Лабораторная работа № 4

Модель гармонических колебаний

Сухарев Кирилл

Содержание

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Здесь x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. ($\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. Его можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой лоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Задание

Вариант 39

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\dot{x} + 1.2x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 4.3x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 7.4\dot{x} + 7.5x = 2.2cos(0.6t)$$

На интервале $t \in [0; 55]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.2, y_0 = -0.2$

Выполнение лабораторной работы

1. Код будем писать на языке Julia. Подключим необходимые библиотеки и зададим начальные условия (Figure 1)

```
using DifferentialEquations
using Plots

u0 = [0.2, -0.2]
t = (0.0, 55.0)
dt = 0.05
```

Figure 1: Начальные условия

2. Напишем функцию, определяющую систему ОДУ, заданную первым случаем (Figure 2).

```julia
function m1(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -1.2u[1]
end
```

Figure 2: Функция первой системы ОДУ

3. Напишем функцию, определяющую систему ОДУ, заданную вторым случаем (Figure 3).

```julia
function m2(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -2du[1] - 4.3u[1]
end
```

Figure 3: Функция второй системы ОДУ

4. Напишем функцию, определяющую систему ОДУ, заданную третьим случаем (Figure 4).

```julia
function m3(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = 2.2cos(0.6t) - 7.4du[1] - 7.5u[1]
end
```

Figure 4: Функция третьей системы ОДУ

5. Решим эти систему и построим графическое отображение решения (Figure 5).

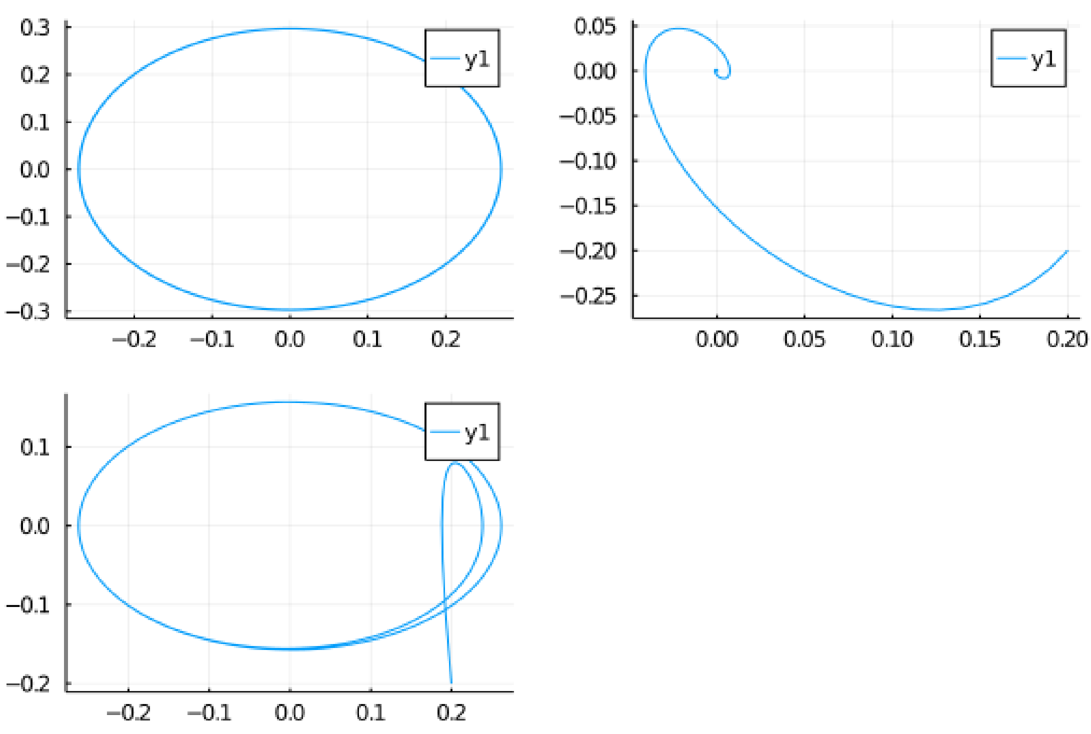

Figure 5: Решение систем ОДУ

```julia
using DifferentialEquations
using Plots

u0 = [0.2, -0.2]
t = (0.0, 55.0)
dt = 0.05

function m1(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -1.2u[1]
end

function m2(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -2du[1] - 4.3u[1]
end

function m3(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = 2.2cos(0.6t) - 7.4du[1] - 7.5u[1]
end

s1 = solve(ODEProblem(m1, u0, t), saveat = dt)
s2 = solve(ODEProblem(m2, u0, t), saveat = dt)
s3 = solve(ODEProblem(m3, u0, t), saveat = dt)

plotX(u) = u[1]
plotY(u) = u[2]

p1 = plot(plotX.(s1.u), plotY.(s1.u))
p2 = plot(plotX.(s2.u), plotY.(s2.u))
p3 = plot(plotX.(s3.u), plotY.(s3.u))

plot(p1, p2, p3)
```

Figure 6: Полный код программы

Контрольные вопросы

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор - система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3. Запишите модель математического маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Пусть ДУ второго порядка имеет вид: $A\ddot{x} + B\dot{x} + C\omega_0^2 x = P(t)$. Тогда система из двух ДУ первого порядка будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \dfrac{-B\dot{x} - Cx - P(t)}{A} \end{cases}$$

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовая траектория - кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

Фазовый портрет - геометрическое представление траекторий динамической системы в фазовой плоскости.

Выводы

Рассмотренные простейшие модели гармонических колебаний соответствуют дифференциальным уравнениям второго порядка, которые можно представить в виде системы двух дифференциальным уравнениям первого порядка.