

概率数据关联 (PDA)

基本思想:

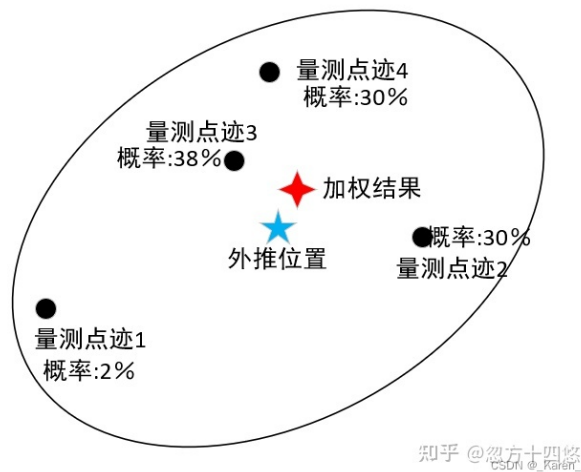
跟踪门:

PDA滤波过程:

关联概率($\beta_{ij}(k)$):

基本思想:

首先假设跟踪门内每个有效的测量都以不同的概率来自于某个目标或者杂波，由于无法确定这些测量到底是来自哪个目标源，在进行目标状态估计时将跟踪门内的所有有效测量都利用上，计算各测量属于目标航迹的概率，即计算关联概率。不同的测量与目标的关联概率不一样，因此用于目标状态更新的新用也不同，将所有测量统计的联系起来形成一个综合测量输入滤波器进行目标状态更新。



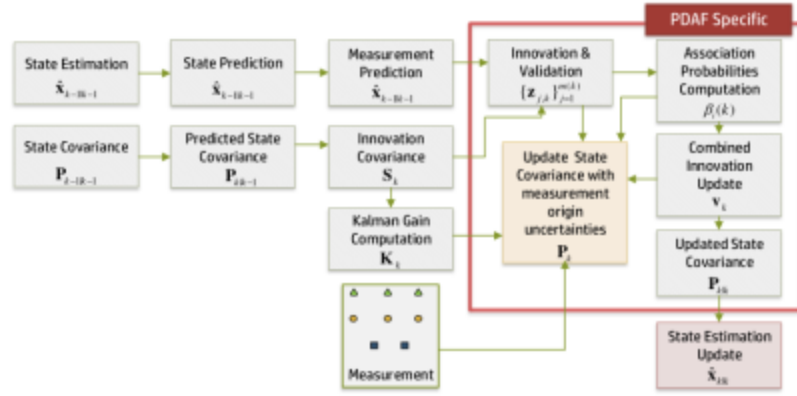


Figure 3-7: One cycle of the probabilistic data association filter. The part specific to JPDAF is highlighted in red box. The state-estimation and covariance calculations are coupled due to covariances dependencies on the innovations. (adapted from Bar-Shalom[29])

跟踪门:

假设目标的状态方程和观测方程如式，式中观测方程，每一时刻的观测不定，可能是一个或者是多个，假设每一次传感器检测到的各个测量组成的测量集为：

$$Z(k) = \{z_1(k), z_2(k), \dots, z_n(k)\} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

式中，为k时刻第i个测量。

接收到的测量首先经过跟踪门进行粗略的选择得到有效测量，然后经过数据关联确定测量与目标航迹的关联，定义第i个测量与目标预测位置距离为：

$$g_i(k) = [z_i(k) - \hat{z}(k | k - 1)]^T S(k)^{-1} [z_i(k) - \hat{z}(k | k - 1)]$$

式中， $z_i(k)$ 为第 k 时刻测量， $\hat{z}(k | k - 1)$ 为该时刻目标预测位置， $S(k)^{-1}$ 为新息协方差矩阵。设跟踪门限为 γ 。

$$g_i(k) \leq \gamma$$

满足该式的量测即为有效量测。

跟踪门的体积：

$$V(k) = C_M |\gamma S(k)|^{1/2} = C_M \gamma^{M/2} |S(k)|^{1/2}$$

式中， $C_M = \pi^{M/2} / \Gamma(M/2 + 1)$ 是M-维单位球的体积，M是测量集的维数，即M=n。

PDA滤波过程:

由于每次落入跟踪门内的测量数目不确定，设每一时刻有效测量集为：

$$Z(k) = \{z_i(k)\}_{i=1}^{m(k)}$$

式中， $m(k)$ 为有效测量的数目， $z_i(k)$ 为第*i*个有效测量。这些有效测量可能源于视场内正被跟踪的目标，也可能是源于新出现的目标或者源于杂波。

为了方便说明，定义到时刻所有测量的累积集为：

$$Z^k = \{Z(j)\}_{j=1}^k$$

定义第 i 个测量为正确测量的概率为正确关联概率，也称为关联概率，用 $\beta_i(k)$ 表示。

$$\beta_i(k) = P\{\theta_i(k)|Z^k\}$$

由于个关联事件是互斥的，所以有

$$\sum_{i=0}^{m(k)} \beta_i(k) = 1$$

则 k 时刻目标的状态向量可表示为：

$$\hat{X}(k|k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{X}_i(k|k)$$

其中， $\hat{X}_i(k|k)$ 为目标以事件 $\theta_i(k), i = 0, 1, 2, \dots, m_k$ 为真时，估计得到的状态向量。估计的方法一般以高斯线性为前提，采用卡尔曼滤波方法。滤波公式为：

$$\hat{X}_i(k|k) = \hat{X}(k|k-1) + K(k)v_i(k)$$

其中， $v_i(k)$ 为目标预测位置与量测 $z_i(k)$ 的新息残差。

$$v_i(k) = (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})$$

当取事件 $\theta_0(k)$ 时，没有量测来源于目标，此时目标的最终状态向量由外推值（预测值）决定。

$$\hat{X}_0(k) = \hat{X}(k|k-1)$$

利用上述公式，则 k 时刻的目标状态向量公式可更新为：

$$\hat{X}(k|k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{X}_i(k|k) = \hat{X}(k|k-1) + K(k)v(k)$$

其中，

$$v(k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k)$$

对应的状态更新协方差矩阵为：

$$P(k | k) = P(k | k - 1)\beta_0(k) + [1 - \beta_0(k)] P^c(k | k) + \tilde{P}(k)$$

其中，

$$P^c(k | k) = [I - K(k)H(k)]P(k | k - 1)$$

$$\tilde{P}(k) = K(k) \left[\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) v_i'(k) - v(k) v'(k) \right] K'(k)$$

关联概率($\beta_i(k)$):

在计算关联概率时，首先将关联概率中条件测量累计分为过去测量数据 Z^{k-1} 和当前测量数据 $Z(k)$ 两部分：

$$\beta_i(k) \triangleq P \{ \theta_i(k) | Z^k \} = P \{ \theta_i(k) | Z(k), m_k, Z^{k-1} \}$$

其中， $Z(k)$ 为 k 时刻的量测， m_k 为 k 时刻的量测总数量， Z^{k-1} 为 k 时刻之前(不包含 k 时刻)的历史量测。

根据贝叶斯公式：

$$P(B_i | x) = \frac{f(x | B_i) P(B_i)}{\sum_{j=1}^n f(x | B_j) P(B_j)}$$

即：

$$\beta_i(k) = P \{ \theta_i(k) | Z(k), m_k, Z^{k-1} \} = \frac{f \{ Z(k) | \theta_i(k), m_k, Z^{k-1} \} P \{ \theta_i(k) | m_k, Z^{k-1} \}}{\sum_{j=0}^{m_k} f \{ Z(k) | \theta_j(k), m_k, Z^{k-1} \} P \{ \theta_j(k) | m_k, Z^{k-1} \}}$$

式中，分母为归一化常数， m_k , Z^{k-1} 可理解为超参数， $f \{ Z(k) | \theta_j(k), m_k, Z^{k-1} \}$ 为模型 $(\theta_j(k), m_k, Z^{k-1})$ 下 $Z(k)$ 的概率密度，也即似然函数。 $P \{ \theta_i(k) | m_k, Z^{k-1} \}$ 是给定超参数时的先验概率。

我们做出如下假设：事件 $\theta_i(k), i = 0, 1, 2, \dots$ 服从高斯分布，我们可以列出下式来表征 k 时刻的第 i 个量测属于目标的概率密度函数为：

$$f(z_i(k) | \theta_i, m_k, Z^{k-1}) = P_G^{-1} N \{ z_i(k), \hat{z}_{k|k-1}, S_k \} = P_G^{-1} N \{ v_i(k), 0, S_k \}$$

其中， P_G 为量测落入跟踪门的概率， $N \{ z_i(k), \hat{z}_{k|k-1}, S_k \}$ 表示具有均值为 $\hat{z}_{k|k-1}$ ，方差为 S_k 的高斯密度， $\hat{z}_{k|k-1}$ 为目标外推到该时刻时的位置， S_k 为新息协方差，

$v_i(k) = z_i(k) - \hat{z}_{k|k-1}$ 。此处之所以要乘以 P_G^{-1} ，是因为我们对于量测是否落入跟踪门设立了一个门限值，该门限值的大小反映了我们希望量测落入跟踪门的概率大小。

我们假设在跟踪门的体积为 V_k ，且跟踪门内杂波的量测是均匀分布的，因此：

$$f(Z(k) | \theta_i, m_k, Z^{k-1}) = V_k^{-m_k}, i = 0$$

$$f(Z(k) | \theta_i, m_k, Z^{k-1}) = f(z_i(k) | \theta_i, m_k, Z^{k-1}) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_k} f(z_j(k) | \theta_i, m_k, Z^{k-1}) = V_k^{-(m_k-1)} f(z_i(k) | \theta_i, m_k, Z^{k-1}), i = 1, 2, \dots, m_k$$

查阅资料《现代雷达数据处理技术-多目标跟踪技术的发展》中事件 θ_i 的条件概率公式为：

$$\gamma_i(m_k) = P\{\theta_i(k) | m_k, Z^{k-1}\} = \begin{cases} \frac{1}{m_k} P_D P_G \left[P_D P_G - (1 + P_D P_G) \frac{\mu(m_k)}{\mu(m_{k-1})} \right]^{-1}, & i = 1, 2, \dots, m_k \\ (1 + P_D P_G) \frac{\mu(m_k)}{\mu(m_{k-1})} \left[P_D P_G - (1 + P_D P_G) \frac{\mu(m_k)}{\mu(m_{k-1})} \right]^{-1}, & i = 0 \end{cases}$$

其中， P_D 为检测概率， $\mu(m_k)$ 是杂波的概率密度函数,我们假设概率密度函数是参数为 λm_k 的泊松函数，则：

$$\mu(m_k) = e^{-\lambda V_k} \frac{(\lambda V_k)^{m_k}}{m_k!}$$

可得：

$$\gamma_i(m_k) = \begin{cases} \frac{P_D P_G}{P_D P_G m_k + (1 - P_D P_G) \lambda V_k}, & i = 1, 2, \dots, m_k \\ \frac{(1 - P_D P_G) \lambda V_k}{P_D P_G m_k + (1 - P_D P_G) \lambda V_k}, & i = 0 \end{cases}$$

最后，可得：

$$\begin{aligned} \beta_0(k) &= \frac{b}{b + \sum_{i=1}^{m_k} e_i} \\ \beta_i(k) &= \frac{e_i}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j}, i = 1, 2, 3, \dots, m_k \\ e_i &\triangleq e^{-\frac{1}{2} v_i'(k) S^{-1}(k) v_i(k)} \\ b &\triangleq \frac{m_k}{V_k} |2\pi S(k)|^{\frac{1}{2}} (1 - P_D P_G) / P_D \end{aligned}$$

其中， P_D 为目标检测概率(由传感器决定)， P_G 为门概率(提前设定的阈值决定)， V_k 为相关波门的体积。

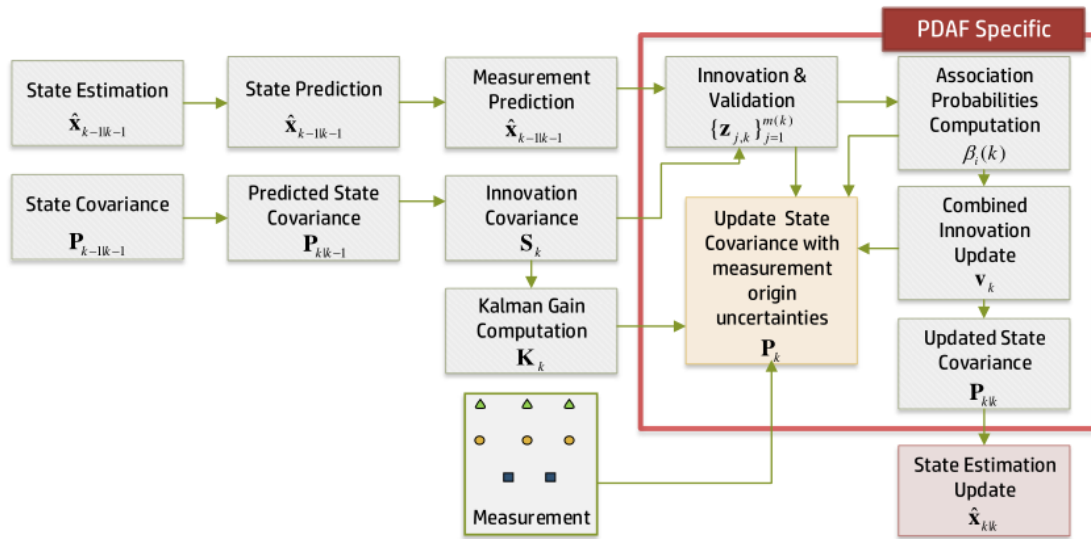


Figure 3-7: One cycle of the probabilistic data association filter. The part specific to JPDAF is highlighted in red box. The state-estimation and covariance calculations are coupled due to covariances dependences on the innovations. (adapted from Bar-Shalom[29])