

### 3.3.3. Опыт Милликена. Теоретический файл

Пазов Тенгиз

16.09.2024

## Теория

Если элементарный заряд существует, то все заряды будут ему кратны. В опыте будут измеряться заряды капелек масла, несущих несколько элементарных зарядов.

Для измерения заряда будем исследовать движение капелек в электрическом поле. Уравнение движения капли при свободном падении

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где  $m$  – масса капли,  $v$  – её скорость,  $F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v = kv$  – сила вязкого трения,  $r$  – радиус капли,  $\eta$  – коэффициент вязкости воздуха. Отсюда получаем

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}). \quad (2)$$

Скорость установится на

$$v_{\text{уст}} = \frac{mg}{k} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} gr^2,$$

где  $\rho$  – плотность масла. Установление этой скорости происходит с постоянной

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} r^2$$

Обозначая  $h$  путь капли, пройденный за  $t_0$ , получаем формулу для её радиуса:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta h}{2\rho g t_0}}. \quad (3)$$

В случае движения в электрическом поле конденсатора с разностью потенциалов  $V$  и расстоянием  $l$  между пластинами получаем уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{qV}{l} - mg - kv, \quad (4)$$

Новое слагаемое не влияет на  $\tau$ , новая установившаяся скорость

$$v'_{\text{уст}} = \frac{qV/l - mg}{k}.$$

Если  $t$  – время подъёма на высоту  $h$ , то можно получить формулу заряда капли:

$$\begin{aligned} \frac{qV}{kl} - v_{\text{уст}} &= v'_{\text{уси}} = \frac{h}{t}; \\ k &= 6\pi\eta r = 6\pi\eta \sqrt{\frac{9\eta h}{2\rho g t_0}}; \end{aligned}$$

Получаем итоговую формулу для вычисления заряда:

$$q = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 h^3}{g\rho}} \cdot \frac{l(t_0 + t)}{V t_0^{3/2} t}$$

Теперь приведем таблицу с результатами вычислений зарядов. Из результатов вычислений разобьем на группы заряды по кучности и вычислим среднее в каждой из таких групп. Получим 5 значений:

Таблица 1: Заряды капель

$q_1, 10^{-19}\text{Кл}$	1.717 $\sigma = 0.113$	1.714 $\sigma = 0.0998$	1.315 $\sigma = 0.076$	0.993 $\sigma = 0.551$	0.744 $\sigma = 0.041$
$q_2, 10^{-19}\text{Кл}$	1.463 $\sigma = 0.083$	1.258 $\sigma = 0.071$	1.297 $\sigma = 0.073$	1.058 $\sigma = 0.055$	1.035 $\sigma = 0.056$
$q_3, 10^{-19}\text{Кл}$	1.302 $\sigma = 0.073$	1.998 $\sigma = 0.115$	1.534 $\sigma = 0.088$	1.098 $\sigma = 0.0586$	1.262 $\sigma = 0.0694$
$q_4, 10^{-19}\text{Кл}$	1.252 $\sigma = 0.069$	1.327 $\sigma = 0.074$	1.473 $\sigma = 0.083$	1.509 $\sigma = 0.086$	1.064 $\sigma = 0.059$
$q_5, 10^{-19}\text{Кл}$	2.294 $\sigma = 0.146$	2.330 $\sigma = 0.149$	1.409 $\sigma = 0.0789$	0.951 $\sigma = 0.052$	1.147 $\sigma = 0.064$

Таблица 2: Средние по кучностям значения

$q, 10^{-19}\text{Кл}$	1.282	1.222	1.439	1.325	1.626
------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

Таблица погрешностей средних величин зарядов Как видно из данных значений в ка-

Таблица 3: Погрешности средних значений зарядов

$\sigma_{sr}, 10^{-19}\text{м/с}$	0.177	0.153	0.185	0.168	0.238
-----------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

честве элементарного заряда можно взять наименьший из перечисленных, то есть  $q = 1.222 \cdot 10^{-19}$  Кл. Данная величина есть 76,27 % от заряда, который обнаружил Милликен.

В таблице видно, что помимо величины заряда для каждой из частиц, присутствует величина  $\sigma$ , показывающая величину погрешности для каждой из величин зарядов.

$$\sigma_q \approx q \sqrt{\left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 + 5\left(\frac{\delta t}{t + t'}\right)^2} \quad (5)$$

Приняв  $\delta U$  за 5% и  $\delta t$  за  $\approx 0.2$  с, и проходя по массиву времен, получим массив погрешностей для каждого измеренного заряда. В таблице приведены погрешности в размерности  $10^{-19}$  Кл.

А погрешность среднего значения заряда в каждой куче может быть посчитана по следующей формуле:

$$\sigma_{sr} = \sqrt{\sum \sigma_i^2} \quad (6)$$

где  $\sigma_i$  - погрешность юго заряда в куче.

Теперь рассмотрим:

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}). \quad (7)$$

Чтобы найти отклонение установившейся скорости от среднего значения на промежутке времени релаксации, проинтегрируем данное выражение по времени и разделим на  $t$ .

Получаем:

$$v \int dt = \int \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) dt. \quad (8)$$

Разделив на  $t$ , получаем:

$$v_{sr} = \frac{\int \frac{mg}{k} (1 - e^{-k\tau/m}) d\tau}{\tau} \quad (9)$$

где  $\tau$  - время релаксации.

Взяв интеграл, получим:

$$v_{sr} = 1 - e^{-k\tau/m} \quad (10)$$

Погрешность установившейся скорости может быть рассчитана по следующей формуле:

$$\sigma_{v_\infty} = v_\infty \sqrt{(\frac{\sigma_h}{h})^2 + (\frac{\sigma_t}{t})^2} \quad (11)$$

А погрешность вычисления средней скорости:

$$\sigma_{v_{sr}} = \sqrt{(\frac{\partial v_{sr}}{\partial \tau})^2 \sigma_\tau^2 + (\frac{\partial v_{sr}}{\partial r})^2 \sigma_r^2} = \sqrt{\frac{81}{4} \frac{\eta^2}{r^4 \rho^2} e^{-\frac{9\eta\tau}{r^2\rho}} \sigma_\tau^2 + 81 \frac{\eta^2 \tau^2}{\rho^2 r^6} e^{-\frac{9\eta\tau}{r^2\rho}} \sigma_r^2} \quad (12)$$

Как видно из данной формулы, для вычисления погрешности средней скорости нам потребуется погрешность вычисления радиуса частицы. Найдем его по формуле:

$$\sigma_r = \frac{1}{2} r \sqrt{(\frac{\sigma_h}{h})^2 + (\frac{\sigma_t}{t})^2} \quad (13)$$

Приведем таблицу погрешностей радиусов частиц

Таблица 4: Погрешности радиусов частиц

$\sigma_r, 10^{-9}\text{м}$	8.17	7.34	6.74	6.71	5.83
-----------------------------	------	------	------	------	------

Приведем таблицу для средних значений, а также значений установившейся скоростей

Таблица 5: Средняя и установившаяся скорости

$v_{est}, 10^{-5}, \sigma_{v_{est}}, 10^{-7}\text{м/с}$	1.601, $\sigma_{v_{est}} = 6.72$	1.329, $\sigma_{v_{est}} = 5.50$	1.141, $\sigma_{v_{est}} = 4.68$	1.132, $\sigma_{v_{est}} = 4.74$	0.872, $\sigma_{v_{est}} = 3.54$
$v_{sr}, 10^{-5}, \sigma_{v_{sr}}, 10^{-7}\text{м/с}$	0.632, $\sigma_{v_{sr}} = 3.21$	0.632, $\sigma_{v_{sr}} = 5.03$	0.632, $\sigma_{v_{sr}} = 5.33$	0.632, $\sigma_{v_{sr}} = 4.30$	0.632, $\sigma_{v_{sr}} = 2.89$

Т.о. используя таблицу можем найти отклонение от средней величины скорости.

Теперь приведем таблицу с временами релаксации, а также с  $s(t)$ , пройденным частицей за данное время.

Таблица 6: Средняя и установившаяся скорости

$\tau, \quad 10^{-6}, \quad \sigma_\tau,$ $10^{-8}, \text{с}$	1.633, $\sigma_\tau =$ 6.86	1.363, $\sigma_\tau =$ 5.61	1.164, $\sigma_\tau =$ 4.78	1.161, $\sigma_\tau =$ 4.75	0.892, $\sigma_\tau =$ 3.61
$s, \quad 10^{-11}, \quad \sigma_S,$ $10^{-12} \text{м}$	2.613, $\sigma_S =$ 2.20	1.801, $\sigma_S =$ 1.49	1.328, $\sigma_S =$ 1.09	1.308, $\sigma_S =$ 1.07	0.775, $\sigma_S =$ 0.63

Погрешность вычисления пути:

$$\sigma_S = S \sqrt{4 \left( \frac{\sigma_{v_\infty}}{v_\infty} \right)^2} \quad (14)$$

Погрешность измерения времени релаксации:

$$\sigma_\tau = \tau \frac{\sigma_{v_\infty}}{v_\infty} \quad (15)$$

Погрешности, которые были получены этими формулами, записаны в таблицах.