3.4 几种基础的运动模型

这一节将介绍一些相对基本的运动模型，它们将成为我们分析更复杂运动的基础。

3.4.1 匀速直线运动

我们已经讨论过一维坐标的匀速直线运动，现在在平面上重新考察匀速直线运动。

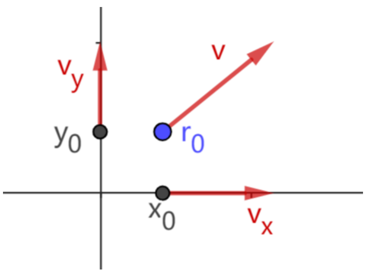
设匀速直线运动的初始位置为 $\vec{r}_0=(x_0,y_0)$，速度为 $\vec{v}=(v_x,v_y)$，则有

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}t$$

写成坐标形式为

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0+v_xt\\y(t)&=y_0+v_yt\end{aligned}$$

我们发现位置的横纵坐标各自满足一维的匀速运动形式。这就是说，平面上做匀速直线运动的点，在 x 轴、y 轴上的投影各自做匀速直线运动 (或静止)。



3.4.2 匀变速直线运动

匀变速直线运动是速度随时间均匀变化，即 **加速度恒定** 的直线运动。

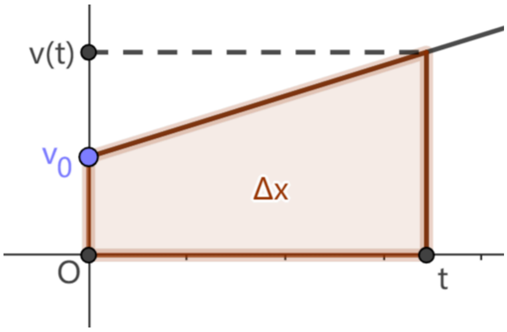
设匀变速直线运动的初始位置为 x_0，初速度为 v_0，加速度为 a。由于速度随时间均匀变化，套用匀速直线运动结论可得，

$$v(t)=v_0+at$$

如下图，匀变速直线运动的 v-t 图象是一条直线。在 `3.2` 节我们介绍了由 v-t 图象计算位移的方法。取一时间点 t，从初始时间到该时间的位移 $\Delta x=$

$x(t) - x_0$ 即为图示梯形的面积。由梯形面积公式有，$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v(t))t$，于是

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



3.4.3 抛体运动

抛体运动是 **加速度恒定** 且不为 $\vec{0}$ 的平面运动。

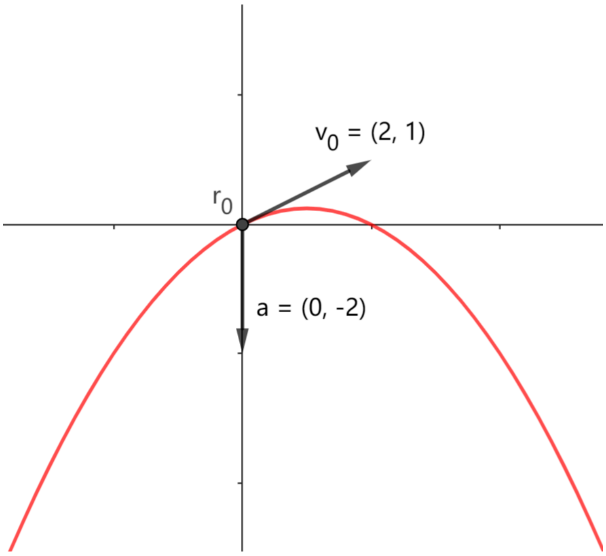
设抛体运动的初始位置为 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$，初速度 $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$，加速度 $\vec{a} = (a_x, a_y)$。由于 $\vec{a}$ 恒定，$\vec{a}$ 在 x, y 轴的分量 a_x, a_y 也恒定。于是，点在 x, y 轴的投影 $x(t), y(t)$ 符合匀变速直线运动的形式。所以有

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

向量形式为

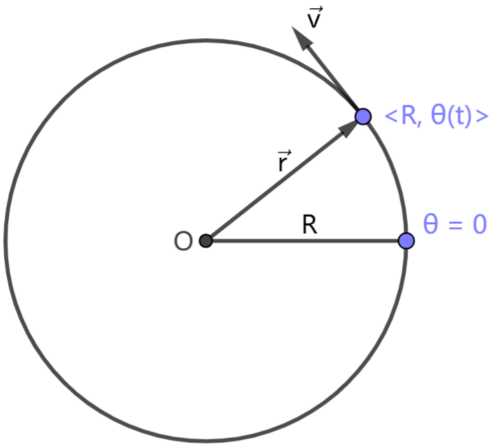
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

抛体运动的轨迹是怎样的呢？当 $\vec{v}_0, \vec{a}$ 共线时，点将在一条直线上运动，此时抛体运动退化为匀变速直线运动。$\vec{v}_0, \vec{a}$ 不共线时，抛体运动的轨迹是一种曲线，称为抛物线。



3.4.4 圆周运动

圆周运动是点在固定圆周上的运动。如图，平面上一点在圆心为原点、半径为 R 的圆上运动。点的位置可以由方位角 θ 确定，有 $\vec{r} = \langle R, \theta(t) \rangle$。



我们将 $\theta(t)$ 称为点在 t 时的 **角位置**，$\theta(t)$ 对时间 t 的变化率称为 **角速度**，记作 $\omega(t)$。

接下来我们讨论圆周运动的速度，分为大小和方向两个方面。为了讨论方便，我们假设点在圆周上始终做逆时针运动，即 $\omega(t) \geq 0$。

曲线运动在某点的运动方向与运动轨迹在该点的切线方向共线。对圆周运动而言，圆的切线有一个性质：

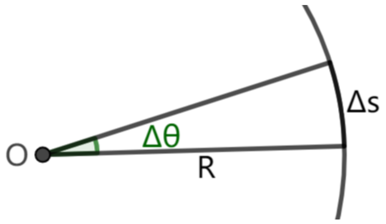
> 对圆上一点 P，圆在 P 处的切线与圆心到 P 的连线垂直。

于是可知，圆周运动的速度和位置向量满足

$$\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$$

速度的大小，即速率，是路程随时间的变化率。如下图，在 Δt 时间段内，点的路程为 Δs，角位移为 $\Delta\theta$。根据圆弧的几何性质，有 $\Delta s = R\Delta\theta$ (见 1.6 节弧度制)，即 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = R\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$。速率由 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 定义，角速度由 $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 定义，于是有

$$v = R\omega$$



确定了速度大小和方向，我们可以写出速度的坐标表示：

$$\vec{v}(t) = \langle R\omega(t),\ \theta(t) + 90^\circ \rangle$$

如果运动的角速度恒定为 ω，这样的圆周运动称为匀速圆周运动。根据上式，运动速率恒定为 $R\omega$，有

$$\vec{v}(t) = \langle R\omega,\ (\theta_0 + 90^\circ) + \omega_0 t \rangle$$

将 $\vec{v}(t)$ 视为动点，该点也符合匀速圆周运动的形式，由此可知 $\vec{v}(t)$ 对时间的变化率，即加速度

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) \quad &= \langle R\omega^2,\ (\theta_0 + 180^\circ) + \omega_0 t \rangle \\ &= -\langle R\omega^2,\ \theta(t) \rangle \\ &= -\vec{r}(t)\,\omega^2 \end{aligned}$$

匀速圆周运动是周期性的运动，**周期** 为绕圆运动一圈所需的时间，记作 T。

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

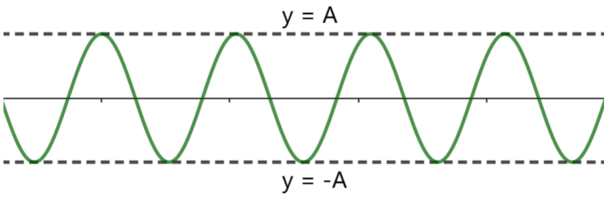
周期的倒数称为 **频率**，记作 $f = \dfrac{1}{T}$。

3.4.5 简谐振动

简谐振动是基本的一种振动模型。它是一种直线运动，存在一个固定的平衡位置，点在平衡位置附近的一段区域往复运动。设平衡位置为原点，简谐运动的通式为

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

简谐振动的 x-t 图象如下图所示，该曲线称为余弦波 (或正弦波，因为 $x(t)$ 可以转化为 $A\sin(\omega t+\phi')$ 的形式)。



简谐运动可以看作匀速圆周运动在 x 轴上的投影。设有一点作匀速圆周运动，圆心为原点，半径为 A，初始角位置为 ϕ，角速度为 ω，则

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))=\langle A,\ \omega t+\phi\rangle$$
$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$

匀速圆周运动的 $x(t)$ 与简谐运动形式一致。所以在研究简谐振动时，我们经常借助匀速圆周运动模型。

在简谐振动 $x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ 中，A 决定了点与平衡位置的最大距离，称为运动的 **振幅**；ω 决定了振动的周期、频率等属性，称为运动的 **角频率**；$\omega t+\phi$ 影响点到平衡位置的距离，称为 t 时刻的 **相位**；ϕ 是 $t=0$ 时的相位，称为 **初相位**。

简谐振动的周期与对应的匀速圆周运动的周期相同，为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。速度 $v(t)$ 是匀速圆周运动的速度在 x 轴的分量，即

$$v(t)=\omega A\cos(\omega t+\phi+90^\circ)=-\omega A\sin(\omega t+\phi)$$

加速度同理，有

$$a(t)=-\omega^2x(t)=-\omega^2A\cos(\omega t+\phi)$$

3.4.6 指数逼近

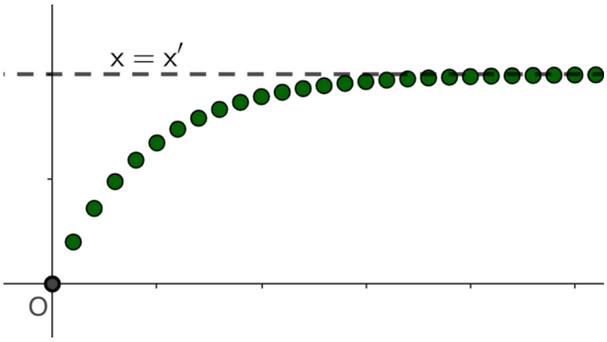
指数逼近是一类经典的逼近模型，由于容易实现且灵活，在子机跟随等场景中得到应用。

以直线运动为例，假设初始位置为 x_0，要让该点向某一位置 x' 逼近。首先我们指定一个常数 a $(0<a<1)$，然后从 $t=0$ 开始进行如下递推：

$$x(t+1)=x(t)+(1-a)(x'-x(t))$$

下图是 $x_0=0,\ x'=10,\ a=0.8$ 时运动的 x-t 图象。观察到，当点距目标位置 x' 较远时，点快速向目标位置靠近；随着点与目标位置不断接近，运动

的速度逐渐减小。点永远不会真正到达目标位置，即使运动足够长的时间，与目标位置仍会有一个很小的差距。不过当差距足够小时，我们就近似认为点到达目标位置。



对于上述递推式，可以验证

$$x(t) = (x_0 - x') \cdot a^t + x'$$

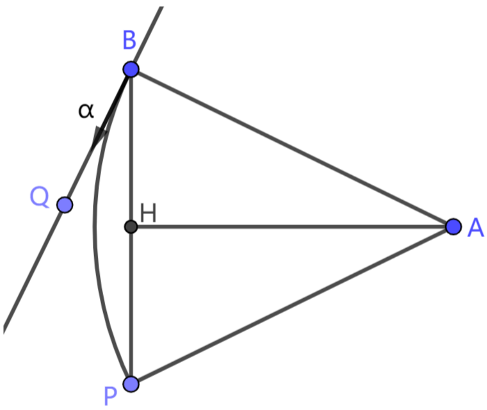
将 t 拓展到任意实数，有速度

$$v(t) = v(0) \cdot a^t$$

点的运动速度也是指数逼近 0 的。

习题

1. 设平面上有一点作匀速圆周运动，如下图，该点从点 B 处出发，沿圆弧运动至点 P，圆弧的圆心为点 A，过点 A 作 $AH \perp BP$。
    1. 若运动速率为 9 像素/帧，圆弧半径为 700 像素，求运动的角速度 (精确至小数点后两位，单位：度/帧)；
    2. 设圆弧半径 R 已知，点 B, P 坐标已知，求运动的初始方向 α。(提示：$|BH| = |PH|$, $\angle QBP = \angle BAH = \angle HAP$)



2. 对 `3.4.6` 节讨论的指数逼近模型，设初始位置为 $x = 1$，目标位置为 $x = 0$，即 $x(t) = a^t$。要使点在 $t = T$ 时逼近到 $x = d$，求 a 的

值。