

符号定义

- 下标 i : 代表曼哈顿的第 i 个分区 ($i = 1, 2, \dots, 12$)
- A_i : 第 i 个分区的面积
- W_{total} : 全纽约市每日垃圾总量 (常数: 24,000,000 磅/天)
- γ : 曼哈顿占全纽约垃圾量的比例系数 (估计值: 20%)。
- w_i : 第 i 个分区每日产生的垃圾量 (单位: 吨/天)。
- f_i : 第 i 个分区的垃圾回收频率 (单位: 次/周)。 $f_i \in \{2, 3\}$
- C : 单辆垃圾车的容量 (常数: 12 吨)
- R : 单辆车每天能跑的趟数, 假设为 2 趟。
- N_i : 第 i 个分区需要的垃圾车数量 (整数)

模型构建

步骤 1：垃圾产量估算模型

由于没有直接的分区垃圾数据, 我们使用“加权面积分配法”。

1. 计算曼哈顿总量：

$$W_{manhattan} = W_{total} \times \gamma$$

- $W_{total} = 24,000,000 \text{ lbs} = 12,000 \text{ tons}$ 。
- $\gamma = 0.20$ (基于人口/经济占比估算)。
- $\therefore W_{manhattan} = 2,400 \text{ tons/day}$ 。

2. 分配到各区：

假设垃圾产量与面积成正比 (这里简化模型, 认为密度均匀, 如果需要更精细, 可以给 MN01-05 商业区加权重系数 $\alpha > 1$):

$$w_i = W_{manhattan} \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{12} A_j}$$

步骤 2：频率决策模型

题目问“什么特征决定高频回收”。我们要建立一个阈值判据。

定义 **垃圾产出密度** $\delta_i = \frac{w_i}{A_i}$ 。

如果一个区域单位面积产垃圾太快, 必须增加频率, 否则路边会堆满。

- 判别式：

$$f_i = \begin{cases} 3, & \text{if } \delta_i > \text{Threshold } \theta \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(注：为了简化，我们在下面的计算中，可以人为指定人口密集或商业密集的 MN01-MN06 为高频区，即 $f_i = 3$)。

步骤 3：卡车需求计算模型

我们需要确保在回收日有足够的车把积累的垃圾拉走。

- 单次回收需要处理的量 (L_i)：

$$L_i = \frac{w_i \times 7 \text{ (一周总垃圾)}}{f_i \text{ (每周次数)}}$$

(如果是2次/周，每次就要拉走3.5天的垃圾量；如果是3次/周，每次拉走2.33天的量。频率越高，单次压力越小。)

- 所需车辆数 (N_i)：

$$N_i = \left\lceil \frac{L_i}{C \times R} \right\rceil$$

(符号 $\lceil x \rceil$ 代表向上取整，因为车不能算半辆)

- 跨区共享模型：

如果不分区，统一调度：

$$N_{shared} = \left\lceil \frac{\sum L_i}{C \times R} \right\rceil$$

$$\text{节省车辆数} = \sum N_i - N_{shared}$$

具体计算与结果

假设参数设定：

- 曼哈顿总垃圾量：2400 吨/天。
- 策略：**下城和中城 (MN01-MN06)** 为商业密集区，设为 **3次/周**；**上城 (MN07-MN12)** 为居住区，设为 **2次/周**。
- 卡车参数：12吨/车，每天跑2趟。

2. 最终计算结果

District	Area (mi^2)	Daily Waste (Tons)	Frequency (f_i)	Load/Pickup (Tons)	Trucks Needed (N_i)
MN01	1.46	165.5	3 (High)	386.2	17
MN02	1.35	153.0	3 (High)	357.1	15
MN03	1.68	190.5	3 (High)	444.4	19
MN04	1.77	200.7	3 (High)	468.2	20
MN05	1.57	178.0	3 (High)	415.3	18
MN06	1.39	157.6	3 (High)	367.7	16
MN07	1.91	216.5	2 (Std)	757.9	32
MN08	1.97	223.3	2 (Std)	781.7	33
MN09	1.50	170.1	2 (Std)	595.2	25
MN10	1.40	158.7	2 (Std)	555.5	24
MN11	2.37	268.7	2 (Std)	940.4	40
MN12	2.80	317.4	2 (Std)	1111.0	47
TOTAL	21.17	2400	-	-	306

3. 优化分析：共享卡车

题目最后问：*Can that number be significantly reduced by sharing trucks?*

- 独立调度 (Solo Strategy)**：各区车队独立，不能跨区支援。
 - 总需求： $\sum N_i = \mathbf{306}$ 辆。
- 共享调度 (Shared Strategy)**：全曼哈顿统一调度。

- 计算： $N_{shared} = \lceil \frac{\sum L_i}{24} \rceil = \lceil \frac{7180.5}{24} \rceil = 300$ 辆。
- 结论：
 - 可以减少 **6 辆车**。
 - 虽然比例看起来不大 (约 2%)，但在实际运营中，这减少了车辆购置费和司机人力成本，更重要的是**增加了系统的鲁棒性** (即如果某区垃圾突然增多，可以随时调配)。