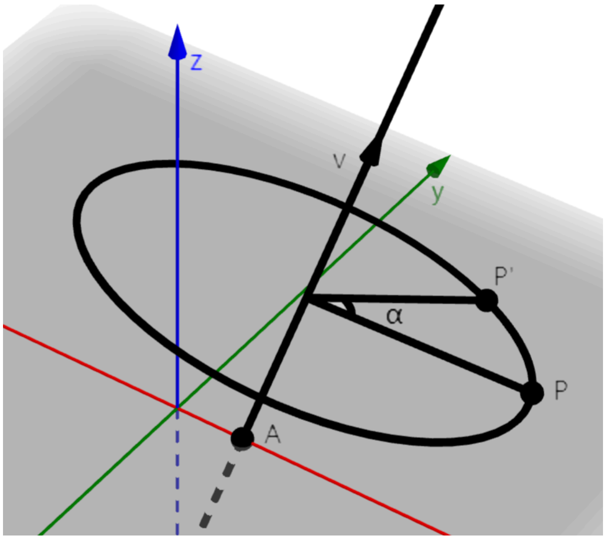
# 6.3 定轴旋转

这一节我们讨论空间向量的定轴旋转。如下图，已知空间中一点 $P$，将点 $P$ 绕一条直线 (旋转轴) 旋转一定角度 $\alpha$ ，得到点 $P'$。我们用直线上一点 $A$ 和直线的方向向量 $\vec{v}$ $(|\vec{v}|=1)$ 表示该旋转轴。

对下图我们称，将向量 $\overrightarrow{AP}$ 绕 **轴向量** $\vec{v}$ $(|\vec{v}|=1)$ 旋转 $\alpha$ 角，得到向量 $\overrightarrow{AP'}$ 。




## 6.3.1 绕坐标轴的旋转

向量绕坐标轴的旋转相对容易计算，只需套用平面旋转公式即可。比如，将 $\vec{r}=(x,y,z)$ 绕 $y$ 轴旋转 $\alpha$ 得到 $\vec{r}'=(x',y',z')$。

首先有 $y'=y$。将 $\vec{r},\vec{r}'$ 投影到 $zOx$ 平面，得平面向量 $\vec{r}_{zx}=(z,x)$，$\vec{r}'_{zx}=(z',x')$。代入平面旋转公式得

$$\begin{aligned} z' &= z\cos(\alpha)-x\sin(\alpha) \\ x' &= z\sin(\alpha)+x\cos(\alpha) \end{aligned}$$

绕 $x,z$ 轴的旋转同理。

## 6.3.2 定轴旋转近似公式

轴向量不局限于坐标轴时，旋转计算将变得复杂，我们在 `6.3.3` 介绍具体公式。如果我们对精度要求非常低，可以使用下面的相对容易记忆的近似公式。

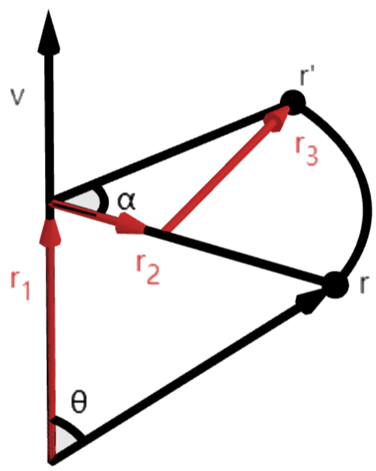
记 **轴角向量** $\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{v} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$。我们将待旋转向量 $\vec{r}$ 依次绕 $x, y, z$ 轴旋转 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$，即得到近似结果。

该方法中，三次旋转的顺序不重要。旋转角 $\alpha$ 越接近 $0$、轴向量 $\vec{v}$ 越接近坐标轴，近似误差越小。

### 6.3.3 罗德里格斯旋转公式

下面我们给出一个精确计算定轴旋转的公式。将空间向量 $\vec{r}$ 绕单位向量 $\vec{v}$ 旋转 $\alpha$ 得 $\vec{r}'$，则

$$\vec{r}' = \vec{r}\cos(\alpha) + (\vec{v} \times \vec{r})\sin(\alpha) + \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r})(1 - \cos(\alpha))$$




简单说明一下推导方法。

将 $\vec{r}'$ 分解为图示相互垂直的三个向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 之和。

$\vec{r}_1$ 与轴向量 $\vec{v}$ 同向，知道 $\vec{r}_1$ 大小就可以确定 $\vec{r}_1$。设 $\vec{v}, \vec{r}$ 夹角为 $\theta$，则有 $|\vec{r}_1| = |\vec{r}|\cos(\theta)$。由向量内积有 $\vec{v} \cdot \vec{r} = |\vec{v}||\vec{r}|\cos(\theta) = |\vec{r}|\cos(\theta)$，所以

$$\vec{r}_1 = \vec{v} \cdot |\vec{r}_1| = \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

设 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$，则 $\vec{r}_2 \parallel \vec{R}$。$|\vec{R}|$ 为图中圆弧的半径，因而有 $|\vec{r}_2| = |\vec{R}|\cos(\alpha)$。所以

$$\vec{r}_2 = \vec{R}\cos(\alpha) = (\vec{r} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r}))\cos(\alpha)$$

$\vec{r}_3$ 与 $\vec{v}, \vec{r}$ 都垂直，由向量外积的含义可知，$\vec{r}_3 \parallel \vec{v} \times \vec{r}$。

计算两向量大小 $|\vec{r}_3| = |\vec{R}|\sin(\alpha)$，$|\vec{v} \times \vec{r}| = |\vec{v}||\vec{r}|\sin(\theta) = |\vec{r}|\sin(\theta) = |\vec{R}|$。考虑 $\vec{v} \times \vec{r}$ 的方向，有

$$\vec{r}_3 = (\vec{v} \times \vec{r}) \sin(\alpha)$$

将 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 相加即得 $\vec{r}'$。