1.3 三角函数的运算公式

这一节将介绍三角函数的一些运算公式，主要讨论正弦（$\sin$）和余弦（$\cos$）的运算公式。

1.3.1 正切和正弦余弦的转换

> $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

由三角函数的定义，该公式自然成立。由于本教程基本不涉及正切函数（$\tan$）的使用，如果读者需要知道正切的运算公式，可以用此公式把正切换为正弦和余弦之比，或把正弦和余弦之比换为正切。

1.3.2 正弦余弦的平方和

> $\cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

式中 $\cos^2(\theta)$ 即为 $(cos(\theta))^2$。由三角函数的定义，点 $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ 位于单位圆上，与原点的距离为 1。再由勾股定理即得该公式。

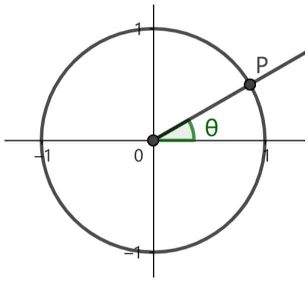
1.3.3 和差角公式

和差角公式是关于两个角的和或差的三角函数值的计算公式。篇幅原因本教程不会给出证明。以下给出正弦和余弦的和差角公式：

> $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
>
> $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
>
> $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
>
> $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1.3.4 诱导公式

诱导公式可以看作和差角公式的特例，探讨一个角与特殊角度（90° 的整数倍）的和或差的三角函数值计算。



> 情况一：(k为整数)
>
> $\cos(\theta + k \cdot 360^{\circ}) = \cos(\theta)$
>
> $\sin(\theta + k \cdot 360^{\circ}) = \sin(\theta)$

考虑单位圆上一点 P，其方位角为 θ。我们知道点 P 的坐标即为 $(\cos(\theta), \sin(\theta))$。将点 P 绕原点逆时针旋转 k 圈，点 P 方位角变为 $\theta + k \cdot 360^{\circ}$，而坐标不变。所以三角函数值不变。

根据该情况我们可以知道，如果两个角 α, β 同余（$a \equiv b$），那么它们的三角函数值完全相同。这是我们引入同余概念的主要原因。

> 情况二：
>
> $\cos(\theta \pm 180^{\circ}) = -\cos(\theta)$
>
> $\sin(\theta \pm 180^{\circ}) = -\sin(\theta)$

将点 P 绕原点旋转半圈 (顺逆时针皆可) 得到点 P'，方位角变为 $\theta \pm 180^{\circ}$，点 P 和 P' 关于原点对称，所以三角函数值互为相反数。

> 情况三：
>
> $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
>
> $\sin(-\theta) = \sin(\theta)$

将 x 轴非负半轴绕原点 **顺时针** 旋转 θ，所得射线与单位圆交于点 $P'(\cos(-\theta), sin(-\theta))$。点 P' 与 $P(\cos(\theta), \sin(\theta))$ 关于 x 轴对称。

> 情况四：
>
> $\cos(180^{\circ} - \theta) = -\cos(\theta)$
>
> $\sin(180^{\circ} - \theta) = \sin(\theta)$

由情况二和情况三可以推导。

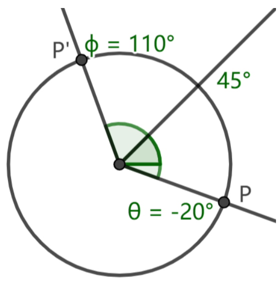
该情况下我们发现，角 θ 对应射线（射线 OP）与角 $180^\circ-\theta$ 对应射线关于 y 轴对称。设 $\phi=180^\circ-\theta$，如果我们用 90° 表示 y 轴，则有 $\dfrac{\theta+\phi}{2}=90^\circ$。这与中点的计算是类似的。

> 情况五：
>
> $\cos(90^\circ-\theta)=\sin(\theta)$
>
> $\sin(90^\circ-\theta)=\cos(\theta)$

θ 与 $90^\circ-\theta$ 关于 45° 对称，对应的两点 $P(x,y),P'(x',y')$ 关于第一象限角平分线对称。这样的两点坐标有对应关系

$$\begin{aligned}x'&=y\\y'&=x\end{aligned}$$

代入三角函数值即得 $\cos(90^\circ-\theta)=\sin(\theta)$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos(\theta)$



> 通式：(k 为整数)
>
> $\cos(\pm\theta+k\cdot 90^\circ)$
>
> $\sin(\pm\theta+k\cdot 90^\circ)$

任意符合通式的表达式总能化简至 $\pm\cos(\theta)$ 或 $\pm\sin(\theta)$ 的形式。诱导公式有一句著名的记忆口诀："奇变偶不变，符号看象限"。

- "奇变偶不变"："变" 与 "不变" 指的是函数名是否需要改变。比如 $\cos(\theta+180^\circ)=-cos(\theta)$，它的函数名 cos 没有改变；而 $\sin(90^\circ-\theta)=cos(\theta)$ 的函数名则从 sin 变为 cos。变与不变由 k 的奇偶性决定。如果 k 为偶数，或者说 $k\cdot 90^\circ$ 为 180° 的整数倍，那么函数名不需要改变，否则函数名需要改变，从 sin 变为 cos，或者从 cos 变为 sin。
- "符号看象限"："符号" 指的是化简结果的正负号。$\cos(\theta)$ 和 $\sin(\theta)$ 对应正号，$-\cos(\theta)$ 和 $-\sin(\theta)$ 对应负号。正负号取决于 $\pm\theta+k\cdot 90^\circ$ 的 "象限"。假定 θ 为第一象限角 (即使实际上不可能)，判断原式的

正负性。若原式大于 0，则结果取正号；若原式小于 0，则结果取负号。

例：$\cos(270^\circ+\theta)$

- 函数名：270° 不是 180° 的整数倍，函数名变为 $\sin$；
- 正负号：假定 θ 为第一象限角，比如让 $\theta=30^\circ$。$\cos(270^\circ+30^\circ)=cos(300^\circ)>0$，化简结果取正号。

所以 $\cos(270^\circ+\theta)=\sin(\theta)$

习题

1. 设有一颗子弹在版边发生反弹，已知该子弹在反弹前的运动方向为 α。分类讨论该子弹反弹后的运动方向。
2. 分别化简下列表达式：

$$\begin{gathered}\cos(\theta-1080^\circ)\\ \sin(\theta+540^\circ)\\ -\cos(-\theta-450^\circ)\end{gathered}$$

3. 试利用正弦和余弦的和角公式证明正切的和角公式：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$