卡尔曼滤波理解与公式推导

公式

（一）两个方程

（二）五个公式

一、问题建模

二、公式推导

（一）时间更新方程

（二）状态更新方程

三、理解

（一）协方差矩阵的理解

公式

（一）两个方程

(1)状态方程：

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1}$$

(2)观测方程：

$$Z_k = H_k x_k + v_k$$

（二）五个公式

(1)卡尔曼滤波器时间更新方程：

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_{k-1}$$
$$P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_{k-1}$$

(2)卡尔曼滤波器状态更新方程：

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(Z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})$$
$$K_k = P_{k|k-1}^T H_k S_k^{-1}$$
$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

参数含义：

$\hat{x}_{k|k-1}$　　表示在k−1时刻对k时刻对状态的最优估计的结果；

$P_{k|k-1}$　　表示k−1时刻对k时刻预测结果的协方差矩阵，对称矩阵；

$\hat{x}_{k|k}$　　表示在k时刻根据观测得到的后验状态估计值；
$P_{k|k}$　　表示k时刻状态估计量的协方差，对称矩阵；
K_k　　卡尔曼增益；
H_k　　观测矩阵；

一、问题建模

设我们正在观测马路上一辆小车的状态X（包括位置P和速度V），记 $X = [P\,V]^T$ 。假设我们已经知道了小车在k−1时刻的状态 $x_{k-1} = [p_{k-1}\,v_{k-1}]^T$ 和小车的速度控制量 a_{k-1} ，对于k时刻我们可以知道：

$$p_k = p_{k-1} + v_{k-1}\Delta t + a_{k-1}\Delta t^2/2$$
$$v_k = v_{k-1} + a_{k-1}\Delta t$$

设状态转移矩阵为：

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设控制输入矩阵为：

$$B_k = \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则对于k时刻的状态求解方程我们可以改写为：

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1}$$

但是在实际情况下，小车的状态可能会因为车轮打滑、颠簸等原因受到外界的影响，但是这个扰动一般是无法测量的，所以我们在此引入较为理想的零均值高斯白噪声，则上式可以改写为：

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1} \cdots \quad (1)$$

其中： $w_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$ ， Q_{k-1} 为 w_{k-1} 的协方差矩阵。

这就是系统的**状态转移方程。**

如上是针对系统本身进行状态估计的方法，但是这种方式会由于每一次估计状态时存在噪声误差，在持续地预测估计会变得不可靠。为了解决这个问题，我们引入一个外部观测（如GNSS）对小车的状态进行观测，并将其作为估计系统状态的另一种方式。观测值与真实值的关系可以写作一个**观测方程：**

$$z_k = H_k x_k + v_k \cdots \quad (2)$$

其中： $v_{k-1} \sim N(0, R_{k-1})$ ， R_{k-1} 为 v_{k-1} 的协方差矩阵。

因为由量测系统得到的状态不存在累积误差，但使用这种方式演变时也会很不平滑。这时我们就需要将两者得到的状态有效结合起来。这就是卡尔曼滤波的任务。

二、公式推导

（一）时间更新方程

通过前面的公式（1）我们假设已经知道系统k–1时刻的状态后验估计值 $x_{k-1|k-1}$ ，则可以通过状态转移方程，得到对k时刻的**预测状态方程**：

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_{k-1} \cdots (3)$$

这个预测状态的协方差为：

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= cov(\hat{x}_{k|k-1}) \\ &= cov(A_k \hat{x}_{k-1|k-1}) + cov(B_k u_k) + cov(w_{k-1}) \\ &= A_k cov(\hat{x}_{k-1|k-1}) A_k^T + 0 + Q_{k-1} \\ &= A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_{k-1} \cdots (4) \end{aligned}$$

到此，就得到了卡尔曼滤波器的时间更新公式，但是这个更新方程并没有用到量测值。如果我们在k时刻得到了量测值 z_k ，那该如何在先验 $\hat{x}_{k|k-1}$ 和 z_k 的基础上得到后验状态 $\hat{x}_{k|k}$ 呢?

（二）状态更新方程

参照递推最小二乘法的量测更新方程，可以定义卡尔曼滤波的量测更新方程：

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k$$

其中： $y_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$,为量测残差。

量测更新方程则可以写为：

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \cdots (5)$$

同样的，如果想要使得我们的后验估计值最为准确，就需要一个合理的卡尔曼增益 K_k ，可以通过使均方误差 $E(|x_k - \hat{x}_{k|k}|^2)$ 最小来求解最优的卡尔曼增益。

$\hat{x}_{k|k}$ 的协方差为：

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= cov(\hat{x}_{k|k-1}) \\ &= cov(-\hat{x}_{k|k}, -\hat{x}_{k|k}) \\ &= cov(x_k - \hat{x}_{k|k}, x_k - \hat{x}_{k|k}) \\ &= E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T] \cdots (6) \end{aligned}$$

我们可以得到：

$$tr(P_{k|k}) = E(|x_k - \hat{x}_{k|k}|^2)$$

同样的：

$$
\begin{aligned}
P_{k|k} &= cov(x_k - \hat{x}_{k|k}) \\
&= cov(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k)) \\
&= cov(x_k - \hat{x}_{k|k-1} - K_k z_k + K_k H_k \hat{x}_{k|k-1}) \\
&= cov(x_k - \hat{x}_{k|k-1} - K_k (H_k x_k + v_k) + K_k H_k \hat{x}_{k|k-1}) \\
&= cov[(I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}]) - K_k v_k] \\
&= cov[(I - K_k H_k) x_k] - cov[(I - K_k H_k)\hat{x}_{k|k-1}] - cov(K_k v_k) \\
&= 0 + (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\
&= P_{k|k-1} - P_{k|k-1}(K_k H_k)^T - (K_k H_k) P_{k|k-1} + K_k H_k P_{k|k-1} (K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\
&= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T K_k^T - K_k H_k P_{k|k-1} + K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k) K_k^T
\end{aligned}
$$

上式对卡尔曼增益 K_k 求导可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{d[tr(P_{k|k})]}{dK_k} &= \frac{d[tr(P|_{k|k-1})]}{dK_k} - \frac{d[tr(P_{k|k-1} H_k^T K_k^T)]}{dK_k} - \frac{d[tr(K_k H_k P_{k|k-1})]}{dK_k} + \frac{d[tr(K_k S_k K_k^T)]}{dK_k} \\
&= \frac{d[tr(K_k H_k P_{k|k-1}^T)]}{dK_k} - (H_k P_{k|k-1})^T + K_k S_k + K_k S_k^T \\
&= -2(H_k P_{k|k-1})^T + 2 K_k S_k \cdots (7)
\end{aligned}
$$

其中， $S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$,为对称矩阵。

令上式等于0，则可以得到：

$$K_k S_k = (H_k P_{k|k-1})^T$$

则最优卡尔曼增益为：

$$K_k = (H_k P_{k|k-1})^T S_k^{-1} = P_{k|k-1}^T H_k S_k^{-1} \cdots (8)$$

将 K_k 带入 $P_{k|k}$ 可以得到**最优估计的协方差** $P_{k|k}$ ：

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \cdots (9)$$

三、理解

（一）协方差矩阵的理解

在状态预测和更新时我们分别对 $\hat{x}_{k|k-1}$ 和 $\hat{x}_{k|k}$ 计算了协方差矩阵 $P_{k|k-1}$ 和 $P_{k|k}$ ，但是在预测步骤时我们并没有使用协方差矩阵来优化我们的预测结果，那么计算协方差矩阵的意义是什么?

首先看下面状态更新公式：

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H_k\hat{x}_{k|k-1})$$
$$K_k = (H_kP_{k|k-1})^TS_k^{-1} = P_{k|k-1}^TH_kS_k^{-1}$$
$$S_k = H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k$$

从公式可以理解协方差矩阵的意义为定量分析预测值和观测值的不可靠程度，以此量化预测值和观测值在状态更新时的作用的不同。假设预测值不可靠，则 $P_{k|k-1}$ 的值就会偏大，由公式可以看出，$P_{k|k-1}$ 的值会使卡尔曼增益变大，从而提高观测值在状态更新时的作用，这是符合我们的认知的。相同的，如果观测值不可靠，则 R_k 会偏大，从而降低观测值对更新状态的影响。