1.4 反三角函数与角度求解

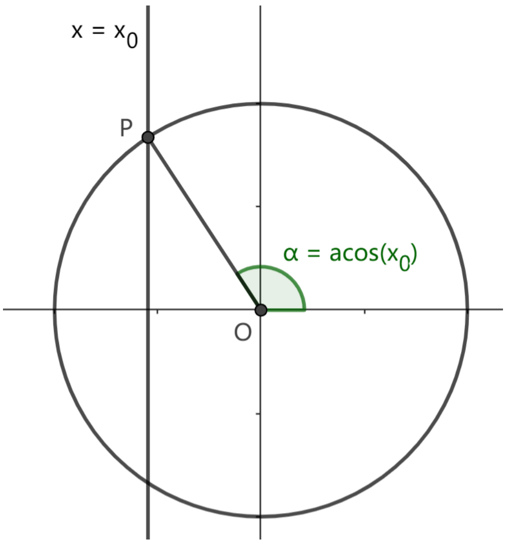
前两节我们介绍了三角函数。运用三角函数，我们可以由角度推导长度和坐标信息。那么我们如何由长度和坐标信息计算角度呢？这就要用到反三角函数。

反三角函数可以看作三角函数的逆运算。三角函数有 $\sin, \cos, \tan$，对应地有反三角函数 $\mathrm{asin}, \mathrm{acos}, \mathrm{atan}$。它们由给定的三角函数值计算对应的角度。例如对 $\sin(30^\circ) = 0.5$，有 $\mathrm{asin}(0.5) = 30^\circ$。

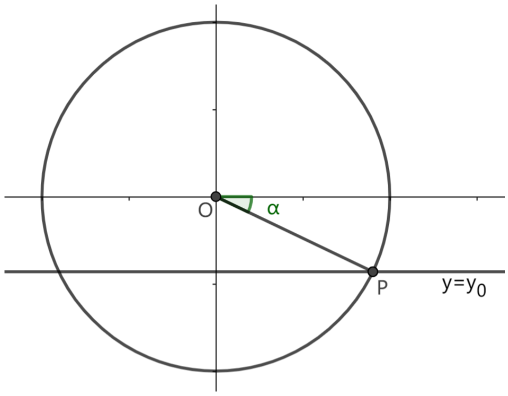
1.4.1 图解反三角函数

要计算 $\mathrm{acos}(x_0)$，就是要找到一个角度 θ，使得 $\cos(\theta) = x_0$。作直线 $x = x_0$，直线与单位圆交点的方位角 θ_P 满足 $\cos(\theta_P) = x_0$。但是，直线与单位圆最多可以有两个交点，并且每个交点又可以对应无穷多个角度 (相差 360° 的整数倍)，我们取哪一个角度作为结果呢？

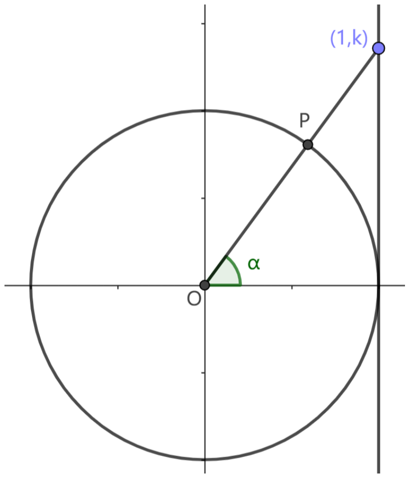
我们规定，acos 的结果应当满足 $0^\circ \leq \mathrm{acos}(x) \leq 180^\circ$。



类似地，要计算 $\mathrm{asin}(y_0)$，作直线 $y = y_0$，与单位圆交点的方位角 θ 满足 $\sin(\theta) = y_0$。规定取 $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 的角度作为 asin 的结果。



对 $\text{atan}(k)$，点 $(1,k)$ 的方位角 θ 满足 $\tan(\theta)=k$。规定取 $-90^\circ<\theta<90^\circ$ 的角度作为 atan 的结果。



1.4.2 反三角函数的值域问题

我们现在讨论角度求解中的一个基本问题：已知平面上一点的坐标 (x,y)，求该点的方位角。

由于任意角的特性，仅由坐标无法完全确定方位角的值，求得的各个可能值之间将相差 360° 的整数倍。所以我们说，如果对平面上所有的点，求得的方位角能够覆盖连续的 360° 范围，比如 $0^\circ\le\theta<360^\circ$，$-180^\circ<\theta\le 180^\circ$，就可以满足一般应用需求。

但是，反三角函数 acos, asin, atan 都只能覆盖 180° 的范围。这就导致直接使用反三角函数求解角度难以满足我们的需要。比如求点 (x,y) 的方位角，如果该点在第三象限，即 $x<0,y<0$，那么 acos, asin, atan 都无法得到正确的角度。这就是反三角函数固有的值域问题。

一般的处理方法是分类讨论点所在的象限，预先确定角度范围，再通过反三角函数求解方位角。具体实现留给读者思考。

为方便表述，我们引入 `LuaSTG` 的 `Angle` 函数。用 $\mathrm{Angle}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 表示点 (x_2, y_2) 对 (x_1, y_1) 的方位角；$\mathrm{Angle}(A, B)$ 表示 B 对 A 的方位角，即 θ_{AB}；另外规定 $\mathrm{Angle}(x, y)$ 为点 (x, y) 对原点的方位角，即 $\mathrm{Angle}(x, y) = \mathrm{Angle}(0, 0, x, y)$。

Angle 的值域为 $-180^\circ < \theta \le 180^\circ$。

习题

1. 测试 `LuaSTG` 中 `Angle(0,0,0,0)` 的结果。
2. 试用 atan 实现 Angle 函数 (提示：分类讨论点所在象限)。
3. 如下图，ACB 是一段圆弧。已知 OC 与 AB 垂直，$|OA| = |OB| = w$，$|OC| = h$。求圆弧 ACB 的半径 R 和圆心角 θ。