多交互模型(IMM)

思想：

状态估计问题依赖于目标运动模型来预测和更新目标状态。然而，在城市环境中，被跟踪的物体不一定按照定义明确的模型移动。即使有一个表示物体轨迹的完美运动模型，也不能保证物体会一直遵循一个特定的运动模型。交互式多模型 IMM *（Interacting Multiple Model）*控制算法的主体思想是基于贝叶斯理论而提出的模型间的自动识别与切换。其流程图如下图：

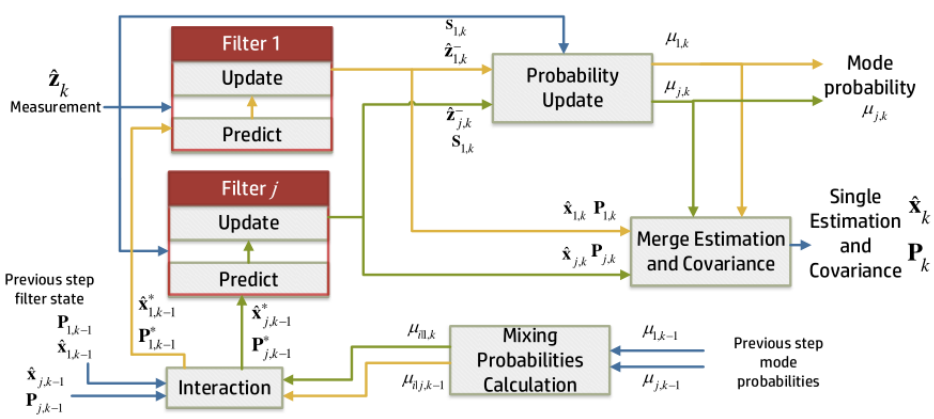

Figure 3-6: Schematics of IMM Filter. The IMM can be extended to $j-th$ filter with r amount of different motion model.

算法步骤：

系统模型：

假设具有运动模型不确定性的系统演化为跳变马尔可夫线性系统(JLMS)，定义表示各模型j的随机状态空间系统动力学和测量方程为：

$$x_{k+1} = f_j(x_k, u_k) + w_{j,k}$$

$$z_k = h_j(x_k, u_k) + v_{j,k}$$

其中， $j = 1, 2, ...r$ 是模型集合 $M = \{M_j\}_{j=1}^r$ 的个数，即滤波器的个数，状态量和观测量与卡尔曼滤波中一致。

在贝叶斯框架中，我们可以推断IMM后验联合概率：

$$p(x_k, M_k|z_k)$$

即给定时间k之前的所有测量值 z ，推断 K时刻的模型和离散状态量 x_k 的联合概率。我们进一步分解上式：

$$p(x_k, M_k|z_k) = p(x_k, M_k|z_k)p(M_k|z_k)$$

$$p(M_k|z_k) = \sum_{j=1}^{r} p(M_{j,k}|z_k) = 1$$

$$p(x_k, M_k|z_k) = \sum_{j=1}^{r} p(x_k, M_k|z_k)p(M_{j,k}|z_k)$$

$$\mu_{j,k} = p(M_{j,k}|z_k)$$

定义了 $\mu_{j,k}$ ，即在*k*时刻状态符合第 j 个运动模型的后验概率，观测值一般是置后的，故递归形式的上式为：

$$p(x_{k-1}, M_k|z_{k-1}) = \sum_{j=1}^{r} p(x_{k-1}, M_{j,k}|z_{k-1})p(M_{j,k}|z_{k-1})$$

其中 $p(M_{j,k}|z_{k-1})$ 为已知 $k-1$ 时刻观测值，对*k*时刻为模型 j *的模型预测概率，即下式定义的* $\mu_{i|j,k-1}$

$$p(x_{k-1}, M_k|z_{k-1}) = \sum_{j=1}^{r} p(x_{k-1}, M_{j,k}|z_{k-1})\mu_{i|j,k-1}$$

其中

$$\mu_{i|j,k-1} = \frac{p_{ij}\mu_{i,k-1}}{\sum_{j=1}^{r} p_{ij}\mu_{i,k-1}}$$

定义：

$$\mu_{j,k}^{-} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}\mu_{i,k-1}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{r,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,r} & \cdots & p_{r,r} \end{bmatrix}$$

式中， p_{ij} 是模型 i 转移到 j 的转移概率， $\mu_{i,k-1}$ ，为 $k-1$ 时刻是模型i的概率，$\mu_{j,k}^{-}$ 为归一化系数，即从 $k-1$ 时刻到 k 时刻所有模型转移概率的和。

步骤1（交互）：

IMM的交互步骤即将前一时刻每个滤波器 j 的后验状态量和协方差进行模型概率的加权组合，形成 j 个混合了更新后模型的初始输入： $\hat{x}_{j,k-1}^{*}$ ，$P_{j,k-1}^{*}$ 具体计算：

$$\hat{x}_{j,k-1}^{*} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{(i|j),k-1} \hat{x}_{i,k-1}$$

$$P_{j,k-1}^{*} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{(i|j),k-1} \hat{x}_{i,k-1} [P_{i,k-1} + (\hat{x}_{j,k-1} - \hat{x}_{j,k-1}^{*})(\hat{x}_{j,k-1} - \hat{x}_{j,k-1}^{*})^{T}]$$

步骤2（预测）：

将上一步的交互模型 $x_{j,k-1}^{*}$ ， $P_{j,k-1}^{*}$ 带入对应的 $-j$ 卡尔曼滤波器的预测方程，得到各自的预测值 $x_{j,k}^{-}$,协方差 $P_{j,k-1}^{-}$,同时还会得到基于每个模型的观测值 $\hat{z}_{j,k}^{-}$ 和预测值,计算创新协方差 $S_{j,k}$

步骤3（更新）：

同样，滤波器更新的过程是由特定于 $-j$ 模型的卡尔曼滤波器来完成的，滤波器更新的结果：后验状态值 $\hat{x}_{j,k}$ 和更新的创新协方差 $P_{j,k}$

同时利用当前观测的信息更新当前时刻模型的概率：

$$\mu_{j,k} = \frac{\lambda_{jk} \mu_{j,k}^{-}}{\sum_{j=1}^{r} \lambda_{jk} \mu_{i,k}^{-}}$$

$$\mu_{j,k} = \frac{\lambda_{jk} \sum_{i=1}^{r} p_{ij} \mu_{i,k-1}}{\sum_{j=1}^{r} \lambda_{ik} \mu_{i,k}^{-}}$$

其中， $\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ik} \mu_{i,k}^{-}$ 为归一化系数， λ_{ij} 是当前时刻观测的高斯似然函数：

$$\lambda_{jk} = \frac{1}{\sqrt{|2\pi S_{j,k}|}} e^{0.5(z_k - \hat{z}_{j,k}^{-})^{T} S_{j,k}^{-1} (z_k - \hat{z}_{j,k}^{-})}$$

步骤4（融合）：

每个 $-j$ 滤波器的输出进行模型加权融合，得到最终后验估计 $\hat{x}_k$ 和协方差 P_k ：

$$\hat{x}_k = \sum_{j=1}^{r} \mu_{j,k} \hat{x}_{j,k}$$

$$P_k = \sum_{j=1}^{r} (P_{j,k} + (\hat{x}_{j,k} - \hat{x})(\hat{x}_{j,k} - \hat{x})^T)$$