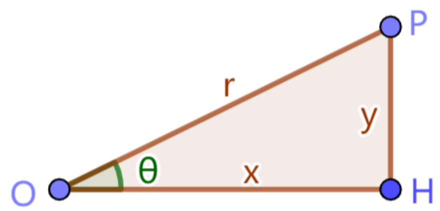
1.2 直角三角形的边角关系

直角三角形在坐标相关的问题中有着重要的应用。为了应用直角三角形解决实际问题，我们需要知道直角三角形的一些几何性质。这一节我们将探索直角三角形的边与内角之间的联系。

如下图所示，在直角三角形 OHP 中，点 O, H, P 称为三角形的顶点，角 $\angle O$ (或 $\angle POH$)、$\angle H$ (或 $\angle OHP$)、$\angle P$ (或 $\angle OPH$) 称为三角形的内角。对于三个内角，总有 $\angle O + \angle P = \angle H = 90^\circ$，所以只研究一个内角 $\angle O$ 即可。



设上图三角形 OHP 的三边长度 $|OH| = x, |PH| = y, |OP| = r$，内角 $\angle O = \theta$。对直角三角形性质的介绍将围绕该直角三角形进行。

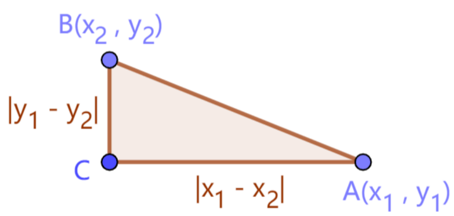
1.2.1 勾股定理

勾股定理描述了直角三角形中三条边的长度之间的关系。文字表述为：直角三角形的 **斜边长度的平方** 等于 **两直角边长度的平方之和**。具体到直角三角形 OHP，勾股定理表述为

> $$r^2 = x^2 + y^2$$

对平面上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，作下图所示直角三角形 ABC，AC 沿水平方向，BC 沿竖直方向。由 A, B 坐标可得两直角边的长度 $|AC| = |x_1 - x_2|, |BC| = |y_1 - y_2|$ ($|x|$ 表示 x 的绝对值)。由勾股定理得，

> $$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$



这就是平面上两点的距离公式。为方便表述，我们引入 `LuaSTG` 的 `Dist` 函数。用 $\mathrm{Dist}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 表示点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 之间的距离；$\mathrm{Dist}(A, B)$ 表示 A, B 两点之间的距离，即 $|AB|$；另外规定 $\mathrm{Dist}(x, y)$ 为点 (x, y) 与原点之间的距离，即 $\mathrm{Dist}(x, y) = \mathrm{Dist}(0, 0, x, y)$。

1.2.2 锐角三角函数

三角函数描述了直角三角形的内角与三边之间的联系。对直角三角形 OHP，若固定 θ 为某个定值，我们发现，无论 OHP 的边长如何变化，三边的长度始终呈现某种固定的比例关系，这个比例与 θ 有关。为了描述这种比例关系，我们定义以下三个函数：

> 余弦函数 $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$
>
> 正弦函数 $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$
>
> 正切函数 $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$

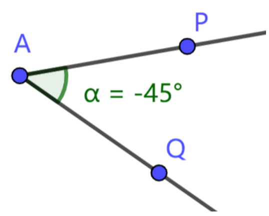
这三个函数合称 **三角函数**。根据上述定义，OHP 三边比例为

> $$x : y : r = \cos(\theta) : \sin(\theta) : 1$$

1.2.3 任意角

研究直角三角形时，我们对角度的讨论仅限于锐角（0° 到 90°）。而在 `LuaSTG` 中描述方向、转速等属性等，角度能够取任意数值。这样的角叫做任意角。我们对任意角的定义如下：

将射线 AP 绕端点 A 逆时针旋转 α（或顺时针旋转 $-\alpha$）得到射线 AQ。由该旋转过程产生的图形称为任意角。沿用以前表示角的方法，记为 $\angle PAQ$。它的值为 α，射线 AP, AQ 分别称为 $\angle PAQ$ 的始边、终边。



在这个定义中，任意角和传统定义的区别体现在两个方面：

1. 任意角不能交换始边和终边。传统定义下我们会认为 $\angle PAQ$ 和 $\angle QAP$ 表示同一个角。但对于任意角，$\angle PAQ$ 的始边为 AP，终边

为 AQ；$\angle QAP$ 的始边为 AQ，终边为 AP，二者不表示同一个角，取值互为相反数。
2. 即使两个任意角的始边、终边都相同，它们的值也不一定相等。比如在上图中，射线 AP 绕点 A 顺时针旋转 45° 或逆时针旋转 315° 都能得到射线 AQ，所以任意角 $\angle PAQ$ 的值可以为 -45°，也可以为 315° 或其他相差 360° 的整数倍的值。

如果任意角 α, β 相差 360° 的整数倍，尽管严格来说两个角的值不一定相等，但这样的两个角在很多方面表现出相同的性质。我们定义，如果 α, β 相差 360° 的整数倍，则称 α, β 模 360° 同余，记作

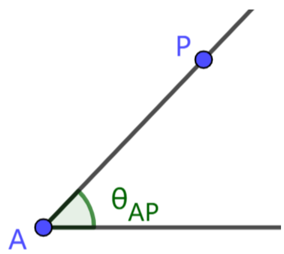
$$\alpha \equiv \beta \ (mod\ 360^\circ)$$

由于我们基本只讨论模 360° 的同余，本教程将模 360° 同余简称为 **同余**，α, β 模 360° 同余简写为

$$\alpha \equiv \beta$$

我们将在 `1.2.ex` 小节详细介绍这一概念。

如下图，对平面上不重合的两点 A, P，以射线 Ax (端点为点 A，方向水平向右的射线) 为始边，射线 AP 为终边的任意角称为 **点 P 对点 A 的方位角**，记作 θ_{AP}。特别地，点 P 对原点的方位角简称为点 P 的 **方位角**，记作 θ_P。



我们规定，一个点对自身的方位角可以取任意数值。

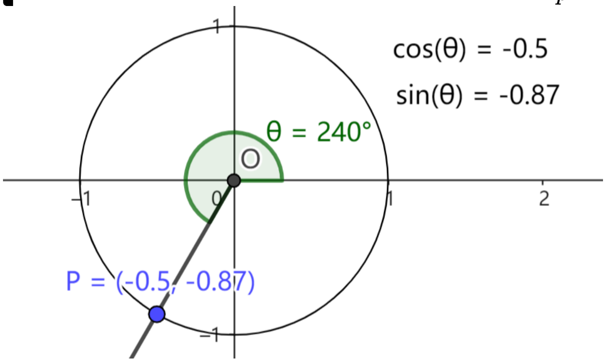
根据方位角的终边所在象限，可以将任意角划分为第一、二、三、四象限角，比如锐角为第一象限角，钝角为第二象限角。

1.2.4 任意角三角函数

我们可以定义任意角的三角函数。

> 如下图，在平面直角坐标系 xOy 中作单位圆 (圆心为原点，半径为 1 的圆)。对任意角 θ，在圆上找到一点 $P(x_p, y_p)$，使得 P 的方位角为 θ。定义
>
> $$\cos(\theta) = x_p$$

> $$\sin(\theta) = y_p$$
>
> $$\tan(\theta) = \frac{y_p}{x_p}$$



由上述定义，对平面上任意一点 $A(x_A, y_A)$，若 OA 长度 $|OA| = r_A$，点 A 的方位角为 θ_A，则有

$$x_A = r_A \cos(\theta_A)$$
$$y_A = r_A \sin(\theta_A)$$

于是，由 r_A, θ_A 可以确定 x_A, y_A，从而确定点 A 的位置。由此可以构造一种由距离（r_A）和方向（θ_A）描述位置的坐标系，我们将在 1.5 节详细讨论。

习题

1. 填充常用三角函数表：

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°
$\cos(\theta)$						
$\sin(\theta)$						
$\tan(\theta)$						

θ	135°	150°	180°	270°	360°
$\cos(\theta)$					
$\sin(\theta)$					
$\tan(\theta)$					

2. 已知平面上一点 $A(x_0, y_0)$，点 B 对点 A 的方位角为 α，且 $|AB| = R$，求点 B 的坐标。

3. 如下图所示，点 O' 位于 x 轴正半轴，$|OO'| = L$，圆 O' 的半径为 R。以原点 O 为端点作倾角为 α 的射线（$-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$）

1. 若 $L > R$，问 α 满足什么条件时，射线与圆 O' 相交？
2. 若 $L > R$，且射线与圆 O' 交于 A, B 两点 (图示情况)，求 OA 长度。
3. 若 $L < R$，则射线与圆 O' 总有唯一交点，记交点为 A，试求 $|OA|$。