2.2 向量的线性运算

这一节我们讨论向量的线性运算，包括向量的加减运算和数乘运算。我们介绍向量最终是要把向量应用到几何问题中，所以不仅要关注向量的运算方法，也要关注向量运算的几何含义。

2.2.1 向量加法

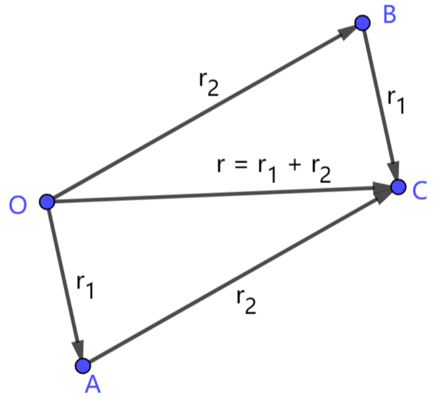
> 设向量 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$，$\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$。$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 的和是一个向量，记作 $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$，该向量的各分量是 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 对应分量的和，即
>
> $$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

向量的加法与数的加法具有基本相同的性质：

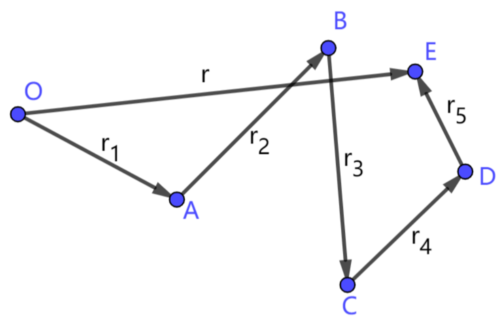
1. 交换律：对任意两个向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，有 $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1$；
2. 结合律：对任意三个向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$，有 $\vec{r}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \vec{r}_3$；
3. 零向量与任意向量相加等于该向量：$\vec{0} + \vec{r} = \vec{r}$；
4. 相反向量的和为零向量：$\vec{r} + (-\vec{r}) = \vec{0}$。

如下图，对向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，在平面上取点 A 使得 $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$，取点 C 使得 $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_2$，则有 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$。这种求和方法称为向量加法的 **三角形法则**。

我们也可以作平行四边形 $OACB$，使得 $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$，$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2$，此时对角线 $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$。这种求和方法称为向量加法的 **平行四边形法则**。



我们可以用三角形法则完成多个向量的加法。比如对下图的向量 $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_5$，将它们首尾相连，起点为 O，终点为 E，$\overrightarrow{OE} = \vec{r}$，则 $\vec{r} = \vec{r}_1 + \cdots + \vec{r}_5$。



2.2.2 向量减法

> 设向量 $\vec{r}_1=(x_1,y_1)$，$\vec{r}_2=(x_2,y_2)$。$\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 的差是一个向量，记作 $\vec{r}_1-\vec{r}_2$，该向量的各分量是 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 对应分量的差值，即
>
> $$\vec{r}_1-\vec{r}_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$$

向量的减法与数的减法也具有基本相同的性质，这里不作赘述。

向量减法是向量加法的逆运算，其几何含义可以参考向量加法的几何含义。值得注意的是，对平面上任意两点 A,B，根据向量加法有 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，移项得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，即

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}$$

利用该式可以将点与平移量相互转换。

2.2.3 向量数乘

> 数乘是向量与数的运算。设向量 $\vec{r}=(x,y)$，数 a 与向量 $\vec{r}$ 的数乘记作 $a\cdot\vec{r}$ 或 $\vec{r}\cdot a$，"·" 号可省略。数乘的结果是一个向量，其各分量为 $\vec{r}$ 的各分量乘以 a，即
>
> $$a\cdot\vec{r}=(ax,ay)$$

数乘运算的性质与数的乘法相似：

1. 交换律：$a\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot a$
2. 结合律：$a\cdot(b\cdot\vec{r})=(ab)\cdot\vec{r}=b\cdot(a\cdot\vec{r})$
3. 对加法的分配律：
    1. $(a+b)\cdot\vec{r}=a\cdot\vec{r}+b\cdot\vec{r}$
    2. $a\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=a\cdot\vec{r}_1+a\cdot\vec{r}_2$
4. 消去律：
    1. 若 $a\cdot\vec{r}=b\cdot\vec{r}$，且 $\vec{r}\neq\vec{0}$，则 $a=b$

2. 若 $a \cdot \vec{r}_1 = a \cdot \vec{r}_2$，且 $a \neq 0$，则 $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

对向量 $\vec{r}$ 和数 a，若 $a = 0$ 或 $\vec{r} = \vec{0}$，则数乘结果为零向量。当 $a \neq 0$，$\vec{r} \neq \vec{0}$ 时，向量 $a \cdot \vec{r}$ 的大小是 $\vec{r}$ 的 $|a|$ 倍，即 $|a \cdot \vec{r}| = |a| \cdot |\vec{r}|$。向量 $a \cdot \vec{r}$ 与 $\vec{r}$ 共线，当 $a > 0$ 时，$a \cdot \vec{r}$ 与 $\vec{r}$ 方向相同；$a < 0$ 时，$a \cdot \vec{r}$ 与 $\vec{r}$ 方向相反。

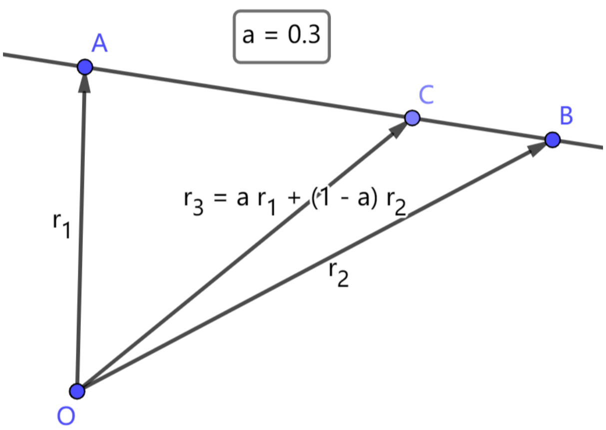
数乘运算与向量平行有紧密的联系。

> 对非零向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$，
>
> $$\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$$
>
> 等价于存在 $a \neq 0$，使得
>
> $$\vec{r}_1 = a \cdot \vec{r}_2$$

2.2.4 三点共线问题

从数乘与向量平行的关系可以延伸到三点共线问题。三点共线问题描述如下：

> 设平面上有两两不重合的三点 A, B, C，则 A, B, C 三点共线等价于存在 $a, b\ (a + b = 1)$，使得
>
> $$\overrightarrow{C} = a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B}$$



该定理大致证明过程如下：

1) 如果 A, B, C 三点共线，那么向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共线。于是存在 λ，使得 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$。代入 $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}$，$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$，得

$$\vec{C} = (1-\lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}$$

令 $a = 1-\lambda$，$b = \lambda$，即得 $a+b=1$，$a\vec{A} + b\vec{B} = \vec{C}$。

2) 如果存在 $a+b=1$ 使得 $\vec{C} = a\vec{A} + b\vec{B}$，可得

$$\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB}$$

所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线，A, B, C 三点共线。

由该定理，我们可以得到一种构造直线上点的方法：

> 已知直线上两点 A, B，任取数 a，点 $\vec{C} = a\vec{A} + (1-a)\vec{B}$ 一定在直线 AB 上。并且如果 $0 \le a \le 1$，则点 $a\vec{A} + (1-a)\vec{B}$ 在线段 AB 上。

习题

1. 举例说明：$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|$ 与 $|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|$ 不一定相等。试说明满足什么条件时，有 $|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2|$？
2. 已知平面上不重合的两点 $\vec{A} = \vec{r}_1 = (x_1, y_1)$，$\vec{B} = \vec{r}_2 = (x_2, y_2)$，求线段 AB 的两个三等分点的坐标。
3. 对平面上任意三个点 A, B, C，试证明：A, B, C 三点共线等价于存在不全为 0 的数 a, b, c，使得

$$\begin{gathered} a+b+c=0 \\ a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} = \vec{0} \end{gathered}$$