6.1 空间坐标系

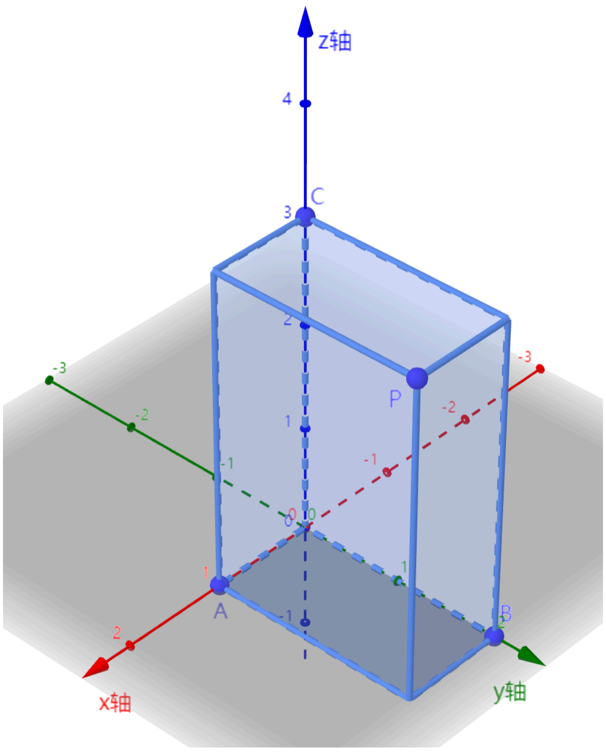
这一章我们将讨论伪3D弹幕的基本数学原理，我们将把前五章讨论的内容拓展到三维空间中，从而帮助我们实现一些经典的伪3D弹幕。

首先，我们需要知道如何在三维空间中描述点的位置，也就是说，三维空间中我们可以建立什么样的坐标系。

6.1.1 空间直角坐标系

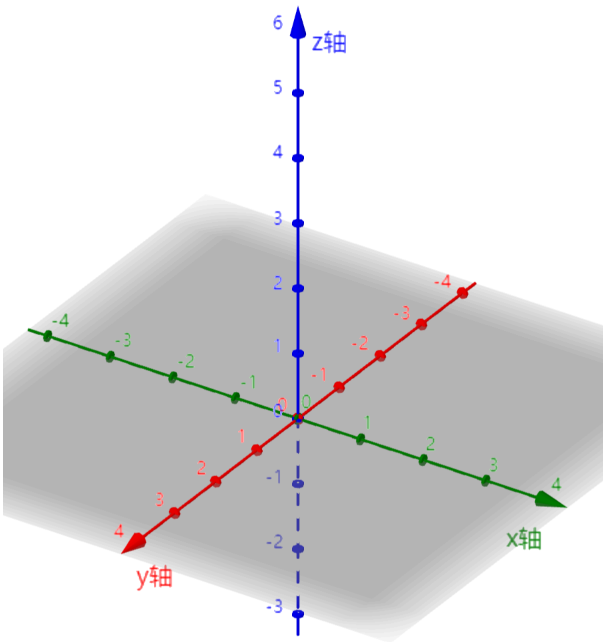
空间直角坐标系是平面直角坐标系在三维空间中的拓展。它由三条两两垂直的坐标轴构成，三条坐标轴有公共的原点 O。将三条坐标轴分别记作 x, y, z 轴。该坐标系可以记作 O-xyz。任取两条坐标轴，可以确定一个坐标平面，由此可以确定三个坐标平面，记作 xOy, yOz, zOx 平面。

与平面直角坐标系类似地，要确定空间中一点 P 的位置，作如图所示的长方体，点 A, B, C 在各自坐标轴上对应的数分别为 x_P, y_P, z_P，将有序数组 (x_P, y_P, z_P) 称为点 P 的直角坐标。



6.1.2 左手系与右手系

根据 x, y, z 轴的相对位置，我们将空间直角坐标系分为 **右手系** (上图) 和 **左手系** (下图)。



在不同场景中，使用右手系还是左手系并无统一的规范。比如本教程使用的绘图软件 GeoGebra 只提供了右手系，而 LuaSTG 的 3D 背景使用左手系。

在三维空间中讨论旋转方向是一件麻烦的事情。很多时候我们会使用 "顺时针 / 逆时针" 的说法，然而 "顺时针 / 逆时针" 在左手系 / 右手系中究竟是什么方向的旋转，并无明确的规范。这使得不同资料对旋转的文字描述和公式描述有很大差异。

在本教程中，我们不使用顺时针 / 逆时针的说法，而是从坐标层面规定旋转的正方向。

首先我们规定 $x \to y \to z \to x \to \cdots$ 为 **正序**，$z \to y \to x \to z \to \cdots$ 为 **逆序**，这是各种资料基本认同的。在二维平面坐标系 xOy 中对顺时针 / 逆时针的规定，各种资料基本一致。我们规定二维平面 xOy 中，逆时针方向为正方向 (这是我们在之前的讨论中一直使用的)，将该方向称为 $x \to y$ 旋转方向。xOy 上的顺时针方向为负方向，称为 $y \to x$ 旋转方向。

现在我们有 $x \to y$，$y \to x$ 方向的定义，类似地可以定义 $y \to z$，$x \to z$ 等方向。如果一个旋转方向包含在正序 $x \to y \to z \to \cdots$ 中，就称该方向是正序的，比如 $x \to y$，$z \to x$。否则，称该方向是逆序的。

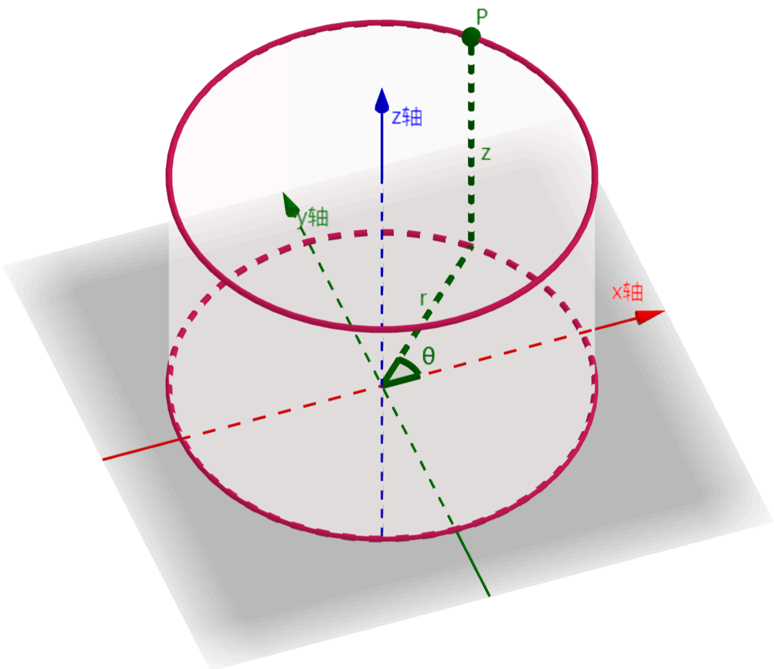
接下来我们定义 "绕坐标轴旋转" 的正方向。我们称，绕一个坐标轴旋转的正方向为，另外两个坐标轴对应的正序旋转。具体地说，比如对于 y 轴，绕 y 轴旋转的正方向为 $z \to x$。

在这样的定义下，无论左手系还是右手系，旋转公式都是相同的。

6.1.3 柱坐标系

柱坐标系由 xOy 平面上的极坐标 r, θ 和 z 轴坐标 z 确定点的位置。直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (r, θ, z) 的转换如下：

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\theta) \\
y &= r\sin(\theta) \\
z &= z \\
r &= \mathrm{Dist}(x, y) \\
\theta &= \mathrm{Angle}(x, y)
\end{aligned}
$$



6.1.4 球坐标系

球坐标系由球半径和两个角度确定点的位置。为确定空间中一点 P 的位置，作以原点为球心，过点 P 的球面，设球半径为 r。参照地理中经纬度的含义，设点 P 在球面上的经度为 θ，纬度为 ϕ，由 r, θ, ϕ 可以确定点 P 的位置。

球坐标 (r, θ, ϕ) 与直角坐标 (x, y, z) 有如下转换关系：

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\phi)\cos(\theta) \\
y &= r\cos(\phi)\sin(\theta) \\
z &= r\sin(\phi) \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned}
$$

$$\theta = \text{Angle}(x, y)$$
$$\phi = \text{asin}\left(\frac{z}{r}\right)$$