# 无迹卡尔曼滤波(UKF)

UT变换
思想：
UT变换步骤(预测)：
步骤1：
步骤2：
步骤3：
步骤4：
更新步骤：

## UT变换

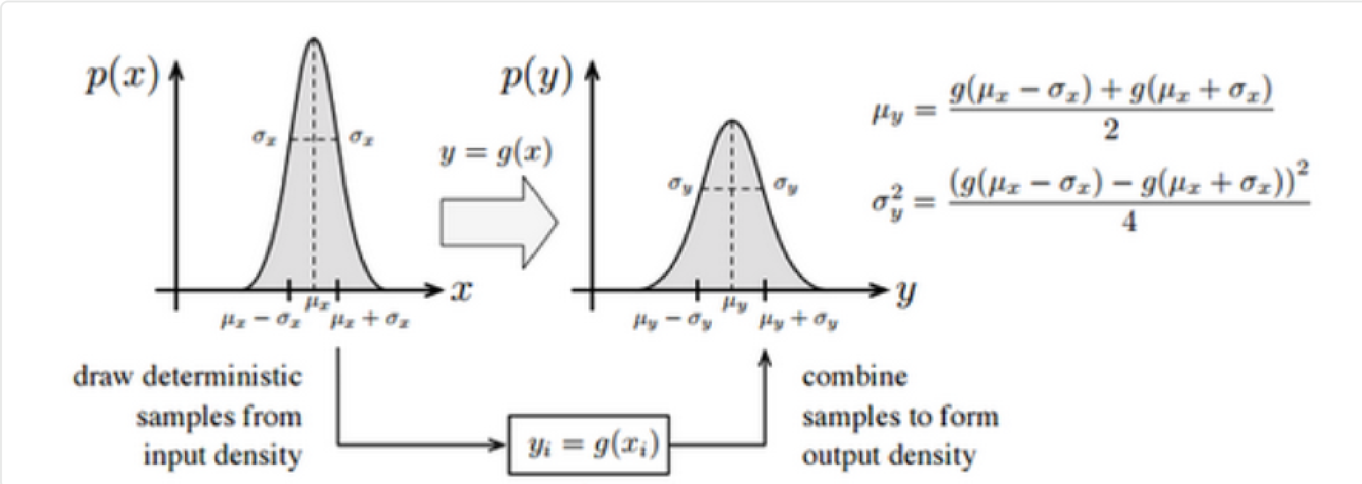
在*KF*中，我们需要求取状态协方差来确定卡尔曼增益，但是由于系统存在非线性，只能得到它的近似值。*EKF*通过雅可比矩阵对系统进行线性化，而*UKF*则是利用随机采样的条件均值代替均值，使用被估计量和量测量的再现样本点计算两者的自协方差阵和互协方差阵(*UT*变换）。

### 思想：

UKF的逼近方法则是采用的矩匹配（***Moment Matching***）方法，即用与想要逼近的分布同期望、同协方差矩阵的高斯分布去逼近它，这里面就涉及到了计算非线性函数在高斯分布下的期望，这是一个积分问题，一个直接的方法是利用蒙特卡洛方法计算，但是蒙特卡洛方法的缺点是需要较多的样本数目才能保证较好的近似效果，对于非线性函数在高斯分布下的期望，有一类特殊的方法，叫做*Sigma Point Method*, 这类方法的思想是通过选取确定性的较少的具有代表性的样本点，用这些点的加权平均就能对所要计算的期望值做到很好的逼近。

其核心思想是认为逼近一个分布比起逼近一个非线性函数更简单，可以理解为一种"统计线性化"的方法。

相应的Sigma点以及均值权值和方差权值也不尽相同，因此UT变换的估计精度也会有差异，但总体来说，其估计精度能够达到泰勒级数展开的二阶精度。




## UT变换步骤(预测)：

上一帧状态的输出为一个服从高斯分布的随机变量 $X$ ,且系统为非线性的，对其经 $f(.)$ 非线性变换得到随机变量 $Y$ ：

$$即\ Y = f\ （X）$$

问题则变为：已知 $X$ 的均值 $\overline{X}$ 和协方差 $P_{XX}$ 条件下，求 $Y$ 的均值 $\overline{Y}$ 和协方差 $P_{YY}$ 。即用与Y的真实分布均值和方差相等的高斯分布近似 $Y$ 。

**步骤1：**

根据 $\overline{X}$ *和* $P_{XX}$ 构造出 $2n+1$ 个 $\sigma$ 点。

$$\chi^{(0)} = \overline{X}$$

$$\chi^{(i)} = \overline{X} + (\sqrt{(n+\lambda)P_{XX}})_{(i)} \qquad i = 1,2,...,n$$

$$\chi^{(i)} = \overline{X} - (\sqrt{(n+\lambda)P_{XX}})_{(i-n)} \qquad i = n+1, n+2, ..., 2n$$

$$\Sigma_{XX} = P_{XX} \cdot P_{XX}^T$$

式中，$(\sqrt{(n+\lambda)P_{XX}})_{(i)}$ 表示 $(n+\lambda)$ $P_{XX}$ 的下三角分解平方根的第 $i$ 列，其中 $\lambda$ 为随机变量 $X$ 的均值 $\overline{X}$ 和*Sigma*采样点间距离的比例因子，用于调谐逼近高阶矩，即一般情况下，调整后使得加权后的均值和协方差与真实的 $Y$ 近似。

**步骤2：**

计算非线性变换样本点：

$$Y^{(i)} = f[\chi^{(i)}]$$

**步骤3：**

确定权值

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n+\lambda}$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{\lambda}{2(n+\lambda)} \qquad i = 1, 2, ..., 2n$$

式中， $\alpha$ 是比例缩放因子， $0 \le \alpha \le 1$ ,控制 $\alpha$ 可以控制*Sigma*点集的范围，通常为很小的正数， $\beta$ 反应状态历史信息高阶特性，对于高斯分布取 $\beta = 2$ 最优。

**步骤4：**

确定映射的均值和方差

$$\overline{Y} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} Y^{(i)}$$

$$P_{YY} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [Y^{(i)} - \overline{Y}][Y^{(i)} - \overline{Y}]^T$$

证明上式：

因为

$$\chi^{(i)} + \chi^{(i+L)} = 2\overline{X} \text{ , } i = 1, 2, ..., L$$

所以

$$\sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} X^{(i)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} x_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{n+\lambda} \sum_{i=0}^{2n} X^{(i)} = \frac{\lambda}{n+\lambda} \overline{X} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+\lambda} 2L\overline{X} = \overline{X}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [X^{(i)} - \overline{X}][X^{(i)} - \overline{X}]^T$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} W_i^{(c)} [X^{(i)} - \overline{X}][X^{(i)} - \overline{X}]^T$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{2} \frac{1}{n+\lambda} (\sqrt{(n+\lambda) P_{XX}})_{(i)} \cdot (\sqrt{(n+\lambda) P_{XX}})_{(i)}^T$$

$$= \sum_{i=1}^{L} (P_{XX})_i \cdot ((P_{XX})_i)^T$$

$$= P_{XX} \cdot P_{XX}^T$$

$$= \Sigma_{xx}$$

## 更新步骤：

我们知道贝叶斯滤波中， $x_k$ 的后验概率（条件高斯密度）：

$$p(x_k|\hat{x}_0, v_{1:k-1}, y_{0:k}) = \mathcal{N}(\mu_{x,k} + \Sigma_{xy,k}\Sigma_{yy,k}^{-1}(y_k - \mu_{y,k}), \Sigma_{xx,k} - \Sigma_{xy,k}\Sigma_{yy,k}^{-1}\Sigma_{yx,k})$$

广义高斯滤波更新步骤方程为：

$$K_k = \Sigma_{xy,k}\Sigma_{yy,k}^{-1}$$

$$\hat{P}_k = \check{P}_k - K_k\Sigma_{xy,k}^T$$

$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K_k(y_k - \mu_{y,k})$$

我们将上一时刻后验状态值进行sigmapoint变换，采样后带入非线性观测模型进行精确求解，得到 $\check{y}_{k,i}, i = 0, .., 2L$ ,和上面一样重新加权组合得到：

$$\mu_{y,k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \check{y}_{k,i}$$

$$\Sigma_{yy,k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} (\check{y}_{k,i} - \mu_{y,k})(\check{y}_{k,i} - \mu_{y,k})^T$$

$$\Sigma_{xy,k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} (\check{x}_{k,i} - \check{x}_k)(\check{y}_{k,i} - \mu_{y,k})^T$$

将这些式子带入上面广义高斯滤波的矫正步骤方程中，完成更新步骤。