2.3 向量的乘积

在长久的探索实践中，人们定义了多种向量乘积。这节主要介绍其中几何意义较明确的两种：内积和外积。

2.3.1 逐元素乘积

> 设两个向量 $\vec{r}_1=(x_1,y_1)$，$\vec{r}_2=(x_2,y_2)$。二者的逐元素乘积是一个向量，记作 $\vec{r}_1*\vec{r}_2$。该向量的各分量是 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 对应分量的乘积，即
>
> $$\vec{r}_1*\vec{r}_2=(x_1x_2,\ y_1y_2)$$
>
> 式中 "$*$" 号不能省略。

逐元素乘积是数量的乘积在向量上的直接延拓，这使得它与数量乘法有十分相似的性质。

1. 交换律：$\vec{r}_1*\vec{r}_2=\vec{r}_2*\vec{r}_1$
2. 结合律：$\vec{r}_1*(\vec{r}_2*\vec{r}_3)=(\vec{r}_1*\vec{r}_2)*\vec{r}_3$
3. 分配律：$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)*\vec{r}_3=\vec{r}_1*\vec{r}_3+\vec{r}_2*\vec{r}_3$
4. 消去律：若 $\vec{r}_1*\vec{r}_3=\vec{r}_2*\vec{r}_3$，且 $\vec{r}_3$ 各分量都不为零，则 $\vec{r}_1=\vec{r}_2$

逐元素乘积容易理解，但它的几何意义较小，所以它不是我们介绍的重点。

2.3.2 内积 (点乘)

> 两个向量的 **内积** 是一个数。设两个向量 $\vec{r}_1=(x_1,y_1)$，$\vec{r}_2=(x_2,y_2)$，$\vec{r}_1$ 与 $\vec{r}_2$ 的内积记作 $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2$，乘号 "$\cdot$" **不能省略**。内积的结果为
>
> $$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=x_1x_2+y_1y_2$$

向量的内积具有以下性质：

1. 交换律：$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=\vec{r}_2\cdot\vec{r}_1$
2. 结合律不成立：$\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3)\neq(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)\cdot\vec{r}_3$ (左式向量与 $\vec{r}_1$ 共线，右式向量与 $\vec{r}_3$ 共线，容易构造反例使得左右两式不共线，此时左右两式一定不相等)
3. 正定性：$\vec{r}\cdot\vec{r}=|\vec{r}|^2\geq 0$，当且仅当 $\vec{r}=\vec{0}$ 时有 $\vec{r}\cdot\vec{r}=0$
4. 线性性：$(a\cdot\vec{r}_1)\cdot\vec{r}_2=a\cdot(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)\quad(\vec{r}_1+\vec{r}_2)\cdot\vec{r}_3=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3+\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3$

线性性也可表述为：

$$(a\cdot\vec r_1+b\cdot\vec r_2)\cdot\vec r_3=a(\vec r_1\cdot\vec r_3)+b(\vec r_2\cdot\vec r_3)$$

内积看起来就是把逐元素乘积的各分量相加，但它确实有良好的几何意义。

> 对平面上的两个向量 $\vec r_1,\vec r_2$，设夹角 $\langle\vec r_1,\vec r_2\rangle=\theta$。则内积
>
> $$\vec r_1\cdot\vec r_2=|\vec r_1|\cdot|\vec r_2|\cos(\theta)$$

证明：设 $\vec r_1=(x_1,y_1)=\langle r_1,\theta_1\rangle$，$\vec r_2=(x_2,y_2)=\langle r_2,\theta_2\rangle$，则

$$\begin{aligned}\vec r_1\cdot\vec r_2\quad&=x_1x_2+y_1y_2\\&=r_1\cos(\theta_1)\cdot r_2\cos(\theta_2)+r_1\sin(\theta_1)\cdot r_2\sin(\theta_2)\\&=r_1r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))\\&=r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\\&=r_1r_2\cos(\theta)\quad(\text{注}:\langle\vec r_2\rangle-\langle\vec r_1\rangle\equiv\langle\vec r_1,\vec r_2\rangle)\end{aligned}$$

根据内积的几何意义，我们可以用内积判断向量是否垂直。

> 对向量 $\vec r_1,\vec r_2$，$\vec r_1\perp\vec r_2$ 等价于 $\vec r_1\cdot\vec r_2=0$。

若 $\vec r_1,\vec r_2$ 垂直，则两向量夹角与 90° 或 -90° 同余，余弦值总为 0，所以向量内积为 0。

2.3.3 外积 (叉乘)

> 两个向量的 **外积** 同样是一个数。设两个向量 $\vec r_1=(x_1,y_1)$，$\vec r_2=(x_2,y_2)$，$\vec r_1$ 与 $\vec r_2$ 的外积记作 $\vec r_1\times\vec r_2$，乘号 "$\times$" **不能省略**。外积的结果为
>
> $$\vec r_1\times\vec r_2=x_1y_2-x_2y_1$$

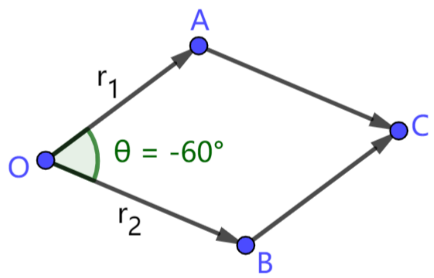
外积主要有以下性质：

1. 反交换律：$\vec r_1\times\vec r_2=-\vec r_2\times\vec r_1$
2. 线性性：$(a\cdot\vec r_1+b\cdot\vec r_2)\times\vec r_3=a(\vec r_1\times\vec r_3)+b(\vec r_2\times\vec r_3)$
3. 对任意 $\vec r$，$\vec r\times\vec r=0$

外积的几何意义同样与夹角有关。仿照内积的方法可以证明：

> 对平面上的两个向量 $\vec r_1,\vec r_2$，设夹角 $\langle\vec r_1,\vec r_2\rangle=\theta$。则外积
>
> $$\vec r_1\times\vec r_2=|\vec r_1|\cdot|\vec r_2|\sin(\theta)$$

如下图，在平行四边形 $OACB$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec r_1$，$\overrightarrow{OB}=\vec r_2$，$\langle\vec r_1,\vec r_2\rangle=\theta$。根据平行四边形的面积公式，$OACB$ 的面积与 $\vec r_1,\vec r_2$ 外积的绝对值相等。



外积可以用于判定向量平行。

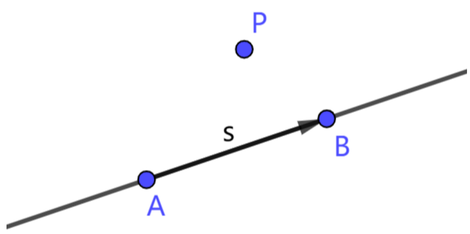
> 对向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，$\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$ 等价于 $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$。

外积还可以用于求解点到直线的距离。在上图中，考虑点 A 到直线 OB 的距离，设为 h。平行四边形的面积 $S = h \cdot |OB| = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$，于是有

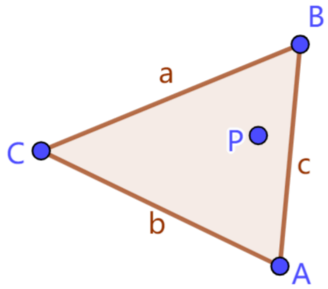
$$h = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OB}|}$$

习题

1. 设非零向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 的长度为定值，方向可变。当 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 具有怎样的方向时，
    1. 内积 $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ 取得最大值?
    2. 内积 $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ 取得最小值?
    3. 外积 $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ 取得最大值?
    4. 外积 $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ 取得最小值?
2. 证明：$|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2 = |\vec{r}_1|^2 |\vec{r}_2|^2$。
3. 如下图，已知直线上两点 A, B，直线的方向向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$。对于平面上的任一点 P，如何判断 P 位于直线 AB 的哪一侧?



4. 已知平面上一个三角形的三个顶点 A, B, C，对平面上任一点 P，满足什么条件时，可以判定点 P 在三角形 ABC 内部？试用外积表示判定条件。(提示：参考问题 3)



5. 下图是一个镜面反射模型，已知反射面上一点 A，有一个单位向量 $\vec{n}$ 与反射面垂直，由后侧指向前侧。已知该向量的方向为 θ。

   1. 由点 A 和方向 θ 能否唯一确定一个反射面？用 θ 表示 $\vec{n}$。
   2. 对平面上一点 P，满足什么条件时，可以判定点 P 在反射面的后侧？
   3. 若点 P 在反射面的后侧，点 P, P' 关于反射面对称，试求 $|PP'|$ 和 P' 点坐标。