1 Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления движением космического аппарата в центральном гравитационном поле.

1.1 Уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}, \end{aligned} \tag{1}$$

где:

- $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ — радиус-вектор положения аппарата,
- $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор скорости аппарата,
- $\mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^3$ — управляющее ускорение,

1.2 Функционалы качества

Рассмотрим три типа функционалов:

1. **Линейный функционал**:

$$J = \int_0^{t_f} \|\mathbf{a}(t)\|\, dt \to \min. \tag{2}$$

2. **Квадратичный функционал**:

$$J = \int_0^{t_f} \frac{1}{2}\|\mathbf{a}(t)\|^2\, dt \to \min. \tag{3}$$

3. **Смешанный функционал**:

$$J = \int_0^{t_f} \left[(1-\alpha)\frac{1}{2}\|\mathbf{a}(t)\|^2 + \alpha\|\mathbf{a}(t)\|\right] dt \to \min, \tag{4}$$

где $\alpha \in [0, 1]$ — параметр.

2 Принцип максимума Понтрягина

2.1 Введение сопряженных переменных

Введем **сопряженные переменные** (множители Лагранжа) $\mathbf{p}_r(t), \mathbf{p}_v(t) \in \mathbb{R}^3$ для учета уравнений движения как ограничений.

Рассмотрим **функцию Гамильтона-Понтрягина**:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, \mathbf{a}) = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}\right) - L(\mathbf{a}), \tag{5}$$

где $L(\mathbf{a})$ соответствует выбранному функционалу качества.

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $\mathbf{a}^*(t)$ должно удовлетворять условию:

$$H(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, \mathbf{a}^*) = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} H(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, \mathbf{a}). \tag{6}$$

2.2 Уравнения для сопряженных переменных

Сопряженные переменные удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_r &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Вычислим частные производные гамильтониана (5):

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p}_r, \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\mu \mathbf{p}_v \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \tag{9}$$

Вычисление производной в (9) дает:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \mathbf{I} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \mathbf{r}^T, \tag{10}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица 3×3.

Таким образом:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\mu \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{p}_v - \frac{3}{r^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_v) \mathbf{r} \right). \tag{11}$$

Подставляя (8) и (11) в (7), получаем уравнения для сопряженных переменных:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\mathbf{p}}_r = \mu \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{p}_v - \frac{3}{r^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_v) \mathbf{r} \right), \\ &\dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r. \end{aligned}} \tag{12}$$

3 Оптимальное управление для различных функционалов

3.1 Случай 1: Линейный функционал ($L(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|$)

Для линейного функционала гамильтониан принимает вид:

$$H = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \right) - \|\mathbf{a}\|. \tag{13}$$

Максимизация по $\mathbf{a}$ дает:

$$\mathbf{a}^* = \arg \max_{\mathbf{a}} \left[\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a} - \|\mathbf{a}\| \right]. \tag{14}$$

Решение этой задачи максимизации известно как **релейное управление**:

$$\boxed{\mathbf{a}^* = a_{\max} \cdot \frac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|} \quad \text{при } \|\mathbf{p}_v\| > 0,} \tag{15}$$

где $a_{\max}$ — максимальное допустимое ускорение.

3.2 Случай 2: Квадратичный функционал ($L(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2$)

Для квадратичного функционала:

$$H = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}\right) - \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2. \tag{16}$$

Максимизация по $\mathbf{a}$:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{p}_v - \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}^* = \mathbf{p}_v}. \tag{17}$$

3.3 Случай 3: Смешанный функционал $L(\mathbf{a}) = (1-\alpha)\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 + \alpha\|\mathbf{a}\|$

Для смешанного функционала:

$$H = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}\right) - \left[(1-\alpha)\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 + \alpha\|\mathbf{a}\|\right]. \tag{18}$$

Максимизация по $\mathbf{a}$ приводит к:

$$\mathbf{a}^* = \arg\max_{\mathbf{a}} \left[\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{a} - (1-\alpha)\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 - \alpha\|\mathbf{a}\|\right]. \tag{19}$$

Решение имеет вид:

$$\boxed{\mathbf{a}^* = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \|\mathbf{p}_v\| \le \alpha \text{ и } \alpha < 1, \\ \dfrac{\|\mathbf{p}_v\| - \alpha}{1-\alpha} \cdot \dfrac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|}, & \text{если } \|\mathbf{p}_v\| > \alpha \text{ и } \alpha < 1, \\ a_{\max} \cdot \dfrac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|}, & \text{если } \alpha = 1 \text{ и } \|\mathbf{p}_v\| > 0. \end{cases}} \tag{20}$$

4 Полная система уравнений

Для всех трех случаев полная система уравнений имеет вид:

4.1 Уравнения движения

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}^*(\mathbf{p}_v), \end{aligned}} \tag{18}$$

где $\mathbf{a}^*(\mathbf{p}_v)$ зависит от выбранного функционала.

4.2 Сопряженные уравнения

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_r &= \mu\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{p}_v - \frac{3}{r^5}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_v)\mathbf{r}\right), \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\mathbf{p}_r. \end{aligned}} \tag{19}$$

4.3 Граничные условия

Двухточечная краевая задача с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f. \end{aligned} \tag{20}$$

Требуется найти начальные значения сопряженных переменных $\mathbf{p}_r(0)$ и $\mathbf{p}_v(0)$, удовлетворяющие граничным условиям (20).

5 Метод продолжения

Для перехода от квадратичного функционала ($\alpha = 0$) к линейному ($\alpha = 1$) используется метод продолжения:

1. Решить задачу для $\alpha = 0$ (квадратичный функционал). 2. Постепенно увеличивать α на величину $\Delta\alpha$. 3. Использовать решение для предыдущего значения α как начальное приближение для нового α. 4. Повторять до достижения $\alpha = 1$.