大学物理1
期中复习

汪远

2024年4月14日

知识结构

牛顿力学

研究对象
- 质点
- 质点系
- 刚体

研究内容 / 研究方法
- 运动学
  - 坐标系
    - 直角坐标系
    - 自然坐标系
  - 参考系变换
    - 相对平动
    - 相对转动
- 动力学
  - 牛顿定律
  - 三套方法
    - 动量
    - 能量
    - 角动量

狭义相对论基础

研究对象
- 相对高速运动的惯性参考系
- 参考系变换
  - 坐标变换
  - 速度变换
- 力学量关系
  - 质量
  - 动量
  - 能量
  - 守恒定律

第一部分

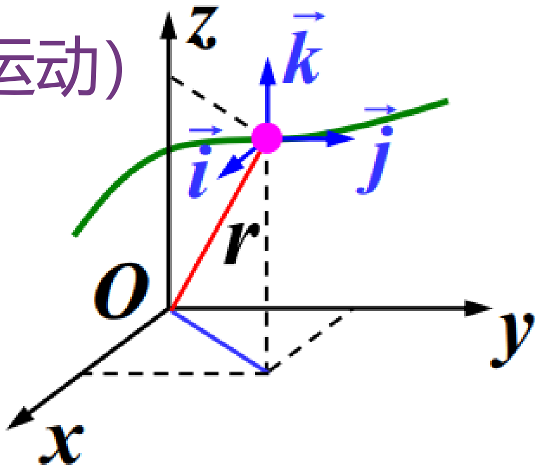
牛顿力学

1.1 质点运动学

1.1.1 用坐标系描述运动

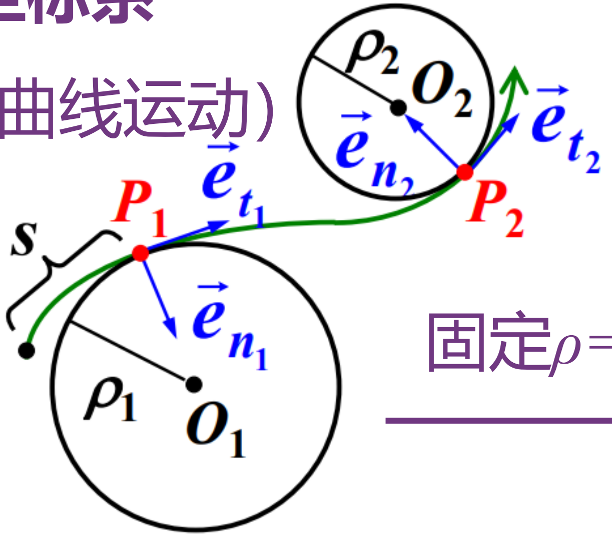
直角坐标系

(描述一般运动)

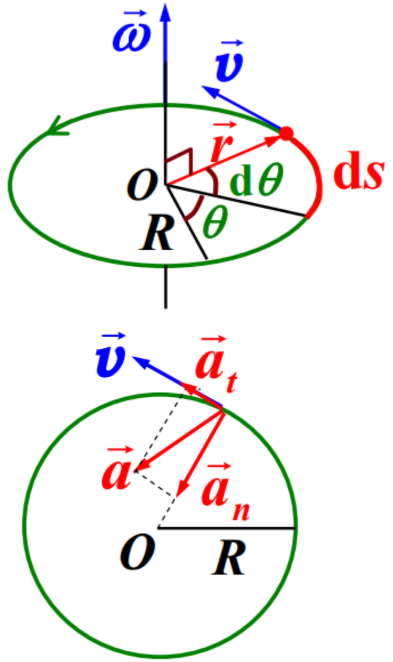


自然坐标系

(描述平面曲线运动)



固定$\rho=R$



圆周运动

位置 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ $\qquad s = s(t)$

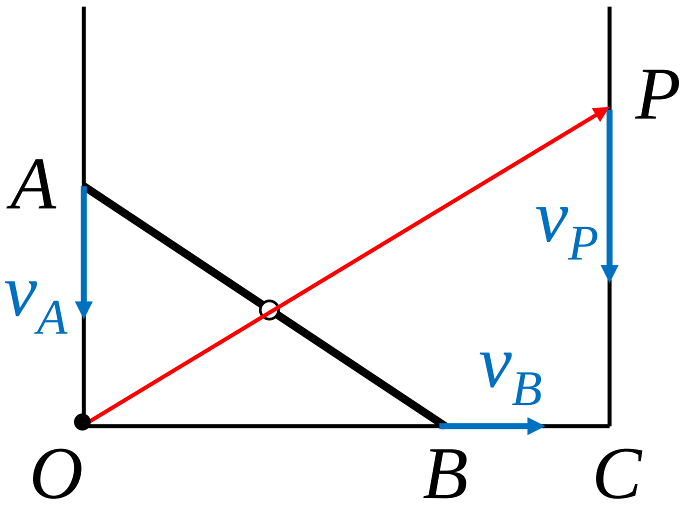
速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$ $\qquad \boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$

加速度 $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}$ $\qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$

$$v = \omega R \qquad a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_{\mathrm{t}} = \dot{\omega} R = \alpha R$$

例1 长为 L_1的尺子靠在左墙，与墙和地面的接触点分别为A、B。O 处有一光源，光透过尺子中心的孔照在右墙上 P 点。左右墙距离 $L_2(L_2>L_1)$。尺子下滑过程中始终保持与墙和地面的接触。某时刻 A、B 坐标分别为 $(0, y_A)$, $(x_B, 0)$，若此时 A 点速率为 v_A，试用 y_A、x_B、v_A表示 B 点速率 v_B 和 P 点速率 v_P。



解： 根据几何关系有 $x_B=\sqrt{L_1^2-y_A^2}$ ，$y_P=\dfrac{L_2}{x_B}y_A$

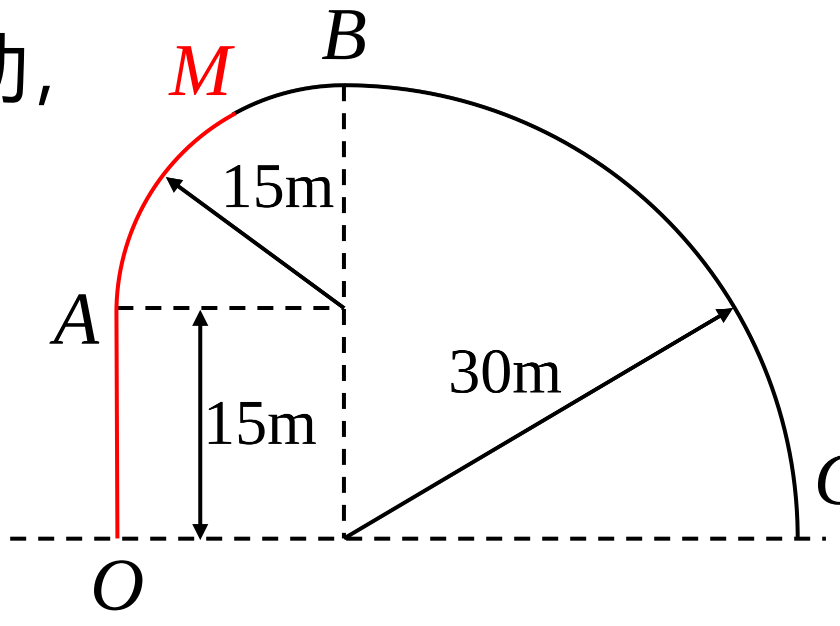
$$v_B=\frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t}=\frac{-2y_A}{2\sqrt{L_1^2-y_A^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}=\frac{-y_A}{\sqrt{L_1^2-y_A^2}}\cdot(-v_A)=\frac{y_Av_A}{x_B}$$

$$v_P=-\frac{\mathrm{d}y_P}{\mathrm{d}t}=-L_2\left(\frac{1}{x_B}\cdot\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}+y_A\frac{-1}{x_B^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t}\right)=L_2\left(\frac{v_A}{x_B}+\frac{y_A^2v_A}{x_B^3}\right)$$

例2 质点 M 在水平面内运动，轨迹如图所示，OA 段为直线，AB、BC 段分别为不同半径的两个1/4圆周。$t=0$时，M 在 O 点，到 t 时刻，其经过的路程为 $s=5.00t^2$ (SI)。求 $t=2.90\text{s}$ 时刻，质点 M 的加速度大小 a。

解： $t=2.90\text{s}$ 时， $s=5.00t^2=42.05\text{m}$。

此时质点 M 位于 BC 段，做半径30m的圆周运动，



速率 $v=\dot{s}=10t=29.0\text{m/s}$

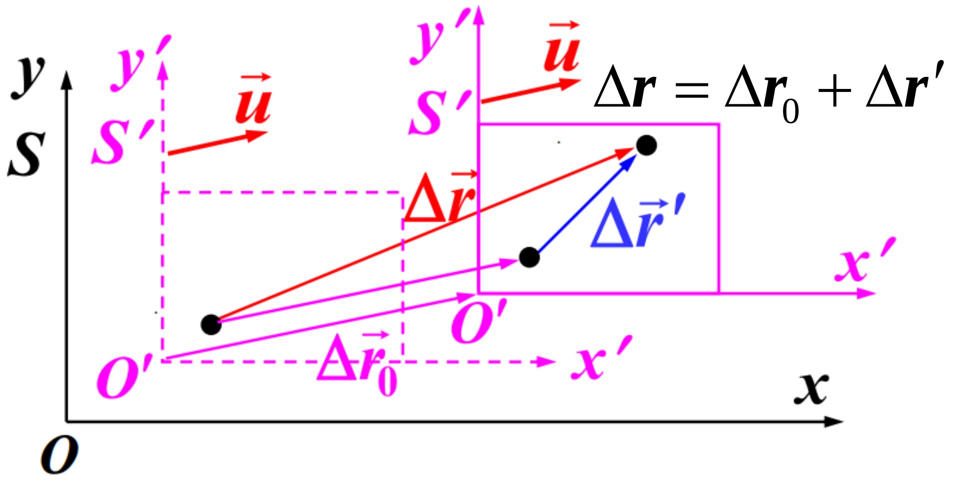
法向加速度 $a_{\text{n}}=v^2/R_{BC}=28.0\text{m/s}$

切向加速度 $a_{\text{t}}=\ddot{s}=10.0\text{m/s}$

故加速度大小 $a=\sqrt{a_{\text{n}}^2+a_{\text{t}}^2}=29.7\text{m/s}^2$

1.1.2 相对运动与参考系变换

S' 相对 S 平动

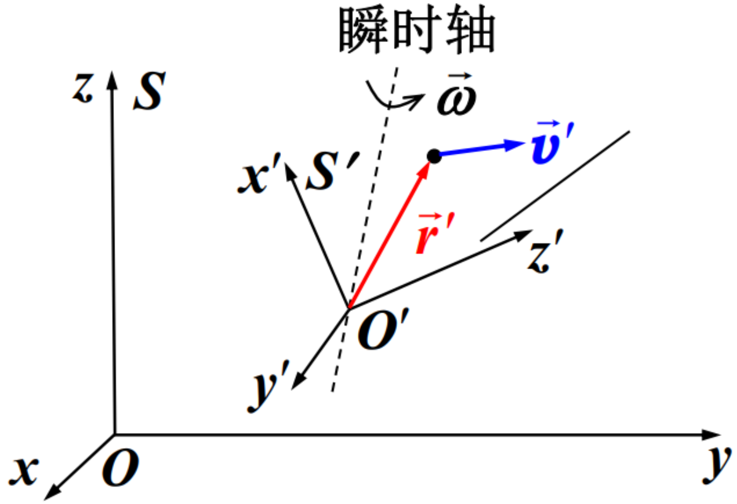


物体相对静止参考系 S 的速度	物体相对运动参考系S' 的速度	运动参考系 S' 相对静止参考系 S 的速度
绝对速度	相对速度	牵连速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0$$

S' 相对 S 转动



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}$$

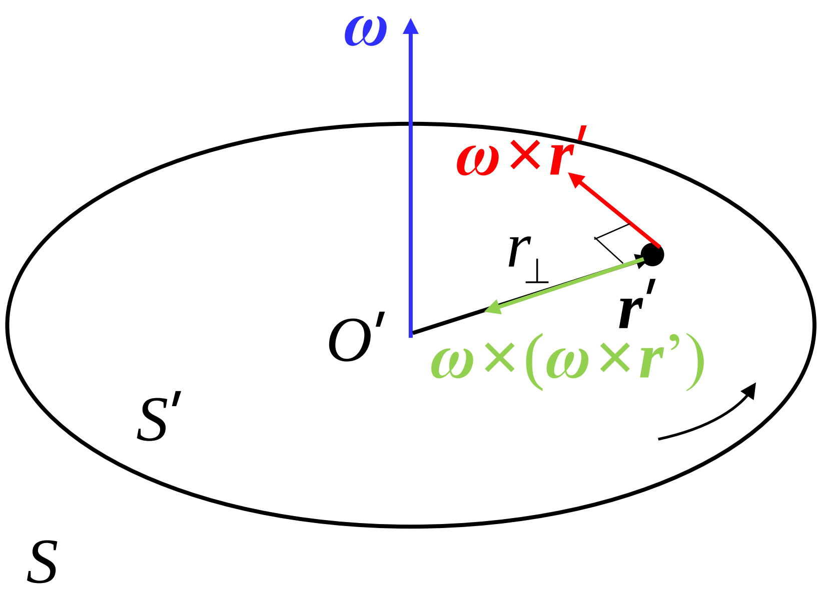
绝对加速度	相对加速度	牵连加速度	科氏加速度

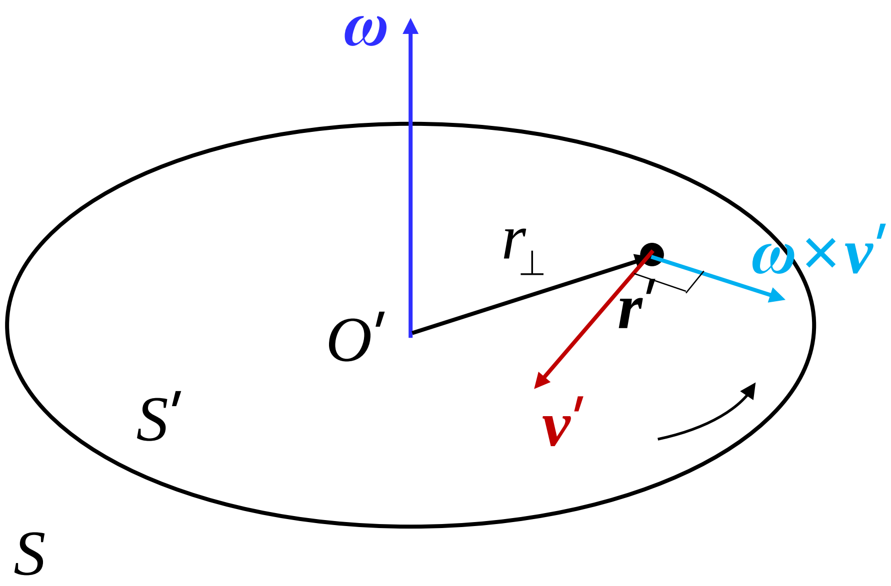
$$= \boldsymbol{a}' + \left(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}'\right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

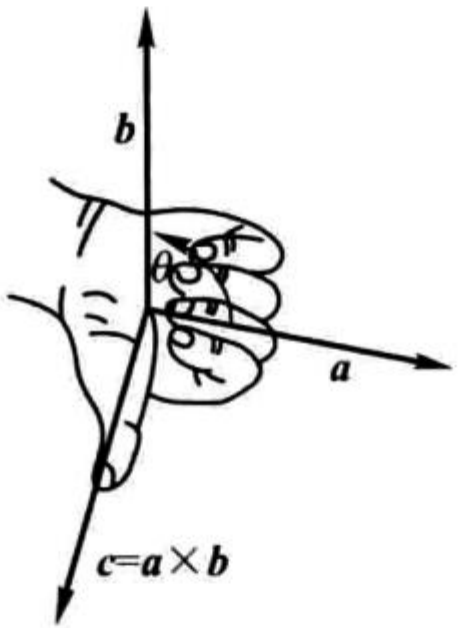
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \left(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'\right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

例：转动的圆盘







$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'| = \omega r_{\perp}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab\sin\theta$$

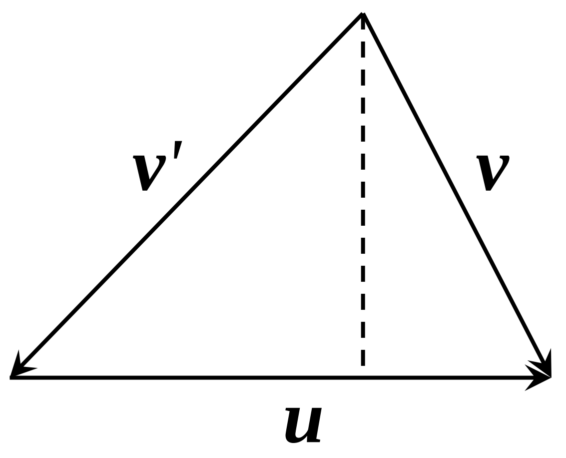
$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')| = \omega^2 r_{\perp}$$

例3 当火车静止时，乘客发现雨滴下落方向偏向车头，与铅垂线夹角为 $\alpha = 30.0°$，当火车以 $u = 40.0\text{m/s}$ 的速率沿水平直路行驶时，发现雨滴下落方向偏向车尾，与铅垂线夹角角为$\beta = 45.0°$，假设雨滴相对于地的速度保持不变，求雨滴相对地的速度大小。

解： 绝对速度：雨滴相对地面的速度 $\boldsymbol{v}$

相对速度：雨滴相对运动火车的速度 $\boldsymbol{v}'$

牵联速度：火车的速度 $\boldsymbol{u}$



由矢量合成的几何关系：

$$\begin{cases} v\cos\alpha = v'\cos\beta \\ v\sin\alpha + v'\sin\beta = u \end{cases}$$

解得 $v = 40(\sqrt{3} - 1)\text{m/s}$

1.2 质点动力学

1.2.1 牛顿运动定律

适用条件

惯性系中的宏观、低速运动

解题步骤

确定研究对象 → **隔离受力分析** → **建立坐标系** → **列分量方程**

重力、弹力、摩擦力、阻力……

若在非惯性系中，还需增加**惯性力**

平动非惯性系：

$$\boldsymbol{F}_0 = -m\boldsymbol{a}_0$$

匀速转动的非惯性系：

$$\boldsymbol{F}_0 = m\omega^2 \boldsymbol{r}'_{\perp} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

直角坐标系

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ F_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

自然坐标系

$$\begin{cases} F_\mathrm{t} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_\mathrm{n} = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

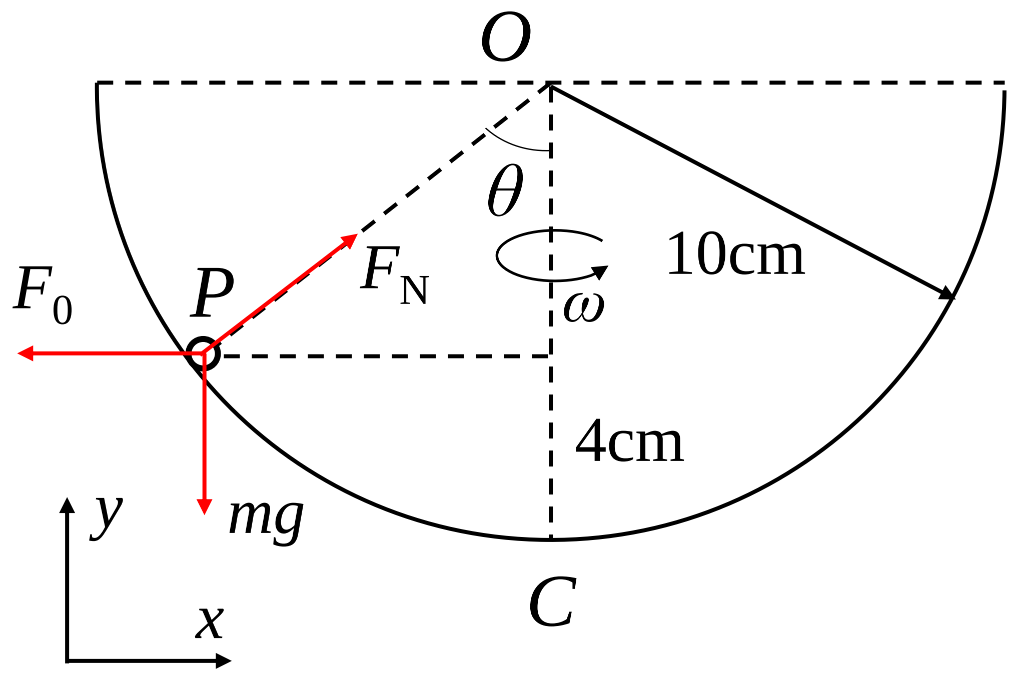
例4 一光滑的内表面半径为10 cm 的半球形碗，以匀角速度 ω 绕其对称 OC 旋转．已知放在碗内表面上的一个小球 P 相对于碗静止，其位置高于碗底4 cm。求碗旋转的角速度。

解：以半球形碗为参考系。小球受到重力、碗壁的支持力和惯性离心力。

x 方向有： $F_N \sin\theta - m\omega^2 R\sin\theta = 0$

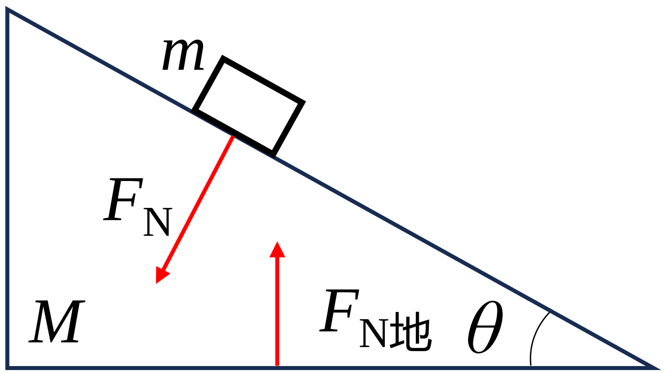
y 方向有： $F_N \cos\theta - mg = 0$

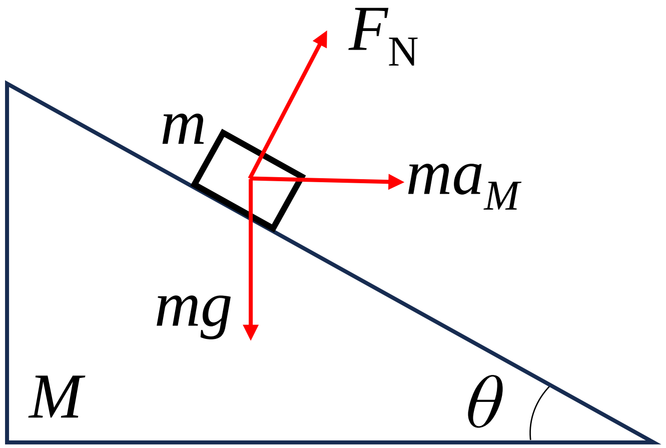
解得 $\omega = \sqrt{g/(R\cos\theta)} = 12.8\text{rad/s}$



例5 质量为 M、倾角为 θ 的三角形木块，放在水平面上，另一个质量为 m 的方木块放在斜面上，如下图所示。如果所有接触面的摩擦忽略不计，计算方木块 m 相对于 M 的加速度。

解： 设木块和斜面之间的弹力大小为F_{N}。





以地面为参考系，对 M:

$$F_{\mathrm{N}}\sin\theta = Ma_M$$

以 M 为参考系，由于 M 是平动非惯性系，对m:

垂直斜面方向—— $ma_M\sin\theta + F_{\mathrm{N}} - mg\cos\theta = 0$

沿斜面方向—— $ma_M\cos\theta + mg\sin\theta = ma_m'$

可解得

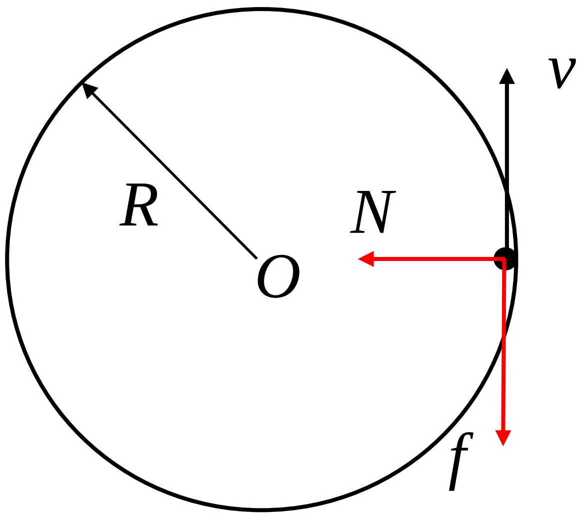
$$a_m' = \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

思考：如何检验结果正确性?

例6 光滑水平面上放有一个固定的圆环带，其半径为R. 一质量为m的物体紧贴着环带内侧运动，物体与环带间的滑动摩擦系数为μ。设物体在 $t = 0$时的速率为v_0，求此后 t 时刻物体的速率 v 以及经过的路程 s 。

解： 物体受环内侧的支持力 N 和滑动摩擦力 f。满足 $f = \mu N$

物体做圆周运动，采用自然坐标系。由牛顿第二定律：



切向—— $-f = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 法向—— $N = m\dfrac{v^2}{R}$

消去 N、f 可得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu\dfrac{v^2}{R}$ ，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\mu\dfrac{\mathrm{d}t}{R}$

两边积分，并代入初始条件得 $v = \dfrac{v_0 R}{R + v_0 \mu t}$ 。再积分得 $s = \dfrac{R}{\mu}\ln(1 + \dfrac{v_0 \mu t}{R})$

例7 有人提出“太空电梯”的设想：将一根线密度为 λ 的缆绳沿地球径向竖立在赤道上空，使缆绳随着地球同步自转，让人们可以沿着这条通天缆绳到太空中去游览。

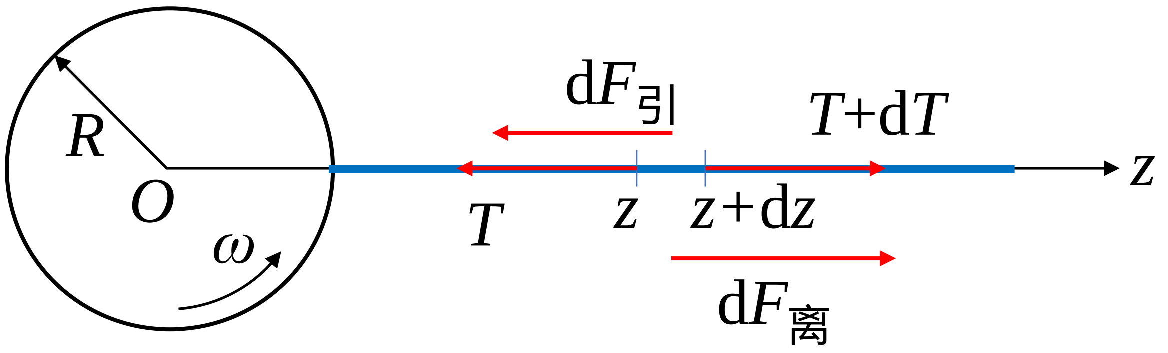
（1）要使缆绳不会坠落，其长度应为多少?

（2）求缆绳上的张力分布。

绳子的质量连续分布，不能忽略，不同位置处张力也不同。我们需要将其分解成许多质量元，对每个质量元分别使用牛顿运动定律列方程。

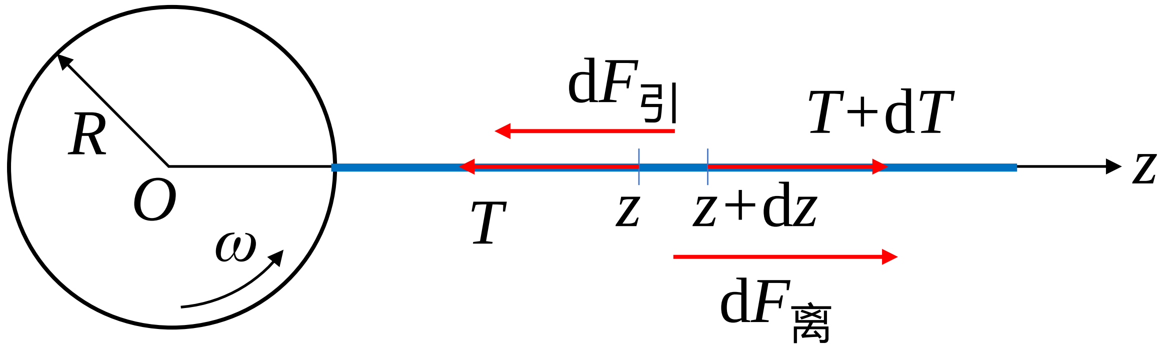
解：以地心为原点建立与地球固连的坐标系Oz。

z~z+dz段缆绳受力如右图：



其中: $\mathrm{d}F_{引} = \dfrac{GM\lambda \mathrm{d}z}{z^2}$ ， $\mathrm{d}F_{离} = \lambda \mathrm{d}z \cdot \omega^2 z$

对整根缆绳，引力和惯性离心力的合力为0，即 $\displaystyle\int_R^{R+l} \frac{GM\lambda \mathrm{d}z}{z^2} = \int_R^{R+l} \lambda\omega^2 z \mathrm{d}z$



$$\mathrm{d}F_{引}=\frac{GM\lambda\mathrm{d}z}{z^2}\qquad \mathrm{d}F_{离}=\lambda\mathrm{d}z\cdot\omega^2 z$$

对整根缆绳，引力、惯性离心力的合力为0，即 $\int_R^{R+l}\frac{GM\lambda\mathrm{d}z}{z^2}=\int_R^{R+l}\lambda\omega^2 z\mathrm{d}z$

积分得 $\frac{GM\lambda l}{R(R+l)}=\lambda l\omega^2(R+\frac{l}{2})$，代入数据解得 $l=1.44\times10^8\,\mathrm{m}$

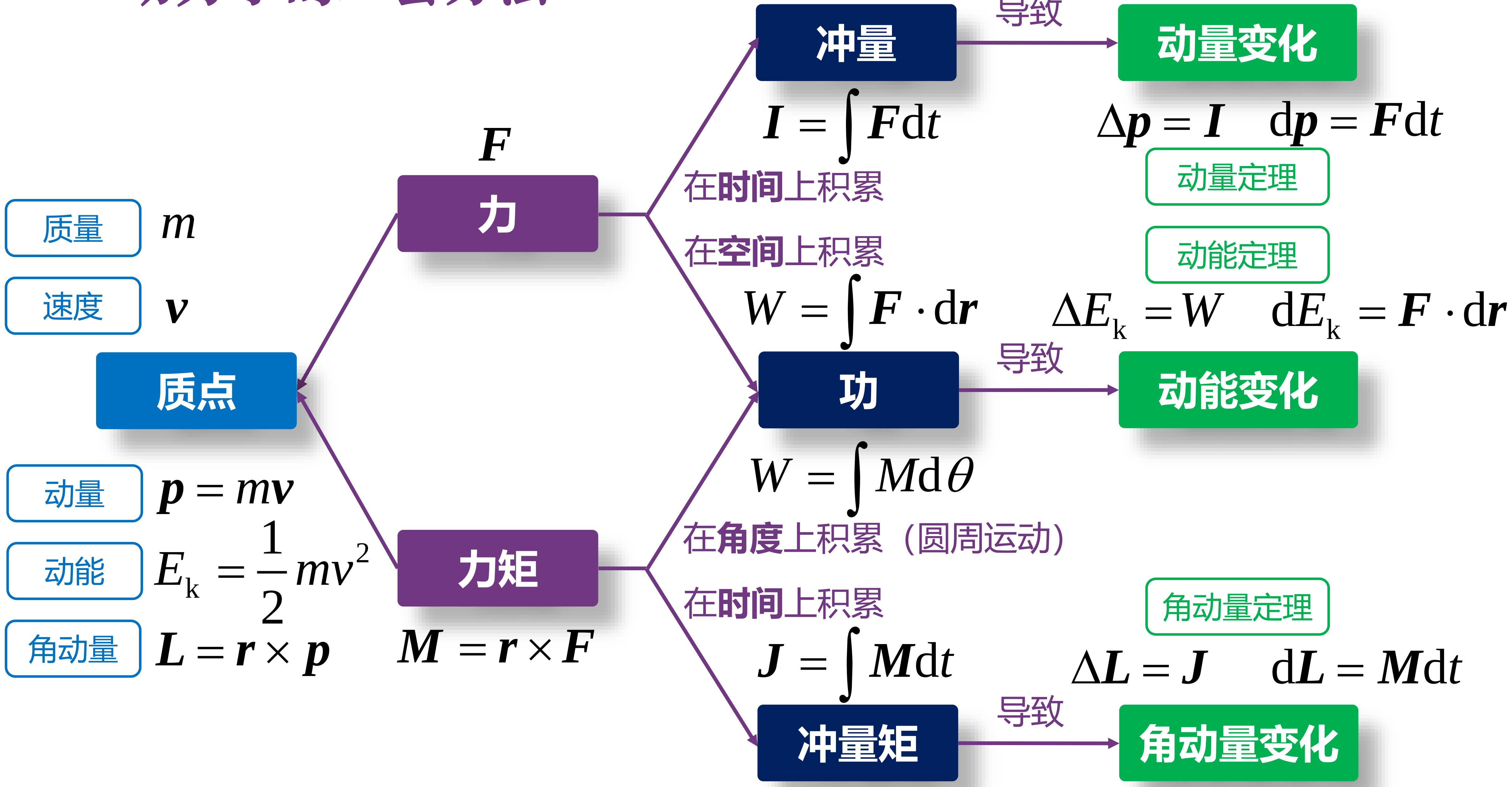
对z~z+dz段的缆绳微元，引力、惯性离心力、两侧受到的拉力的合力为0

即 $T+\mathrm{d}T+\lambda\omega^2 z\mathrm{d}z-T-\frac{GM\lambda\mathrm{d}z}{z^2}=0$，整理得 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\frac{GM\lambda}{z^2}-\lambda\omega^2 z$。

积分，并代入边界条件 $T(R+l)=0$ 可以求得

$$T(z)=GM\lambda\left(\frac{1}{R+l}-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\lambda\omega^2\left((R+l)^2-z^2\right)$$

1.2.2 动力学的三套方法



1.2.3 质点系中的物理量

质心

质量分布的几何中心

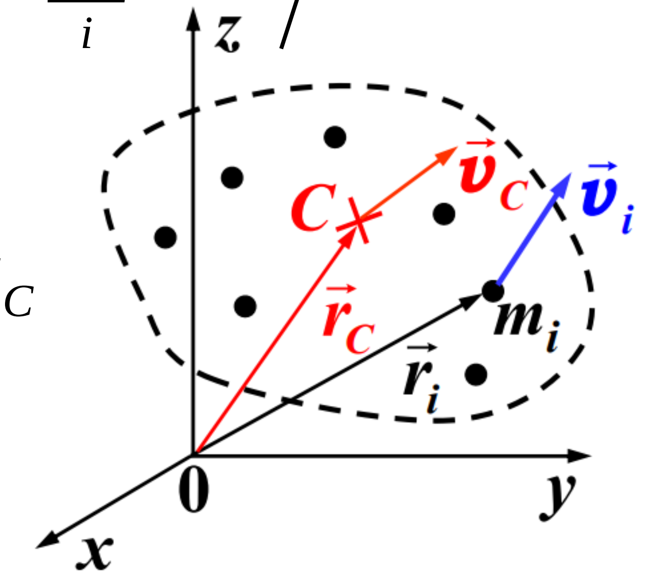
$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

离散分布　连续分布

质心速度 $\boldsymbol{v}_C=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i\Big/m$

$m=\sum_i m_i$

质心加速度 $\boldsymbol{a}_C=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i\Big/m$



质心系
（平动参考系）

$$\boldsymbol{r}_i'=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_C\qquad \boldsymbol{v}_i'=\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_C\qquad \boldsymbol{a}_i'=\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}_C$$

（相对于静止系）

总动量（质心动量）

$$\boldsymbol{P}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=m\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{p}_C\qquad \boldsymbol{P}'=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i'=0$$

总动能

质心动能　内动能

$$E_\mathrm{k}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}mv_C^2+\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i'^2=E_{\mathrm{k}C}+E_\mathrm{k}'$$

柯尼希定理

总角动量

质心角动量　内角动量

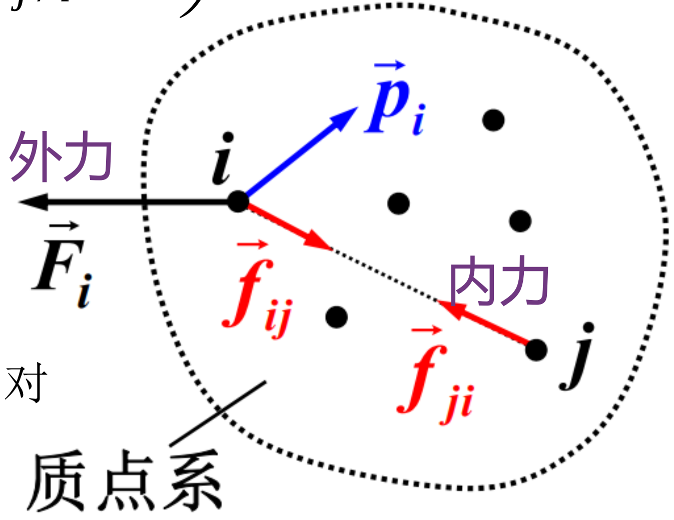
$$\boldsymbol{L}=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{P}+\sum_i\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_i'=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{L}'$$

内力的合力、对任意点的合力矩都为0

内力

质点间的相互作用

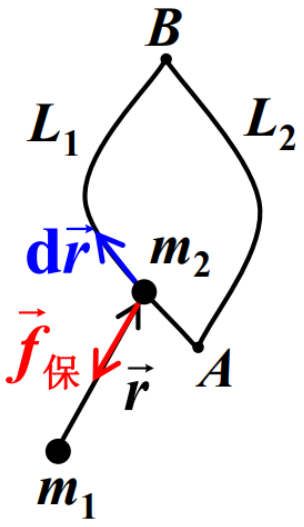
$$\boldsymbol{f}_{ij} + \boldsymbol{f}_{ji} = \boldsymbol{0} \qquad \sum_{i}\sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{M}_{内} = \sum_{i}\left(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij}\right) = \boldsymbol{0}$$



内力的功

$$\mathrm{d}W_{一对内力} = \boldsymbol{f}_{12}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$

$$= \boldsymbol{f}_{12}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{f}_{单个力}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{相对}$$



保守内力的功

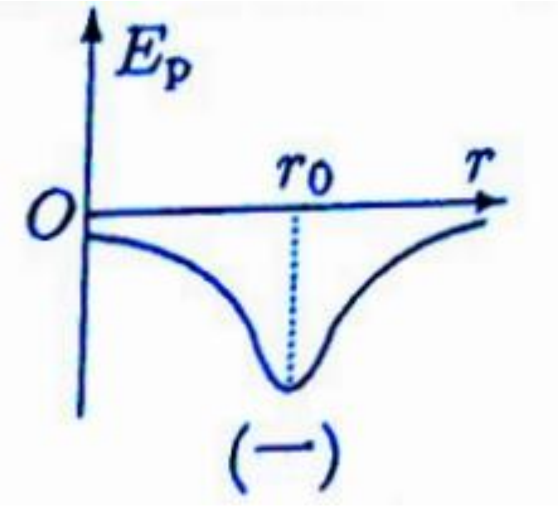
$$\int_{L_1(A\to B)} \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{L_2(A\to B)} \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \oint \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

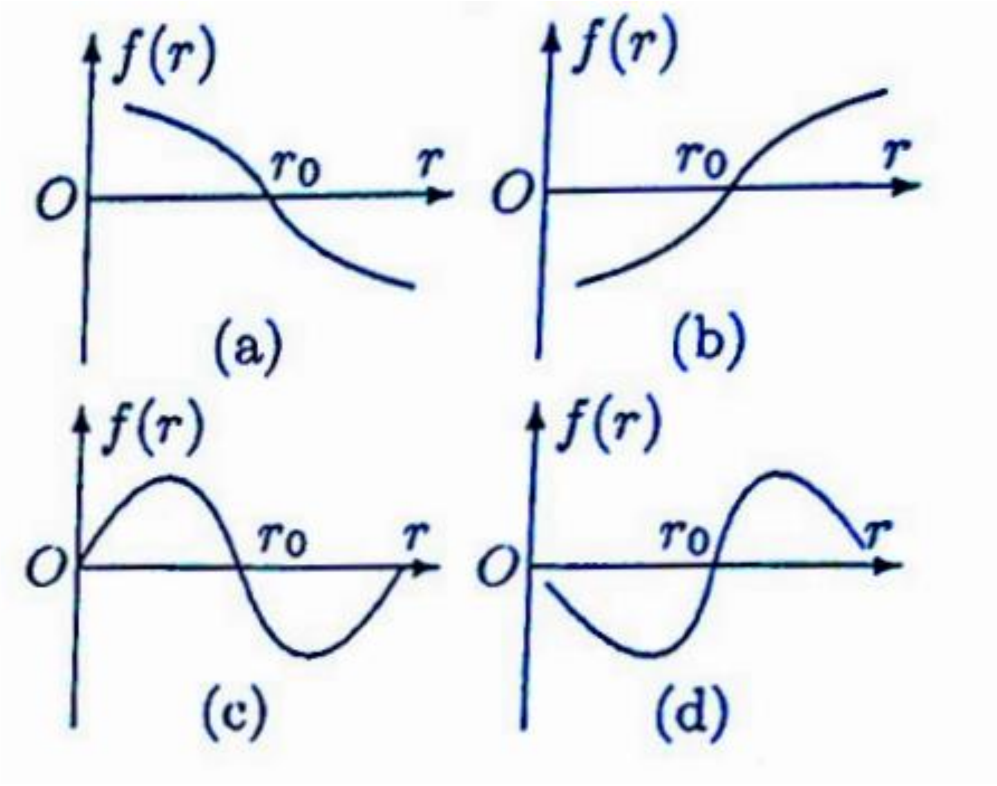
势能是系统共有的，而不是某个质点独有的。势能的大小与系统的位型与零势能位型的选取有关。

$$W_{保}(A\to B) = -\Delta E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(A) - E_{\mathrm{p}}(B) \qquad \boldsymbol{f}_{保} = -\nabla E_{\mathrm{p}}$$

$$f = -kx \qquad E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad f = -\frac{C}{r^2} \qquad E_{\mathrm{p}} = -\frac{C}{r}$$

例8 一个两体系统的势能（E_p）曲线如图（一），图中 r 是两体之间的距离。问a、b、c、d四个图中哪一个正确地表示了该两物体系统的内力(内力的正、负分别对应排斥、吸引力)?





解：根据保守力和势能的关系有

$$f(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

只有选项（c）符合。

1.2.4 三套方法在质点系中的应用

质点

质量 m

速度 $\boldsymbol{v}$

动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$

动能 $E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^{2}$

角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$

力 $\boldsymbol{F}$

力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

在时间上积累 → 冲量 $\boldsymbol{I}=\int\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 导致 动量变化

动量定理 $\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{I}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$

在空间上积累 → 功 $W=\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 导致 动能变化

在角度上积累（圆周运动） → 功 $W=\int M\mathrm{d}\theta$

动能定理 $\Delta E_{\mathrm{k}}=W\quad \mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

在时间上积累 → 冲量矩 $\boldsymbol{J}=\int\boldsymbol{M}\mathrm{d}t$ 导致 角动量变化

角动量定理 $\Delta\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}\mathrm{d}t$

F

力 $\xrightarrow{\text{在时间上积累}}$ 冲量 $\xrightarrow{\text{导致}}$ 动量变化

$I = \int F \mathrm{d}t$

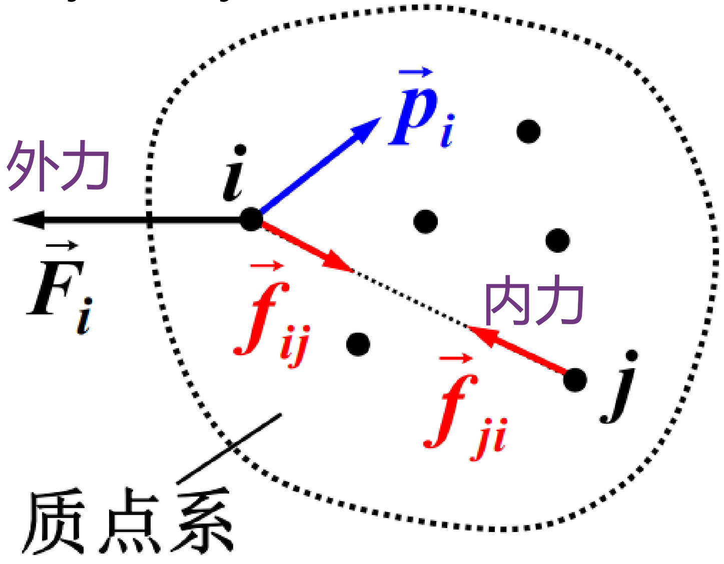
动量定理

$\Delta p = I \qquad \mathrm{d}p = F \mathrm{d}t$

推广到质点系

$$\sum_i p_i = P \qquad \sum_i F_i = F_{外}$$

$$f_{ij} + f_{ji} = 0$$



$$\sum_i (F_i + \sum_{j \neq i} f_{ij}) \mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}p_i$$

$$\sum_i F_i \mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}p_i \qquad F_{外} \mathrm{d}t = \mathrm{d}P$$

质点系动量定理

$P = m v_C$

$F_{外} = m a_C$

质心运动定理

$F_{外} = 0$

$P =$ 常矢量

质点系动量守恒定律

F

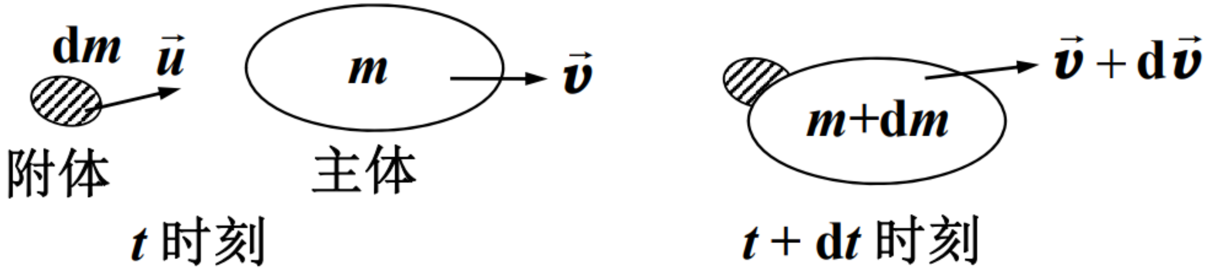
力 —在时间上积累→ 冲量 —导致→ 动量变化

$I = \int F \mathrm{d}t$

动量定理

$\Delta p = I \qquad \mathrm{d}p = F\mathrm{d}t$

$$F_{外}\mathrm{d}t = \mathrm{d}P$$ 质点系动量定理



对主体＋附体构成的系统，列动量定理方程：

$$m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+\mathrm{d}m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-(m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{u})=(\vec{F}_{主}+\vec{F}_{附})\mathrm{d}t$$

略去 2 阶小量，设 $\vec{F}=\vec{F}_{主}+\vec{F}_{附}$ ，$\vec{v}_{相对}=\vec{u}-\vec{v}$ 得：

主体运动方程 $$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}_{相对}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\vec{F}}$$

例9 一辆洒水车沿水平公路笔直前进，车与地面之间的摩擦系数 μ ，车载满水时质量 M_0 。设洒水车匀速将水喷出，洒出的水相对于车的速率为 u，单位时间内喷出水的质量为 m_0 。洒水车在水平牵引力 F 的作用下在水平公路上由静止开始运动，并向车的正后方洒水。求洒水车在 t 时刻的速度 v。

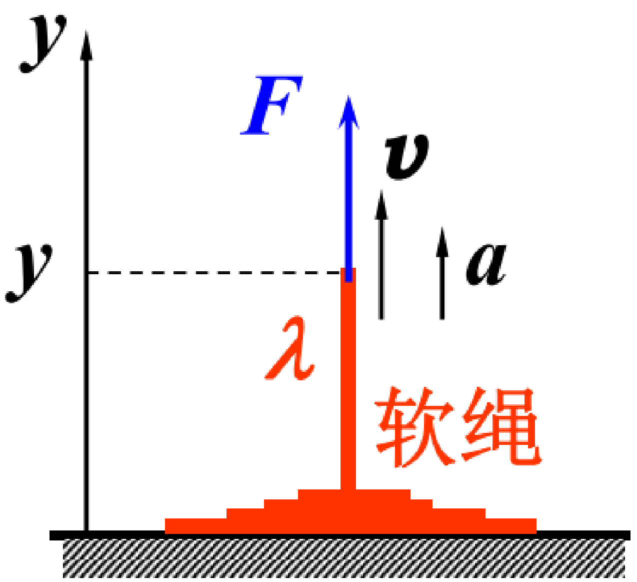
解： 经过时间 t，洒水车的质量 $M = M_0 - m_0 t$

根据变质量物体的运动方程：$M\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u \cdot m_0 + F - \mu M g$

整理得 $\mathrm{d}v = \left(\dfrac{u m_0 + F}{M_0 - m_0 t} - \mu g\right)\mathrm{d}t$ 。两边积分，并代入$v(0) = 0$可得

$$v = (u + F / m_0)\ln\frac{M_0}{M_0 - m_0 t} - \mu g t$$

例10 软绳的线密度为 λ ，以力 F 将绳从桌面上提起。某时刻被拉起的绳长为 y，绳的速度为v，加速度为 a。求 F 。



解：方法一：变质量物体运动方程

主体： 被拉起的绳，质量在不断增加。

设 t 时刻绳长 y 已被拉起，$\mathrm{d}t$ 内$\mathrm{d}y$ 又被拉起。

以 $y+\mathrm{d}y$ 为研究系统

设向上为正：$v_{相对}=u-v=-v$

$$m=\lambda y \qquad \mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}y$$

$y+\mathrm{d}y$ 所受合力：$F-\lambda y\cdot g$

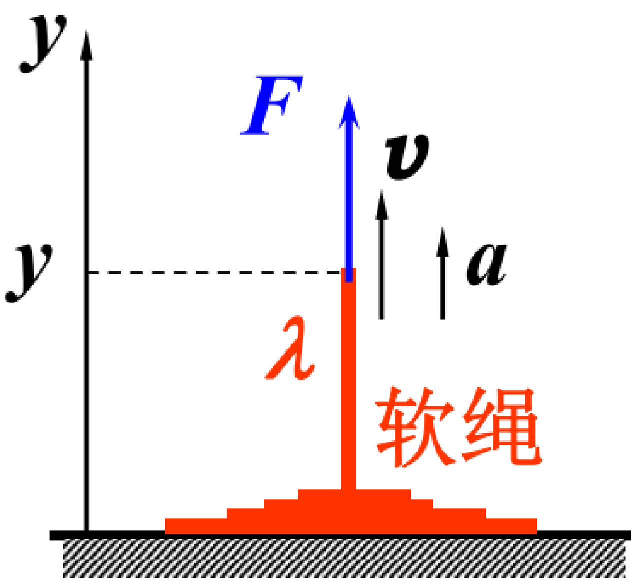
主体运动方程：

$$\lambda y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v\frac{\lambda\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F-\lambda y\cdot g$$

利用：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=v$ ， $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$

$$\Rightarrow F=\lambda ya+\lambda v^2+\lambda yg$$

例10 软绳的线密度为 λ，以力 F 将绳从桌面上提起。某时刻被拉起的绳长为 y，绳的速度为v，加速度为 a。求 F 。



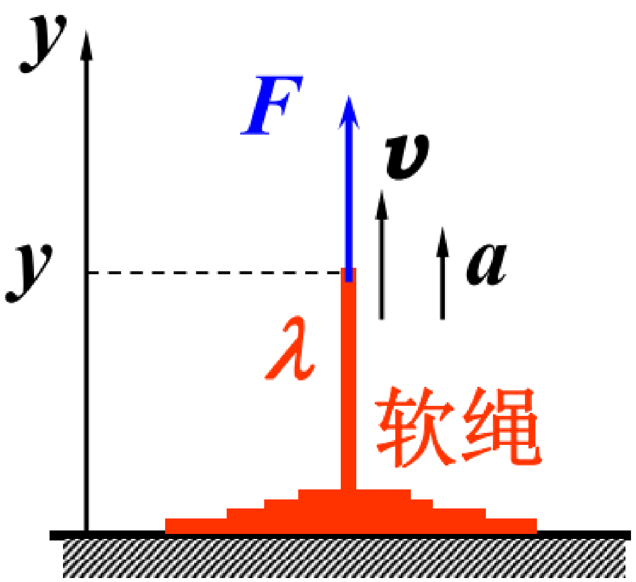
解：方法二：质点系动量定理

根据质点系动量定理得：

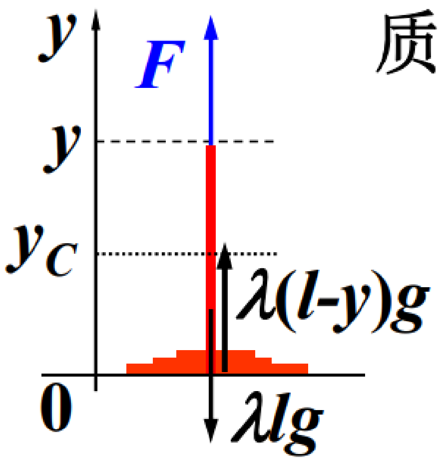
$$F+\lambda(l-y)g-\lambda lg=\frac{\mathrm{d}(\lambda y\boldsymbol{v}+0)}{\mathrm{d}t}$$

$$F=\lambda yg+\lambda y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\lambda\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

例10 软绳的线密度为 λ ，以力 F 将绳从桌面上提起。某时刻被拉起的绳长为 y，绳的速度为v，加速度为 a。求 F 。



解：方法三：质心运动定理



质心受力：拉力F，重力λlg，

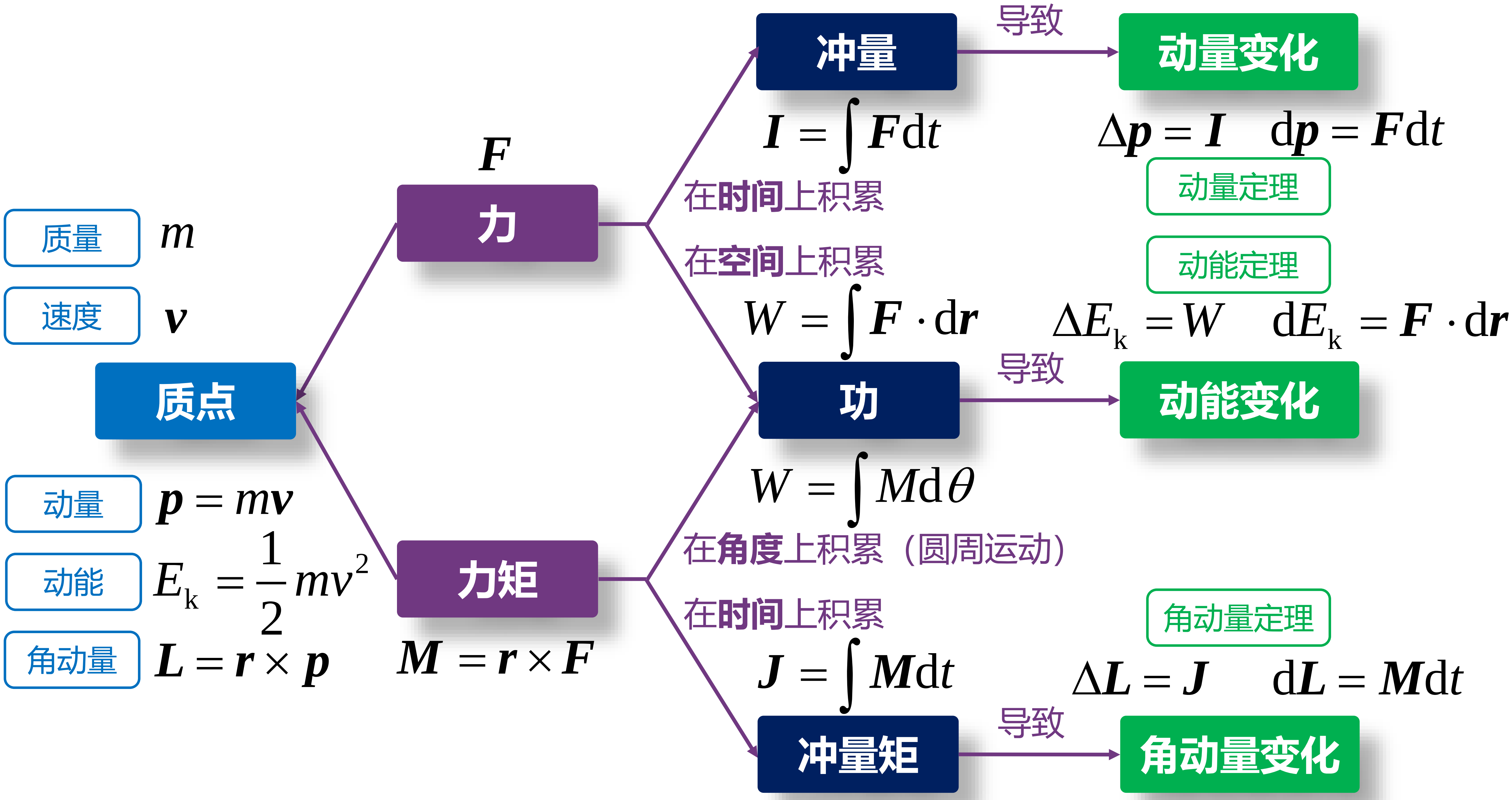
支持力 $\lambda(l-y)g$

$$y_C = \frac{y^2}{2l}$$

根据质心运动定理有：

$$\lambda l \cdot \ddot{y}_C = F + \lambda(l-y)g - \lambda lg = F - \lambda yg$$

$$\longrightarrow \quad F = \lambda yg + \lambda l \cdot \ddot{y}_C = \lambda yg + \lambda(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$$



质点
质量 m
速度 $\boldsymbol{v}$
动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$
动能 $E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2$
角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{F}$
力
力矩
$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$
在时间上积累
冲量
$\boldsymbol{I}=\int\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$
导致
动量变化
$\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{I}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$
动量定理
在空间上积累
$W=\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
功
导致
动能变化
$\Delta E_\mathrm{k}=W\quad \mathrm{d}E_\mathrm{k}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
动能定理
$W=\int M\mathrm{d}\theta$
在角度上积累（圆周运动）
在时间上积累
$\boldsymbol{J}=\int\boldsymbol{M}\mathrm{d}t$
冲量矩
导致
角动量变化
$\Delta\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}\mathrm{d}t$
角动量定理

$$\sum_i E_{\mathrm{k}i} = E_{\mathrm{k}}$$

$$E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = E$$

$\boldsymbol{F}$ **力** $\xrightarrow{\text{在空间上积累}}$ $W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ **功** $\xrightarrow{\text{导致}}$ **动能变化**

动能定理

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = W \quad \mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

推广到质点系

$$W_{外} + W_{保守内力} + W_{非保守内力} = \Delta E_{\mathrm{k}}$$

质点系动能定理

$$W_{保守内力} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

$$W_{外} + W_{非保守内力} = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \Delta E$$

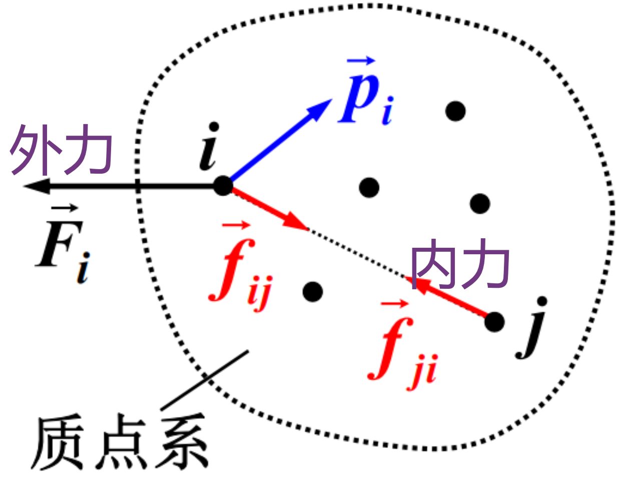
质点系功能原理

$$W_{外} = W_{非保守内力} = 0$$

$$\Delta E = 0$$

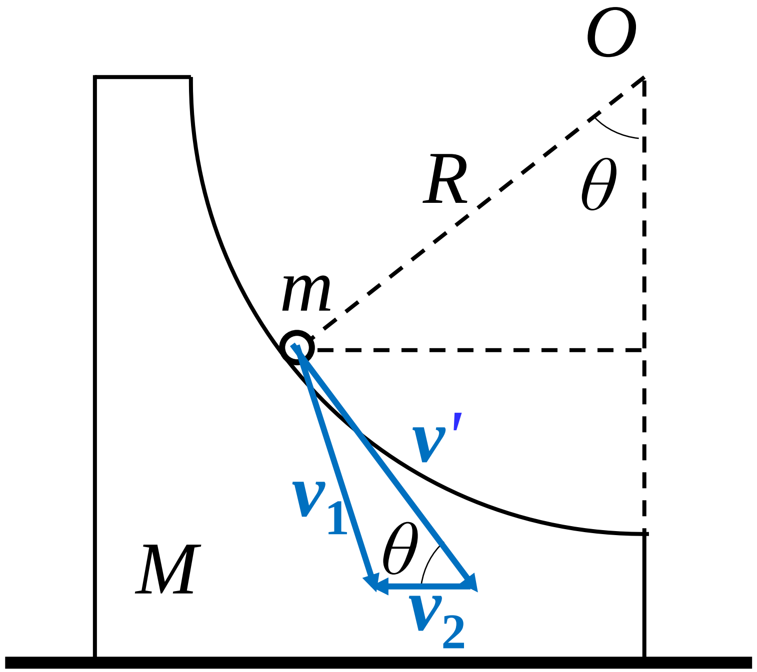
机械能守恒定律

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta E_{\mathrm{p}} = W_{保守内力}$$



如果选择非惯性参考系，一般还需要考虑惯性力做的功。但是，如果选择**质心系**，此时惯性力的总功是0，故功能原理仍成立，且与惯性系中形式相同

例11 质量为 m 的小球从静止开始，从质量为 $2m$、半径为 R 的 1/4 圆弧形轨道下落，假设所有的接触面都是光滑的，求当小球下降到与竖直方向成 θ 角时，相对地面速度大小和相对圆弧轨道速度大小。



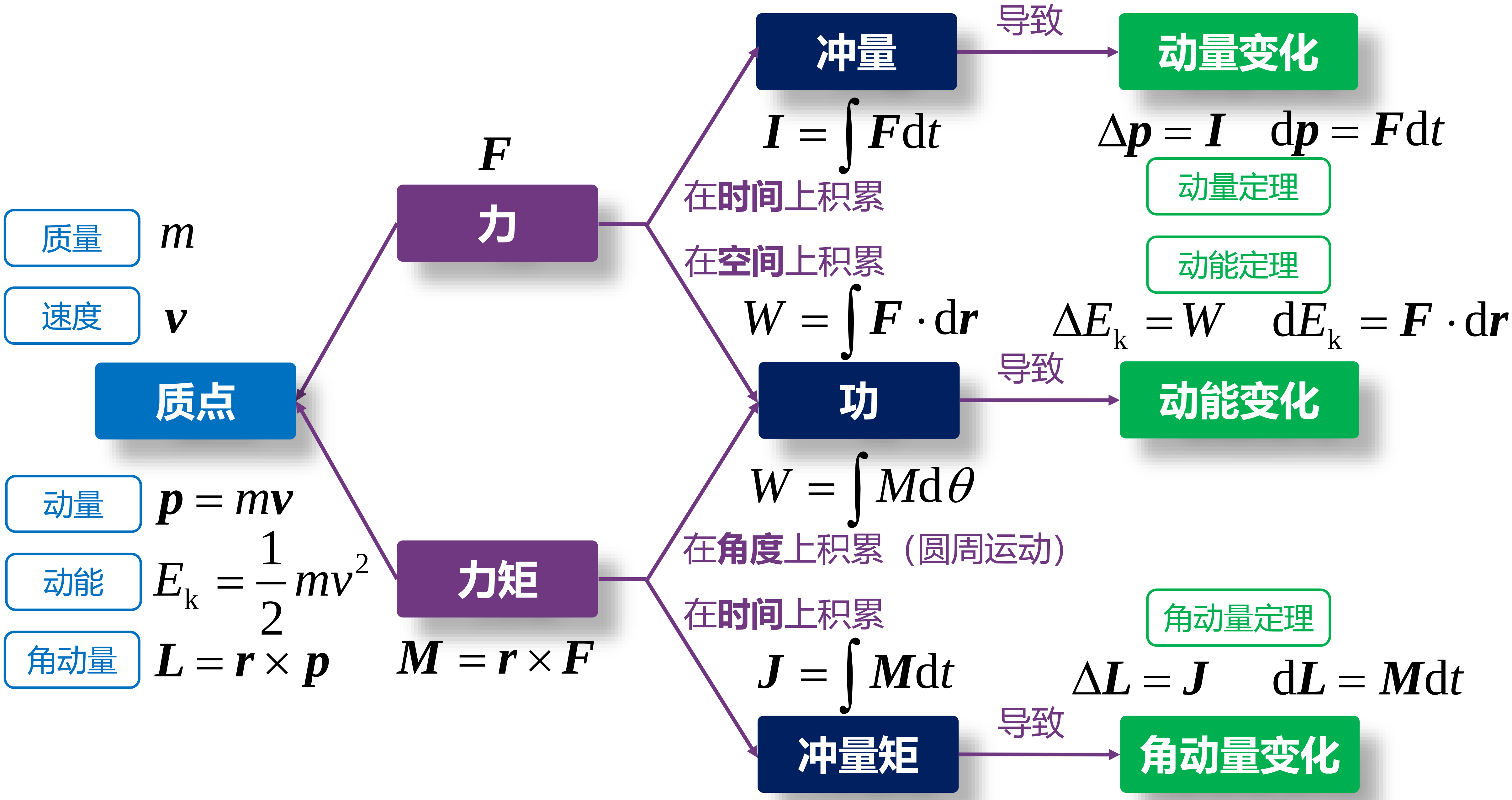
解： 水平方向动量守恒： $mv_{1x}-2mv_2=0$

动能定理： $mgR\cos\theta=\dfrac{1}{2}m(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\dfrac{1}{2}\times 2mv_2^2$

相对运动关系： $v_{1x}=v'\cos\theta-v_2$

$$v_{1y}=v'\sin\theta$$

解得 $v_1=\sqrt{\dfrac{2(4+5\sin^2\theta)\cos\theta}{3(2+\sin^2\theta)}gR}$ $\quad v'=\sqrt{\dfrac{6\cos\theta}{2+\sin^2\theta}gR}$



质量 m
速度 $\boldsymbol{v}$
质点
动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$
动能 $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$
角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{F}$
力
力矩
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
在时间上积累
冲量
$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$
导致
动量变化
$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{I}$ $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$
动量定理
在空间上积累
$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
动能定理
$\Delta E_\mathrm{k} = W$ $\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
功
导致
动能变化
$W = \int M\mathrm{d}\theta$
在角度上积累（圆周运动）
在时间上积累
$\boldsymbol{J} = \int \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$
角动量定理
$\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}$ $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$
冲量矩
导致
角动量变化

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{J} = \int \boldsymbol{M}\mathrm{d}t \qquad \Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{J} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$$

角动量定理

力矩 $\xrightarrow{\text{在时间上积累}}$ **冲量矩** $\xrightarrow{\text{导致}}$ **角动量变化**

推广到质点系

$$\sum_i \boldsymbol{L}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{L}$$

$$\sum_i \boldsymbol{M}_{i外} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_{外}$$

$$\sum_i \boldsymbol{M}_{i内} = \boldsymbol{M}_{内} = \boldsymbol{0}$$

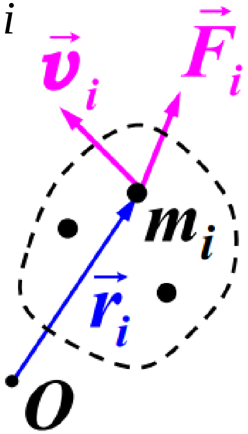
$$\boldsymbol{M}_{外}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{L} \xrightarrow{\text{向定轴 } z \text{ 投影}} M_{外z}\mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z$$

质点系角动量定理（对定点） 质点系角动量定理（对定轴）

$$\boldsymbol{M}_{外} = \boldsymbol{0}$$

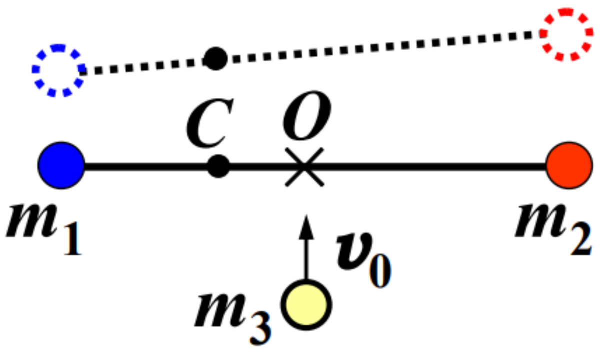
$$\boldsymbol{L} = \text{常矢量} \xrightarrow[M_{外z} = 0]{\text{向定轴 } z \text{ 投影}} L_z = \text{常数}$$

质点系角动量守恒（对定点） 质点系角动量守恒（对定轴）



如果选择非惯性参考系，一般还需要考虑惯性力的力矩。但是，如果选择**质心系**，此时惯性力对质心的力矩为零，故角动量定理仍成立，且与惯性系中形式相同

例12 光滑水平面上，m_1、m_2用长为 l 的轻杆连结，静止放置，m_3 以速度 v_0 垂直射向杆中心 O，发生弹性碰撞。求：碰后m_1, m_2, m_3 速度。



解： 选 m_1、m_2、m_3 为系统，

动能守恒：$\frac{1}{2}m_3v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2$

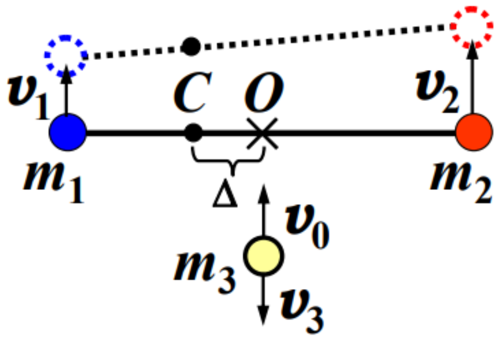
动量守恒：$m_3v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 - m_3v_3$

角动量守恒：

选与 O 点重合的定点，

规定垂直页面向外为正：

$$0 = -m_1v_1\frac{l}{2} + m_2v_2\frac{l}{2}$$



弹性碰撞接近时的相对速度等于分离时的相对速度。用这条性质可以避免求解二次方程。

解得：

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{4m_2m_3}{4m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_3}v_0 \\ v_2 = \dfrac{4m_1m_3}{4m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_3}v_0 \\ v_3 = \dfrac{4m_1m_2 - (m_1 + m_2)m_3}{4m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_3}v_0 \end{cases}$$

例13 地球可看作是半径 R=6400km 的球体。一颗人造地球卫星在地面上空h=800km的圆形轨道上，以7.50km/s的速度绕地球运动。在卫星的外侧发生一次爆炸，其冲量不影响卫星当时的绕地圆周切向速度 v_t = 7.50 km/s，但却给予卫星一个指向地心的径向速度 v_n = 0.50km/s，求爆炸后卫星轨道的远地点相距地面的高度。

解： 设卫星在轨道最高点速度为 v。由圆周运动得 $\dfrac{GMm}{(R+h)^2}=m\dfrac{v_t^2}{R+h}$

卫星对地心的角动量守恒—— $mv_t(R+h)=mv(R+h_1)$

卫星和地球的机械能守恒—— $\dfrac{1}{2}m(v_t^2+v_n^2)-\dfrac{GMm}{R+h}=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{R+h_1}$

解得$h_1=1314$km或350km（近地点，舍去）。

1.3 刚体力学

1.3.1 刚体的定轴转动

描述质点平动

牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

动量定理 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$

动能定理 $\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

速度	加速度	力	质量	动量	冲量	力的功	平动动能
$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$	$\boldsymbol{F}$	m	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$	$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$	$\dfrac{1}{2}mv^2$
$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$	$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$	$M_z = Fr_{\perp}\sin\theta$	$J_z = \int r_{\perp}^2 \mathrm{d}m$	$L_z = J_z\omega$	$M_z\mathrm{d}t$	$M_z\mathrm{d}\theta$	$\dfrac{1}{2}J_z\omega^2$
角速度	角加速度	力矩	转动惯量	角动量	冲量矩	力矩的功	转动动能

描述刚体定轴转动

$M_z = J_z\alpha$ 转动定律

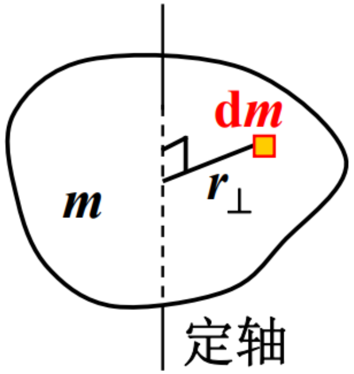
$\mathrm{d}L_z = M_z\mathrm{d}t$ 角动量定理

$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = M_z\mathrm{d}\theta$ 转动动能定理

转动惯量（取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置）

质点系　$J=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体　$J=\int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}m$



1. 对同一轴 J 具有可叠加性

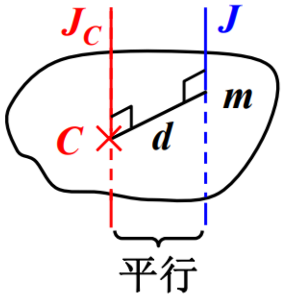
$$\boxed{J=\sum J_i}$$

2. 平行轴定理

$$\boxed{J=J_C+md^2}$$

（证明见书）

$\therefore\quad J_C=J_{\min}$

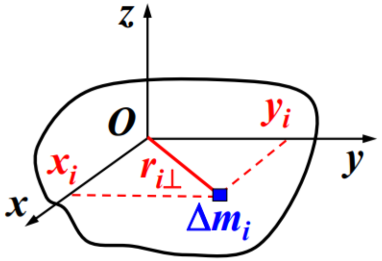


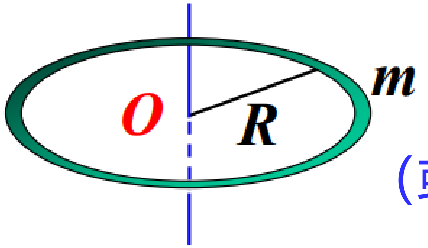
3. 对薄平板的正交轴定理

$J_z=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

$=\sum \Delta m_i x_i^2+\sum \Delta m_i y_i^2$

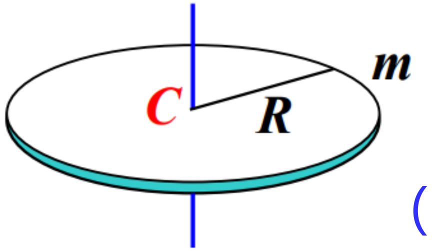
$$\boxed{J_z=J_x+J_y}$$





细圆环：$\boxed{J_O=mR^2}$

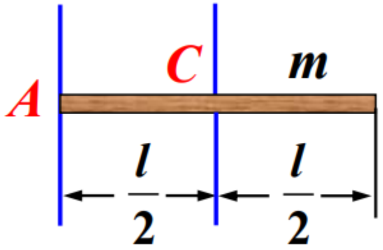
（或均匀薄壁圆筒）



均匀圆盘：$\boxed{J_C=\frac{1}{2}mR^2}$

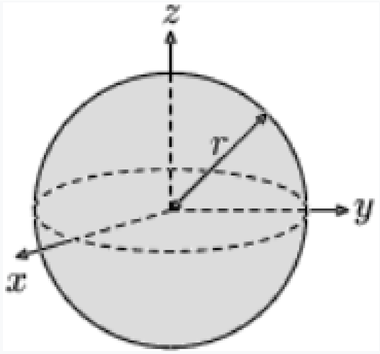
（或均匀圆柱体）

均匀细杆：



$\boxed{J_C=\frac{1}{12}ml^2}$　$\boxed{J_A=\frac{1}{3}ml^2}$

实心球，半径为r，质量为m



$$I=\frac{2mr^2}{5}$$

例14 几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体（　　　）

（A）必然不会转动　　　（B）转速必然不变

（C）转速必然改变　　　（D）转速可能不变，也可能改变。

答案： D

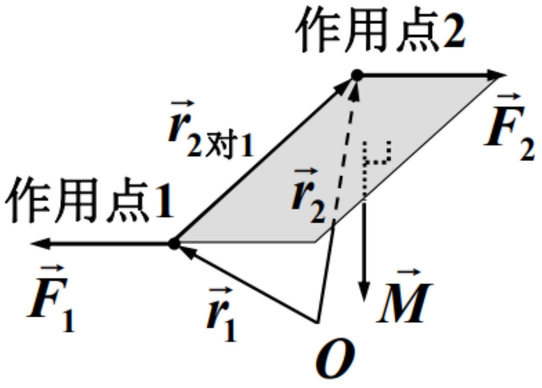
力偶： 大小相等、方向相反且不在同一直线上的两个力

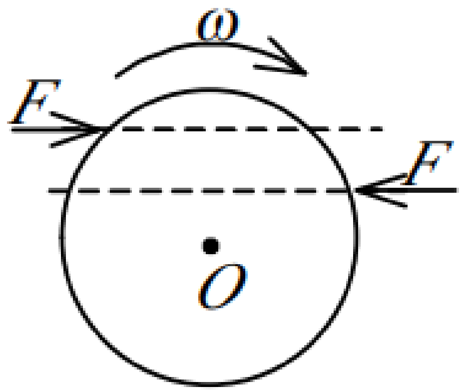
任选参考点 O，力偶矩：

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2$$

$$= \vec{r}_{2对1} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{1对2} \times \vec{F}_1$$



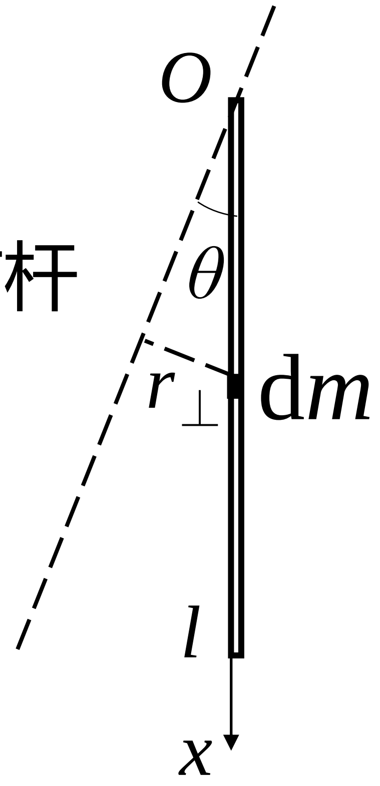


例15 轴1、轴2和轴3互相平行，轴3通过刚体的质心，它与轴1和轴2的垂直距离各为 $d_1 = 0.600\text{m}$ 和 $d_2 = 0.500\text{m}$。若刚体对轴1和轴2的转动惯量各为$J_1 = 6.00\ \text{kg·m}^2$和 $J_2 = 5.00\ \text{kg·m}^2$，求刚体对轴3的转动惯量 J_3。

解： 设刚体的质量为 m 。由平行轴定理，$\begin{cases} J_1 = J_3 + md_1^2 \\ J_2 = J_3 + md_2^2 \end{cases}$

解得 $m = \dfrac{J_1 - J_2}{d_1^2 - d_2^2} = 9.09\text{kg}$ ， $J_3 = 2.73\text{kg} \cdot \text{m}^2$

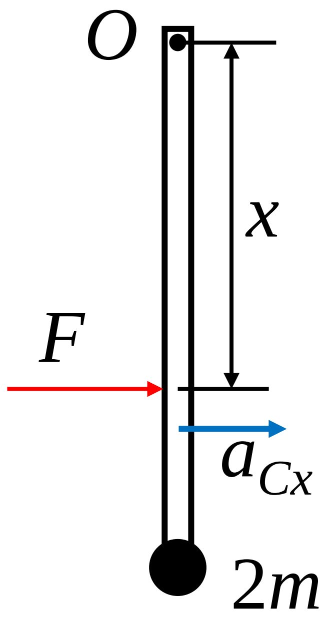
例16 求一根长度为 l ，质量为 m 的均匀细杆对通过其端点且与杆成 θ 角的轴的转动惯量。



解： 建立如图所示的坐标系。质量微元 $\text{d}m = \lambda \text{d}x = \dfrac{m}{l}\text{d}x$

转动惯量 $J = \int r_\perp^2 \text{d}m = \int_0^l (x\sin\theta)^2 \dfrac{m}{l}\text{d}x = \dfrac{1}{3}ml^2 \sin\theta$

例17 如图所示，将一根质量为m、长为 l 的均匀细杆悬挂于通过其一端的固定光滑水平轴 O 上，杆下端固结一个质量为 $2m$ 的质点。在悬点下方距离 x 处施以作用时间很短的水平冲击力 F，使杆开始摆动，冲击瞬间在悬点处杆与轴之间水平方向作用力为零。求 x 的值。



解：对 O 轴的转动惯量 $J_O=\frac{1}{3}ml^2+2ml^2=\frac{7}{3}ml^2$

对 O 轴的转动定律：$Fx=J_O\alpha$

系统质心在 O 点下方 $x_C=\dfrac{m\cdot l/2+2m\cdot l}{3m}=\dfrac{5}{6}l$ 处

由水平方向质心运动定理：$F=3ma_{Ct}=3m\alpha x_C$

解得 $x=\dfrac{14}{15}l$

例18 如图所示，一均匀细棒，长为 l，质量为 m，可绕过棒端且垂直于棒的光滑水平固定轴 O 在竖直平面内转动。棒被拉到水平位置从静止开始下落，当它转到竖直位置时，与放在地面上一静止的质量亦为 m 的小滑块碰撞，碰撞时间极短。小滑块与地面间的摩擦系数为 μ，碰撞后滑块移动距离 S 后停止，而棒继续沿原转动方向转动，直到达到最大摆角。求：碰撞后棒的中点 C 离地面的最大高度 h。

解： 设细棒碰撞前瞬间的角速度为 ω。由动能定理，$\frac{1}{2}mgl=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega^2$

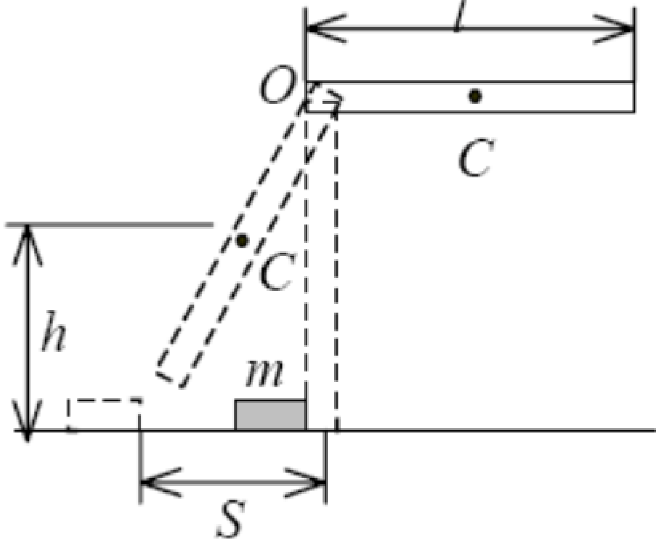
由动量定理，碰撞过程细棒对小滑块的冲量 $I=\Delta p=m\sqrt{2\mu gS}$

设碰撞后瞬间细棒的角速度为 ω_1。

对 O 点的角动量定理：$-Il=\frac{1}{3}ml^2(\omega_1-\omega)$

机械能守恒：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega_1^2+mg\frac{l}{2}=mgh$

解得 $h=l+3\mu S-\sqrt{6\mu Sl}$



例19 将一根长为 l、质量为 m 的均匀杆的 $l/3$ 段水平放置在桌面上，另一端用手托住，设杆和桌边的静摩擦系数为 μ 。求：

（1）撒手后，未发生滑动时，桌边对杆的支持力与转角 θ 的关系；

（2）发生滑动时的临界角。

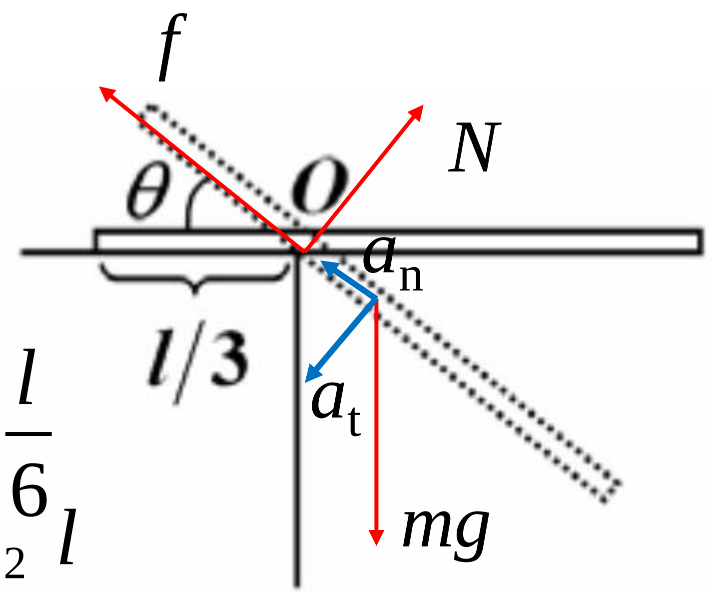
解： 未滑动前，杆绕 O 点作定轴转动，$J_O=\dfrac{1}{12}ml^2+m\left(\dfrac{l}{6}\right)^2=\dfrac{1}{9}ml^2$

由转动定律：$mg\dfrac{l}{6}\cos\theta=J_O\alpha$

由机械能守恒：$mg\dfrac{l}{6}\sin\theta=\dfrac{1}{2}J_O\omega^2$

由质心运动定理：切向—— $mg\cos\theta-N=ma_t=m\alpha\dfrac{l}{6}$

法向—— $f-mg\sin\theta=ma_n=m\omega^2\dfrac{l}{6}$



例19 将一根长为 l、质量为 m 的均匀杆的 1/3 段水平放置在桌面上，另一端用手托住，设杆和桌边的静摩擦系数为 μ 。求：

（1）撤手后，未发生滑动时，桌边对杆的支持力与转角 θ 的关系；

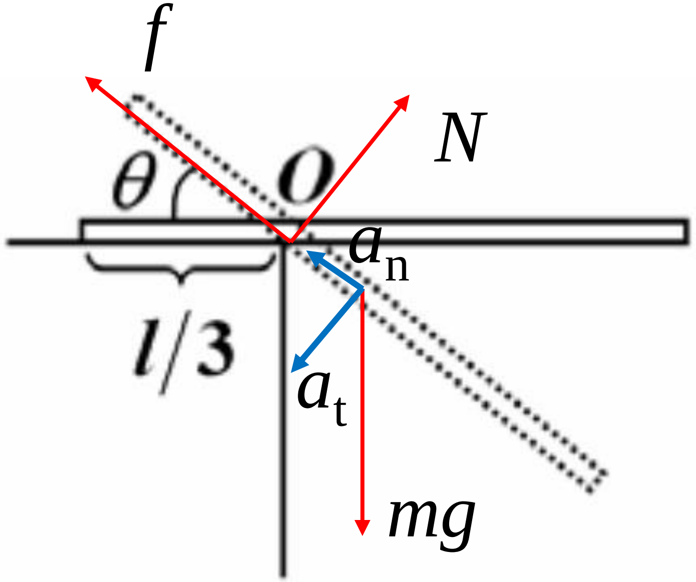
（2）发生滑动时的临界角。

解得 $N=\dfrac{3}{4}mg\cos\theta$　　$f=\dfrac{3}{2}mg\sin\theta$

当杆开始滑动时，静摩擦力 f 达到最大值：$f=\mu N$

故临界角 $\theta=\arctan\dfrac{\mu}{2}$

发生滑动的临界条件是静摩擦力等于滑动摩擦力，脱离的临界条件是压力为0。



1.3.2 刚体的纯滚动

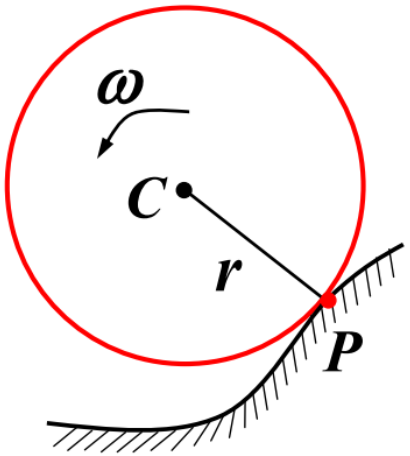
纯滚动： 接触点 P 是瞬心，无相对滑动

质心 C 的速率：

$$\boxed{\upsilon_C = \omega \cdot r}$$

质心 C 的切向加速度：

$$\boxed{a_{Ct} = \alpha \cdot r}$$



刚体角动量 $\boxed{\vec{L}_{O轴} = J_{C轴}\vec{\omega} + \vec{r}_{C\perp} \times m\vec{\upsilon}_C}$

自转角动量　　轨道角动量

$\vec{r}_{C\perp}$：质心 C 相对 O 轴的垂直位矢

$\vec{\upsilon}_C$：质心速度（垂直于 C 轴、O 轴）

1. 质心运动定理 $\boxed{\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C = \dfrac{d\vec{p}}{dt}}$

刚体动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}_C}$

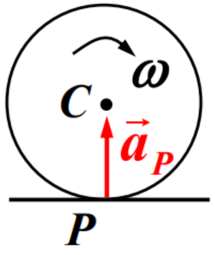
2. 对质心基轴的转动定律

$$\boxed{M_{外C轴} = J_{C轴}\alpha}$$

若 $\vec{a}_{瞬心} // (\vec{r}_C - \vec{r}_{瞬心})$，则：

$$\boxed{M_{外瞬轴} = J_{瞬轴}\alpha}$$

均匀圆柱体的纯滚动



刚体动能

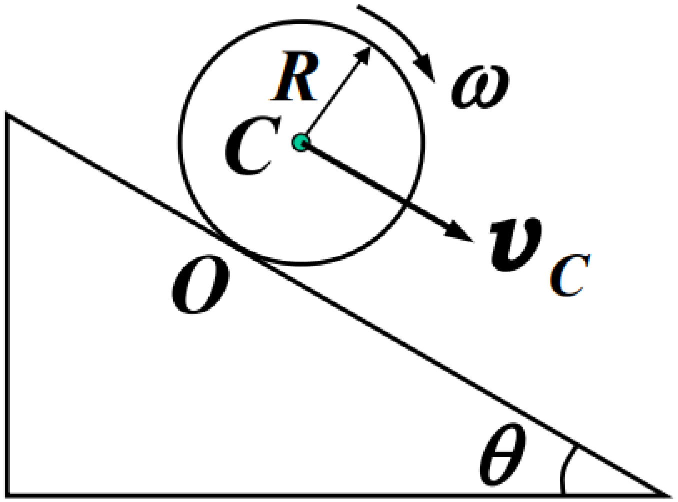
$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2}J_{C轴}\omega^2}$$

（科尼希定理）

质心平动能（刚体平动能）　绕质心基轴的转动能（刚体转动能）

例20 质量不同的一个球和一个圆柱体，质量分布均匀，前者的半径和后者的横截面半径相同。二者放在同一斜面上，从同一高度静止开始无滑动地滚下(圆柱体的轴始终维持水平)，则二者谁先到达底部?

解： 由纯滚动条件知，角速度与质心速度满足 $v_C = \omega R$



刚体的总动能 $E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}(m + \frac{J_C}{R^2})v_C^2$

下降高度 h 时，由机械能守恒，$\frac{1}{2}(m + \frac{J_C}{R^2})v_C^2 = mgh$

解得 $v_C = \sqrt{\frac{2gh}{1 + J_C / mR^2}}$

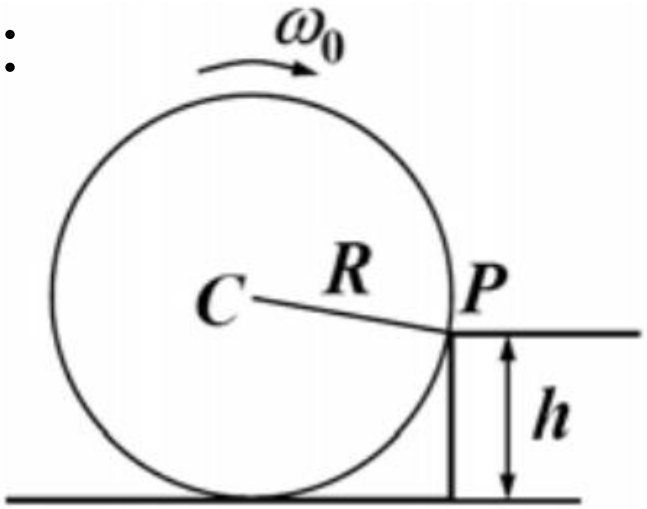
球体 $J_C = \frac{2}{5}mR^2$，圆柱体 $J_C = \frac{1}{2}mR^2$。故球体下降的速度比圆柱体快。

例21 质量一质量为 m、半径为 R 的圆柱体以角速度ω_0 在水平面上作纯滚动，前进中与高为 h（$h<R$）的台阶发生完全非弹性碰撞，求：

（1）碰后角速度ω；

（2）设圆柱体与台阶之间无相对滑动，则圆柱体要爬上台阶，ω_0 至少需要多大?

解： 设碰前质心速度为 v_0，由于是完全非弹性碰撞，碰撞后 P 为瞬心。碰撞时对 P 点角动量守恒，设顺时针方向为正：



$$mv_0(R-h)+J_C\omega_0=J_P\omega$$

其中 $v_0=\omega R$ ，$J_C=\dfrac{1}{2}mR^2$，$J_P=\dfrac{1}{2}mR^2+mR^2$

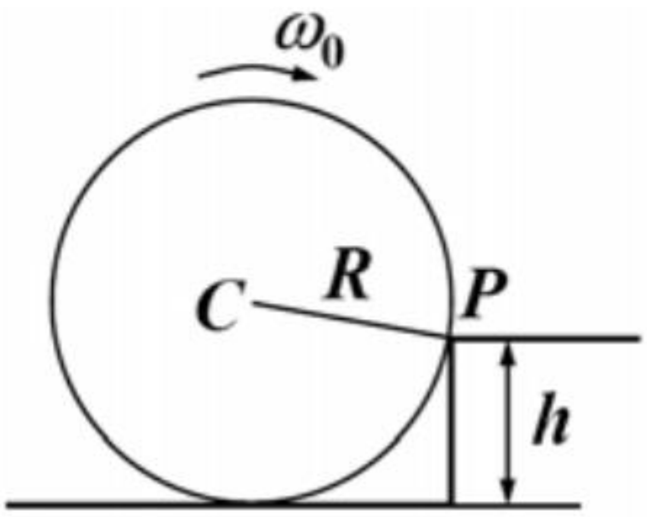
解得 $\omega=(1-\dfrac{2h}{3R})\omega_0$

例21 质量一质量为 m、半径为 R 的圆柱体以角速度ω_0 在水平面上作纯滚动，前进中与高为 h（$h<R$）的台阶发生完全非弹性碰撞，求：

（1）碰后角速度ω；

（2）设圆柱体与台阶之间无相对滑动，则圆柱体要爬上台阶，ω_0 至少需要多大?

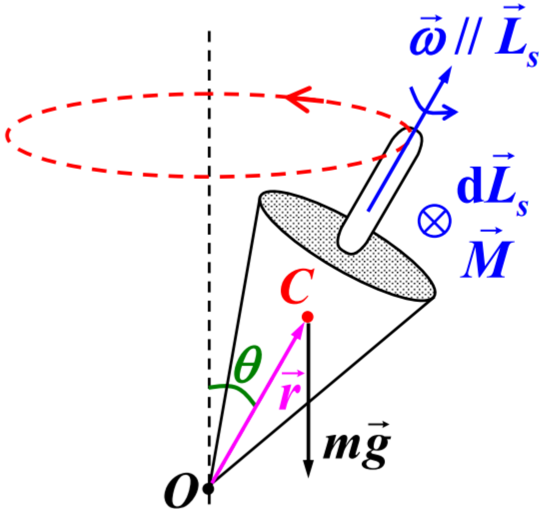
圆柱体要想爬上台阶，要求其碰撞后的动能足够用于克服重力做功：$\frac{1}{2}J_P\omega^2 > mgh$



解得 $\omega_0 > \frac{\sqrt{12gh}}{3R-2h}$

1.3.3 刚体的进动

高速自转物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象



对O点，分析对称陀螺自转角动量$\vec{L}_s$的变化：

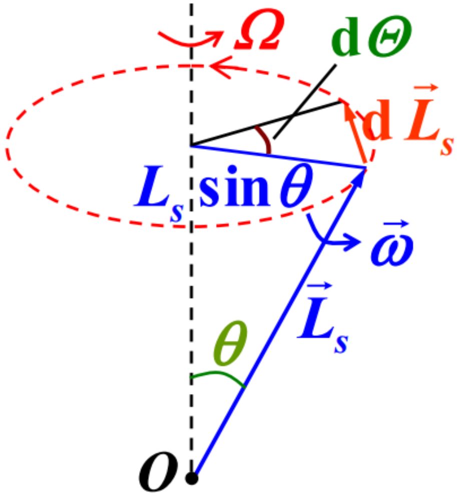
$$\vec{M} \approx \frac{\mathrm{d}\vec{L}_s}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{L}_s // \vec{M}$$

$$\vec{M} \perp \vec{L}_s \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{L}_s \perp \vec{L}_s$$

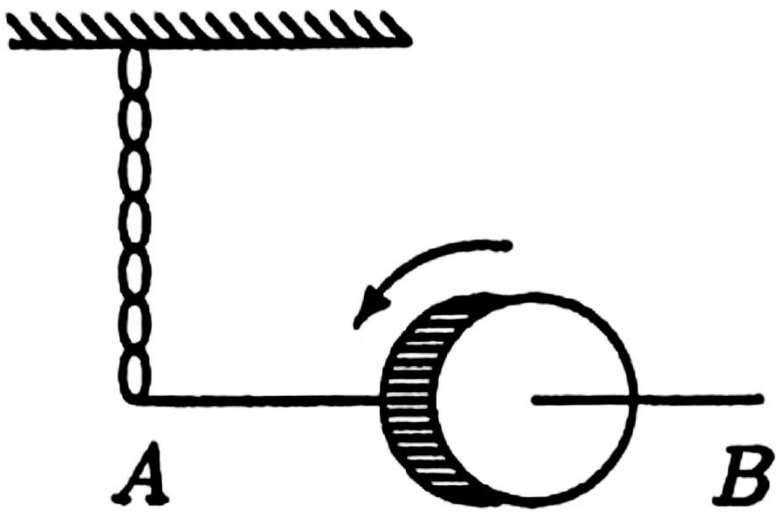
进动角速度： $\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}_s\right| = L_s \sin\theta \,\mathrm{d}\Theta = M \,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad \boxed{\Omega = \frac{M}{L_s \sin\theta} = \frac{M}{J\omega \sin\theta}}$$



例22 如图所示，一个绕轴 AB 作高速转动的轮子，轴的一端 A 用一根链条挂起，如果原来轴在水平位置，从轮子上面向下看，则它的运动为（　）



（A）轴 AB 绕 A 点在竖直平面内作顺时针转动

（B）轴 AB 绕 A 点在竖直平面内作逆时针转动

（C）轴 AB 绕 A 点在水平面内作逆时针转动

（D）轴 AB 绕 A 点在水平面内作顺时针转动

答案： C

第二部分

狭义相对论基础

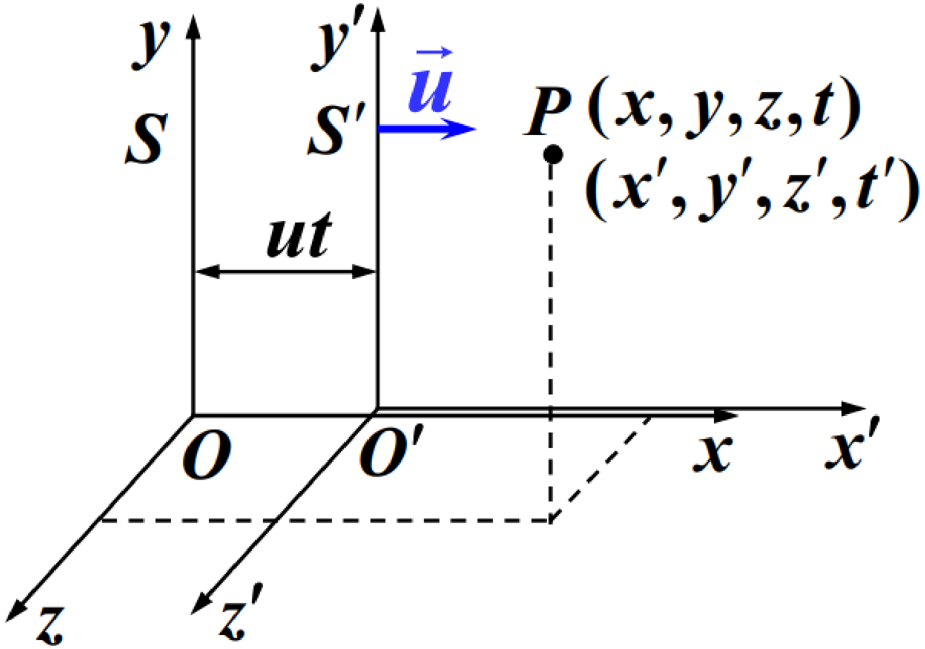
2.1 参考系变换

2.1.1 洛伦兹坐标变换

狭义相对性原理　所有惯性系是平权的，物理规律在所有惯性系中具有相同形式。

光速不变原理　任何惯性系中，真空中的光速都为 c ，和惯性系、光源或观察者的运动无关。

$$\beta = u / c \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$



正变换

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

逆变换

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x'+ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right) \end{aligned}}$$

时间延缓效应

两事件的时间间隔、空间间隔变换公式

正变换

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x)\end{aligned}}$$

逆变换

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x &= \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')\end{aligned}}$$

原时：在惯性系同一地点先后发生的两事件的时间间隔，由一只当地钟测。原时又称固有时，用 $\Delta t'$ 或 τ 表示。

测时：在另一惯性系观测这两事件的时间间隔，由两只相应的钟测得。测时又称两地时，用 Δt 表示。

$$\beta = u / c$$

$$\gamma = 1 / \sqrt{1-\beta^2}$$

根据洛仑兹变换有：

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\underbrace{\Delta x'}_{=0\text{（同地）}}) = \gamma\Delta t'$$

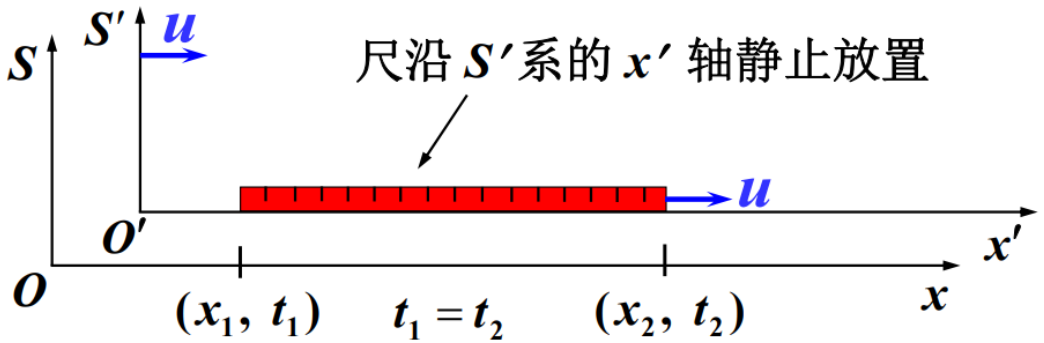
— 原时最短

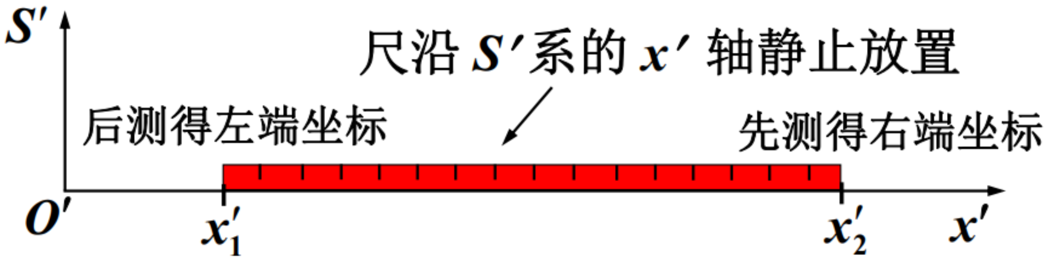
时间延缓效应：惯性系中同一地点发生的两事件的时间间隔，在另一惯性系中观测变大。

长度收缩效应

两事件的时间间隔、空间间隔变换公式

正变换	逆变换
$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$ $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$ $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')$





原长：在相对物体静止的惯性系中所测长度。需测量物体始端、末端坐标，但与测量时间的早晚无关。原长又称静长或固有长度，用 l' 表示。

动长：物体在运动时所测长度。必需同时测量物体始端、末端坐标。用 l 表示。

由洛仑兹变换 $\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$ 得：

原长－动长关系

$$\boxed{l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$$

— 原长最长

u 应理解成物体的速度

动长比原长短 — 长度收缩效应。长度收缩只沿运动方向有，垂直运动方向没有。

例23 两个惯性系 S 和 S’，沿$x(x')$轴方向作匀速相对运动。设在 S’系中某点先后发生两个事件，用静止于该系的钟测出两事件的时间间隔为τ_0，而用固定在S系的钟测出这两个事件的时间间隔为 τ 。又在S’系 x'轴上放置一静止而长度为l_0的细杆，从S系测得此杆的长度为l，则

（A）$\tau < \tau_0$， $l < l_0$　　（B）$\tau < \tau_0$， $l > l_0$

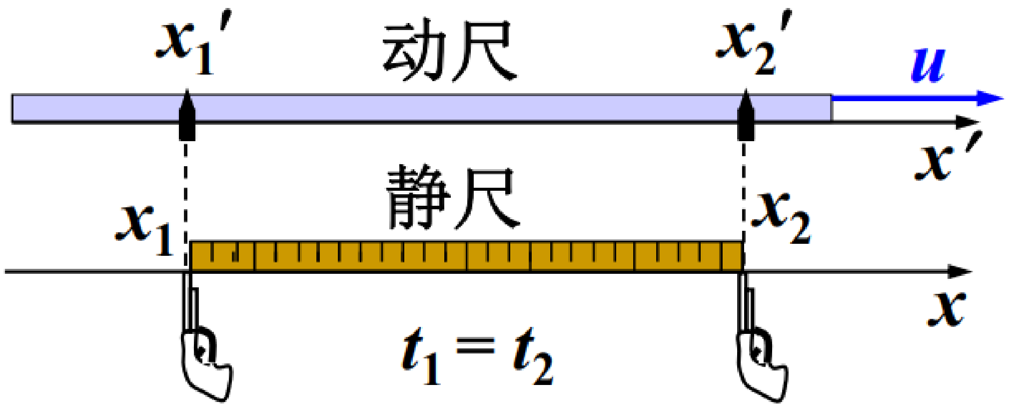
（C）$\tau > \tau_0$， $l < l_0$　　（D）$\tau > \tau_0$， $l > l_0$

答案： C　在S’系同一点发生的两个事件，静止于S’系的钟测得的 τ_0 是原时，固定在S系的钟测得的 τ 是测时。原时小于测时。

S’系中测得的细杆长度 l_0 是原长，从S系测得的 l 是动长。原长大于动长。

例24 一列高速火车以速度 u 驶过车站时，固定在站台上相距为 l 的两只机械手在车厢上同时划出两个痕迹，求车厢上的观察者测得两个痕迹的距离。

解： “同时”是相对的。划出两个痕迹在站台上是同时的，在火车上不是。故在站台参考系测得的长度 l 是痕迹的动长，在车厢上测得的是痕迹的原长。原长为 $\dfrac{l}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$。



例25 在 S 系中的 x 轴上相隔 $\Delta x = t_0 c$ 处有两只同步的钟 A 和 B（c 是真空中光速，$t_0 = 1\mu s$）。在 S’ 系的 x' 轴上也有一只钟 A’，设 S’ 系相对于 S 系的运动速度为 $v = 0.7c$，沿 x 轴正向，且当 A’ 与 A 相遇时，刚好两钟的读数均为零。当 A’ 钟与 B 钟相遇时，求 B 钟的读数和A’ 钟的读数。

解： $\beta = 0.7, \gamma = 1/\sqrt{1-0.7^2} = 1.40$

两事件的时间间隔、空间间隔变换公式

正变换	逆变换
$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$
$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x)$	$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')$

方法一 洛伦兹变换

在S系中，事件1：A’ 与A相遇 $x_1 = 0, t_1 = 0$

事件2：A’ 与B相遇 $x_2 = t_0 c, t_2 = \dfrac{\Delta x}{v} = \dfrac{t_0}{0.7} = 1.43\mu s$

故在S’系中，事件1和2的时间间隔 $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta\Delta x / c) = 1.02\mu s$

故B钟读数1.43μs，A’钟读数1.02μs

例25 在 S 系中的 x 轴上相隔 $\Delta x = t_0 c$ 处有两只同步的钟 A 和 B（c 是真空中光速，$t_0 = 1\mu s$）。在 S' 系的 x' 轴上也有一只钟 A'，设 S' 系相对于 S 系的运动速度为 $v = 0.7c$，沿 x 轴正向，且当 A' 与 A 相遇时，刚好两钟的读数均为零。当 A' 钟与 B 钟相遇时，求 B 钟的读数和A' 钟的读数。

解： $\beta = 0.7, \gamma = 1/\sqrt{1-0.7^2} = 1.40$

方法二 尺缩+钟慢

S'系中测得A钟与B钟的距离 $d' = \Delta x / \gamma$，

测得A'从与A相遇到与B相遇经过 $\Delta t' = d'/v = 1.02\mu s$，故A'钟读数1.02μs

S'系中两次相遇在同一地点，$\Delta x' = 0$ 故在S系中，B钟读数 $\gamma \Delta t' = 1.43\mu s$

2.1.2 洛伦兹速度变换

设同一质点在 S 和 S' 中速度分别为 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}'$

洛仑兹速度变换式

正变换

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

逆变换

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

一维运动情况 — 速度沿 x 方向

令 $v_y = v_z = 0$， 则 $v'_y = v'_z = 0$

设 $v = v_x$， $v' = v'_x$

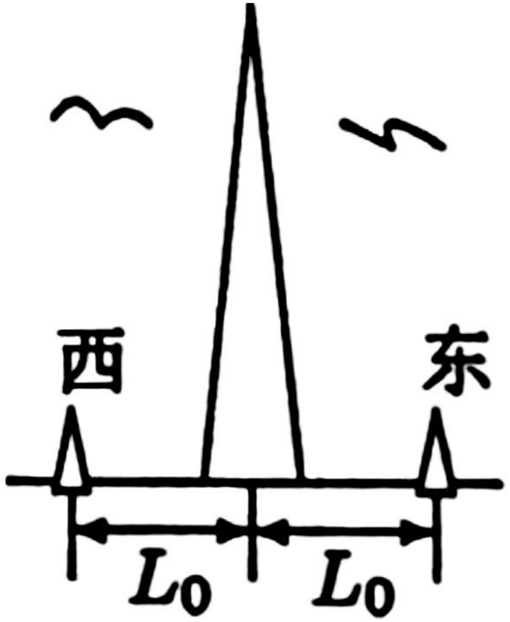
$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v}$$

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'}$$

光速不变原理体现为：在一个参考系中速率为c，经过速度变化在另一个参考系中速率也为c。但是，如果光的传播方向与参考系相对运动方向不同，速度的方向可能改变。

例26 一发射台向东西两侧距离均为 $L_0 = t_0 c$ 的两个接收站E(东)与W(西)发射讯号。（c 是真空中光速，$t_0 = 1\text{ms}$）。今有一飞船以匀速度 $v = 0.4c$ 沿发射台与两接收站的连线由西向东飞行，求在飞船上测得两接收站接收到发射台同一讯号的时间间隔 δt 。

解： $\gamma = 1/\sqrt{1-0.4^2} = 1.09$



由光速不变原理，飞船上测得的发射台发送的信号速度仍为c 。飞船参考系中，两个接收站均以速度 v 由东向西运动，与发射站间距变为 L_0/γ

故时间间隔 $\delta t = \dfrac{L_0/\gamma}{c-v} - \dfrac{L_0/\gamma}{c+v} = 0.87\text{ms}$

例27 c 是真空中光速。两个火箭相向运动，它们相对于静止观察者的速率都是 αc，火箭甲相对火箭乙的速度按经典力学应该为 $v_0 = 2\alpha c$，实际为 v 。求 v/v_0。

解： 设静止观察者所在参考系为S，火箭乙参考系为S’。

取火箭甲的速度方向为正，则S’ 相对S的速度为 $u=-\alpha c$

火箭甲在S系中的速度为 $v=\alpha c$，由洛伦兹速度变换，火箭甲在S’系中的速度为

$$v'=\frac{v-u}{1-\dfrac{u}{c^2}v}=\frac{2\alpha c}{1+\dfrac{\alpha c}{c^2}\alpha c}=\frac{2\alpha c}{1+\alpha^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}'=\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{1-\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{c}^2}\boldsymbol{v}}}$$

因此

$$v/v_0=\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}}{1+\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{c}^2}\boldsymbol{v}'}}$$

例28 一火箭的固有长度为 L，相对于地面作匀速直线运动的速度为 v_1，火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为 v_2 的子弹。求在火箭上和地面上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔。

解： 火箭上——在相对火箭静止的参考系中，火箭长度为 L ，子弹速度为 v_2。故火箭上测得的时间间隔为 $\Delta t' = L / v_2$

地面上——方法一：洛伦兹变换

两事件的时间间隔、空间间隔变换公式

正变换	逆变换
$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$ $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$ $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')$

在火箭参考系，子弹从射出到击中靶的空间间隔为 $\Delta x' = L$

故在地面系，时间间隔 $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \beta \Delta x' / c) = \dfrac{L / v_2 + L v_1 / c^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}$

例28 一火箭的固有长度为 L，相对于地面作匀速直线运动的速度为 v_1，火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为 v_2 的子弹。求在火箭上和地面上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔。

$$\boxed{\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}}{1 - \frac{\boldsymbol{u}}{c^2}\boldsymbol{v}}}$$

解：地面上——方法二：速度变换+尺缩效应

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}}{1 + \frac{\boldsymbol{u}}{c^2}\boldsymbol{v}'}}$$

相对于地面参考系，子弹的速度为 $v_{2地} = \dfrac{v_2 + v_1}{1 + v_1 v_2 / c^2}$

地面系观察火箭的动长 $L_{地} = L/\gamma = L\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$

故地面上测得时间间隔 $\Delta t = \dfrac{L_{地}}{v_{2地} - v_1} = \dfrac{L\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{\dfrac{v_2 + v_1}{1 + v_1 v_2/c^2} - v_1} = \dfrac{L/v_2 + L v_1/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$

2.2 相对论力学量

2.2.1 相对论质量、动量、能量

相对论质量

$$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

m_0 — 静止质量

m — 运动质量、相对论质量

相对论动量

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{E_0=m_0c^2}$$ — 静止能量

$$\boxed{E=mc^2=E_k+m_0c^2}$$ — 总能

$$\boxed{E=mc^2}$$ — 质能关系

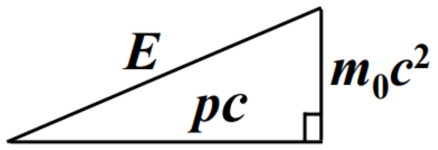
孤立系统： $\Delta E=\Delta E_k+\Delta(m_0c^2)=0$

$$\therefore\ \Delta E_k=(-\Delta m_0)c^2$$

$-\Delta m_0$ 称为质量亏损，一般就用 Δm_0 表示。

2.2.2 相对论能量-动量关系

$$\left.\begin{aligned} E &= mc^2 \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \\ p &= m\upsilon \end{aligned}\right\} \quad \boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$



1. 非相对论极限 — 牛顿的情况

$$\upsilon << c\ ,\quad m \approx m_0\ ,\quad p \approx m_0\upsilon$$

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 << m_0c^2 \approx E$$

2. 极端相对论情况 — 高能粒子

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon \sim c\ ,\quad p \approx mc \\ &E_k \approx E \approx pc \approx mc^2 >> m_0c^2 \end{aligned}\right\} \text{和光子的相应关系类似}$$

. 关于光子的一些重要关系

静止质量： $m_0 = 0 \quad (\because \upsilon = c)$

总能： $E = mc^2 = (mc)c = pc$

动能： $E_k = E = mc^2 = pc$

例29 c 是真空中光速。惯性系 S 中，一粒子具有动量$(p_x, p_y, p_z)=(5,3,\sqrt{2})$ MeV/c，及总能量 E = 10MeV，求在S中测得粒子的速率 v 。

解： 设粒子的静止质量为 m_0 。

相对论动量

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

粒子的总动量为6MeV/c，故 $\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 6\text{MeV}/c$

总能量 E = 10MeV，故 $\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 10\text{MeV}$

$\boxed{E = mc^2}$ — 质能关系

联立两式解得 $v = 0.6c$

例30 c 是真空中光速。一电子以 $v_0 = \alpha c$ 的速率运动，电子的经典力学的动能为 E_{k0}，相对论动能为 E_k，求 E_{k0}/E_k 的值。

解： 经典力学动能 $$E_{k0} = \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}m_0\alpha^2 c^2$$

$\boxed{E_0 = m_0c^2}$ — 静止能量

$\boxed{E = mc^2 = E_k + m_0c^2}$ — 总能

$\boxed{E = mc^2}$ — 质能关系

相对论动能 $$E_k = E - E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} - m_0c^2$$

二者之比 $$E_{k0}/E_k = \frac{\frac{1}{2}m_0\alpha^2c^2}{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} - m_0c^2} = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\sqrt{1-\alpha^2}}$$

例31 c 是真空中光速。一个静止质量为 m_0 的质点，以速率 $v=0.8c$ 与一质量为 $M_0=1.5m_0$ 的静止质点发生碰撞结合成一个速率为 v_f 的复合质点。求 v_f 的值。

解： 设复合质点的静止质量为 M。

由动量守恒：
$$\frac{m_0\cdot 0.8c}{\sqrt{1-0.8^2}}=\frac{Mv_\mathrm{f}}{\sqrt{1-v_\mathrm{f}^2/c^2}}$$

由能量守恒：
$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0.8^2}}+1.5m_0c^2=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v_\mathrm{f}^2/c^2}}$$

联立两式解得 $v_\mathrm{f}=\dfrac{8}{19}c$

相对论动量

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}$$

$\boxed{E=mc^2}$ — 质能关系

狭义相对论中，动量、能量（质量）守恒仍然成立，但静止质量一般不守恒。

祝考试顺利

请扫码填写反馈问卷