# 6.2 空间向量

空间向量是维数为 $3$ 的向量，空间向量的值由直角坐标 $\vec{r}=(x,y,z)$ 表示。平面向量的大多数概念、运算、性质等都容易拓展到空间向量。

## 6.2.1 空间向量的运算

在第2章我们讨论了平面向量的一些运算，空间向量同样有这些运算，列写如下：

- 向量的大小：$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- 向量相等 $\vec{r}_1=\vec{r}_2$：$x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 且 $z_1=z_2$
- 加法：$\vec{r}_1+\vec{r}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$
- 减法：$\vec{r}_1-\vec{r}_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$
- 数乘：$a\cdot\vec{r}=(ax,\ ay,\ az)$
- 内积 (点乘)：$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

单独介绍一下外积 (叉乘)。两个平面向量的外积结果是一个数，而两个空间向量的外积是一个空间向量，对 $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$，有外积

$$\vec{r}_3=\vec{r}_1\times\vec{r}_2=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

我们发现，外积结果 $\vec{r}_3$ 的三个分量对应三组平面向量的外积，比如 $x$ 坐标，是 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 在 $yOz$ 平面上的投影 $(y_1,z_1)$，$(y_2,z_2)$ 的外积，$y,z$ 坐标同理。

空间向量 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 的外积 $\vec{r}_3$ 具有这样的几何意义：

> 外积的大小 $|\vec{r}_3|$ 等于 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 构成的平行四边形的面积；
>
> $\vec{r}_3$ 与 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 都垂直，即垂直于 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 构成的平面；
>
> 如果使用的坐标系为右手系，则 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ 构成右手系，反之 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ 构成左手系。

空间向量的外积满足下述性质：

1. 反交换律：$\vec{r}_1\times\vec{r}_2=-\vec{r}_2\times\vec{r}_1$
2. 线性性：$(a\vec{r}_1+b\vec{r}_2)\times\vec{r}=a(\vec{r}_1\times\vec{r})+b(\vec{r}_2\times\vec{r})$
3. $\vec{r}\times\vec{r}=\vec{0}$
4. $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ ($\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 是 $x,y,z$ 轴上的单位向量)

## 6.2.2 空间向量的几何关系

空间向量的平行和垂直容易从平面向量类推。具体地说，对空间向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，

> $\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2$ 等价于 $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$。
>
> $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$ 等价于 $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{0}$。

借助空间向量，我们可以研究空间中点、直线、平面之间的位置关系。

空间中，点可以由一个空间向量描述位置；直线可以由直线上一点和直线的方向向量确定，共需要两个空间向量；平面可以由平面上一点和垂直于平面的一个向量确定，共需要两个空间向量。

篇幅原因，由向量判断位置关系的具体方法本教程不做阐述。