Лабораторная работа № 5

Модель хищник-жертва

Сухарев Кирилл

Содержание

List of Tables

List of Figures

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, ñ - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние. Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Задание

Вариант 39

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.67x(t) + 0.067x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.66y(t) - 0.065x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 9, y_0 = 19$. Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

1. Сразу же найдем стационарную точку. Она будет иметь следующие координаты: $x_c = \frac{0.66}{0.065} = 10.15, y_c = \frac{0.67}{0.067} = 10$
2. Код будем писать на языке Julia. Подключим необходимые библиотеки и зададим начальные условия (Figure 0.1)

```julia
using Plots
using DifferentialEquations

u0 = [9, 19]
t = (0, 10)
```

Figure 0.1: Начальные условия

3. Напишем функцию, определяющую систему ОДУ (Figure 0.2).

```julia
function m(du, u, p, t)
    du[1] = -0.67u[1] + 0.067*u[1]*u[2]
    du[2] = 0.66u[2] - 0.065*u[1]*u[2]
end
```

Figure 0.2: Функция первой системы ОДУ

3. Построим график зависимости численности хищников от численности жертв (Figure 0.3).

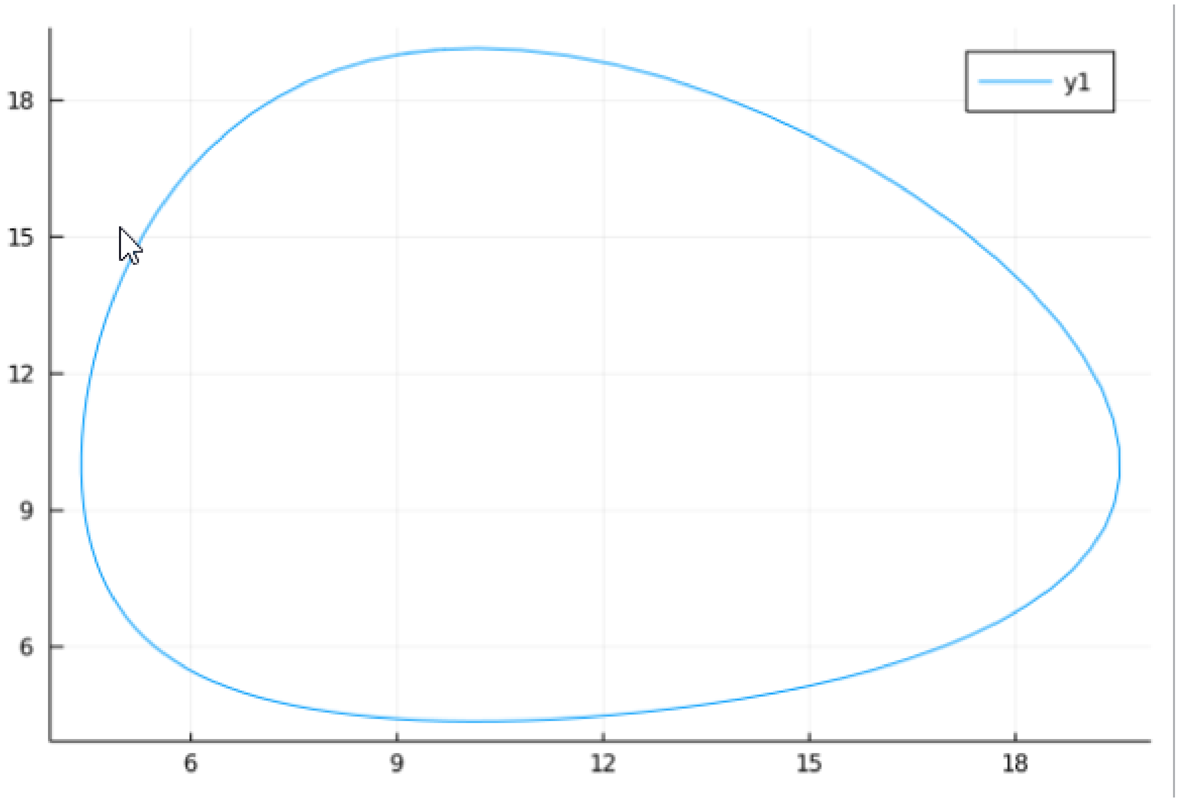

Figure 0.3: График зависимости численности хищников от численности жертв

4. Построим графики изменения численности хищников и численности жертв (Figure 0.4).

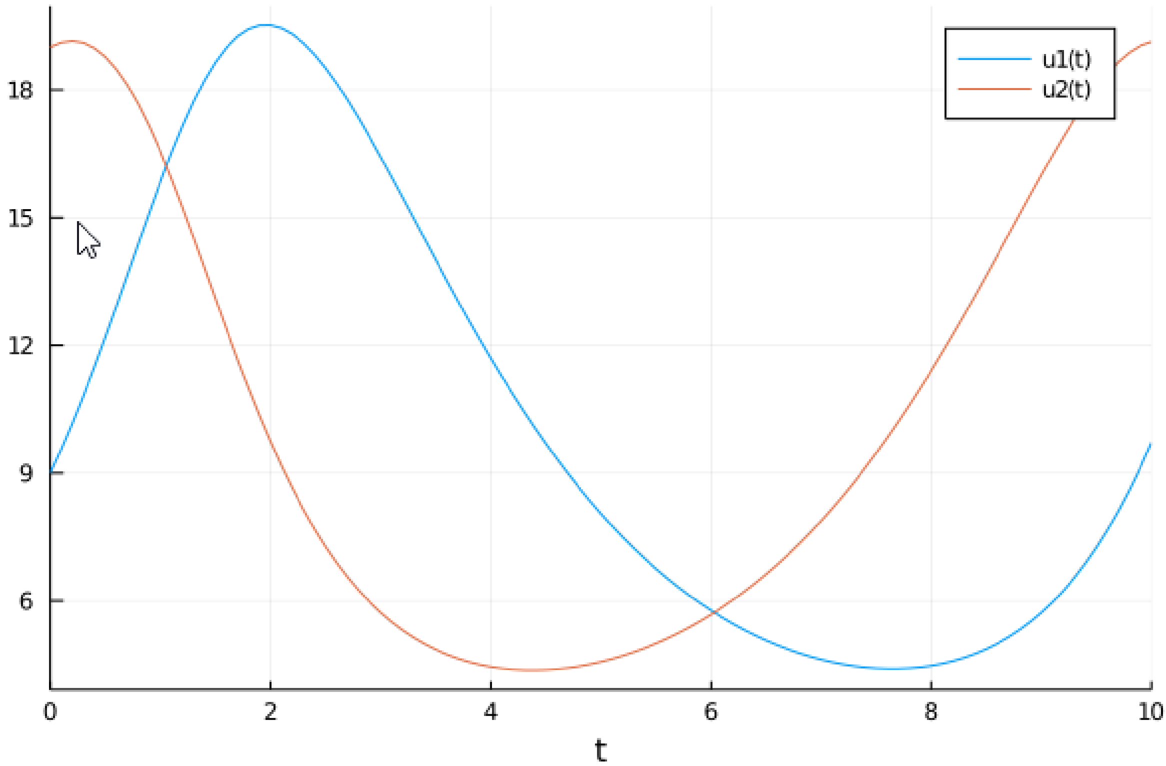

Figure 0.4: График изменения численности хищников и численности жертв

```julia
using Plots
using DifferentialEquations

u0 = [9, 19]
t = (0, 10)

function m(du, u, p, t)
    du[1] = -0.67u[1] + 0.067*u[1]*u[2]
    du[2] = 0.66u[2] - 0.065*u[1]*u[2]
end

s = solve(ODEProblem(m, u0, t), saveat = 0.1)

plotX(u) = u[1]
plotY(u) = u[2]

p1 = plot(plotX.(s.u), plotY.(s.u))
p2 = plot(s)
plot(p2)
```

Figure 0.5: Полный код программы