            tmp = (tmp * tmp) % n
            power = power>>1
        return result

    def Miller_Rabin(self, n, iter_num):
        """
        Miller_Rabin 素性检测
        """
        # 2 is prime
        if n == 2:
            return True
        # if n is even or less than 2, then n is not a prime
        a=n&1
        if n&1 == 0 or n<2:
            return False
        # n-1 = (2^s)m
        m,s = n - 1,0
        while m&1==0:
            m = m>>1
            s += 1
        # M-R test
        for _ in range(iter_num):
            b = self.fast_power(random.randint(2,n-1), m, n)
            if b==1 or b== n-1:
                continue
```

```
            for __ in range(s-1):
                b = self.fast_power(b, 2, n)
                if b == n-1:
                    break
            else:
                return False
        return True

    def RandOdd(self, byte):
        """
        生成若干 bytes 的随机奇数
        """
        byte*=8
        num=secrets.randbits(byte)
        if num&1 == 0:
            num+=1
        return num

    def GenPrime(self, byte):
        """
        生成若干 bytes 的随机素数
        """
        res=self.RandOdd(byte)
        while self.Miller_Rabin(res,20) == False:
            res=self.RandOdd(byte)
        return res

if __name__ == '__main__':
    app = QtWidgets.QApplication(sys.argv)
    ui=Min()
    ui.show()
    sys.exit(app.exec_())
```

2) RSA 密码输出界面截屏如下：

附加题：

实现 RSA 密码的 MFC 图形化界面