

4.1 曲线与方程

Tips: 若感到本章难以阅读, 可尝试直接阅读下一章。

在弹幕制作中, 我们常希望子弹沿特定的轨迹运动, 或让子弹连成特定的形状, 这些需求都与曲线方程相关。这一章将大致介绍用方程描述曲线的方法, 然后下一章我们会讨论一些常用曲线的方程。

数学上我们经常用 **方程** 来描述一条曲线。方程是关于一个或多个变量的等式(组) 或不等式(组), 形如 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 。将一组变量值代入方程, 如果这组变量值满足该方程, 就称这组变量值为该方程的一个 **解**。

对平面上的一条曲线和一个关于坐标变量 x, y 的方程, 如果

- 对曲线上的任一点, 其坐标都满足方程;
- 对方程的任一解, 其对应点都在曲线上。

那么称该曲线和该方程是对应的。

例 1: 考虑单位圆和方程 $x^2 + y^2 = 1$ 。对单位圆上的点 (x, y) , 其与原点的距离恒为 1, 所以恒有 $x^2 + y^2 = 1$; 同时, 对满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的点, 其与原点的距离一定为 1, 所以一定在单位圆上。所以单位圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 。

例 2: 端点为 $(2, 0)$, $(0, 1)$ 的线段的一个方程为 $x + 2y - 2 = 0$, $0 \leq x \leq 2$ 。

用方程描述曲线是通用性极强的方法, 是我们描述曲线的主要手段。通过曲线方程, 我们可以把一些几何问题(比如求两条曲线交点) 转化为代数问题(解方程)。

例: 求单位圆与以 $(2, 0)$, $(0, 1)$ 为端点的线段的交点。

一个点是两条曲线的交点, 即该点同时在这两条曲线上, 等价于该点同时满足这两条曲线的方程。所以我们联立这两条曲线的方程, 得到方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

该方程的解 $(0, 1)$, $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ 即为两条曲线的交点。