6.4 线性变换与矩阵

几何变换将空间中的点从一个位置变换到另一个位置。我们可以将几何变换看作函数，其自变量和因变量都是向量。比如，平面上的平移变换可以表示为

$$f(x,y)=(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\quad,(\Delta x,\Delta y)\text{为平移量}$$

6.4.1 线性变换

线性变换是一种特殊的变换。

> 若变换 f 满足：
>
> 1. 和的变换等于变换的和：对定义域内任意 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$，恒有 $f(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=f(\vec{r}_1)+f(\vec{r}_2)$
> 2. 数乘的变换等于变换的数乘：对定义域内任意 $\vec{r}$ 和任意数 a，有 $f(a\cdot\vec{r})=a\cdot f(\vec{r})$
>
> 则变换 f 是 **线性** 的。

上述定义等价于：

> 若对变换 f，线性组合的变换等于变换的线性组合：
>
> 对定义域内任意 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 和任意数 a,b，恒有
>
> $$f(a\cdot\vec{r}_1+b\cdot\vec{r}_2)=a\cdot f(\vec{r}_1)+b\cdot f(\vec{r}_2)$$
>
> 则变换 f 是线性的。

例 1：平面上的放缩变换 $f(x,y)=(k_xx,\ k_yy)$。任取数 a,b 和向量 $\vec{r}_1=(x_1,y_1)$，$\vec{r}_2=(x_2,y_2)$，有

$$\begin{aligned}
f(a\cdot\vec{r}_1+b\cdot\vec{r}_2)\quad &= f(ax_1+bx_2,\ ay_1+by_2)\\
&= (ak_xx_1+bk_xx_2,\ ak_yy_1+bk_yy_2)\\
a\cdot f(\vec{r}_1)+b\cdot f(\vec{r}_2)\quad &= a\cdot(k_xx_1,k_yy_1)+b\cdot(k_xx_2,k_yy_2)\\
&= (ak_xx_1+bk_xx_2,\ ak_yy_1+bk_yy_2)
\end{aligned}$$

所以该变换是线性的。

例 2：平移变换 $f(\vec{r})=\vec{r}+\Delta\vec{r}$。取两个向量 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$，有

$$f(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\Delta\vec{r}$$
$$f(\vec{r}_1)+f(\vec{r}_2)=\vec{r}_1+\Delta\vec{r}+\vec{r}_2+\Delta\vec{r}$$

只要平移量 $\Delta\vec{r} \neq \vec{0}$，就有 $f(\vec{r}_1+\vec{r}_2) \neq f(\vec{r}_1)+f(\vec{r}_2)$。所以平移变换不是线性的。

> 若 f 为线性变换，对定义域内任意 $\vec{r}$，有 $f(\vec{0})=\vec{0}$。
>
> 也就是说，如果原点在变换后不为原点，该变换一定不是线性的。

常见的变换中，平移变换一般是非线性的，而许多以原点为中心的变换是线性的，比如旋转、等比缩放等。

在 `2.4` 节我们讨论了向量基底，接下来我们将看到，一个线性变换可以用基底的形式表示。

以三维空间中的变换为例。设 f 为一个线性变换，将向量 $\vec{r}=(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ 变换为

$$f(\vec{r})=f(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})=xf(\hat{i})+yf(\hat{j})+zf(\hat{k})$$

我们发现，$f(\vec{r})$ 在基底 $(f(\hat{i}),f(\hat{j}),f(\hat{k}))$ 下的仿射坐标即为 (x,y,z)。（注：严格来说 $(f(\hat{i}),f(\hat{j}),f(\hat{k}))$ 不一定是一组基底，因为基底要求三个向量不共面。）

> 我们可以用向量组 $(f(\hat{i}),f(\hat{j}),f(\hat{k}))$ 表示空间中的线性变换 f，记作
>
> $$f=(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$$
>
> 其中，$\vec{f_1}=f(\hat{i})$，$\vec{f_2}=f(\hat{j})$，$\vec{f_3}=f(\hat{k})$。
>
> 此时，对空间中任一向量 (x,y,z)，有 $f(x,y,z)=x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}$。

6.4.2 矩阵

矩阵是一个按照长方形排列的数集，我们将 m 行 n 列的矩阵称为 $m\times n$ 的矩阵，例如下面是一个 2×3 的矩阵：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

在讨论矩阵时，我们将向量也写成矩阵的形式。对 n 维的向量 $(a_1,\cdots,a_n)$，可以写成 $1\times n$ 的矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$$

称为行矩阵或行向量；也可以写成 $n\times 1$ 的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为列矩阵或列向量。默认将向量写成行向量还是列向量，各类资料没有统一的规范。本教程默认把向量写成列向量 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

我们可以将线性变换 $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ 写成矩阵形式：

$$F = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}$$

其中 $f_{ij}\ (i,j = 1,2,3)$ 为矩阵中第 i 列、第 j 行的元素，同时也是向量 $\vec{f}_i$ 的第 j 个分量。

关于线性变换与矩阵的关联，以及矩阵的运算法则，推荐观看 3B1B 的线性代数教程。

【官方双语/合集】线性代数的本质 - 系列合集

6.4.3 旋转矩阵

前面我们讨论过空间向量的定轴旋转，这是一类线性变换，因此可以写成矩阵形式，比如绕 x, y, z 轴的旋转矩阵

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

罗德里格斯旋转公式也可以写成矩阵形式，不过这不重要。

重要的是，旋转变换的三个基底向量满足这样的性质：

1. 基底向量都是单位向量；

2. 基底向量两两垂直。

这给旋转矩阵带来了一个良好的性质：

> 旋转矩阵的逆矩阵一定存在，且逆矩阵与原矩阵的转置相等。

我们称这样的矩阵为正交矩阵。正交矩阵与单位正交基是一一对应的。

旋转矩阵的这一性质使得求解一个旋转变换的逆变换变得足够容易，只需将旋转矩阵转置即可。

更多关于空间旋转的知识可以参考以下资料：

- 轴角法
- 四元数
- 欧拉角
- 旋转矩阵
- 旋转矩阵 / 四元数相互转化