多因子加权的空间物流模型。考虑面积，区域特征、形状效率以及拓扑邻接关系。

1. 符号定义

为了保证模型的严谨性，首先定义所有变量：

符号	定义	单位/备注
下标		
i, j	曼哈顿行政区索引 ($i, j \in \{1, 2, ..., 12\}$)	MN01 - MN12
输入参数		
A_i	第 i 个区域的地理面积	
β_i	**土地利用强度系数**	无量纲 (特征因子)
θ_i	**形状效率因子**	$(0, 1]$ (形状因子)
W_{total}	纽约市每日垃圾总量	Tons/day
λ	曼哈顿占全市垃圾量的比例系数	常数 (≈ 0.2)
K	单辆垃圾车的物理容量	12 Tons
R	单车每日最大往返次数	Trips/day
决策变量		
f_i	第 i 个区域的每周回收频率	$f_i \in \{2, 3\}$
中间变量		
w_i	第 i 个区域每日产生的垃圾量	Tons/day
L_i	第 i 个区域单次服务日的垃圾负荷	Tons/pickup
输出变量		
N_i	独立模式下第 i 区所需卡车数	Integer
N_{shared}	共享模式下总卡车数	Integer

2. 垃圾产出空间分布模型

针对“仅用面积估算不准确”的问题，我们引入 β_i **(土地利用强度)** 来修正模型。

假设

垃圾产生量不仅与面积相关，更取决于该区域的功能属性（商业区产废远高于住宅区或公园）。

公式

曼哈顿每日总垃圾量 $W_{MN} = W_{total} \times \lambda$。

第 i 个区域的每日垃圾量 w_i 定义为：

$$w_i = W_{MN} \times \frac{A_i \cdot \beta_i}{\sum_{k=1}^{12} (A_k \cdot \beta_k)}$$

其中 β_i 根据区域特征矩阵定义：

- **Commercial Core (MN01, 05)**: $\beta \approx 3.0$ (高密度商业/餐饮)
- **Mixed Use (MN02, 04)**: $\beta \approx 2.0$
- **Residential (MN03, 06, 08-12)**: $\beta \approx 1.0$ (标准居住区)
- **Park Heavy (MN07)**: $\beta \approx 0.6$ (含中央公园，产废密度低)

3. 回收频率决策模型

针对题目要求的“决定哪些街区需要高频回收”，建立阈值判据。

判据

我们定义 **垃圾累积压力指数 (Waste Pressure Index)** ρ_i：

$$\rho_i = \frac{w_i}{A_i}$$

决策函数为：

$$f_i = \begin{cases} 3 \text{ (High Frequency)}, & \text{if } \rho_i > \rho_{threshold} \text{ or } \text{Type}_i = \text{Commercial} \\ 2 \text{ (Standard)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

解释：高商业密度区域（如时代广场、金融区）由于垃圾多且形象敏感，强制设为 3次/周。

4. 考虑形状效率的运力需求模型

这是本模型的核心创新点。传统的模型假设卡车效率是恒定的，但实际上，狭长区域（MN12）或拥堵区域（MN01）的作业效率更低。

引入形状效率因子 θ_i

- θ_i 代表卡车在特定区域内的有效作业时间占比。
  - **规则网格 (MN05)**: $\theta \approx 0.95$ (High Efficiency)
  - **狭长不规则 (MN12)**: $\theta \approx 0.85$ (Higher Deadhead Time / 空驶时间长)
  - **拥堵老城 (MN01)**: $\theta \approx 0.75$ (Traffic Congestion)

计算单区需求 (N_i)

1. **单次回收负荷 (L_i)**:

$$L_i = \frac{w_i \times 7}{f_i}$$

2. **有效单车日运力 ($C_{eff,i}$)**:

$$C_{eff,i} = K \times R \times \theta_i$$

3. **所需车辆数**:

$$N_i = \left\lceil \frac{L_i}{C_{eff,i}} \right\rceil$$

5. 基于拓扑图论的共享优化模型

针对问题 "Can numbers be reduced by sharing?"，我们建立**图论模型**。

图的构建

定义无向图 $G = (V, E)$:

- $V = \{MN01, ..., MN12\}$ 为节点集合。
- $E = \{(i,j) | \text{Region } i \text{ is adjacent to } j\}$ 为边集合（基于几何邻接关系）。

闲置运力定义

对于每个区，独立调度时必然存在未被利用的“碎片运力”：

$$S_i = N_i - \frac{L_i}{C_{eff,i}}$$

($0 \le S_i < 1$，值越大表示浪费越严重)

优化目标

寻找一组互不重叠的**连通子图** 或 **社群** $\{C_1, C_2, ...C_m\}$，使得总车辆数最小化：

$$\min \sum_{k=1}^{m} N_{C_k} = \min \sum_{k=1}^{m} \left\lceil \frac{\sum_{j \in C_k} L_j}{K \cdot R \cdot \bar{\theta}_k} \right\rceil$$

其中约束条件为：

1. **连通性约束**：同一组 C_k 内的区域必须在图 G 中连通（物理相邻）。
2. **覆盖约束**：所有区域必须被分配到一个组中。

优化效果评估

$$\text{Savings} = \sum_{i=1}^{12} N_i - \sum_{k=1}^{m} N_{C_k}$$