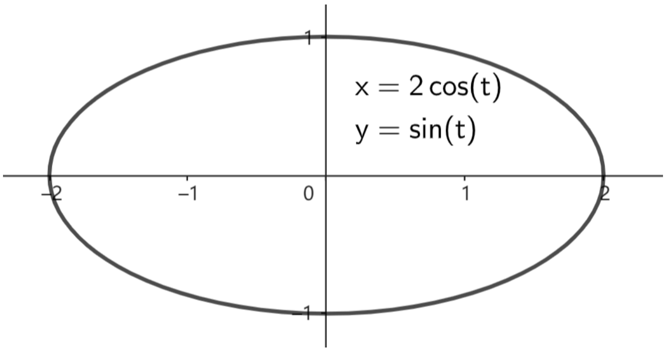
5.3 椭圆

我们主要讨论椭圆的参数方程，高中阶段椭圆有其他的方程，但在弹幕中的应用极小，本教程不进行讨论。

$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}$，$a, b$ 为定值，$a > b$

我们对椭圆的讨论从这个参数方程开始。该方程描述了一个中心点为原点，水平放置的椭圆。

我们称该椭圆的半长轴长为 a，半短轴长为 b。



> 平面旋转公式：将平面上一点 $P(x, y)$ 绕原点逆时针旋转 ϕ 角，得到点 $P'(x', y')$，则有
>
> $$\begin{aligned} x' &= x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ y' &= x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{aligned}$$

将上述椭圆方程代入平面旋转公式可得斜椭圆方程：

$$\begin{cases} x = a\cos(t)\cos(\phi) - b\sin(t)\sin(\phi) \\ y = a\cos(t)\sin(\phi) + b\sin(t)\cos(\phi) \end{cases}$$

式中 a, b 分别为椭圆的半长轴长、半短轴长，ϕ 为椭圆的倾斜角，椭圆的中心为原点。

$\vec{r} = \langle R_1, \alpha + t \rangle + \langle R_2, \alpha - t \rangle$ (R_1, R_2, α 为定值，$R_1 > R_2$)

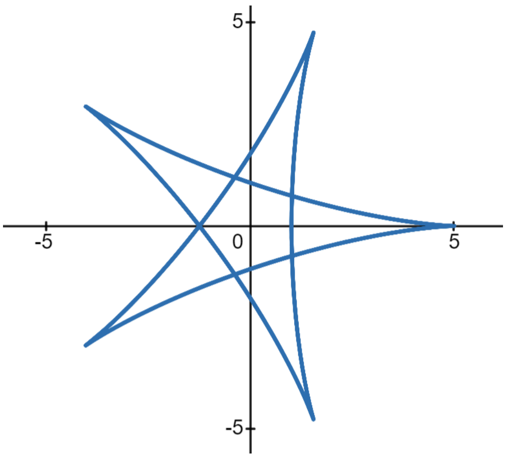
坐标形式：$\begin{cases} x = R_1\cos(\alpha + t) + R_2\cos(\alpha - t) \\ y = R_2\sin(\alpha + t) + R_2\sin(\alpha - t) \end{cases}$

该方程描述了一个中心为原点，半长轴长为 R_1+R_2，半短轴长为 R_1-R_2，倾斜角为 α 的斜椭圆。该方程与由平面旋转公式推导的椭圆方程等价。

从该方程我们看到，如果两个匀速圆周运动半径不等，角速度互为相反数，那么这两个运动的合运动轨迹为椭圆。

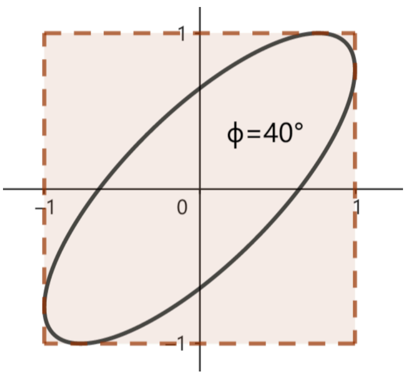
这种由向量叠加构建曲线的方法，是参数方程的特色。改变两个分运动的角速度之比，以及改变分运动的数目，可以构造多种多样的曲线。

曲线 $\vec{r}=\langle 3,2t\rangle+\langle 2,-3t\rangle$：



$$\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\cos(t+\phi) \end{cases}$$

该方程描述了一类倾斜角为 45° 或 135° 的椭圆，它们与图示正方形内切。定值 ϕ 与椭圆的扁平程度有关。



我们很少用该方程构造椭圆。不过该方程是 **利萨如图形** 的特例。利萨如图形是 x,y 两个方向的简谐振动的合运动轨迹，通式为

$$\begin{cases} x=\cos(\omega_1 t+\phi_1) \\ y=\cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{cases}$$