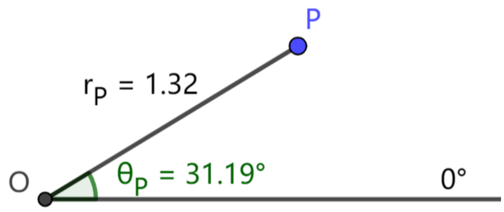
1.5 极坐标系

极坐标系是一种描述平面上点的位置的坐标系，与平面直角坐标系一样是较为常用的坐标系。极坐标系由相对原点的距离和方位来确定位置。

1.5.1 极坐标

如下图，极坐标系由一个极点和一条极轴组成。在平面上取一个定点 O，称为 **极点**；以 O 为端点作一条射线表示 0° 角，称为 **极轴**。



对平面上任一不与极点重合的点 P，将极点到点 p 的距离 $|OP|$ 称为点 P 的 **极径**，记为 r_P；将始边为极轴，终边为 OP 的角称为点 P 的 **极角**，记为 θ_P。由 r_P, θ_P 可以确定点 P 的位置。将有序数对 (r_P, θ_P) 称为点 P 的 **极坐标**。相对地，点 P 在平面直角坐标系下的坐标称为直角坐标。为了区分直角坐标和极坐标，本教程将极坐标记作 $\langle r_P, \theta_P \rangle$。例如上图点 P 的极坐标为 $\langle 1.32, 31.19^\circ \rangle$。

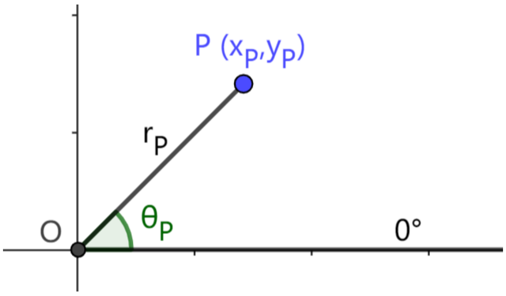
规定极点 O 的极坐标为 $\langle 0, \theta \rangle$，$\theta$ 为任意数值。

由于任意角的性质，一个位置可以有无穷多种极坐标表示，这与直角坐标不同。比如对于任意的 r, θ，极坐标 $\langle r, \theta \rangle, \langle r, \theta + 360^\circ \rangle, \langle -r, \theta + 180^\circ \rangle$ 表示同一个位置。我们可以对极径和极角的取值加以限制，从而减少该特性带来的麻烦。比如通常会有 $r \geq 0$ 的限制；如果限制 $r \geq 0$，$-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$，那么除极点之外的每个点都有唯一的极坐标。

1.5.2 极坐标与直角坐标的转换

运用前几节介绍的知识，容易得到极坐标与直角坐标的转换方法。

如下图，在平面直角坐标系中，以原点 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴，建立极坐标系。



> 对平面上不与原点 (极点) 重合的任一点 P，设它的直角坐标为 (x_p, y_p)，极坐标为 $\langle r_p, \theta_p \rangle$，则有
>
> $$x_p = r_p \cos(\theta_p)$$
> $$y_p = r_p \sin(\theta_p)$$

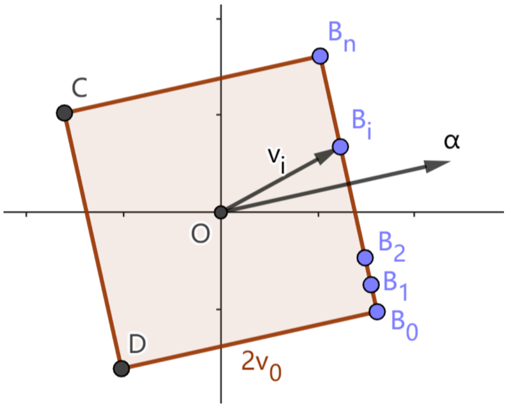
> 若已知 (x_p, y_p)，则 $\langle r_p, \theta_p \rangle$ 的一个可能值为
>
> $$r_p = \mathrm{Dist}(x_p, y_p)$$
> $$\theta_p = \mathrm{Angle}(x_p, y_p)$$

习题

1. 已知平面上一点 $P\langle r, \theta \rangle$，求点 P 经过下述变换后的极坐标 (写出一个可能值即可)：
    1. 绕原点 **顺时针** 旋转 20°；
    2. 关于 x 轴的轴对称变换；
    3. 关于 y 轴的轴对称变换；
    4. 以原点为中心，等比例均匀放大至 1.5 倍。
2. 试利用极坐标和三角函数的和差角公式证明平面旋转公式：将点 $P(x, y)$ 绕原点逆时针旋转 ϕ 角，得到点 $P'(x', y')$，则有

$$x' = x \cos(\phi) - y \sin(\phi)$$
$$y' = x \sin(\phi) + y \cos(\phi)$$

3. 如下图，正方形 $B_0 B_n C D$ 的中心为原点，边长为 $2v_0$，倾角为 α，$B_0, B_1, ..., B_i, ..., B_n$ 为一组等间距的点。
    1. 若 $\alpha = 0^\circ$，求点 B_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ 的直角坐标 (v_{xi}, v_{yi})；
    2. 若 $\alpha \neq 0^\circ$，求点 B_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ 的极坐标 $\langle v_i, \theta_i \rangle$。



B_n
C
B_i
v_i
α
O
B_2
B_1
B_0
D
$2v_0$