

修士学位論文

動径方向に構造を持つ原始惑星系円盤でのペブル
集積を考慮した惑星系形成 N 体シミュレーション

令和 6 年 2 月 2 日

専攻名 惑星学専攻

学籍番号 223s415s

氏名 神野 天里

神戸大学大学院理学研究科博士課程前期課程

概要

分子雲の収縮によって誕生する恒星の周りには、自己重力によって収縮しきれなかったガスやダストが円盤状に取り残される。この円盤状天体は、原始惑星系円盤と呼ばれ、惑星はこの原始惑星系円盤内で形成されると考えられている。1970-80年代には、「円盤からの惑星形成」という考え方をベースに、ソ連の Victor S. Safronov や京都大学の林忠四郎を中心としたグループによって、惑星形成の古典的標準理論が構築された。しかし、この古典的標準理論は、太陽系の形成過程を説明することを志向して構築された理論であることから、現在観測されているダストリングのような原始惑星系円盤のサブ構造やホット・ジュピターなどの系外惑星系の多様性は考慮されていない。さらに、標準理論にはダスト落下問題や惑星落下問題など、理論単体でも様々な未解決問題が存在する。

古典的標準理論が抱える問題を解決するため、これまでに多くの理論モデルが構築してきた。その中でも近年、標準理論の抱える未解決問題を解決し、かつ観測で明らかになってきた原始惑星系円盤のサブ構造や系外惑星の多様性を体系的に説明し得る理論モデルが構築され始めている。しかし、モデルの煩雑さやその計算規模の大きさから、この理論モデルを統一的に再現するシミュレーションはこれまで存在しない。そこで、本研究では近年の理論モデルをベースに、ダスト落下問題やダストリング形成を考慮したモデルを構築し、 N 体シミュレーションコードへ実装することで、円盤サブ構造の形成から惑星が形成されるまでを、数値シミュレーションの立場から体系的に調べた。

本研究では、原始惑星系円盤に 1 次元定常降着円盤を仮定し、降着円盤には、乱流の詳細をパラメータ α として記述した α 粘性モデルを採用した。その際、我々のモデルでは質量降着率の関数として、円盤を動径方向に内側・外側の乱流領域とその間に存在する層流領域の 3 つの領域に分けた。このような内側から外側へ向かって、乱流・層流領域が交互に現れる円盤構造の存在は、近年の磁気流体力学シミュレーションによっても支持されている。本研究で考える円盤モデルでは、乱流領域と層流領域の境界にガス密度、および圧力極大が生じることで、境界近傍にダストが集積され、高密度なダストのリングが形成されることが期待されている。そこで本研究では初めに、1 次元定常 α 降着円盤内のダストの成長と降着を数値的に求め、内側乱流・層流境界への質量降着率を見積もった。そして、降着するダストを超粒子として再現することで、動径方向に構造を持つ原始惑星系円盤におけるダストの降着を考慮した惑星系形成 N 体シミュレーションを行った。

N 体シミュレーションの結果から、内側乱流・層流境界へダストが集積することによって、境界近傍で惑星形成が活発的に進行し、 $\sim 10^4$ 年で地球質量程度の惑星が形成されることがわかった。また、境界近傍では、原始惑星の巨大衝突が普遍的に生じることや、惑星サイズの天体が一定の距離間隔で複数個形成されることも明らかになった。これらの結果は、動径方向に構造を持つ原始惑星系円盤内でも、太陽系のような順で惑星系が形成される可能性やケプラー・ミッションで観測されているようなコンパクトな複数惑星系が形成される可能性を示唆している。

目次

1	はじめに	5
2	原始惑星系円盤と系外惑星の観測	7
2.1	原始惑星系円盤の観測	7
2.2	系外惑星の観測	11
3	惑星形成理論	19
3.1	原始惑星系円盤の構造と進化	19
3.2	固体粒子の物理	27
3.3	最小質量円盤モデル：Minimum Mass Solar Nebula (MMSN)	46
3.4	古典的惑星形成論のまとめ	49
4	ダストリング形成モデルの設定	50
4.1	ダストリング形成モデルの概要	50
4.2	ダストリング形成モデルのガス円盤	51
4.3	ガス円盤内でのダスト成長	55
5	ダストリング形成モデルの N 体シミュレーション	64
5.1	N -body simulation code: GPLUM	64
5.2	N 体シミュレーションへのダストリング形成モデルの実装	66
5.3	初期条件設定	67
6	結果	70
6.1	ダストリング形成モデルにおける惑星形成シナリオ	70
6.2	ダスト円盤質量が惑星形成過程に及ぼす影響	73
6.3	ダストリング形成モデルの質量分解能依存性	78
7	議論	82
7.1	完全合体と衝突破壊の比較	82
7.2	近年の先行研究との比較	86
8	まとめ	90

付録 A 流体の基礎方程式	103
A.1 オイラー的記述法とラグランジュ的記述	103
A.2 連続の式	104
A.3 流体の運動方程式	105
A.4 音速	107
付録 B 角運動量輸送と質量分布進化の導出	108
B.1 角運動量輸送式	108
B.2 質量分布進化	110
付録 C ガス抵抗則と動粘性係数	113
C.1 Stokes drag	113
C.2 Epstein drag	120
C.3 動粘性係数	124
付録 D ヤコビ・エネルギーとヒル半径	126
D.1 ヤコビ・エネルギー	126
D.2 ヒル半径	129
付録 E 内側デッドゾーン境界へのダスト降着率	130
付録 F N 体シミュレーションのエネルギー誤差	133
F.1 非力学的エネルギーの補正手法	133
F.2 エネルギー誤差の推移	134
付録 G 馬蹄軌道 –惑星の 1:1 共鳴–	134

1 はじめに

惑星は、誕生間もない恒星を円盤状に取り囲むガスとダストから形成されたと考えられている [1]。この円盤は、原始惑星系円盤と呼ばれ、近年の高精度電波望遠鏡を用いた観測から、この円盤内での惑星形成過程を支持する結果が得られつつある (e.g., [2])。また、これらの観測からは、原始惑星系円盤内のダスト分布にリングやスパイラル構造、さらに三日月構造などのサブ構造が普遍的に存在することが明らかになってきた (e.g., [3])。原始惑星系円盤内でのダスト分布は、円盤内での惑星形成過程に大きく影響するため、サブ構造を持つ原始惑星系円盤内でどのように惑星が形成されるかを調べることは重要である。

系外惑星系の観測は、1995 年の系外惑星の発見 [4] を皮切りに、急速に発展している。現在、発見されている惑星数は 5000 個を超え^{*1}、その中には木星質量程度の惑星を中心星付近を高速に公転するホット・ジュピターや、軌道離心率が非常に高いエキセントリック・ジュピターなど、我々の太陽系の惑星とは一線を画す惑星も見つかっている [5]。これら多様な惑星系の形成過程を理論的に説明するために、これまでに多くのアイデアが提案されている [6, 7, 8]。しかし、どのモデルも一長一短があり、観測されている惑星系を体系的に説明する理論は未だ存在しない。

現在、多くの理論モデルが基礎とするのは、[9] や [1, 10] によって構築された「コア集積モデル」(以下、標準理論)である。この標準理論では、自己重力に対して安定した軽い原始惑星系円盤からの惑星形成を考える。この円盤の中で、初めに μ m サイズのダストが凝縮し、ダストから km - 100 km サイズの多数の微惑星が形成される。そして、微惑星は衝突合体を繰り返し、惑星の胚となる原始惑星が形成される。その後、原始惑星同士の巨大衝突を経て、地球型惑星が形成される。さらに、雪線よりも外側のガス惑星形成領域では、惑星質量がある臨界値を超えると、円盤ガスが惑星に流入することで、巨大ガス惑星が形成される [11]。このモデルは、太陽系のように円盤内側から地球型惑星、巨大ガス惑星、氷型惑星の順に惑星が形成されることを見事に説明し得ることから、惑星形成の標準理論として知られている。

近年、上述した標準理論とそれを基に構築された理論モデルを全体として組み合わせた新たな理論モデルが構築されている [12, 13]。このモデルは、観測されている原始惑星系円盤のダストリング状構造や系外惑星観測によって見つかったホット・ジュピターやスー

^{*1} Exoplanet Exploration Planets Beyond Our Solar System(<https://exoplanets.nasa.gov/>) 参照

パーアースなどの形成過程を説明し得る可能性がある。

様々な理論モデルが提案されている一方で、ダストリングの形成過程やダストリング内で惑星がどのように形成され、進化するのかを自己無撞着に再現したシミュレーションはこれまで存在しない。その理由として、煩雑な理論モデルを実装する困難さや大規模な計算資源が必要であること、さらに、観測によってダストリング構造が未だ十分に制限されていないことが挙げられる。

そこで本研究では、[12] を基にダストリング形成メカニズムを考慮した原始惑星系円盤モデルを構築し、 N 体シミュレーションコード `GPLUM` [14] へ組み込むことで、ダストリング内で惑星がどのように形成され、進化するのかを調べた。本研究の結果は、惑星形成に対する理論的な理解を進めるだけでなく、地球型惑星の形成現場をターゲットとする将来の観測計画・目標 (ALMA 2 Scientific Goal 1) に資するものである。

本論文の構成は、次のとおりである。まず、2 章で近年の原始惑星系円盤や系外惑星の観測的な研究を紹介する。そして、3 章で惑星形成の標準理論をまとめ、惑星形成の物理の基礎を説明する。4 章では、本研究の基礎となるダストリング形成モデルの物理と実装手法を示す。そして、5 章でどのようにダストリング形成モデルを N 体シミュレーションへ組み込むかを説明し、6 章では、我々のシミュレーション結果を基にダストリング内で惑星がどのように形成され、進化するのかを示す。7 章では、まず微惑星の衝突破壊が惑星形成過程に及ぼす影響を議論し、次に我々のシミュレーション結果と先行研究の比較を行う。そして、8 章で本研究をまとめる。

2 原始惑星系円盤と系外惑星の観測

2.1 原始惑星系円盤の観測

原始惑星系円盤は惑星形成の舞台であるため、観測される系外惑星の多様性は原始惑星系円盤の物理的性質の多様性と大きく関係する。したがって、原始惑星系円盤を構成するガスとダストの進化は、いつ、どこで、どのように惑星が形成され、進化するかを明らかにする上で重要である。そこで、本節では [15] を基に、原始惑星系円盤の観測手法の基本、および近年の観測結果を概観する。

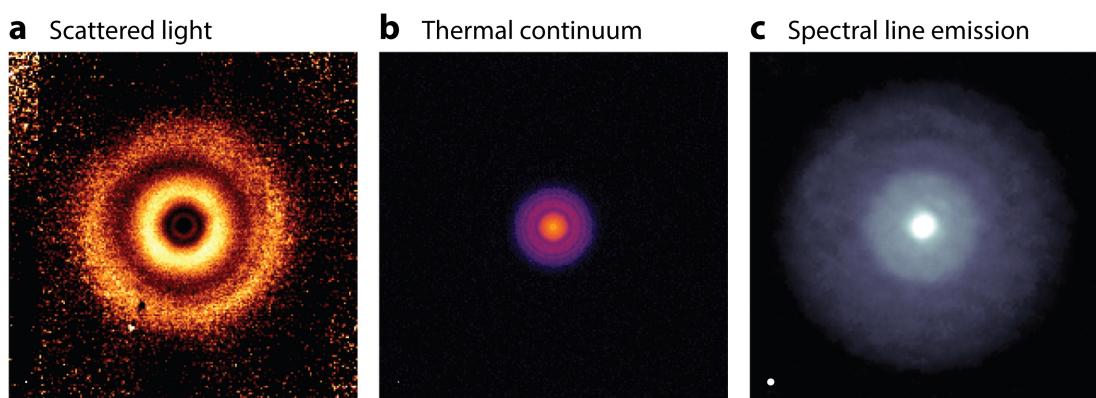
2.1.1 観測手法の基礎

原始惑星系円盤の構造の観測的研究では、散乱光、熱放射による連続波、分子スペクトル線の3つの観測トレーサーが用いられる。以下で、それぞれの観測トレーサーの特徴を簡潔に示す：

1. 散乱光：ガス円盤内に存在する μm サイズの小さなダストは、主星から放射される輻射を反射する。この散乱光のスペクトルと偏光の振る舞いを調べることで粒子のサイズや、形状、組成によって決まるアルベドに制約を与える。このトレーサーの利点は、その分解能にある。例えば、8-10 m 望遠鏡の回折限界付近で動作する補償光学システムは、太陽系から 150 pc (近傍の星形成領域の典型的な距離) に存在する円盤を約 5 AU と非常に高い分解能で観測することができる。しかし、その欠点として (1) 主星とのコントラストによる影響で、内側円盤領域 ($\lesssim 10 \text{ AU}$) の観測が阻まれること、(2) 円盤遠方での主星放射場の減衰による感度の低下などが挙げられる。したがって、現在の散乱光トレーサーを用いた観測サンプルは、大質量星周りの円盤に偏っている。
2. 連続波放射：円盤内のダストは、波長 λ で約 $1 \mu\text{m} \sim 1 \text{ cm}$ の熱放射の連続スペクトルを示す。その大部分は光学的に厚いことから、円盤温度を推定するのに用いられる。光学的厚さ (τ_ν) は λ と共に減少し、 $\tau_\nu \lesssim 1$ への遷移は、通常サブミリ波帯で期待される。このトレーサーの利点として、太陽系近傍 ($\approx 150 \text{ pc}$) の円盤を高分解能 (約 2 AU) に観測できることや観測サンプルが豊富であることが挙げられる。そのため、円盤構造に関する多くの知見は、mm 連続波の観測データに基づいている。連続波放射観測の欠点としては、ダストの特性や光学的に薄い近似の妥当性に伴う曖昧さが挙げられる。

3. スペクトル線放射：一酸化炭素分子 CO に代表される、様々な分子は分子輝線を放射する。この分子輝線スペクトルを検出することで、円盤内のガス面密度や速度構造を見積もることができる。このトレーサーの欠点は、円盤内で最も豊富な分子である H_2 は、双極子モーメントを持たないため円盤の大部分で効率的に放射しないことである。したがって、円盤内の大部分は基本的に暗く、その総量を直接的に調べることは難しい。但し、特定の分子種の H_2 に対する存在量がわかっている場合は、ガスの面密度分布 Σ_g を制約することができる。

最後に、各トレーサーで観測された原始惑星系円盤の観測結果を図 1 に示す。図 1 から、各トレーサー（観測波長）によって、対応する円盤位置が異なることがわかる。



Andrews SM. 2020.
Annu. Rev. Astron. Astrophys. 58:483–528

図 1 異なる 3 つのトレーサーで観測されたうみへび座 TW 星まわりの原始惑星系円盤：図の出典は [15] で、左から (a) 波長 $\lambda = 1.6 \mu m$ の偏光観測で得られたダストの散乱光、(b) $\lambda = 0.9 mm$ で観測されたダストの連続波放射、(c) CO の分子輝線スペクトルの観測結果を表している。各パネルの空間スケールは 1 辺 500 AU であり、パネル左下の白点が各トレーサーの解像度を表している。

2.1.2 サブ構造の特徴

これまで円盤構造に関する多くの制約は、15 ~ 20 AU 以上の比較的粗い空間分解能の観測によって得られてきた。しかし、近年、ALMA 望遠鏡に代表される観測機器の大幅な性能向上によって、数 AU スケールという高い分解能で円盤構造を観測することが可能となった。それによって、これまで観測的に捉えられなかった数々の円盤サブ構造の存在が明らかになってきた (e.g., [2])。

サブ構造の起源や、これらが円盤進化と惑星形成に与える影響を理解するためには、観測的にそれらの物理的特徴（例として、位置、大きさ、振幅）を測定することが重要である。そこで本項では、近年観測的に得られている円盤サブ構造の形態やその物理的特徴を概観する。

形態

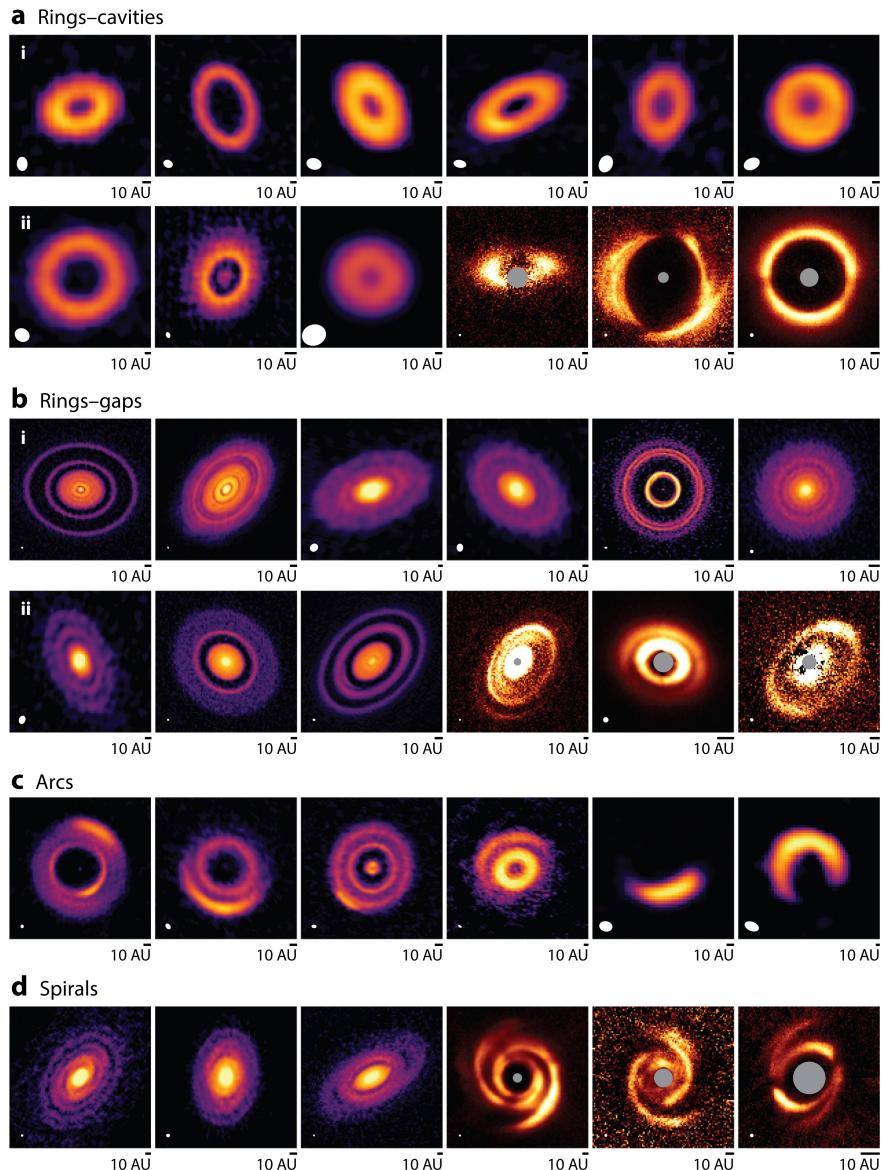
現在、赤外線の散乱光やミリ波連続波の高解像度画像では、 $1 \sim 5$ AU の空間スケールまでサブ構造の形態を特徴づけることができる（e.g., [16, 17]）。図 2 に、これまでに観測されている種々の円盤サブ構造を示す。サブ構造のパターンには重複もかなり見られるが、その形態は大まかに、以下で示す 4 つのカテゴリーに分類することができる：

- Ring/Cavity (図 2.a): これは、円盤内側部分が失われつつある遷移円盤の典型的な形態である。その形態は、一般的に狭いリングとそれが取り囲む空洞で構成されている。選択バイアスに注意する必要があるが、リング構造は $r \approx$ 数十 AU でピークを持つ。
- Rings/Gaps (図 2.b): 放射強度の増強（ring）と減弱（gap）が交互に現れる同心円状の軸対称パターンを指している。このカテゴリーは、円盤全体が狭いギャップとリングに分解できる場合（e.g., [18]）と内側の発光コアと外側のリングを分ける単一のギャップ（e.g., [17]）の場合に分けることができる。
- Arcs (図 2.c): 非軸対称サブ構造は稀だが、限られた方位角範囲に三日月型（arc）の特徴を示す円盤もある。これらの明るさの非対称性は、100 倍以上となるものから約 2 倍程度と穏やかなものまで様々である（e.g., [19, 20]）。
- Spirals (図 2.d): 大規模な渦巻き（Spiral）パターンは、散乱光画像で最も多く見られる。その形態は、非対称性が少なく、かつ比較的開いた $m = 2$ モードを持つものから、より複雑できつく巻かれた非対称構造まで様々である（e.g., [21, 22]）。

ただし、個々の円盤が複数の形態を保持している場合があることにも注意したい。そのような例として、Ring/Gap/Cavity を持つ DM Tau や、Ring/Gap/Spiral が共存する円盤 [23] の存在が挙げられる。

物理的特徴

円盤の Ring/Gap 構造は、分解能の限界値となる数 au から検出閾値 ($\lesssim 300$ AU) まで、基本的にどの半径でも観測されている。一方で、Ring/Cavity や Arcs は、数 10AU のより大きな半径でよく観測されるが、これらサブ構造の位置と主星の物理的特徴の間に明らかな相関は見られない [17, 24]。大きな円盤では、より遠方にサブ構造が見つかる傾向があるが、その物理的メカニズムはまだ明確になっていない。しかし、この傾向が得



Andrews SM. 2020.
Annu. Rev. Astron. Astrophys. 58:483–528

図2 円盤サブ構造の形態：各パネルの左下隅に白い楕円で解像度を、右下のスケールバーは 10au を示している。(図の出典は [15] で、図中の各パネルの詳しい出典は [15] を参照されたい)

られる理由として：

- 円盤遠方では、圧力スケールハイト H_p が大きくなることで、より大きなサブ構造が形成される。

- ミリ波連続波の有効半径 R_{mm} が小さい円盤でも、 $r \gg R_{\text{mm}}$ のような円盤外縁部にサブ構造が存在するかもしれないが、有効半径以遠では連続体放射を観測する手段がないため、小さい円盤ではサブ構造が見逃されている。

の 2 つが考えられる。

ミリ波連続波で観測されているリングやギャップの動径方向の間隔は、おおよそ $\Delta r \approx 2 \sim 10 H_p$ に相当する [25]。さらに、いくつかの円盤は、平均運動共鳴に見合った間隔を持つサブ構造のペアを含んでいることもわかっている [25]。サブ構造の幅に関しては、空間分解能の限界から測定するのは非常に難しいが、ミリ波連続体で観測されている広いリングやギャップ構造は、幅 $\approx H_p$ を示唆している [25, 26, 17]。実際、観測されているほとんどのギャップやアーク、スパイラル構造の幅は 5 – 10 AU 未満である。

2.1.3 原始惑星系円盤観測のまとめ

- 原始惑星系円盤の観測には、円盤ダストの散乱光や熱放射、さらに円盤ガスの分子輝線がトレーサーとして用いられている。散乱光と連続波放射はダストの分布やその物理的条件に対して高い感度を持つ。一方で、スペクトル線放射はガスの特性を測定するのに用いられる。
- 観測からは、原始惑星系円盤内には圧力スケールハイト程度の小規模サブ構造が普遍的に見つかっている。これらサブ構造の形態は、リングやギャップ、三日月や渦巻き状と様々な形態が観測されている。
- これらサブ構造の起源はよくわかっておらず、現在の解像度限界よりも小さいスケールの摂動によって駆動されている可能性がある。そのため、今後もより高感度・高空間分解能な観測を行なっていくことが重要である。

2.2 系外惑星の観測

近年、系外惑星の観測的研究は目覚ましい発展を遂げている。その背景には、2009 年の打ち上げから 2018 年までの 9 年以上にわたって行われたケプラー・ミッションや 2022 年から開始された James Webb Space Telescope (JWST) による大規模な太陽系外惑星探査が大きく影響している。本節では、[5] (以下、ZD21) を基に、ケプラー・ミッションに代表される近年の系外惑星探査によって得られた結果を概観する。特にここでは、我々の行

なった惑星形成 N 体シミュレーション [27] (詳しくは、4 章以降参照) と同じ太陽型星^{*2} まわりの惑星系内側領域 ($\lesssim 1$ AU) で発見された系外惑星に焦点を当てた議論を行う。

2.2.1 惑星半径と軌道周期から見た系外惑星分布

本項では、はじめに [5] で課されている太陽型星まわりの惑星系内側領域に存在する惑星の条件を説明し、全体的な系外惑星の分布を示す。そして、それぞれの惑星に関して、その半径と軌道周期で分類し、その特徴を説明する。

ZD21 では、トランジット法で観測される太陽型星まわりの惑星系内側領域に存在する惑星として：

- トランジットの S/N 比が 7.1 以上である
- トランジットの特徴を示し、かつそれが NASA Exoplanet Archive^{*3}において偽陽性ではない
- 推定惑星半径が $R_p \leq 20R_{\oplus}$ ^{*4} である
- 軌道周期 P が 400 日以下である
- トランジットインパクトパラメータ b (観測者から見たトランジット軌道から主星中心までの距離の視線方向鉛直成分を主星半径で規格化したもの) のベストフィットが 1 以下である

の計 5 つの条件を満たすものと定義している。図 3 に、これらの条件を満たす系外惑星の分布を示す。

ZD21 より、各惑星系内で観測された惑星数の分布は

$$(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7) = (1451, 278, 97, 37, 12, 2, 1) \quad (2.1)$$

であり、8 個以上の惑星が存在する惑星系は観測されていない。また、単一の系で複数の惑星 (複数惑星系) が発見される割合は 42.5% にも上る。但し、トランジット法で観測されている単一惑星系の多くは本来複数惑星系である可能性を考慮すると、この割合は複数惑星系の存在割合の最低値を表していることに注意する必要がある。

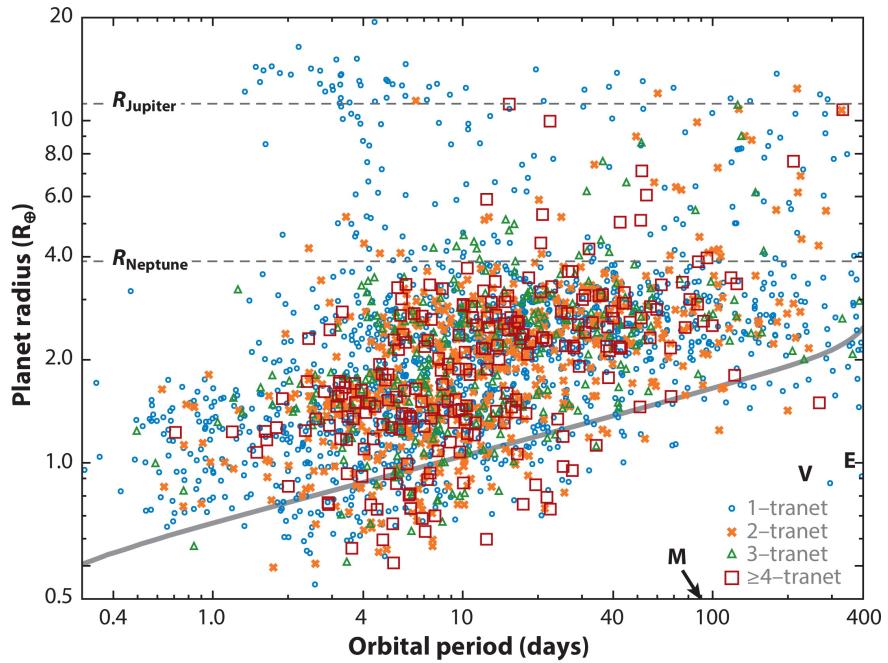
以下では、図 3 に含まれる惑星を ZD21 に則った条件で、惑星半径と軌道周期で分類し、それぞれの分布が表す特徴を説明する。

• ホット・ジュピター

^{*2} ここでは太陽型星を、主系列段階、かつその有効温度が 4700 ~ 6500 K の恒星として定義している。

^{*3} <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>

^{*4} R_{\oplus} は、地球半径 ($\approx 6.4 \times 10^6$ m) を表している。



 Zhu W, Dong S. 2021
Annu. Rev. Astron. Astrophys. 59:291–336

図3 $P < 400$ 日の系外惑星の分布を、惑星半径を縦軸、軌道周期を横軸に取って示した図(図の出典は[5])。それぞれのシンボルは、各惑星系で発見された惑星の個数を表している。また、灰色の実線は検出効率の中央値を表している。他にも、M・E・Vはそれぞれ水星、金星、地球を表しており、灰色の破線は下から土星の半径、および木星半径を表している。

惑星半径が $8R_{\oplus} < R_p < 20R_{\oplus}$ で、かつ軌道周期が $P < 10$ 日の惑星を太陽型星まわりのホット・ジュピターと定義する。ZD21の統計サンプルからは、ホット・ジュピターの存在割合は全体の $0.62 \pm 0.09\%$ であり、これはこれまでに得られている先行研究の結果と十分一致している(e.g. Table B.9 in [28])。また、ホット・ジュピターのうち $\sim 2\%$ のみが短周期($P \lesssim 20$ 日)の小さい($\sim 1 - 4R_{\oplus}$)伴惑星を持っている。ホット・ジュピターを持つ複数惑星系率の低さは、ホット・ジュピターの内側移動を支持する観測結果であり、理論的にも予測されている(e.g., [29])。

• ホット・ネプチューン砂漠

惑星半径が $2R_{\oplus} \lesssim R_p \lesssim 8R_{\oplus}$ で、かつ軌道周期が $P < 4$ 日となる領域を太陽型

星まわりのホット・ネプチューン砂漠と定義する。この領域に含まれる惑星の存在割合は、ZD21 の統計サンプル全体の $0.61 \pm 0.07\%$ で、上述したホット・ジュピターの存在割合と類似している。また、その中でも 23% は複数惑星系内で観測されており、これはホット・ジュピターの複数惑星系率に比べて高い。ホット・ネプチューン砂漠における惑星の存在割合は、軌道周期が短くなるほど小さくなることが知られている。その理由としては、惑星の高離心率運動に伴う潮汐の効果と強い中心星放射を受けることによる惑星大気の蒸発が考えられている (e.g., [30])。

• 超短周期惑星

惑星半径が $0.5 - 2R_{\oplus}$ で、かつ軌道周期が $P \lesssim 1$ 日の惑星を太陽型星まわりの超短周期惑星と定義する。この領域に含まれる惑星の存在割合は、ZD21 の統計サンプル全体の $0.39 \pm 0.04\%$ である。また、超短周期惑星のうち 20% が複数惑星系内で観測されている。超短周期惑星の形成には、潮汐ダンピングによる軌道減衰 [31] などのシナリオが考えられているが、その形成過程は未だ明確ではない。

• Radius valley

Radius valley とは、 $R_p \sim 2R_{\oplus}$ 、かつ軌道周期が $3 \text{ 日} \lesssim P \lesssim 30 \text{ 日}$ の間にある惑星存在割合が減少する領域である [32]。この領域は、図 3 で示した ZD21 の統計サンプルからも確認できる。この領域を示す惑星半径は、軌道周期と共に減少し、主星質量の増加と共に増加することもわかっている [33, 34]。この radius valley を形成する有力なメカニズムとして、主星からの高エネルギー光子による光蒸発過程を考えられている [35, 36]。この散逸過程は、数 M_{\oplus} のコア質量を持ち、軌道周期が $3 \text{ 日} \lesssim P \lesssim 30 \text{ 日}$ の間にある惑星に対して、その惑星の大気質量の割合が全体質量の数 % であれば、非常に効率的である [36]。近年、光蒸発過程以外にも惑星コア駆動型の質量喪失メカニズムも考えられているが (e.g., [37])、これら 2 つの理論を区別する決定的な結果は得られていない。

2.2.2 系外惑星系の特徴

複数惑星系内における惑星間の相対的な特性を調べることは、惑星系の形成や進化過程を制約する上で非常に有用である。そこで本項では、複数惑星系の観測によって明らかになってきた系外惑星系内の惑星質量や惑星間距離の関係を概観する。

Peas in a pod

ケプラー・ミッションで観測された複数惑星系内の惑星は、傾向として似たサイズを持つことが明らかになっている。この特徴は観測初期から認識されており、現在もその理由に

ついて精力的に研究されている (e.g., [38, 39])。特に [39] は、複数惑星系内に存在する惑星の多くが同程度の大きさで、かつ規則的な軌道間隔を持つことを明らかにした。このような傾向は、その形態的特徴から “peas in a pod” と呼ばれている。

しかし、これがどの複数惑星系でも成り立つかどうかは十分な検討が必要である [40]。なぜなら、トランジット法ではトランジットインパクトパラメータ ρ の大きさや S/N 比による制限から、検出される惑星パターンにバイアスが生じるからである。その良い例として、我々の太陽系が挙げられる。太陽系に存在するガス惑星や巨大氷惑星は、その長い軌道周期のため、トランジット法で検出される可能性は低い。また、4 つの地球型惑星に関しては、水星と火星はその小さいサイズのためトランジットではほぼ検出不可能である。したがって、太陽系のような複数惑星系では、金星 ($0.95R_{\oplus}$, $0.82M_{\oplus}$) と地球 ($1R_{\oplus}$, $1M_{\oplus}$) の惑星ペアを検出する可能性が高い。

軌道間隔

上述した複数惑星系の特徴 (peas in a pod) やその検出バイアスを考慮した上で、ここではケプラー・ミッションで検出された複数惑星系内の惑星軌道間隔の安定性、およびその進化に関して議論する。

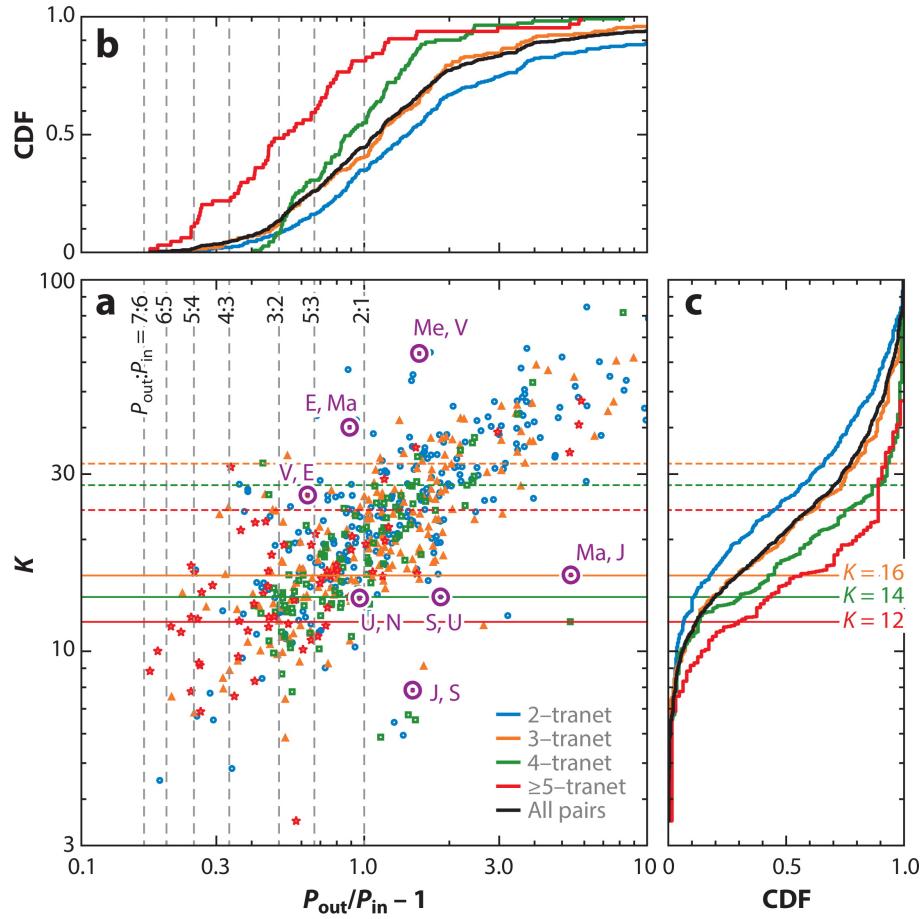
図 4 は、ケプラー・ミッションで検出された複数惑星系を多角度で分けた上で、隣接する惑星間の間隔を示している。図 4 左下パネルの縦軸 K は、以下のように定義されるパラメータである [5] :

$$K \equiv \frac{a_{\text{out}} - a_{\text{in}}}{R_{\text{H}}}; \quad R_{\text{H}} \equiv \frac{a_{\text{in}} + a_{\text{out}}}{2} \left(\frac{m_{\text{in}} + m_{\text{out}}}{3M_*} \right)^{1/3}. \quad (2.2)$$

ここで、 R_{H} 、 M_* 、 a_{in} (a_{out}) と m_{in} (m_{out}) は、それぞれ相互ヒル半径、主星質量、内側 (外側) 惑星の軌道長半径と質量を表している。 N 体シミュレーションの結果から、ケプラー・ミッションで検出された複数惑星系に関して、以下の安定性閾値 $\langle K \rangle$ が見出されている [41] :

$$\langle K \rangle \approx 10.2 + 2.2 \left(\frac{k}{5} \right)^{\zeta}. \quad (2.3)$$

ここで、 k は複数惑星系内の惑星数を表しており、 ζ の値を [42] に則り $\zeta = -2$ とすると、3 つ、4 つ、そして 5 つの複数惑星系の安定性閾値として、 $\langle K \rangle = (16, 14, 12)$ が得られる。図 4 から、3 つ以上の惑星が存在する複数惑星系の多く (約 70%) の惑星ペアは対応する安定性閾値を上回る間隔を持っており、これらは数値シミュレーションの結果から長期的に安定していることが確認されている。一方で、約 30% の惑星ペアは、この経験的に導かれた閾値を満たさないが、その軌道間隔も安定していると考えられている。この矛



Zhu W, Dong S. 2021
Annu. Rev. Astron. Astrophys. 59:291–336

図4 ケプラー・ミッションで検出された複数惑星系内に存在する（観測上）隣接する惑星間の間隔を示した図（図の出典は[5]）：左下パネルの横軸は、軌道周期比に関する間隔を示している。また、上部パネルはそれに対応する累積分布を示している。左下パネルの縦軸は相互ヒル半径に関する間隔を、そして右パネルはそれに対応する累積分布を示している。横軸に水平な3本の実線は、それぞれ3つ、4つ、5つの複数惑星系の安定性閾値（式(2.3)）を表している。その上にある3本の点線は、それぞれの閾値の2倍の値を表している。また、図中には参考のために太陽系の惑星ペアも示されている。

盾の一因として、上述した安定性基準が、惑星間の平均運動共鳴の影響を考慮していないことが挙げられる。

図4に含まれる全ての惑星ペアにおいて、 K の平均値は $K \approx 20$ で、 $k \geq 3$ の惑星を持つ複数惑星系では約80%~90%の惑星ペアが、この経験的な安定性閾値の2倍以内の間隔を持っている。これは、ケプラー・ミッションで観測された多くの惑星ペア間に未検出の

惑星が入る余地がないことを示唆している。ただし、系の内側や特に外側には、未検出の惑星が安定的に存在し得る可能性がある。

2.2.3 系外惑星の主星特性依存性

主星の金属量や質量と系外惑星の存在頻度には、相関性があることが知られている (e.g., [43, 44])。そこで本項では、系外惑星の存在頻度がどのように主星の金属量や質量と関係するのかを議論する。

主星金属量の効果

一般に、原始惑星系円盤の金属量は、主星の金属量を反映すると考えられている。そのため、主星金属量が多いほど、巨大惑星の存在頻度も上がると予想されている^{*5}。実際の観測でも、惑星半径が $8R_{\oplus}$ を超える巨大惑星の存在頻度が、主星金属量と強く相關していることが明らかになっており (e.g., [45])、この仮説を支持する結果が得られている。一方で、惑星半径が小さな惑星 ($\lesssim 4R_{\oplus}$) では、主星金属量依存性が弱くなることが観測的に明らかになっている (e.g., [46])。

惑星系存在頻度 F_p と主星金属量の間には、一般に以下の関係が適用される：

$$F_p \propto 10^{\gamma[\text{Fe}/\text{H}]} \quad (2.4)$$

^{*6} ケプラー・ミッションの結果は、 $\gamma \approx 0.5$ を示しており [47]、巨大惑星の存在頻度 ($\gamma \approx 2$, [48]) よりも依存性が弱い。特に、[47] では、金属量が高くなるほど、 F_p が減少する可能性が指摘されている。この要因として、金属量が高いと系内に巨大惑星が形成される確率が高くなり、結果として小さい惑星の形成を阻害、または形成されたとしても系外へと弾き飛ばしてしまう可能性が考えられている。

主星質量の効果

(サブ) ミリ波を用いた原始惑星系円盤の観測から ([49] や 2.1 節参照)、原始惑星系円盤の総質量と主星質量の間には、相関があることが知られている。実際に、巨大惑星存在頻度と主星質量の間には線形関係があることが、[44] による 1266 個の系外惑星サンプルの分析によって示されている。一方で、小さな惑星では、その存在頻度と主星質量の間には

^{*5} 惑星形成の標準理論であるコア集積モデルでは、重元素を豊富に含む原始惑星系円盤内では惑星の材料となる固体物質をより多く集積することができるため巨大惑星が形成されやすいことが知られている。

^{*6} $[\text{Fe}/\text{H}]$ は、恒星に含まれる鉄と水素の存在量比を太陽における鉄と水素の存在比と比較してその比率を常用対数で示したものである：

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log \frac{(\text{Fe}/\text{H})_{\text{star}}}{(\text{Fe}/\text{H})_{\text{Sun}}}$$

逆相関があることが示されている (e.g., [34])。

2.2.4 系外惑星観測のまとめ

- ケプラー・ミッションによって観測された惑星系の多くは複数惑星系であり、その割合は 42.5% にも上る (2.2.1 節)。
- 観測される惑星の特徴は様々で、太陽系の惑星とは異なった姿を持つ、ホット・ジュピターやホット・ネプチューン砂漠、超短周期惑星も一定の割合 ($\approx 2\%$) で観測されている (2.2.1 節)。
- ケプラー・ミッションによって観測された複数惑星系内の惑星は、傾向として似たサイズを持つ。また、惑星間軌道間隔の平均値は $20R_H$ 程度であり、経験的に導かれた惑星軌道安定閾値を満たしている。つまり、ケプラー・ミッションで観測された多くの惑星ペア間に未検出の惑星が入る余地がないことを示唆している。しかし、太陽系に存在する地球型惑星のような低質量、かつ長周期である複数惑星系はケプラー・ミッションなどのトランジット法による観測では見逃されてしまう可能性が高い (図 3)。したがって、検出される惑星パターンにはバイアスが生じることには注意を払う必要がある (2.2.2 節)。
- 主星の金属量や質量は、系外惑星の存在頻度と相関があることが知られている。観測からは、主星金属量・質量が大きいほど、巨大惑星の存在頻度が上がる事が明らかになっている。一方で、小さい惑星の存在頻度に対しては、主星金属量依存性が弱くなることが知られており、また主星質量とは逆相関性があることが示されている (2.2.3 節)。

3 惑星形成理論

前章では、原始惑星系円盤や系外惑星の観測的研究を概観した。そこで本章では、原始惑星系円盤や惑星がどのように形成され、進化するのかその理論的研究をまとめる。特に本章では、現在の惑星形成理論の基本的枠組みである「コア集積モデル」[1, 9, 10] の物理に焦点を当てた議論を行う。本章の内容は、[50, 51, 52] を参考に作成している。

コア集積モデルの全体像

コア集積モデル（以下、標準理論と呼ぶ）は、原始惑星系円盤からの惑星形成という考え方を基礎に議論を展開していく。以下に、標準理論による惑星形成のシナリオの概要を示す。

標準理論での惑星形成は、原始惑星系円盤内で $0.1\mu\text{m}$ サイズのダスト同士が衝突合体して成長することから始まる。この衝突合体によって成長したダスト塊は、円盤内で凝縮し、 $\text{km}-100\text{ km}$ サイズの多数の微惑星が形成される。その後、微惑星同士が互いに衝突合体を繰り返すことで、月-火星サイズ程度の原始惑星が形成される。惑星形成の最終段階では、この原始惑星が互いに巨大衝突を起こし、最終的に地球型惑星が形成される。また、雪線よりも外側の巨大ガス惑星形成領域では、惑星へ円盤ガスが流入することで、木星や土星などの巨大ガス惑星が形成される。以上、標準理論では、原始惑星系円盤内のダスト集積からガス惑星形成まで、惑星はボトムアップ的に成長していく。

ここからは、標準理論を理解する上で重要となる物理を、原始惑星系円盤の構造と進化から、ダスト・微惑星の運動、惑星の形成まで順に紐解いていく。

3.1 原始惑星系円盤の構造と進化

本節では、標準理論で考えられている原始惑星系円盤の力学構造や熱構造、そして進化的物理をまとめる。そのためには、ここでは以下の仮定を置く：

1. 標準降着円盤モデル：定常 ($\partial/\partial t = 0$) で軸対称 ($\partial/\partial\phi = 0$)、かつ幾何学的に薄い
2. 円盤は動径方向になめらかで、局所構造を持たない
3. 円盤ガスは十分希薄で、理想気体と見做せる
4. 円盤鉛直方向に温度勾配はなく、音波は等温で伝播する
5. 円盤内には基本的に乱流がなく、全体として層流

以下では、特に断らない限り円筒座標系 (r, ϕ, z) を用いて議論を進めていく。

3.1.1 原始惑星系円盤の力学的構造

本項では、原始惑星系円盤の鉛直方向と動径方向の力学構造を考えていく。これらからガスの鉛直方向密度分布や円盤の典型的な厚み、ガスの回転角速度を見積もっていく。

鉛直方向の構造

円盤の鉛直方向は、圧力勾配力と主星の重力の鉛直成分が釣り合っている状態にある。したがって、

$$-\frac{1}{\rho_z} \frac{dP}{dz} = \frac{GM_*}{r^2 + z^2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (3.1)$$

となる。ここで、 ρ_z 、 P 、 G 、 M_* はそれぞれ鉛直方向の密度分布、圧力、万有引力定数と主星質量を表している。ここで、主星までの距離の動径方向成分 r が z よりも十分大きいと仮定すると、式 (3.1) は、以下のように書ける：

$$-\frac{1}{\rho_z} \frac{dP}{dz} \approx \frac{GM_*}{r^3} z. \quad (3.2)$$

ここで、仮定 4 から音速 c_s は一定なので $c_s = \sqrt{\partial P / \partial \rho} = \sqrt{P / \rho}$ ^{*7} となることと、ケプラー角速度 $\Omega_K = \sqrt{GM_*/r^3}$ を用いて、式 (3.2) を変形すると、

$$\frac{1}{\rho_z} \frac{\partial \rho_z}{\partial z} = -\frac{\Omega_K^2}{c_s^2} z \quad (3.3)$$

となる^{*8}。ここで、スケールハイト h を以下のように定義し、

$$h = \frac{c_s}{\Omega_K} \quad (3.4)$$

式 (3.3) へスケールハイトを代入して積分すると、ガスの鉛直方向密度分布 ρ_z は

$$\rho_z = \rho_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right). \quad (3.5)$$

と書き表される。ここで、 ρ_0 は赤道面でのガス密度を表している。上式からは、 $z = \sqrt{2}h$ のときガス密度が ρ_0 の $1/e$ 倍となるので、 h が円盤の典型的な厚みを表していることがわかる。

^{*7} 導出は、付録 A に記載

^{*8} 仮定 3 と仮定 4 より、円盤ガスは理想気体で z 方向には等温であると考えている。音速の導出は、付録 A を参照されたい。

動径方向の構造

円盤動径方向は、遠心力と圧力勾配力、そして主星重力の3つの力が釣り合った状態となっている。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}v_\phi^2 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{GM_*}{r^2+z^2}\frac{r}{(r^2+z^2)^{1/2}}, \\ \frac{1}{r}v_\phi^2 &\simeq \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{GM_*}{r^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。ここで、 ρ と v_ϕ は、ガスの動径方向密度分布と方位角方向速度を表している。式 (3.6) の両辺に $1/r$ をかけて、ガスの回転角速度 $\Omega = (v_\phi/r)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \left(\frac{GM_*}{r^3} + \frac{1}{r\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \right)^{1/2}, \\ &= \left(\frac{GM_*}{r^3} + \frac{1}{r\rho}\frac{P}{r}\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{GM_*}{r^3} + \frac{c_s^2}{r^2}\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} \right)^{1/2} \\ &\simeq \Omega_K(1-\eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる^{*9}。ここで、 η は円盤ガスの圧力勾配を特徴づける無次元量で、3式目への変形には音速 $c_s = \sqrt{P/\rho}$ を用いている。また、最後の近似には、円盤は幾何学的に薄い ($h \ll r$) という仮定 1 を用いている^{*10}。 η は、以下のように定義される：

$$\eta = -\frac{c_s^2}{2v_K^2}\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} = -\frac{h^2}{2r^2}\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r}. \quad (3.8)$$

ここで、 v_K はケプラー速度を表しており、 $v_K = r\Omega_K$ で与えられる。式 (3.8) は仮定 1 より $h \ll r$ であり、かつ仮定 2 より円盤は動径方向になめらかな構造を持つことから、 $\partial \ln P / \partial \ln r$ も負の $\mathcal{O}(1)$ の値となる。したがって、円盤ガスは圧力勾配によって η 分だけケプラー回転よりも遅くなるが、ほぼケプラー回転しているとみなすことができる。

^{*9} 仮定 2 より、 P と r には $P = Cr^\alpha$ という関係があるとする (C, α は定数)。ここで、両者の対数をとると、 $\ln P = \alpha \ln r + \ln C$ となる。さらに、両辺を $\ln r$ で偏微分すると $\ln C$ は定数なので、 $\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} = \alpha$ となる。つまり、左辺は P が r の何乗に比例するかという、幕指数 (今の場合は α) を計算する式となっている。ここで、 $\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} = \alpha$ の左辺を計算すると $\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r} = \frac{r}{P}\frac{\partial P}{\partial r}$ となるので、 $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P}{r}\frac{\partial \ln P}{\partial \ln r}$

^{*10} この仮定の妥当性に関しては、3.1.2 項で詳しく議論する。

3.1.2 原始惑星系円盤の温度構造

本項では、[1]で用いられている光学的に薄い原始惑星系円盤の温度構造を考えていく。円盤温度構造に関しては、フレア構造を持つ円盤や光学的に厚い受動的円盤など基礎的大がより現実に則したモデルも考えられているが、これらに関しては[52, 51]を参考されたい^{*11}。

ここでは、中心星からの放射を主要な熱源と仮定する。このとき光学的に薄い円盤の温度構造は、円盤内のダスト温度構造を見積ることで求めることができる。なぜなら、ダストと比較すると円盤ガスの主成分である水素やヘリウムの吸収断面積はオーダーで小さいため、円盤ガスは主星の放射エネルギーをほとんど受け取ることができないからである。したがって、円盤の温度構造は、ダストの主星放射エネルギーによる加熱とダストからの再放射による冷却の釣り合いによって決めることができる。

ダストの加熱率 Γ は、ダストを半径 a の黒体球、かつ主星からの距離を r と仮定すると、

$$\Gamma = \pi a^2 \frac{L_*}{4\pi r^2} \quad (3.9)$$

となる。ここで、 L_* は中心星光度(全方向に放射される単位時間あたりの放射エネルギー)を表している。一方で、ダストの冷却率 Λ は、ダストが黒体であることからステファン-ボルツマンの法則によって、

$$\Lambda = 4\pi a^2 \sigma_{\text{SB}} T^4 \quad (3.10)$$

と求まる。ここで、 σ_{SB} 、 T はステファン-ボルツマン定数とダスト温度を表している。以上、式(3.9)と式(3.10)から、加熱と冷却が釣り合っているとすると、

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{L_*}{16\sigma_{\text{SB}}\pi r^2} \right)^{1/4} \\ &= 280 \left(\frac{L_*}{L_\odot} \right)^{1/4} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-1/2} \text{K} \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる^{*12}。したがって、光学的に薄い原始惑星系円盤では、主星から外側に向かって $r^{-1/2}$ に比例して温度が下がっていく。

^{*11} 受動的円盤とは、主星からの放射によって温められたダストの再放射が主要な熱源となる円盤のことを指している。

^{*12} 式目への変形では、太陽の光度は $L_\odot = 3.85 \times 10^{26} \text{W}$ 、シュテファン=ボルツマン定数は $\sigma_{\text{SB}} = 5.67 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ 、1天文単位は $1\text{AU} = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$ を用いている。

次に、式(3.11)の原始惑星系円盤の温度構造を用いて、円盤アスペクト比を求ることで、仮定1の幾何学的に薄いという仮定の妥当性を検討していく。まず、式(3.11)と仮定3、仮定4を用いると音速は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} c_s &= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \\ &\simeq 1 \times 10^5 \left(\frac{\mu}{2.3}\right)^{-1/2} \left(\frac{T}{280\text{K}}\right)^{1/2} \\ &\simeq 1 \times 10^5 \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-1/4} \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)^{1/8} \text{cm/s} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで、 μ 、 m_H 、 k_B はそれぞれ平均分子量、水素原子質量とボルツマン定数を表している。また、式(3.12)では、 $k_B = 1.4 \times 10^{23} \text{J/K}$ 、 $m_H = 1.7 \times 10^{-27} \text{kg}$ を用いている。また、ケプラー速度は

$$\begin{aligned} v_K &= r\Omega_K \\ &= \left(\frac{GM_*}{r}\right)^{1/2} \\ &\simeq 3.0 \times 10^6 \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-1/2} \times \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{1/2} \text{cm/s} \end{aligned} \quad (3.13)$$

である。以上、式(3.4)を r で割ったものに、式(3.12)と式(3.13)を代入すると、

$$\frac{h}{r} = \frac{c_s}{v_K} \simeq 0.03 \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{1/4} \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-1/2} \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)^{1/8} \quad (3.14)$$

が得られる。これは、円盤のアスペクト比を表しており、太陽系であれば $\mathcal{O}(10^{-2})$ と円盤は幾何学的に薄いことがわかる。

3.1.3 原始惑星系円盤の進化

式(3.7)より、原始惑星系円盤を構成するガスは、ほぼケプラー回転していると考えられている。したがって、単位質量あたりの角運動量(比角運動量) J は、

$$J = rv_K = \sqrt{GM_*r} \quad (3.15)$$

であり、距離の増加関数として表される。これは、円盤進化を考える上で重要な要素である。なぜなら、円盤は粘性拡散によって、角運動量を円盤外側へと輸送することで、外縁部のガスは外側へと移動していくが、式(3.15)から外側ほど少ないガス量で大きな角運

動量を持つことができるので、円盤の角運動量保存を考慮すると大部分の円盤ガスは角運動量を失い、その結果、主星へ降着してしまうからである。

以下では、上述した定性的な原始惑星系円盤の角運動量輸送と質量輸送、およびそれらに伴う原始惑星系円盤の降着過程を定量的にまとめる。

原始惑星系円盤における角運動量輸送と質量輸送

粘性による角運動量輸送の議論は、円盤ガスに関する連続の式とナヴィエーストークス方程式が出発点となる^{*13}。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{GM_*}{r} \right) \quad (3.17)$$

ここで、 p_{ij} は応力テンソルから、圧力項と体積粘性項を除いたもので、粘性ストレス・テンソルと呼ばれる：

$$p_{ij} = 2\rho\nu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (3.18)$$

上式の ν は動粘性係数で、 δ_{ij} と e_{ij} はそれぞれクロネッカーのデルタと変形速度テンソルで、以下のように与えられる。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

式 (3.16) は、軸対称 $\left(\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \right)$ 、かつ z 軸方向において円盤内では質量が常に保存されている $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dz = 0 \right)$ と仮定し、 z 方向に積分すると、

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Sigma v_r r) = 0 \quad (3.21)$$

となる。ただし、 $\Sigma = \int \rho dz$ である。次に、円盤がほぼケプラー回転している場合 ($v_\phi \gg v_r, v_z$) に生じる粘性トルクによる角運動量輸送は、式 (3.17) の ϕ 成分より、

$$\Sigma v_r r \frac{\partial(r^2 \Omega)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \Sigma \nu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (3.22)$$

^{*13} 導出は、付録 A.2 と付録 A.3

と表される^{*14}。ここで、式(3.22)は z 方向で積分している。式(3.22)を v_r について解くと、円盤ガスの動径ドリフト速度

$$v_r = -\frac{3\nu}{r} \left(\frac{\partial \ln(\Sigma \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \right) = -\frac{3\nu}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{\partial \ln(\Sigma \nu)}{\partial \ln r} \right) \quad (3.23)$$

が得られる。

質量降着率の式は、

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma v_r \quad (3.24)$$

なので、式(3.23)を式(3.24)へ代入することで、

$$\dot{M} = 6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma \nu r^{1/2}) = 6\pi \Sigma \nu \left(\frac{\partial \ln(\Sigma \nu r^{1/2})}{\partial \ln r} \right) = 3\pi \left(\Sigma \nu + 2r \frac{\partial(\Sigma \nu)}{\partial r} \right) \quad (3.25)$$

と変形でき、質量降着率を円盤の動粘性係数と面密度で表すことができる。

定常降着円盤では、式(3.21)から質量降着率は r に依存しない。したがって、式(3.25)から、 $\frac{\partial \Sigma \nu}{\partial r} = 0$ を満たす必要がある。つまり、動粘性係数の r 依存性がわかれれば、面密度分布の r 依存性を推定することができる。動粘性係数 ν の r 依存性に関しては、4.2節で改めて議論するが、乱流粘性パラメータ α が定数、かつ円盤が光学的に薄いと仮定すると、 $\nu \propto r$ となる。つまり、面密度分布 Σ は、 $\Sigma \propto r^{-1}$ と推定することができる。実際に、若い恒星周りの原始惑星系円盤の観測や数値シミュレーションからは、円盤面密度分布は $\Sigma \propto r^{-1}$ で上手く記述されることが示唆されている[53]。

円盤面密度進化

実際の原始惑星系円盤は定常状態ではなく、質量が降着しながら徐々に進化していくと考えられる。ここでは、上でまとめた角運動量輸送と質量輸送の式から、円盤ガスの面密度進化を見ていく。

円盤ガスの面密度進化は、円盤ガスに関する連続の式(式(3.21))と動径ドリフト速度(式(3.23))を連立することで得られる:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[3r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma \nu r^{1/2}) \right] = 0. \quad (3.26)$$

これは放物型の偏微分方程式なので、円盤面密度の進化を表す拡散方程式である。特定の境界条件、および初期条件を課すことで、この微分方程式に対して以下のような厳密解を求めることができる。

$$\Sigma = \frac{C}{3\pi \nu_0 J_0} \frac{1}{\tilde{r} \tilde{t}^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \quad (3.27)$$

^{*14} 導出は、付録B.1

ここで、 C は定数で、 ν_0, J_0 はそれぞれ半径 $r = r_0$ での ν, J の値である。また、 \tilde{r}, \tilde{t} はそれぞれ無次元変数であり、以下のように表される：

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_0} \quad (3.28)$$

$$\tilde{t} \equiv 4 \frac{\kappa(t - t_0)}{J_0^2} \quad (3.29)$$

但し、 $\kappa \equiv \frac{3\nu GM_*}{4r}$ であり、 $r_0 \equiv -4\kappa t_0/GM_*$ である。他にも、式 (3.25) を用いると、

$$\dot{M} = \frac{C}{J_0} \frac{1}{\tilde{t}^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \left(1 - \frac{2\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) = 3\pi\nu\Sigma \left(1 - \frac{2\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \quad (3.30)$$

のように質量降着率を書き換えることができる^{*15}。

式 (3.30) は、半径 $r = r_0\tilde{t}/2$ を中心に、それよりも内側では円盤ガスは主星へ降着し、外側では円盤外側へと拡散していくことを表している。また、式 (3.27) からは半径 r が小さいところでは面密度分布は r^{-1} に比例するが、 $r \gtrsim r_0\tilde{t}$ で指数関数的に減少していくことがわかる。この $r_0\tilde{t}$ は円盤サイズと呼ばれ、時間と共に外側へと移動することで、円盤はどんどんと拡大していく（図 5）。

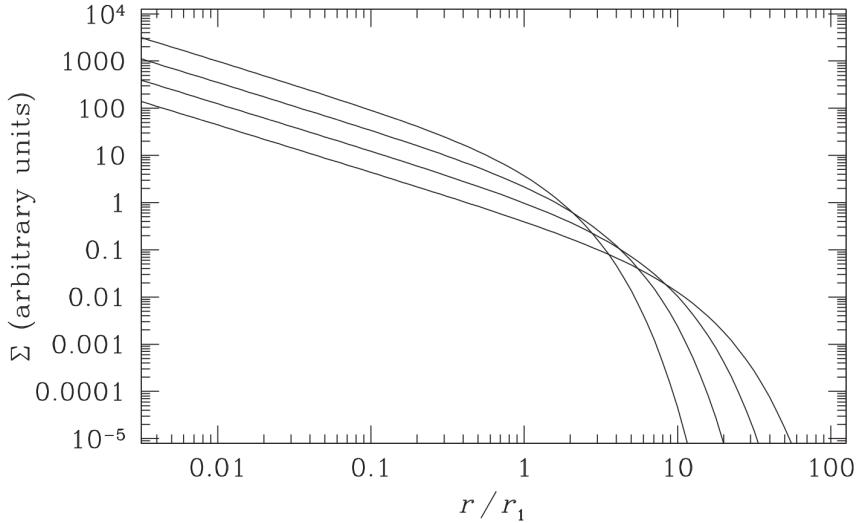


図 5 円盤ガスの面密度分布の時間変化 (図の出典は [52])：左端で高い値を持つものが初期面密度分布を表している。横軸は、主星からの距離を円盤サイズ r_1 (本文中では、 r_0) で規格化している。

^{*15} ここまで詳しい導出は、付録 B.2 を参照されたい。

3.2 固体粒子の物理

前節では、原始惑星系円盤内のガスの構造や運動をまとめた。ここでは、ガス円盤内でどのようにサブ μm サイズのダストから 10^3km サイズの惑星が形成されるのかを議論していく。

3.2.1 ダスト進化

本章冒頭で述べたように、惑星形成は原始惑星系円盤内で、サブ μm サイズのダスト同士が衝突合体して成長することから始まると考えられている。サブ μm から mm サイズの小さなダストはガス抵抗を効率的に受けるため、ガスと強くカップリングしている。そのため、小さなダストの進化を調べるためにには、ダストとガス円盤の相互作用が重要となる。そこで、本項ではガスと小さなダスト間に働くガス抵抗則を議論し、その上でガス・ダスト 2 成分系の運動を用いて、ダストの進化過程を調べていく。

3.2.1.1 小さなダストに作用するガス抵抗

円盤内でダストへ働くガス抵抗は、ダストのサイズとガスの平均自由行程の大小に応じて 2 種類存在する [54]。以下では、ガスが静止している座標系を用いて、その中を Δu で等速直線運動している半径 a 、内部密度 ρ_s の球形ダストを考えることで、上記の 2 種類のガス抵抗を見積もっていく。また、ここではガスの密度や音速、平均自由行程、さらに Reynolds 数をそれぞれ ρ , c_s , l_g , Re とする^{*16}。

1. Stokes drag

*16 Reynolds 数の補足：

非圧縮性粘性流体のナヴィエ-ストークス方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{K} - \text{grad}p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

の各項は、それぞれ左辺が慣性力、右辺 1,2,3 項目がそれぞれ外力、圧力、粘性力という物理的な意味を持っている。そこで、慣性力と粘性力の大きさの比を考えてみる。流れを特徴づける代表的な長さを L 、速度を U とすれば、 $D/Dt \sim L/U$, $\Delta \sim 1/L^2$ であるから、

$$\frac{[\text{慣性力}]}{[\text{粘性力}]} = \frac{\rho \frac{U}{L/U}}{\mu \frac{U}{L^2}} = \frac{\rho U L}{\mu} = \text{Re}$$

である。すなわち、Reynolds 数は「慣性力」と「粘性力」の比という物理的な意味を持っている。したがって、Reynolds 数の大きい流れでは粘性の影響を無視してもよく、逆に Reynolds 数の小さい流れでは慣性力の影響を無視しても良い。ここで、慣性力が粘性力に比べて十分小さいことを用いて、移流慣性項を無視することでナヴィエ-ストークス方程式を線形化することが可能となる。

遅い流れ(低 Reynolds 数流れ: $Re < 1$) 中で、ダスト半径が平均自由行程よりも大きい($a > l_g$) 場合、ガスは粘性流体として扱える。このような系において、ダストへ働くガス抵抗は Stokes drag と呼ばれ、ダストの進行方向を正とすると以下の表式で与えられる^{*17}:

$$F_{\text{drag}}^{\text{Stokes}} = -6\pi\mu a\Delta u \quad (3.31)$$

つまり、単位時間あたりに $|F_{\text{drag}}^{\text{Stokes}}|$ だけダストからガスへ運動量が輸送される。したがって、ダストが初めに持っていた運動量は $m_d\Delta u$ なので、ダストがガスとカップリングするまでに要するタイムスケール(stopping time) τ_s は、

$$\tau_s = \frac{m_d\Delta u}{|F_{\text{drag}}^{\text{Stokes}}|} = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho_s a^3 \Delta u}{6\pi\rho\nu a\Delta u} = \frac{2a^2\rho_s}{9\rho\nu} = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{a^2\rho_s}{c_s\rho l_g} \quad (3.32)$$

となる。ここで、ダスト質量を $m_d = (4\pi/3)\rho_s a^3$ 、動粘性係数を $\nu = v_m l_g / 2$ とした。平均自由行程 l_g は ρ に反比例することから、ストークス抵抗では、 τ_s はガス密度に依存しない^{*18}。

2. Epstein drag

ダスト半径が平均自由行程よりも小さい($a < l_g$) 場合、ガスは流体近似できなくなるので、ガス分子を音速 c_s 程度で飛び回る粒子として考える必要がある。このような系において、ダストへ働くガス抵抗は Epstein drag と呼ばれ、ダストの進行方向を正とすると以下の表式で与えらえる^{*19}:

$$F_{\text{drag}}^{\text{Epstein}} = -\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\rho_g a^2 c_s \Delta u \quad (3.33)$$

Epstein drag に関しても Stokes drag と同様の方法で stopping time (τ_s) を考えると

$$\tau_s = \frac{m_d\Delta u}{|F_{\text{drag}}^{\text{Epstein}}|} = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho_s a^3 \Delta u}{\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\rho_g a^2 c_s \Delta u} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{a\rho_s}{c_s\rho} \quad (3.34)$$

となる。

*17 詳しい導出は、付録 C.1 を参照

*18 平均自由行程は、 $l_g = 1/(\sigma n_g) = m/(\sigma\rho) \propto 1/\rho$ である。ここで、 σ , m はガス分子同士の衝突断面積と分子の質量で両者とも一定であると仮定した。

*19 詳しい導出は、付録 C.2 を参照

3.2.1.2 ガス・ダスト 2 成分系の運動

ここでは、前項目で示したガス抵抗を用いて、ガス・ダスト 2 成分系の運動を議論していく。

ダストとガスの速度をそれぞれ \mathbf{u} , \mathbf{U} とすると、単位質量あたりのダストが受けるガス抵抗 f_{drag} は、式 (3.32) と式 (3.34) の τ_s を用いて

$$f_{\text{drag,dust}} = -\frac{\mathbf{u} - \mathbf{U}}{\tau_s} \quad (3.35)$$

となる。また、この式にダストの空間密度 ρ_d を掛けて、作用反作用の法則を考慮して逆符号にすると空間中の単位体積あたりのガスに作用する力 $\hat{f}_{\text{drag,gas}}$ を

$$\hat{f}_{\text{drag,gas}} = -\rho_d \frac{\mathbf{U} - \mathbf{u}}{\tau_s} \quad (3.36)$$

と表すことができる。また、中心星重力と（ガスには）圧力勾配力が働くことを考慮すると、単位質量あたりのダストとガスの運動方程式は、

$$\text{ダスト} : \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\mathbf{u} - \mathbf{U}}{\tau_s} - \left(\frac{GM_*}{r^3} \right) \mathbf{r} \quad (3.37)$$

$$\text{ガス} : \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{\rho_d}{\rho} \frac{\mathbf{U} - \mathbf{u}}{\tau_s} - \left(\frac{GM_*}{r^3} \right) \mathbf{r} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.38)$$

と表すことができる。ただし、ここでは [55] に従い、ガスの運動に関して粘性項を無視した。円盤が幾何学的に薄く ($r \ll z$)、かつ軸対称 ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$) であると仮定して、これらを円筒座標 (r, ϕ, z) で書き下すと、ダストの運動方程式は

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{u_r - U_r}{\tau_s} - \frac{GM_*}{r^2} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{u_\phi - U_\phi}{\tau_s} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{u_z - U_z}{\tau_s} - \frac{GM_*}{r^3} z \quad (3.41)$$

となり、またガスの運動方程式は

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{U_\phi^2}{r} = -\frac{\rho_d}{\rho} \frac{U_r - u_r}{\tau_s} - \frac{GM_*}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_\phi}{\partial z} + \frac{U_r U_\phi}{r} = -\frac{\rho_d}{\rho} \frac{U_\phi - u_\phi}{\tau_s} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{\rho_d}{\rho} \frac{U_z - u_z}{\tau_s} - \frac{GM_*}{r^3} z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.44)$$

と表すことができる。さらに、ダストサイズが十分小さい場合、ダストはガスと強くカップリングしているので、stopping time はケプラー時間に比べて十分小さくなる ($\tau_s \ll T_K$)。したがって、小さなダストの進化タイムスケールで準定常に振る舞うガス円盤を仮定すると、ダストは終端速度で運動することになり、式 (3.39) – (3.44) で $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ と近似できる。また、ガスとダストが中心星の周りをほぼケプラー運動していると仮定して、

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_K + \mathbf{u}' = (u_r, v_K + u'_\phi, u_z), \quad \mathbf{U} = \mathbf{v}_K + \mathbf{U}' = (U_r, v_K + U'_\phi, U_z) \quad (3.45)$$

2 次以上の項を無視すると^{*20}、ダストの運動方程式 (式 (3.39) – (3.41)) は、

$$u_r = U_r + 2u'_\phi \Omega_K \tau_s \quad (3.46)$$

$$u_\phi = U_\phi - \frac{1}{2} u_r \Omega_K \tau_s \quad (3.47)$$

$$u_z = U_z - \Omega_K^2 \tau_s z \quad (3.48)$$

となる。また、ガスの運動方程式 (式 (3.42) – (3.44)) は式 (3.8) より $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 2v_K \Omega_K \eta$ であることを考慮して、

$$U_r = u_r + 2 \frac{\rho}{\rho_d} (U'_\phi + v_K \eta) \Omega_K \tau_s \quad (3.49)$$

$$U_\phi = u_\phi - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_d} U_r \Omega_K \tau_s \quad (3.50)$$

$$U_z = u_z - \frac{\rho}{\rho_d} \Omega_K^2 \tau_s z - \frac{1}{\rho_d} \frac{\partial P}{\partial z} \tau_s \quad (3.51)$$

と表すことができる。これらの式を用いて、ダストの終端速度を考えていく。まず、 $[\rho \times$ 式 (3.47) – $\rho_d \times$ 式 (3.50)] より

$$u_r - U_r = - \frac{2\Omega'_{stop}}{\Omega_K} (u_\phi - U_\phi) \quad (3.52)$$

となる。ただし、 $\Omega_{stop} \equiv \frac{1}{\tau_s}$, $\Omega'_{stop} \equiv \frac{\rho + \rho_d}{\rho} \Omega_{stop}$ と定義した。式 (3.52) を式 (3.46) と式 (3.49) へ代入すると、

$$\frac{2\Omega'_{stop} \Omega_{stop}}{\Omega_K} (u_\phi - U_\phi) + 2\Omega_K u'_\phi = 0 \quad (3.53)$$

$$\frac{\rho_d}{\rho} \Omega_{stop} \times \frac{2\Omega'_{stop}}{\Omega_K} (u_\phi - U_\phi) = 2(U'_\phi + v_K \eta) \Omega_K \quad (3.54)$$

^{*20} ただし、 $\mathbf{v}_K = (0, r\Omega_K, 0)$ で、 $|u_r|$, $|u_\phi - V_K|$, $|u_z|$, $|U_r|$, $|U_\phi - v_K|$, $|U_z| \ll v_K$ 、かつ $\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} \lesssim \frac{u_r}{z}$ と微小量の微分値も微小であると仮定している。

を得る。これらを連立すると、

$$u_\phi - U_\phi = \frac{\Omega_K^2}{\Omega_{\text{stop}}'^2 + \Omega_K^2} \eta v_K \quad (3.55)$$

が得られる。そして、式 (3.55) を式 (3.50) へ代入すると、ダストの終端速度の r 成分

$$u_r = -\frac{2\Omega_K\Omega_{\text{stop}}}{\Omega_{\text{stop}}'^2 + \Omega_K^2} \eta v_K \quad (3.56)$$

を得る。さらに、式 (3.55) を式 (3.53) へ代入すると、ダストの終端速度の ϕ 成分

$$u_\phi = v_K - \frac{\Omega_{\text{stop}}'\Omega_{\text{stop}}}{\Omega_{\text{stop}}'^2 + \Omega_K^2} \eta v_K \quad (3.57)$$

が得られる。ただし、 $u'_\phi = u_\phi - V_K$ を用いた。ダストの終端速度の z 成分は、[55] からダストに比べてガスの z 方向の運動は十分小さい ($u_z \gg U_z$) ことが知られているので、式 (3.48) より

$$u_z = -\frac{\Omega_K^2}{\Omega_{\text{stop}}} z \quad (3.58)$$

となる。最後に、ダストがまだ十分沈殿していない段階では、 $\rho \gg \rho_d$ であることから、式 (3.56) – 式 (3.58) は、

$$u_r = -\frac{2\Omega_K\tau_s}{1 + (\Omega_K\tau_s)^2} \eta v_K \quad (3.59)$$

$$u_\phi = \left(1 - \frac{1}{1 + (\Omega_K\tau_s)^2}\eta\right) v_K \quad (3.60)$$

$$u_z = -(\Omega_K\tau_s)\Omega_K z \quad (3.61)$$

と表すことができる。式 (3.60) より、ダストはガス抵抗によってケプラー速度から減速することがわかる。また式 (3.59) より、ダストはガス抵抗によって角運動量を失うことで、 ηv_K に比例する速度で中心星方向へドリフトしていくこともわかる。

3.2.1.3 ダストの沈降と動径ドリフト

式 (3.59) – 式 (3.61) を用いて、ダストの沈降と動径ドリフトの特徴を調べていく。

まずは、ダストの沈降について考えていこう。式 (3.59) と式 (3.61) の比を取ると、

$$\frac{u_r}{u_z} = \frac{2\eta}{1 + (\Omega_K\tau_s)^2} \frac{r}{z} \sim \mathcal{O}(10^{-1}) \quad (3.62)$$

となる。ここで、式(3.8)と式(3.14)より $\eta \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ であり、かつダストがあまり沈降していないと仮定すると $z \sim h$ なので、 $h/r \sim \mathcal{O}(10^{-2})$ となることを用いた。したがって、 $|u_z| > |u_r|$ となることから、沈降が卓越する。一方で、 $|u_r|/|u_z| > 1$ を課すと、つまり、 $z < 2\eta r$ までダストが沈降すると動径ドリフトが卓越する。沈降のタイムスケール τ_{sed} は、

$$\tau_{\text{sed}} = \left| \frac{z}{u_z} \right| = \frac{1}{2\pi} (\Omega_K \tau_s)^{-1} T_K \quad (3.63)$$

となり、ダストの鉛直高さ依存性がなくなる。さらに、ダストサイズが平均自由行程より小さい Epstein 領域では、式(3.34)で表されるように τ_s は、ダストサイズに比例する。したがって、ダストが成長するほど沈降速度が速くなることがわかる。

次に、ダストの動径ドリフトの特徴を調べる。ダストサイズが小さい場合、 $\Omega_K \tau_s < 1$ となることから式(3.59)と式(3.60)は以下のように近似できる：

$$u_r \simeq -2\Omega_K \tau_s \eta v_K \quad (3.64)$$

$$u_\phi \simeq (1 - \eta) v_K \quad (3.65)$$

式(3.65)から、小さいダストの ϕ 方向の運動はガスの運動と一致することがわかる。一方で、ダストサイズが大きい場合、 $\Omega_K \tau_s > 1$ となるので、式(3.59)と式(3.60)は以下のように近似できる：

$$u_r \simeq -2(\Omega_K \tau_s)^{-1} \eta v_K \quad (3.66)$$

$$u_\phi \simeq v_K \quad (3.67)$$

式(3.67)より、ダストの ϕ 方向の運動はほとんどケプラー回転となる。

以上の議論から、ダストの運動は $\Omega_K \tau_s$ の値によって変わってくる。そこで、ここからは $\Omega_K \tau_s$ を以下のように定義し、議論を展開していく：

$$\text{St} \equiv \Omega_K \tau_s \quad (3.68)$$

これは Stokes 数と呼ばれる無次元量である。式(3.64)と式(3.66)から、実際のドリフトタイムスケールを見積もると

$$\tau_{\text{mig}} = \frac{r}{|u_r|} \simeq \begin{cases} \frac{r}{2\text{St}\eta v_K} & = \begin{cases} \frac{T_K}{4\pi\eta} \times \text{St}^{-1} & \text{St} < 1 \\ \frac{T_K}{4\pi\eta} \times \text{St} & \text{St} > 1 \end{cases} \end{cases} \quad (3.69)$$

となる。ここで、 $T_K = 2\pi r/v_K$ を用いた。式(3.69)から、 $\text{St} = 1$ のときダストの動径ド

リフト速度が最大になることがわかる^{*21}。古典的な惑星形成理論の描像（詳しくは、3.3節）では、 $r = 1 \text{ AU}$ で $\eta \simeq 0.002$ となることから、 $\text{St} = 1$ の場合、 $\tau_{\text{mig}} < 10^2$ 年という非常に短いタイムスケールでダストは中心星へ落下してしまう^{*22}。したがって、それ以降のダスト成長、ひいては惑星形成が難しくなることが指摘されている。これは「ダスト落下問題」と呼ばれ、惑星形成理論の未解決問題の1つである。

3.2.1.4 ダスト成長とその困難

本項目では、これまで考えてきたダストの運動を考慮してダストの成長過程を議論していく。そこでまずは、簡単のためにダストは相互衝突によって合体するとしてダストの成長過程を調べる。そしてその後に、完全合体の仮定の問題点やそれに伴うダスト成長の障壁を議論し、その解決策を概観する。

完全合体の仮定の下では、ダストの成長率は以下のように表すことができる：

$$\frac{dm_d}{dt} \simeq \rho_d \pi a^2 \Delta u \simeq \frac{\Sigma_d}{2h_d} \pi a^2 \Delta u \quad (3.70)$$

ここで、 m_d , ρ_d , Δu , Σ_d , h_d はそれぞれダストの質量、空間密度、相対速度、面密度とスケールハイトを表している。式 (3.69)において、 $\text{St} < 1$ となる小さなダストでは、ダストサイズが大きくなるほどドリフト速度が大きくなる。したがって、単一の大きなダストの周りに無数の小さなダストが存在する系を考えると、沈降が卓越するダスト成長初期段階では Δu はその単一の大きなダストの沈降速度（式 (3.61)）で近似できる。さらに、沈降が進んだ段階では、次第にドリフト速度が卓越してくることから、その場合はダストの動径ドリフト速度（式 (3.65)）で近似することができる。以上より、ダスト成長初期段階の成長率は、

$$\tau_{\text{grow}} = \frac{m_d}{\frac{dm_d}{dt}} = \frac{4}{3\pi} \frac{\rho_s a}{\Sigma_d} (\Omega_K \tau_s)^{-1} T_K \times \min \left(\frac{h_d}{z}, \frac{h_d}{2\eta r} \right) \quad (3.71)$$

となる。上式において、Epstein drag と $z \sim h_d \sim h$ を仮定して、具体的な成長時間を見

^{*21} 他にも、式 (3.59) を St で偏微分すると、

$$\frac{\partial v_r}{\partial \text{St}} = \frac{2(1 - \text{St})}{(1 + \text{St})^2} \eta v_K$$

となることから、 $\text{St} = 1$ のときに動径ドリフト速度が最大となることがわかる。

^{*22} 古典的な惑星形成理論である最小質量円盤モデルを仮定すると、円盤 1 AU で $\text{St} = 1$ となるダストサイズはメートルサイズである。

積もると

$$\begin{aligned}\tau_{\text{grow}} &\sim \frac{4}{3\pi} \frac{\rho_s a}{\Sigma_d} \left(\frac{\rho_s a}{\rho c_s} \Omega_K \right)^{-1} T_K \\ &\sim \frac{4}{3\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{\Sigma}{\Sigma_d} T_K\end{aligned}\quad (3.72)$$

となる。ただし、 $\tau_s \sim \frac{\rho_s a}{\rho c_s}$ と $\Sigma \sim \sqrt{2\pi} h \rho$ を用いた。さらに古典的な惑星形成理論では、ダスト・ガスの面密度の比は定数となることから、 $\tau_{\text{grow}} \sim T_K \sim r^{3/2}$ となり、中心星に近い領域ほどダスト成長が効率的であることがわかる。

ここまででは、ダスト成長に完全合体の仮定を課してきた。しかし、ダストサイズが大きくなるとダスト間相対速度も大きくなることから衝突による破壊や跳ね返りの効果を無視できなくなる^{*23}。したがって、 τ_{grow} は式 (3.70) よりもさらに長くなる。これらは、ダスト成長に対する破壊障壁や跳ね返り障壁と呼ばれている。

上述した障壁やダスト落下問題を解決しない限り、ダストから微惑星を形成することはできない。これは現在の惑星形成理論の大問題であるが、近年、この困難を解決するアイデアとして原始惑星系円盤の乱流構造が注目されている。その例として、原始惑星系円盤の磁気回転不安定性によって形成される「乱流領域」と円盤内電離度が下がることによって生じる「層流領域（デッドゾーン）」構造が挙げられる (e.g., [57, 58, 52])。この乱流領域とデッドゾーンの境界には、圧力バンプが生じることでダストが集積し、ダストリングが形成される可能性が指摘されている。このダストリング内で、ダスト密度が高くなることで自己重力不安定によって微惑星、ひいては惑星が効率的に形成される可能性が指摘されている (e.g., [59, 8, 12, 27])。この惑星形成モデルを、本論文では「ダストリング形成モデル」と呼ぶことにし、より詳しいモデルの構造やダストリング内の惑星形成過程に関する議論は、4 章以降で行っていく。

3.2.2 微惑星から地球型惑星の形成

前項では、ダストがどのように原始惑星系円盤内で運動し、成長するのか、その物理や問題点・解決案を議論した。本項では、ダストから微惑星が形成されたと仮定し、その上で微惑星がどのように原始惑星へと成長し、最終的に地球型惑星が形成されるのかを議論する。

^{*23} ダスト破壊に関しては、[56] に詳しい。

3.2.2.1 微惑星・原始惑星集積過程の基礎

コア集積モデルに基づくと、惑星は微惑星や原始惑星が衝突合体を繰り返すことで形成されると考えられる。したがって、微惑星からの惑星形成過程を調べるためにには、微惑星や原始惑星の合体衝突過程を理解することが重要である。そこで、本項では微惑星・原始惑星間の相対速度や衝突断面積を見積もることで、惑星の成長過程を調べていく。

ランダム速度

ダストに比べて微惑星は km サイズ以上と十分大きいため、原始惑星系円盤内のガスから受けるガス抵抗は非常に小さくなる。したがって、微惑星の運動は中心星周りのケプラー運動に周囲の天体との重力相互作用やガス抵抗を摂動として与えた形で表現することができる。このような摂動によって生じるケプラー回転からのズレをランダム速度と呼び、軌道離心率 e や軌道傾斜角 i が小さい場合（冷たい微惑星円盤： $e, i \ll 1$ ）では、これが天体間の相対速度を決める。以下では、このランダム速度を大雑把に見積もっていく。

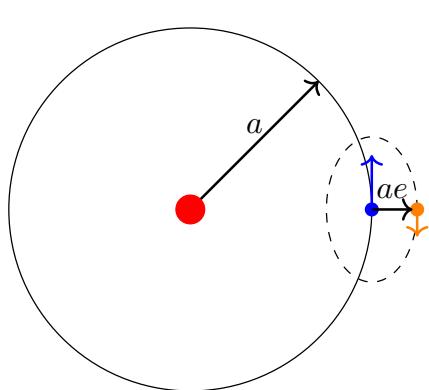


図 6 平面円運動からのズレ：円運動する天体（青）から見た離心率 e の天体（橙）の運動

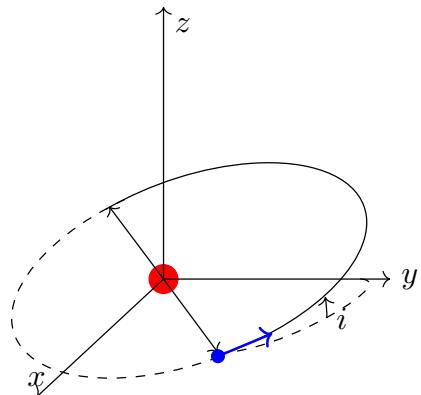


図 7 平面円運動からのズレ：一方の天体（青）の軌道面が傾斜角 i を持っているとき

図 6 のように同じ軌道長半径 a を持つ 2 天体があり、一方が円軌道で、他方が軌道離心率 e の橿円軌道上にあるとする。このような系で 2 天体が近づいたとき、円運動する天体から見た他方の速度は

$$v \approx \frac{2\pi ae}{T_K} = ev_K \quad (3.73)$$

となる。また、図 7 のように一方の天体が軌道傾斜角 i を持っている場合、 z 方向の相対速度は

$$v \approx v_K \sin i \approx iv_K \quad (3.74)$$

となる。したがって、 $e, i \ll 1$ のときのランダム速度は大雑把に

$$v_{\text{disp}} \sim \sqrt{e^2 + i^2} v_K \quad (3.75)$$

と表すことができる^{*24}。

このような系では、重力散乱によって微惑星と原始惑星間でエネルギー交換が生じることで、1 粒子あたりの運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) が同程度になるように緩和していくことが知られている [60]。つまり、何らかの形で原始惑星のランダム速度が上昇したとすると、無数の微惑星との重力相互作用によって、原始惑星のランダム速度はエネルギー等分配の法則を満たすように減衰していく。原始惑星から見ると、この効果は抵抗のように働くものであるため「力学的摩擦」と呼ばれる。

衝突断面積と速度分散

上で見たように、熱平衡状態では、速度分散は力学的摩擦の効果から質量の二乗根に反比例する。つまり、質量が大きい原始惑星ほどランダム速度は抑えられ、それに伴って周りの微惑星の速度分散が上昇していく。そこで以下では、静止している原始惑星の周りをランダムに微惑星が飛び回り、衝突・合体によって原始惑星が成長していく描像を考え、このような系における衝突断面積と散乱断面積を調べていく^{*25}。

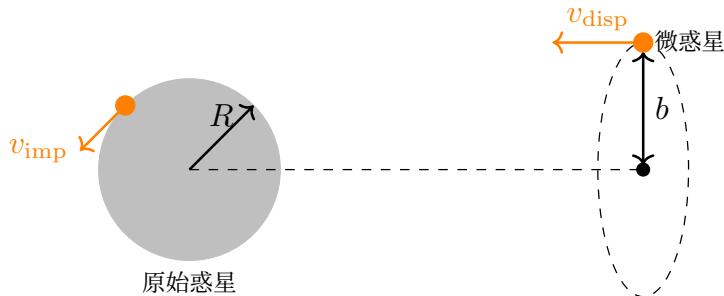


図 8 衝突断面積：十分遠方で速度 v_{disp} で運動していた微惑星が、最終的に速度 v_{imp} で原始惑星へ衝突する図

ここでは、図 8 のように質量 M 、半径 R の原始惑星の周りを質量 m 、半径 r の微惑星が速度 v_{disp} を持つて運動している状況を考える（但し、 $M \gg m$, $R \gg r$ ）。衝突断面積は、遠方で速度 v_{disp} を持つて運動していた微惑星が原始惑星表面を掠るような衝突を起

^{*24} ランダム速度は、基準平面内の円軌道からのズレを表していることから、しばしば速度分散 (velocity dispersion) とも呼ばれる。

^{*25} このように、静止している原始惑星の周りを微惑星がランダムに運動していると近似することを particle-in-a-box 近似と呼ぶ。

こし得るインパクト・パラメータ b を用いて πb^2 と与えられる。 b は、角運動量保存則とエネルギー保存則を用いて以下のように求めることができる。まず、角運動量保存則より

$$bv_{\text{disp}} = (R + r)v_{\text{imp}} \quad (3.76)$$

ここで、 v_{imp} は衝突時の微惑星の速度である。次に、エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_{\text{disp}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{imp}}^2 - \frac{GmM}{R + r} \quad (3.77)$$

となる。したがって、式 (3.76) より $b = (R + r)\frac{v_{\text{imp}}}{v_{\text{disp}}}$ となり、ここに式 (3.77) から得られる $\left(\frac{v_{\text{imp}}}{v_{\text{disp}}}\right)^2 = 1 + \frac{2GM}{v_{\text{disp}}^2(R+r)}$ を代入して、

$$b = (R + r) \sqrt{1 + \frac{2GM}{v_{\text{disp}}^2(R+r)}} \quad (3.78)$$

が得られる。よって、衝突断面積は

$$\sigma_{\text{col}} = \pi b^2 = \pi(R + r)^2 \left(1 + \frac{2GM}{v_{\text{disp}}^2(R+r)} \right) \quad (3.79)$$

となる。ここで、原始惑星表面からの脱出速度 $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/R}$ と $R \gg r$ であることを用いると

$$\sigma_{\text{col}} \simeq \pi R^2 \left(1 + \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{disp}}^2} \right) \quad (3.80)$$

が得られる。式 (3.80) の括弧内は重力引き付けによる衝突断面積の増加を表していることから、重力フォーカシングと呼ばれる。

次に、衝突断面積の考え方を基に具体的な速度分散 v_{disp} の値を求めてみる。微惑星の速度分散は、原始惑星による重力散乱によって上昇するので、微惑星が衝突断面積よりも大きな断面積を持っていれば、微惑星は原始惑星に衝突せずに、軌道が曲げられることによる効果で v_{disp} が上昇していく。このような断面積を散乱断面積 σ_{scat} と呼び、 $\sigma_{\text{scat}} = \sigma_{\text{col}}$ となる場合に v_{disp} が最大となる。この散乱断面積を大雑把に見積もるために、次の状況を考えてみる。微惑星が速度 v_{disp} 、インパクト・パラメータ b で質量 M の原始惑星へ近づく場合を考える。ここで、原始惑星を通り過ぎる直前まで b があまり変わらないと仮定すると、通り過ぎる瞬間に微惑星は原始惑星から進行方向に垂直な重力 $F \sim GM/b^2$ を受ける。さらに、典型的な通過タイムスケールは $t \sim 2b/v_{\text{disp}}$ なので、微惑星は進行方向に垂直な方向へ $v \sim Ft \sim 2GM/(bv_{\text{disp}})$ の速度を得る。これが、 v_{disp} 程

度になると散乱が効いていると見做せるので、 $v \simeq v_{\text{disp}}$ より、そのときのインパクト・パラメータは

$$b \simeq \frac{2GM}{v_{\text{disp}}^2} \quad (3.81)$$

と求まる。したがって、散乱が効いてくる散乱断面積は、

$$\sigma_{\text{scat}} \simeq \pi \left(\frac{2GM}{v_{\text{disp}}^2} \right)^2 \simeq \pi R^2 \left(\frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{disp}}^2} \right) \quad (3.82)$$

となる。微惑星の速度分散は、 $\sigma_{\text{scat}} \simeq \sigma_{\text{col}}$ のとき最も上昇することから、式 (3.80) と式 (3.82) を用いて具体的な値を大雑把に見積もると

$$v_{\text{disp}} \simeq \frac{v_{\text{esc}}}{\sqrt{1.6}} \sim v_{\text{esc}} \quad (3.83)$$

と表すことができる。

原始惑星の成長率

本項のまとめとして、ここまで議論を基に原始惑星の成長率を求める。微惑星質量を m 、個数密度を n とすると原始惑星の成長率は、

$$\frac{dM}{dt} \simeq mn\sigma_{\text{col}}v_{\text{disp}} \quad (3.84)$$

と表される。ここで、微惑星円盤は幾何学的に薄いと仮定すると、円盤の厚み h は軌道傾斜角 i と原始惑星の軌道長半径 a を用いて $h = a \sin i \simeq ia$ となる。したがって、 mn は微惑星面密度 Σ_d を使って

$$mn \simeq \frac{\Sigma_d}{2ia} \sim \frac{\Sigma_d \Omega_K}{v_{\text{disp}}} \quad (3.85)$$

となる。但し、 $e \sim 2i$ を仮定し、 $v_{\text{disp}} \sim \sqrt{i^2 + 4i^2}v_K \simeq 2iv_K = 2ia\Omega_K$ を用いた^{*26}。したがって、式 (3.84) は

$$\frac{dM}{dt} \simeq mn\sigma_{\text{col}}v_{\text{disp}} \simeq C\Sigma_d\pi R^2 \left(1 + \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{disp}}^2} \right) \Omega_K \quad (3.86)$$

ここで、 C は微惑星速度分散の分布に依存する関数であり、レイリーアルベート分布を仮定すると $C \sim 2$ となる [51]。式 (3.86) を用いて原始惑星の成長タイムスケールを見積もると

$$\tau_{\text{grow}} \equiv \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \right)^{-1} \simeq \frac{1}{2} \frac{M}{\pi \Sigma_d a^2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \left(\frac{v_{\text{esc}}}{v_{\text{disp}}} \right)^2 \frac{T_K}{2\pi} \quad (3.87)$$

^{*26} 微惑星のランダム速度が、Hill velocity $v_{\text{Hill}} \sim \sqrt{GM/r_{\text{Hill}}}$ に比べて大きい場合、この $e \sim 2i$ と仮定することができることが知られている [52]。ヒル半径 r_{Hill} に関しては、付録を参照されたい。

となる。ここで、 $C = 2$, $v_{\text{disp}} < v_{\text{esc}}$ であると仮定している^{*27}。3.3 節で扱う最小質量円盤モデルを仮定し、式 (3.87) を用いて惑星形成タイムスケールを見積もると、氷型惑星の形成タイムスケールは 10^{10} 年程度になってしまい太陽系の年齢を超えててしまう。したがって、古典的標準理論はダスト落下問題だけでなく天王星や海王星などの形成を考える上でも困難を抱えている。

3.2.2.2 原始惑星の暴走成長から寡占成長まで

前項では、単一の原始惑星が既に存在し、その周りを多数の微惑星がランダムに運動しているという一種の孤立系を考え、原始惑星の成長率を見積もった。本項では、微惑星円盤内に複数の原始惑星が存在するようなより現実的な系を仮定し、どのように原始惑星が成長するのかを紐解いていく。特に本項前半では、「暴走成長」と呼ばれる微惑星円盤の中で偶然周りよりも大きくなったりした微惑星が、他を圧倒し暴走的に成長することで少数の原始惑星が形成される段階を詳しく調べていく。そして、本項後半では暴走成長の終焉とその後に続く原始惑星の寡占成長モードに関して議論する。

暴走成長と秩序成長

ここでは、周りよりも少し大きくなったりした質量 M の原始惑星とその周りに存在する質量 m の微惑星間の質量比の進化を調べることで、原始惑星が暴走的に成長する条件を見積もっていく。

原始惑星・微惑星間の成長率の時間進化は、質量増加率が質量の定数乗に比例する(つまり、 $dM/dt \propto M^\beta$, $dm/dt \propto m^\beta$)と仮定すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{m} \right) = \frac{M}{m} \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} - \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right) \propto \frac{M}{m} (M^{\beta-1} - m^{\beta-1}) \quad (3.88)$$

となる。式 (3.88) から、 $\beta > 1$ のとき、原始惑星と微惑星間の質量比が時間と共に大きくなることがわかる。一方で、 $\beta < 1$ のとき、原始惑星と微惑星間の質量比が時間と共に小さくなることで、微惑星は全体として秩序的に成長していくことがわかる。つまり、 β が原始惑星の暴走成長のオンセット条件を決める重要なファクターとなる。

以下では、 β の具体的な値を見積もっていく。式 (3.86) より、惑星の成長率 $\frac{dM}{dt}$ において惑星質量に依存するパラメータは衝突断面積だけであることがわかる。つまり、暴走

^{*27} ケプラー周期 T_K は、質量を太陽質量、距離を 1 天文単位、時間を $\text{yr}/2\pi$ で規格化すると、

$$T_K = \left(\frac{a}{1\text{au}} \right)^{3/2} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-1/2}$$

となる。

成長のオンセット条件を調べるために、衝突断面積の質量依存性を調べることになる。衝突断面積は、式 (3.80) より

$$\sigma_{\text{col}} \simeq \pi R^2 \left(1 + \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{disp}}^2} \right) \propto M^{2/3} \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{disp}}^2} \quad (3.89)$$

である。さらに、 $v_{\text{esc}}^2 \propto M^{2/3}$ で、かつ力学的摩擦の効果から、成長初期段階の質量比が小さな原始惑星・微惑星間では $v_{\text{disp}} \propto M^{-1/2}$ となることを考慮すると

$$\sigma_{\text{col}} \propto M^{2/3} \frac{v_{\text{esc}}^2}{v_{\text{disp}}^2} \propto M^{7/3} \quad (3.90)$$

となる。つまり、原始惑星・微惑星間質量比が小さい原始惑星の成長初期段階では、原始惑星が周りの微惑星を引き離すように暴走的に成長していくことがわかる。また、質量比がついてくると v_{disp} は M に依存しなくなるが、その場合でも $\beta = 4/3$ であることから $v_{\text{disp}} < v_{\text{esc}}$ が満たされる限り、原始惑星は暴走的に成長することもわかる [61, 62]。

暴走成長の終焉

上の議論から、原始惑星・微惑星間質量比が大きくなっても、一見、原始惑星は $v_{\text{disp}} < v_{\text{esc}}$ を満たす限り暴走的に成長すると考えられる。しかし、原始惑星質量が微惑星質量に比べて十分大きくなると、暴走成長は終焉を迎える。ここでは、そのメカニズムを考えていく。

原始惑星・微惑星間質量比がそこまでついていない段階では、微惑星に対して原始惑星の重力散乱は強く効かない。しかし、各質量天体の散乱効率 $\chi(m)$ は、 $\chi(m) \propto m \Sigma_m$ であることから、暴走成長によって原始惑星質量が十分大きくなると ($M \gg m$)、微惑星質量が系全体の質量を支配していたとしても ($\Sigma_M \ll \Sigma_m$)、微惑星の速度分散 v_{disp} は原始惑星による重力散乱で決まるようになる。3.2.2.1 目の散乱断面積の議論から、原始惑星による重力散乱が効いてくると、

$$v_{\text{disp}} \sim v_{\text{esc}} \propto M^{1/3} \quad (3.91)$$

となる。したがって、式 (3.90) から

$$\beta = \frac{2}{3} < 1 \quad (3.92)$$

となり、暴走成長は終焉を迎える。

寡占成長の始まり

これまで考えてきた暴走成長の適用される範囲は、微惑星円盤内でも原始惑星の重力の影響が強い局所的な領域 (典型的には数 r_{Hill} 程度) に限られる。したがって、より広い

視点で微惑星円盤を見ると暴走成長が終わりを迎えると、同程度の質量の原始惑星が円盤内で等間隔に並ぶようになる。このような成長フェーズは、寡占成長と呼ばれ無数の小さな微惑星と少数の同程度の大きさの原始惑星という2極化した質量分布を持つ系が形成される。

3.2.2.3 軌道反発と孤立質量

前項目の後半では、暴走成長が終わり寡占成長段階に到達すると、微惑星円盤内で同程度の質量を持つ複数の原始惑星が等間隔で並ぶことを見た。寡占成長段階では、この等間隔で並ぶ原始惑星たちは、自分の周囲に存在する微惑星だけでなく隣接する原始惑星とも重力的に干渉することで、原始惑星の軌道間隔を変化させる。これは軌道反発と呼ばれる力学的機構として知られている[63]。この軌道反発による原始惑星軌道進化が落ち着くと、原始惑星は円盤内をほとんど移動しなくなり自分自身の周りにある微惑星と衝突・合体を繰り返すことで、徐々に成長していく。しかし、周囲に存在する微惑星も有限であるため、ある臨界質量を超えると原始惑星の成長は停滞する。この原始惑星の成長が停滞する臨界質量は、孤立質量と呼ばれている。本項目では、まず原始惑星の軌道反発メカニズムを示し、次に軌道反発が終わった後に生じる原始惑星の孤立質量に関して議論する。

3.2.2.4 軌道反発

隣接する原始惑星は、会合するたびに重力散乱で互いに軌道を乱しあう。このとき、散乱前後で十分離れた場所での軌道要素を考えると、両者はほぼケプラー運動していることから軌道要素を用いたヤコビ・エネルギーの表式(式(付録D.22))を用いて

$$\frac{2E_J}{v_K^2} = e^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \quad (3.93)$$

が保存することがわかる。ここで、簡単のために軌道傾斜角 $i = 0$ とし、かつ隣接する原始惑星は散乱前後で十分離れていることから原始惑星重力ポテンシャルを無視している。式(3.93)より、重力散乱によって離心率 e が上昇すると、それに伴って軌道長半径の差 Δa も増大することがわかる。

重力散乱によって加熱された原始惑星の離心率は、跳ね飛ばされた先に存在するまわりの微惑星との力学的摩擦によって減衰し、原始惑星の軌道は徐々に円形化され、結果として軌道間隔だけが拡がり続ける。しかし、軌道間隔の拡がりと共に重力散乱の効果が弱くなることから、軌道反発による惑星軌道進化過程にも終わりが存在する。数値計算による研究から、軌道反発は軌道間隔が $10 r_{\text{Hill}}$ 程度になると終わることが見出されている[63]。

3.2.2.5 孤立質量

上で見たような軌道反発による軌道進化過程が終わると、隣接する原始惑星同士は $10 r_{\text{Hill}}$ 程度の軌道間隔を保って、自身の周囲の微惑星と衝突・合体を繰り返しながら成長していく。このフェーズにおいて、原始惑星は大きく動径移動しないと仮定すると、1つの原始惑星が集積することができる微惑星円盤領域は軌道間隔 $10 r_{\text{Hill}}$ を用いて、およそ $2\pi a \times 10r_{\text{Hill}}$ となる。これは原始惑星のフィーディングゾーンと呼ばれ、この環に含まれる微惑星の総質量は、微惑星円盤の面密度 Σ_d を用いて

$$M_f = 2\pi a \times 10r_{\text{Hill}} \Sigma_d \quad (3.94)$$

となる。上式では、 $r_{\text{Hill}} \propto M^{1/3}$ であることから、原始惑星の成長速度に比べてフィーディングゾーンはそこまで拡大しないことがわかる。したがって、 $M > M_f$ となる段階が必ずどこかで生じる。この臨界質量を原始惑星の孤立質量 M_{iso} と呼び、原始惑星の成長が停滞する質量を表している [64]。最後に、孤立質量の具体的な表式を導いておく。孤立質量は、原始惑星質量がフィーディングゾーンに存在する質量と同程度まで成長したときの原始惑星質量と定義したことから、その条件は $M_{\text{iso}} = M = M_f$ で与えられる。これを、式 (3.94) へ用いることで、孤立質量 M_{iso} は

$$\frac{M_{\text{iso}}}{M_*} \simeq \left(\frac{20}{3/2^{1/3}} \right)^{3/2} \left(\frac{\pi \Sigma_d a^2}{M_*} \right)^{3/2} \quad (3.95)$$

と表すことができる。原始惑星の寡占成長は、この孤立質量へ達すると終焉を迎える。

3.2.2.6 巨大衝突

重力散乱によって原始惑星の離心率や軌道傾斜角が上昇しても、ガス円盤からのガス抵抗や微惑星からの力学的摩擦によって、徐々に原始惑星軌道は円形化される。しかし、時間と共にガス円盤や微惑星が消失してくると、少しづつ原始惑星同士の遠距離相互作用が効き始め、いずれ原始惑星同士で軌道が交差し、衝突が起きる。

これは、地球型惑星形成の最終段階と考えられており、巨大衝突 (ジャイアント・インパクト) 段階と呼ばれる。この段階の特徴は、原始惑星同士の衝突が複数回起こることで、原始惑星から不連続的に地球サイズの惑星が形成されることである。これまでに、この段階は N 体シミュレーションによって詳しく調べられており、先行研究からは、原始惑星同士の巨大衝突で最終的に地球サイズの惑星が数個形成されていることが見出されている [65]。

さらにこの巨大衝突段階では、ほぼ現在のサイズまで成長した原始地球へ火星サイズの原始惑星が斜めに衝突することで月が形成される可能性が古くから指摘されている [66, 67]。数値シミュレーションからは、このような衝突によって原始地球の軌道上に放出された原始惑星と原始地球の一部を含む破片が周地球円盤を構築し、その円盤内では1ヶ月程度と非常に短期間で月が形成されることが見出されている (e.g., [68])。また近年、マグマオーシャンで覆われた原始地球へ原始惑星が衝突することで、地球と似た同位体比の月が形成され得ることが SPH を用いた月形成シミュレーションによって明らかになっている [69]。

3.2.3 ガス惑星の形成

前項では、微惑星から少数の原始惑星が暴走的に形成され、それらが最終的に巨大衝突を経て惑星が形成されることを説明した。しかし、これは雪線よりも内側の地球型惑星形成領域での話であり、雪線よりも外側では孤立質量に達した段階でガス降着が始まり、巨大衝突過程を経ずに木星や土星などの巨大ガス惑星が形成される。そこで、本節では、巨大ガス惑星がどのように形成されるのか、特に惑星への円盤ガス降着過程に焦点を当てた議論を行う。

3.2.3.1 定性的な描像

雪線よりも外側の領域では、氷も固体として存在することから微惑星面密度も大きくなり、式 (3.95) で表される原始惑星の孤立質量は地球質量以上になり得る。このような巨大原始惑星は、原始惑星系円盤内に存在するガス成分を重力的に束縛することで、大気を持つようになる。このような大気を持つ原始惑星は、成長に伴って次々とガスを降着し始めるため、いずれガスを圧力で支えることができなくなる。そうなると、周囲のガスが暴走的に原始惑星へ降着することで巨大ガス惑星が形成される [11, 70]。

3.2.3.2 限界コア質量

巨大な原始惑星がガス円盤内にあると、惑星は円盤ガスを自身のヒル圏へと次々降着することで、ガス惑星を形成する。ここでは、惑星が大気を持つ条件や惑星大気構造から議論を展開し、ガスの暴走的降着を起こす惑星の限界コア質量を考えていく。

まずは、円盤ガスの流入が始まる惑星質量の閾値を求めていく。固体質量 M_c を持つ惑星が、音速程度で運動するガス粒子を束縛するためには、ガス粒子の持つ力学的エネルギー、つまり運動エネルギーと惑星重力のポテンシャルエネルギーの和が負になる必要が

ある。それをガス粒子・惑星間距離について解くと、

$$r < \frac{GM_c}{c_s^2} \simeq 3.7 \times 10^5 \left(\frac{M_c}{M_\oplus} \right) \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{-1} \text{km} \quad (3.96)$$

となる。この距離 r は、ボンディ半径 r_B と呼ばれる。惑星大気は、惑星の物理半径 r_c より外側に存在することから、惑星が大気を保持する条件は、 $r_B > r_c$ となる。ここで、惑星の物理半径 r_c は

$$r_c \simeq \left(\frac{M_c}{4.2\rho_c} \right)^{1/3} \simeq 0.77 \times 10^4 \left(\frac{M_c}{M_\oplus} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_c}{3 \text{ gcm}^{-3}} \right)^{-1/3} \text{km} \quad (3.97)$$

と与えられる。ただし、 ρ_c は惑星コアの内部密度を表している。式 (3.96) においてガス円盤温度を 10^2 K 程度と仮定すると、上記条件 ($r_B > r_c$) から惑星は月質量程度から大気を保持できるようになる。

次に、大気内の熱輸送を考えていく。ここでは、簡単のために定常一次元の平行平板大気を仮定する。また、光学的に十分厚い大気を仮定すると、大気内では粒子同士の衝突が頻繁に起こり粒子分布は緩和している（局所熱力学平衡）と考えられることから、輻射圧は局所プランク分布で近似することができる。したがって、正味の単位面積あたりの放射エネルギーfluxは、惑星中心から外向きを正とすると

$$F = -\frac{4\sigma_{\text{SB}}}{3\kappa\rho} \frac{dT^4}{dr} \quad (3.98)$$

で与えられる。ここで、 κ は質量吸収係数^{*28}であり、式 (3.98) を求める過程で $\sigma_{\text{SB}} = ac/4$ を用いた。上式で用いた近似は、拡散近似やロスランド近似と呼ばれるモーメント定式化におけるクロージャー関係の一つである（詳しくは、[71] を参照）。惑星コアへの微惑星集積による重力エネルギーの解放を主な熱源と考えると、単位時間あたりに惑星から発生する熱 L は

$$L = \frac{GM_c \dot{M}_c}{r_c} \quad (3.99)$$

となる。ここで、 \dot{M}_c は単位時間あたりに惑星へ集積する微惑星質量である。以上、式 (3.98) による冷却と式 (3.99) による加熱が釣り合っていると仮定すると、以下のように大気の熱平衡の式が得られる：

$$\frac{L}{4\pi r^2} = -\frac{4\sigma_{\text{SB}}}{3\kappa\rho} \frac{dT^4}{dr}. \quad (3.100)$$

^{*28} 質量吸収係数 κ は、ガス円盤の単位質量あたりの吸収断面積を考えることもできる。また、質量吸収係数 κ はロスランド平均不透明度とも呼ばれる [71]。

また、惑星大気には静水圧平衡を仮定すると、

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rho(r) \quad (3.101)$$

が与えられる。ここで、 M は大気質量 M_{atm} とコア質量 M_c の和を表している。さらに、大気は理想気体であると見做すと惑星大気の状態方程式は

$$P(r) = \rho(r) \frac{k_B T(r)}{m} \quad (3.102)$$

となる。

以上、熱輸送の式 (3.100) と理想気体の状態方程式 (3.102)、静水圧平衡の式 (3.101) を用いて、ガスの暴走的降着を引き起こす限界コア質量を求めていく。その上で、大気の外界の境界を r_{out} として、そこでの温度、圧力を T_{out} , P_{out} とする。ただし、 $T_{\text{out}} \ll T$, $P_{\text{out}} \ll P$, $M_{\text{atm}} \ll M_c$ 、かつ $\kappa = \text{const}$ と仮定する。まず、式 (3.101) と式 (3.100) を用いて、

$$T^4 = \frac{3\kappa L}{16\pi\sigma_{\text{SB}} GM} P \quad (3.103)$$

となる。これを、式 (3.100) へ代入すると

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(r)GM}{r^2} = -\frac{P(r)GMm}{k_B T(r)r^2} \quad (3.104)$$

を得る。ただし、最左辺の変形には式 (3.102) を用いた。式 (3.103) を用いて、式 (3.104) を T について解くと、

$$T = \frac{GMm}{4k_B r} \quad (3.105)$$

となる。この式と式 (3.100) より、惑星大気の密度は

$$\rho = \frac{64\pi\sigma_{\text{SB}}}{3\kappa L} \left(\frac{GMm}{4k_B} \right)^4 r^{-3} \quad (3.106)$$

と書ける。したがって、大気質量は

$$M_{\text{atm}} = \int_{r_c}^{r_{\text{out}}} 4\pi\rho(r)r^2 dr = \frac{64\pi\sigma_{\text{SB}}}{3\kappa L} \left(\frac{GMm}{4k_B} \right)^4 \times 4\pi \ln \left(\frac{r_{\text{out}}}{r_c} \right) \quad (3.107)$$

となる。ただし、 $M_{\text{atm}} \ll M_c$ と仮定し、 M を定数として扱っている。ここで、式 (3.99) を式 (3.107) へ代入して、

$$M_{\text{atm}} = \frac{\beta}{\kappa \dot{M}_c} \frac{(M_{\text{atm}} + M_c)^4}{M_c^{2/3}} \quad (3.108)$$

となる。ただし、

$$\beta = \sigma_{\text{SB}} \left(\frac{m}{k_B} \right)^4 G^3 \left(\frac{\pi^5}{36\rho_c} \right)^{1/3} \ln \left(\frac{r_{\text{out}}}{r_c} \right) \quad (3.109)$$

である。

式 (3.108) は、 $M_{\text{atm}} \gtrsim M_c$ となると正確ではなくなるが、ここではその場合にも適用できると仮定し、その物理的傾向を考えることで、限界コア質量を導いていく。まず、式 (3.108) をコア質量 M_c で微分し、 M_c が増えたときに大気質量 M_{atm} がどれだけ増えるかを見積もると

$$\frac{dM_{\text{atm}}}{dM_c} = \frac{4M_{\text{atm}}}{M_{\text{atm}} + M_c} \left(\frac{dM_{\text{atm}}}{dM_c} + 1 \right) - \frac{2}{3} \frac{M_{\text{atm}}}{M_c} \quad (3.110)$$

となる。この式は、 $M_{\text{atm}} = M_c/3$ で発散するので、この値を式 (3.108) に代入すると、

$$M_{c,\text{crit}} = \left(\frac{27\kappa\dot{M}_c}{256\beta} \right)^{3/7} \quad (3.111)$$

が得られる。この式は、惑星コア質量が $M_{c,\text{crit}}$ に達すると、 M_{atm} が発散してしまうことを意味している。この場合、式 (3.106) から、大気質量も入れた重力を圧力で支えるために必要な大気密度が無限大となるので、静水圧平衡になる大気は存在しなくなる。つまり、力学的平衡状態が存在しないことから、大気がコアに落ち込み、円盤ガスが存在する限りそのガスが惑星へ流れ込んでくることを意味している。したがって、式 (3.111) で表される $M_{c,\text{crit}}$ は、限界コア質量を表している。

惑星コア質量が $M_{c,\text{crit}}$ を超えると、ガス円盤から暴走的にガスが惑星へと供給されるのだが、惑星が土星質量程度まで成長すると惑星へのガス降着タイムスケールが原始惑星系円盤の降着タイムスケールよりも短くなり、ガス供給が間に合わなくなってしまう。この段階に達すると、惑星軌道周辺に円盤ガス密度が低いギャップ構造が形成され、原始惑星系円盤の降着がガス惑星成長タイムスケールを律速するようになる。さらに、惑星質量が木星質量を超えると、惑星によるガスの跳ね飛ばし効果が現れるようになり、ガス惑星の成長タイムスケールはさらに長くなっていく。

3.3 最小質量円盤モデル：Minimum Mass Solar Nebula (MMSN)

ここまでにガス円盤の構造や進化、そしてガス円盤内のダストの運動・成長、さらには微惑星から惑星の形成に至るまでの物理過程を議論してきた。そこで、本節では古典的標準理論として知られる最小質量円盤モデルを用いて、具体的なダスト・ガスの空間分布や惑星形成タイムスケールを見積もっていく。

3.3.1 最小質量円盤モデルの概要

最小質量円盤モデル：Minimum Mass Solar Nebula (以下、MMSN) とは、現在の太陽系の地球型惑星、および巨大ガス惑星の推定質量をすりつぶして滑らかなダスト面密度分布を推定し、そこに太陽の元素組成を参考にガスを付加することで構築される円盤モデルである(図9)。現在の太陽系を構築するために最小限必要な円盤材料量であることが、本モデル名の由来となっている。

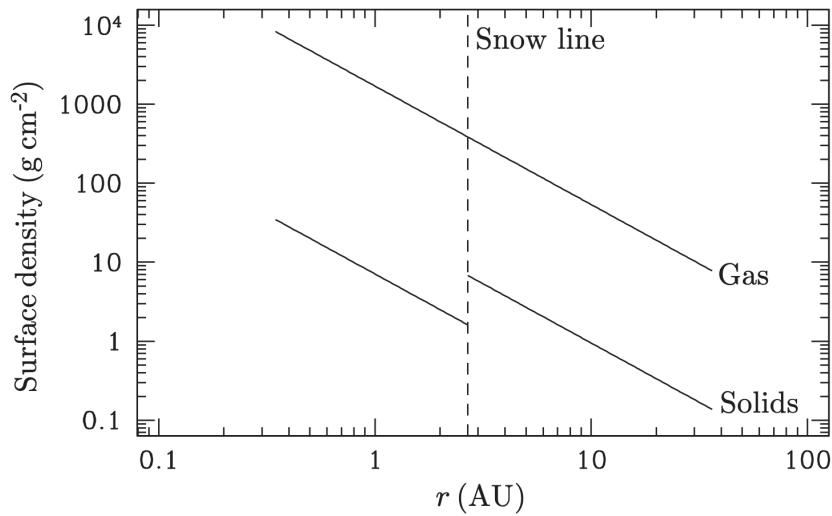


図9 ガス円盤(上線)とダスト円盤(下線)の面密度の空間分布(図の出典は[52])。鉛直点線は、雪線の位置を表している。

MMSNにおけるダスト面密度 Σ_d とガス面密度 Σ はそれぞれ

$$\Sigma_d = \begin{cases} 10f_d \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-3/2} \text{ g/cm}^2 & (r \leq a_{\text{ice}}) \\ 10f_d \eta_{\text{ice}} \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-3/2} \text{ g/cm}^2 & (r > a_{\text{ice}}) \end{cases} \quad (3.112)$$

$$\Sigma = 2400f_g \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-3/2} \text{ g/cm}^2 \quad (3.113)$$

で与えられる[10]。ここで、 r , a_{ice} は中心星からの距離と雪線の位置、 f_d , f_g , η_{ice} はダスト面密度とガス面密度のスケーリングファクター、雪線境界ファクターで、それぞれ $f_d = f_g = 0.71$, $\eta_{\text{ice}} = 4.2$ である。

氷の凝結は、原始惑星系円盤内のように低圧環境下では 150~170 K 程度の領域で起こるので、3.1.2 項で求めた光学的に薄い原始惑星系円盤の温度構造の式(3.11)を用いると、

MMSN における具体的な雪線の位置を求めることが可能である。

$$170 = 280 \left(\frac{L_*}{L_\odot} \right)^{1/4} \left(\frac{r_{\text{ice}}}{1\text{AU}} \right)^{-1/2}$$

$$r_{\text{ice}} = 2.7 \times \left(\frac{L_*}{L_\odot} \right)^{1/2} \text{AU} \quad (3.114)$$

となる。さらに、3.1.1 項で議論したガス密度の空間分布構造の式 (3.5) を用いると、ガス面密度は

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz = \sqrt{2\pi} h \rho_0 \quad (3.115)$$

と書けるので、MMSN における赤道面でのガス面密度 ρ_0 は

$$\rho_0(r) = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi} h}$$

$$= \frac{1700 \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-3/2} \sqrt{GM_*}}{\sqrt{2\pi} \times 1 \times 10^5 \times \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{5/4} \times (1\text{AU})^{3/2}}$$

$$\simeq 1.4 \times 10^{-9} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-11/4} \quad (3.39)$$

で与えられる。

3.3.2 MMSN における惑星形成タイムスケール

3.2.2.1 項で議論した原始惑星の成長タイムスケールの式 (3.87) と MMSN におけるダスト面密度の式 (3.112) を用いることで、具体的な惑星の形成タイムスケールを見積もることができる。

地球型惑星形成領域となる 1AU 周りでの地球サイズ惑星の形成タイムスケール τ_{acc} は

$$\tau_{\text{acc}} \sim 10^7 \left(\frac{v_{\text{disp}}}{v_{\text{esc}}} \right)^2 \quad (3.116)$$

となる。また、雪線よりも外側の木星軌道 (5 AU) 周りでのガス惑星コア ($\sim 10M_\oplus$) の形成タイムスケールは、

$$\tau_{\text{acc}} \sim 10^9 \left(\frac{v_{\text{disp}}}{v_{\text{esc}}} \right)^2 \quad (3.117)$$

と書ける。原始惑星系円盤の観測からは、ガス円盤の寿命は約 $3 \sim 5 \times 10^6$ 年と推測されているため (e.g., [72])、それまでにガス惑星を形成するためには、式 (3.117) から $v_{\text{disp}} \lesssim 0.1 v_{\text{esc}}$ である必要がある。しかし、土星軌道 (10 AU) 周りでは、形成タイムス

ケールは木星軌道周辺よりも 1 柄程度長くなるため、MMSN では土星を形成するのは非常に困難である。さらに、天王星 (20 AU) や海王星 (30 AU) に関しては、 $\tau_{\text{acc}} \sim 10^{10}$ 年となり、太陽系の年齢内に集積することすらも難しくなる。

3.4 古典的惑星形成論のまとめ

本章では、原始惑星系円盤や惑星の形成・進化に関する物理素過程をまとめた。特に、現在の惑星形成理論の基本的枠組みであるコア集積モデルの物理に焦点を当てた説明を行った。本章で議論した内容を以下にまとめる：

- ガス円盤はほぼケプラー回転するが、圧力勾配によってわずかにケプラー回転よりも遅く回転する (3.1 節)。
- 原始惑星系円盤は、粘性による角運動量輸送によって質量を徐々に降着させながら進化していく (3.1 節)。
- ダストの成長には、ダスト落下問題や破壊障壁、跳ね返り障壁などさまざまな困難が指摘されており、ダストから微惑星がどのように形成されるかは、惑星形成論における未解決問題の一つになっている (3.2 節)。
- 地球型惑星は、少数の微惑星の暴走成長による原始惑星の形成、そして原始惑星同士の巨大衝突を経て形成される。一方、雪線よりも外側では孤立質量が地球質量以上になることで、惑星へガスが暴走的に流入しガス惑星が形成される (3.2 節)。
- 古典的な惑星形成論である最小質量円盤モデルでは、ガス円盤が散逸するまでに土星を形成することは困難である。さらに、天王星や海王星に至っては、太陽系年齢内に形成することも困難である (3.3 節)。

4 ダストリング形成モデルの設定

本章では、本研究で考えるダストリング形成モデルで構築するガス円盤モデルとダスト進化モデルの実装手法を与える。そのために、まず 4.1 節で、ダストリング形成モデルの特徴、およびその利点を簡潔に示す。次に、4.2 節ではダストリング形成メカニズムを考慮したガス円盤の構築手法と詳細な構造を示す。そして、4.3 節では、4.2 節で構築したガス円盤内のダストの運動、および成長を考える。本章以降の内容に関しては、副論文として [27] も参考にされたい。

4.1 ダストリング形成モデルの概要

3 章で議論したように惑星形成の標準理論では、原始惑星系円盤は動径方向になめらかな構造を持ち、惑星は自身の軌道の周囲に存在するダストや原始惑星と衝突・合体を繰り返すことによって成長すると仮定してきた。しかし、2.1 節で見たように原始惑星系円盤の観測からは、ダストリングやギャップなどのサブ構造が円盤内に普遍的に存在することが明らかになってきた。さらに、2.2 節の系外惑星の観測からは、ホット・ジュピターやスーパーアースなどが多数検出されている。なめらかな円盤構造や惑星のその場成長を仮定してきた標準理論では、このような原始惑星系円盤のサブ構造や惑星の多様性を説明することは困難であり、標準理論は大幅な修正を余儀なくされている。

近年、上述した問題を解決する理論として、ダストリング形成モデルが注目されている [8, 12, 13, 73, 27]。本モデルが着目するのは、原始惑星系円盤内の乱流・層流構造、およびその境界である。なぜなら、原始惑星系円盤の磁気流体力学的なシミュレーションからは、円盤内には磁気回転不安定性によって形成される乱流領域と円盤内の電離度が下がることによって生じる層流領域（デッドゾーン）が形成されることが確認されており [58, 74]、この乱流領域と層流領域の境界には圧力バンプが生じることでダストが集積し、観測されているようなダストリングが形成される可能性が指摘されているからである。このダストリング内では、ダスト密度が高くなることで自己重力不安定によって微惑星や惑星が効率的に形成されると考えられている (e.g., [59, 8, 12, 27])。しかし、理論モデルの煩雑さや観測的にダストリング構造が十分制限されていないことなどから、これまでにダストリング形成過程からそのリング内の惑星形成過程までを自己無撞着に再現した惑星系形成シミュレーションは存在しない。

そこで、本研究では、原始惑星系円盤の乱流・層流構造を考慮した円盤モデルと、その

円盤内のダスト進化モデルを構築し、 N 体シミュレーションへと組み込むことで、1 AU 近傍の地球型惑星形成領域内におけるダストリング形成過程やそのリング内での惑星形成過程を詳細に調べた。

4.2 ダストリング形成モデルのガス円盤

本節では、[12] (以降、EI17) を基に構築したガス円盤モデルとその実装手法を説明し、ガス円盤の全体構造を示す。本研究では、ガス円盤について、以下の仮定を課している。

- 中心星には太陽型星を考え、恒星の進化は無視する。
- ガス円盤には、1 次元定常 α 降着円盤を採用する。
- 磁気回転不安定起動条件を求める EI17 の数値計算の結果を用いて、乱流・層流境界の位置を質量降着率 \dot{M} の関数で定める (4.2.3 項参照)。

4.2.1 ガス円盤面密度

ガス円盤面密度 Σ の時間進化は、連続の式 (3.21) より

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで、質量降着率 \dot{M} は中心星への降着を正として、ガスの動径ドリフト速度 v_r を用いると、式 (3.24) より

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma v_r \quad (4.2)$$

となる。また、円盤の時間進化を無視して、定常状態であると仮定していることから、式 (4.1) は

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial r} = 0. \quad (4.3)$$

と書くことができる。式 (4.2) と式 (4.3)、さらに式 (3.17) で表されるナヴィエ-ストークス方程式の方位角成分を用いることで、

$$\Sigma v_r r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \Sigma \nu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \dot{M} &= -2\pi r \Sigma v_r, \\ &= 6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Sigma \nu r^{1/2} \right) = \text{const} \end{aligned} \quad (4.5)$$

を得る。ここで、 ν と Ω は円盤の粘性係数とケプラー角速度を表している。ケプラー角速度は、

$$\Omega = \left(\frac{GM_*}{r^3} \right)^{1/2} = 2.0 \times 10^{-7} \left(\frac{r}{\text{AU}} \right)^{-3/2} \text{ s}^{-1} \quad (4.6)$$

で与えられる。中心星質量 M_* は、仮定より $M_* = 1M_\odot$ に設定し、 G は万有引力定数である。式 (4.5) は、 r について積分することができて

$$\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi\nu} \quad (4.7)$$

となる。さらに、ガス円盤には α 降着円盤を仮定していることから、粘性係数 ν は

$$\nu = \alpha c_s H \quad (4.8)$$

で与えられる^{*29}。ここで、 α は粘性パラメータで、 c_s は音速、 H はガス円盤のスケールハイトを表している。音速 c_s とガス円盤スケールハイト H は 3.1.2 項を参考にすると、それぞれ

$$c_s = \left(\frac{k_B T_m}{\mu m_H} \right)^{1/2} = 1.0 \times 10^5 \left(\frac{T_m}{280 \text{ K}} \right)^{1/2} \text{ cm s}^{-1}, \quad (4.9)$$

$$H = \frac{c_s}{\Omega} = 5.0 \times 10^{11} \left(\frac{T_m}{280 \text{ K}} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{\text{AU}} \right)^{3/2} \text{ cm} \quad (4.10)$$

と書くことができる。ここで、 T_m は円盤赤道面温度であり、次項で詳しく議論する。また、 k_B 、 $\mu = 2.34$ は、ボルツマン定数と平均分子量であり、 m_H は水素原子質量を表している。

粘性パラメータ α の値は乱流領域と層流領域で異なり [52]、本研究では

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{\text{act}} = 1.0 \times 10^{-2} & \text{for turbulent region} \\ \alpha_{\text{inact}} = \gamma \alpha_{\text{act}} = 1.0 \times 10^{-2.5} & \text{for non-turbulent region.} \end{cases} \quad (4.11)$$

^{*29} 分子運動論による議論から、動粘性係数 ν はガス分子の熱速度 $v_m = \sqrt{8/\pi} c_s$ と平均自由行程 l を用いて、 $\nu = \frac{1}{2} v_m l$ と書くことができた（付録 C.3 参照）。乱流粘性では、この分子を乱流塊に置き換えて、乱流でいろいろな方向に運動する小さな塊の平均速度を見ることになる。したがって、この小さな塊の平均速度を分子の熱速度を見ているのに置き換えて、熱運動の速度 c_s で、平均自由行程 l 動くのが、何らかの速度で、スケールハイト h 動くのに対応すると考えるとなるといふこと、つまり h 動くと向きが変わることが起こっているとするといふことである。この「何らかの速度」を v_t とすると、分子粘性が $c_s l$ なら乱流粘性は $v_t h$ で $v_t = \alpha c_s$ とすると乱流の速度は音速より小さいので $\alpha < 1$ となる。

を用いる。ここで、 α_{act} は [75] による原始惑星系円盤の磁気流体シミュレーションの結果を用いている。また、層流領域の粘性パラメータ α_{inact} には、乱流減衰因子 $\gamma = 10^{-0.5} \simeq 0.316$ を α_{act} へ乗じた値を仮定した。

EI17 では、定常降着円盤内での磁気回転不安定性のオンセット条件を定量的に評価し、内側・外側乱流領域とその中間に位置する層流領域の位置を数値的に求めている。そこで、本研究では彼らの結果を用いて、それぞれの領域とその境界を降着率 \dot{M} の関数で表す。具体的には、彼らの数値計算の結果と一致するように境界の位置を \dot{M} のべき関数で、以下のように表現する：

$$r_{\text{in}} = 1.1 \times 10^3 \dot{M}^{0.47} \text{ AU}, \quad (4.12)$$

$$r_{\text{out}} = 6.6 \times 10^5 \dot{M}^{0.62} \text{ AU} \quad (4.13)$$

ここで、 r_{in} と r_{out} は、それぞれ内側乱流・層流境界と外側乱流・層流境界を表している。つまり、 r_{in} と r_{out} で挟まれた領域は、層流領域（デッドゾーン）であり、粘性パラメータ α は α_{inact} となる。他の領域は、全て乱流領域であり、 $\alpha = \alpha_{\text{act}}$ となる。式 (4.12) と式 (4.13) の係数と幕乗指数は、以下で示す EI17 の結果：

$$r_{\text{in}} = 1 \text{ AU}, r_{\text{out}} = 60 \text{ AU} \text{ for } \dot{M} = 10^{-6.5} M_{\odot}/\text{yr} \quad (4.14)$$

$$r_{\text{in}} = 0.2 \text{ AU}, r_{\text{out}} = 7 \text{ AU} \text{ for } \dot{M} = 10^{-8.0} M_{\odot}/\text{yr} \quad (4.15)$$

を再現するように決定されたものである。

4.2.2 ガス円盤赤道面温度

前項の式 (4.7)、および式 (4.8) の表式から、ガス円盤の面密度分布を求めるためには、ガス円盤の赤道面温度を見積もる必要がある。本研究では、[76] に基づく円盤赤道面温度の式を採用する：

$$T_{\text{m}}^4 = \left(\frac{3\dot{M}\Omega^2}{8\pi\sigma} \right) \left(\frac{3}{8} \frac{\alpha}{\alpha_{\text{act}}} \frac{\kappa\Sigma}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + T_{\text{irr}}^4 \quad (4.16)$$

ここで、 σ はステファン-ボルツマン定数、 κ はガス円盤の不透明度で、 T_{irr} は中心星による放射温度を表している。不透明度 κ [cm²/g] の具体的な値は、[77] より

$$\kappa = \begin{cases} 2 \times 10^{-4} T_{\text{m}}^2 & T_{\text{m}} < 150 \text{ K} \\ 1.15 \times 10^{18} T_{\text{m}}^{-8} & 150 \text{ K} \leq T_{\text{m}} < 180 \text{ K} \\ 2.13 \times 10^{-2} T_{\text{m}}^{3/4} & 180 \text{ K} \leq T_{\text{m}} < 1380 \text{ K} \\ 4.38 \times 10^{44} T_{\text{m}}^{-14} & T_{\text{m}} \geq 1380 \text{ K} \end{cases} \quad (4.17)$$

を採用する。また、 T_{irr} は [78] から、

$$T_{\text{irr}}^4 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon)T_*^4 \left(\frac{R_*}{r}\right)^2 \left[\frac{4}{3\pi} \left(\frac{R_*}{r}\right) + \frac{2}{7} \frac{H}{r} \right] \quad (4.18)$$

で与えられる。ここで、 ϵ は円盤のアルベド、 T_* , R_* は、中心星温度と半径を表している。本研究では、[78] に従い、 $\epsilon = 0.5$, $T_* = 4000$ K, $R_* = 3 R_\odot$ とした。

4.2.3 ガス円盤の全体構造

4.2.1 項と 4.2.2 項で示した式 (4.1) から式 (4.18) までを用いることで、ガス円盤面密度分布を求めることができる。

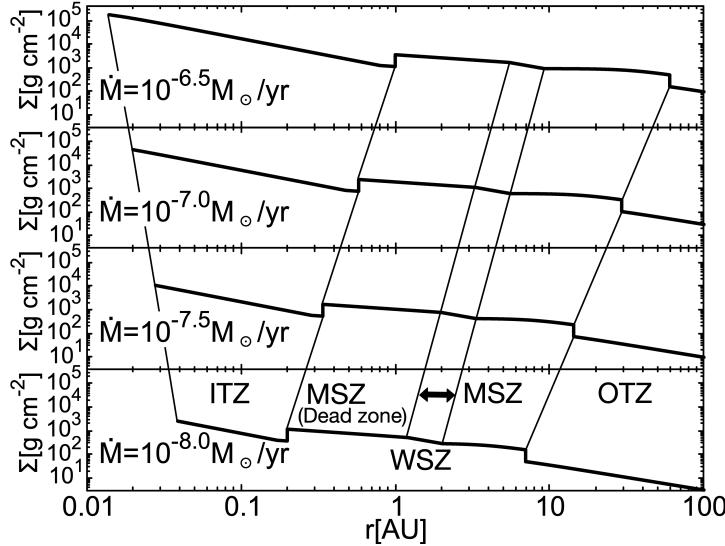


図 10 異なる降着率を持つガス円盤面密度の動径方向プロファイル：下パネルから順に、 $\dot{M} = 10^{-8.0} - 10^{-6.5} M_\odot/\text{yr}$ のガス面密度プロファイルを表している ([27] から引用)。

図 10 に、 $\dot{M} = 10^{-8.0} - 10^{-6.5} M_\odot/\text{yr}$ までの異なる 4 つの降着率を持つガス円盤の動径方向面密度プロファイルを示す。この図から、4 つ全てのガス円盤で面密度に二つの不連続境界が存在することがわかる。本研究では、これらの不連続境界を内側からそれぞれ inner dead zone boundary (IDB)、outer dead zone boundary (ODB) と呼ぶ。ここで、4.2.1 項で議論したように、これらの位置を求めるために、本研究では EI17 の数値計算の結果を用いたことに注意したい。さらに、図 10 からは、内側乱流領域 (inner turbulent zone: ITZ) と外側乱流領域 (outer turbulent zone: OTZ) の間に乱流抑制領域 (magnetorotational instability suppressed zone: MSZ) と呼ばれる層流領域が存在す

ることがわかる。MSZ 内には、水の昇華に伴うガス面密度の変化が見られる領域が存在する。本研究では、この領域を水が昇華する領域 (water sublimation zone; WSZ) と呼ぶ。この WSZ におけるガス面密度の変化は、式 (4.17) 中の円盤温度が 150–180 K の領域に対応する。

中心星近傍では、ガス円盤は中心星の磁場によって断ち切られてしまう。この円盤最内縁となる半径は、Alfvén 半径と呼ばれており、中心星の磁気圧と降着円盤のガス圧が釣り合う距離を示している。Alfvén 半径は降着率 \dot{M} の $-2/7$ 乗に比例するため、図 10 からもわかるように降着率の減少に伴って円盤外側領域へと移動していく。

本章冒頭で述べたように、我々が注目するのは地球型惑星形成領域内のダストリング形成、およびそのダストリング内の惑星形成過程である。従って、本研究では、円盤内側領域のガス面密度分布が不連続に変化する IDB 近傍を対象とする。IDB では、ガス面密度構造にギャップが生じることで、圧力バンプが形成されることでダストが集積し、効率的に惑星が形成されることが期待されている [8, 79]。

4.3 ガス円盤内でのダスト成長

本節では、4.2.1 節で与えたガス円盤内でのダスト進化過程を議論する。まず、4.3.1 項でダスト進化の物理と本研究で課す仮定を示す。次に、4.3.2 項と 4.3.3 項で、ダストの成長とドリフトモデルを与える。

4.3.1 ダスト進化モデルの物理と仮定

Inner dead zone boundary (IDB) の外側に分布するダストは、他のダストとの衝突・合体によって成長する。また、ダストは相互衝突による成長と同時に円盤ガスからガス抵抗を受け、中心星方向へとドリフトする [80]。このダストの内向きドリフトは、圧力バンプが存在する IDB まで続く [8, 79]。

本研究では、数値的にダストの成長とドリフトを同時に解くことで、IDB への質量流入を求める。4.3.3 項で詳しく議論するが、 $\mu\text{m} - \text{cm}$ サイズ (質量が $\sim 10^4$ g 以下) のダストでは、動径方向ドリフトタイムスケールがダスト成長タイムスケールより十分長い。したがって、我々のダスト進化モデルでは、小さなダストは相互衝突によってその場で成長し、ある臨界質量 m_c まで成長すると、ガス抵抗によって中心星方向へドリフトすると近似する。この近似は、[81] によって提案されたアイデアと類似したものである。彼らの研究では、ある円盤半径でダストがドリフト限界まで成長すると、ガスからデカップルし、円盤内向きへドリフトするという考えに基づいたペブル集積モデルを提案している。

上述したダスト成長とドリフトモデルの近似を用いることで、ダストの成長とドリフトを分離し、計算することが可能となる。従って、IDBへの質量流入タイムスケール t_{acc} は、ダストが m_c まで成長するのに要する時間と、動径方向ドリフトタイムスケールの和として定義することができる（詳しくは、付録 E 参照）。

4.3.2 ダスト成長モデル

ダストは、他の粒子との相互衝突によって成長する。従って、ダストの成長率は

$$\frac{dm_p}{dt} = \dot{m}_p = \pi a_p^2 \rho_p v_{\text{rel},pp} \left(1 + \frac{2Gm_p}{a_p v_{\text{rel},pp}^2} \right) \quad (4.19)$$

と表すことができる（3.2.2.1 目も参照）。ここで、 m_p はダスト質量、 a_p はダスト半径、 ρ_p はダストスケールハイトでのダストの空間密度、 $v_{\text{rel},pp}$ はダスト粒子間相対速度を表している。この式を時間積分することで、 m_p の時間進化を求める。以下では、式 (4.19) の各パラメータをどのように与えるかを見ていく。

式 (4.19) 中のダスト半径 a_p は、

$$a_p = \left(\frac{3m_p}{4\pi\rho_i} \right)^{1/3} \quad (4.20)$$

で与えられる。本研究では、IDB 外側で、かつ水の昇華領域 (WSZ) よりも内側の領域のダストを考慮するので、ダストの内部密度 ρ_i は、炭素質物質として適切な値となる 2 g cm^{-3} を用いる。

ダストスケールハイトでのダストの空間密度 ρ_p は、

$$\rho_p = \frac{\bar{f}\Sigma}{\sqrt{2\pi}z_p} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (4.21)$$

と表すことができる。ここで、 \bar{f} はガスダスト比で、 z_p はダストのスケールハイトを表している。ガスダスト比には、[10] で仮定されている値 $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}} = 2.5 \times 10^{-3}$ (for IDB $< r < \text{WSZ}$) を用いる。また、 $\bar{f}\Sigma$ はダストの面密度分布を表していることに注意する。

式 (4.21) 中のダストのスケールハイト z_p は、EI17 より

$$\frac{dz_p}{dt} = -v_{zp} \quad \text{for } z_p > H_p, \quad (4.22)$$

$$z_p = H_p \quad \text{for } z_p < H_p \quad (4.23)$$

と与える。ここで、 H_p と v_{zp} はダストの平衡スケールハイトとダストの沈降速度を表している。我々のモデルでは、初期条件としてダストのスケールハイト z_p にガススケール

ハイト H を用いる。また、ダストの平衡スケールハイト H_p は、[82] より

$$H_p = \left(1 + \frac{\Omega t_s}{\alpha_D}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\Omega t_s}{\Omega t_s + 1}\right)^{-\frac{1}{2}} H \quad (4.24)$$

とする。ここで、 Ω はケプラー角速度、 t_s はダストの stopping time、 α_D はガス円盤の有効粘性パラメータである。ダストの stopping time t_s は、3.2.1.1 目と付録 C、および [83] から、

$$t_s = \begin{cases} \frac{4\rho_i a_p^2}{9\rho_g v_{th} \lambda} & \text{for } (a_p > \frac{9}{4}\lambda), \\ \frac{\rho_i \dot{a}_p}{\rho_g v_{th}} & \text{for } (a_p \leq \frac{9}{4}\lambda), \end{cases} \quad (4.25)$$

で与えられる。ここで、 ρ_g 、 v_{th} と λ は、円盤半径 r で高さ z におけるガス密度、ガスの熱速度、および平均自由行程を表している。これらは、3.1.1 項や付録 C より、それぞれ

$$\rho_g = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi}H} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right), \quad (4.26)$$

$$v_{th} = \sqrt{\frac{8k_B T_m}{\pi m_g}}, \quad (4.27)$$

$$\lambda = \frac{m_g}{\sigma_{col} \rho_g} \quad (4.28)$$

と書ける。ここで、 m_g はガス分子の質量、 $\sigma_{col} = 2.0 \times 10^{-15} \text{ cm}^2$ は分子の衝突断面積を表している。また、式 (4.22) 中のダストの沈降速度 v_{zp} は、3.2.1.3 目の議論を基に無次元量であるストークス数を用いて

$$v_{zp} = \frac{St}{St + 1} z_p \Omega \quad (4.29)$$

で与えられる。

ダスト間相対速度 $v_{rel,pp}$ は、[84] より

$$v_{rel,pp} = \sqrt{v_B^2 + v_{rpp}^2 + v_{\phi pp}^2 + v_{zpp}^2 + v_{turb,pp}^2}, \quad (4.30)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{16}{\pi} \frac{k_B T_m}{m_p}}, \quad (4.31)$$

$$v_{rpp} = \left(\frac{2St}{1 + (St)^2} - \frac{St}{1 + (0.5St)^2} \right) \eta r \Omega, \quad (4.32)$$

$$v_{\phi pp} = - \left(\frac{(St)^2}{1 + (St)^2} - \frac{(0.5St)^2}{1 + (0.5St)^2} \right) \eta r \Omega, \quad (4.33)$$

$$v_{zpp} = \left(\frac{St}{1 + St} - \frac{0.5St}{1 + 0.5St} \right) z_p \Omega, \quad (4.34)$$

$$v_{\text{turb,pp}} = \sqrt{\alpha_D} c_s \times \begin{cases} \text{Re}^{1/4} \Omega |0.5 t_s| & \text{for } \text{St} < 8\text{Re}^{-1/2} \\ \sqrt{2\text{St}} & \text{for } 8\text{Re}^{-1/2} \leq \text{St} < 1 \\ \sqrt{\frac{1}{1+\text{St}} + \frac{1}{1+0.5\text{St}}} & \text{for } 1 \leq \text{St}, \end{cases} \quad (4.35)$$

と表される。ただし、 $v_B, v_{rpp}, v_{\phi pp}, v_{zpp}$ と $v_{\text{turb,pp}}$ は、それぞれブラウン運動速度、ダスト間動径方向相対速度、ダスト間方位角方向相対速度、ダスト間鉛直方向相対速度とダスト間乱流相対速度を表している。但し、本モデルでは [83] に従い、ダスト間相対速度を t_s と $0.5t_s$ を持つ 2 粒子間の速度差で表すことができると仮定している。式 (4.24) や式 (4.35) の有効粘性パラメータ α_D は、EI17 より

$$\alpha_D = \begin{cases} 0 & \text{for } \rho_{\text{pm}} < \rho_{\text{gm}} \\ 0.19 \left(\frac{\eta r}{H} \right) \min(\text{St}, 1) & \text{for } \rho_{\text{pm}} > \rho_{\text{gm}}, \end{cases} \quad (4.36)$$

で与えられる。ここで、 η , ρ_{pm} , ρ_{gm} はそれぞれ、ガス円盤の圧力勾配を特徴づける無次元量、ダストとガスの円盤赤道面での空間密度を表している。これらは 3.1.1 項の議論から

$$\eta = -\frac{1}{2} \frac{c_s^2}{r^2 \Omega^2} \left(\frac{\partial \log(\rho_{\text{gm}} T_m)}{\partial \log r} \right), \quad (4.37)$$

$$\rho_{\text{pm}} = \frac{\bar{f}\Sigma}{\sqrt{2\pi} z_p}, \quad (4.38)$$

$$\rho_{\text{gm}} = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi} H} \quad (4.39)$$

と表される。また、式 (4.36) 中の乱流のレイノルズ数は、EI17 より

$$\text{Re} = \frac{2\alpha_D c_s^2}{\Omega \lambda v_{\text{th}}} \quad (4.40)$$

で与えられる。最後に、ダストサイズが μm から cm サイズと小さい場合、EI17 で考慮されているような粘性的巻き上げ速度 v_{VS} は、他の相対速度速度に比べて十分小さくなるため、我々のダスト成長モデルでは v_{VS} を考慮していないことに注意する。

式 (4.20) から式 (4.40) までを用いて、式 (4.19) を積分することで、ダスト質量の時間進化を求める。積分法には、オイラー法を採用し、タイムステップは

$$\Delta t = \begin{cases} 10^{-1} \text{ yr} & \text{for } m_p > 10^{-4} \text{ g} \\ 10^{-3} \text{ yr} & \text{for } m_p < 10^{-4} \text{ g} \end{cases} \quad (4.41)$$

で与える。

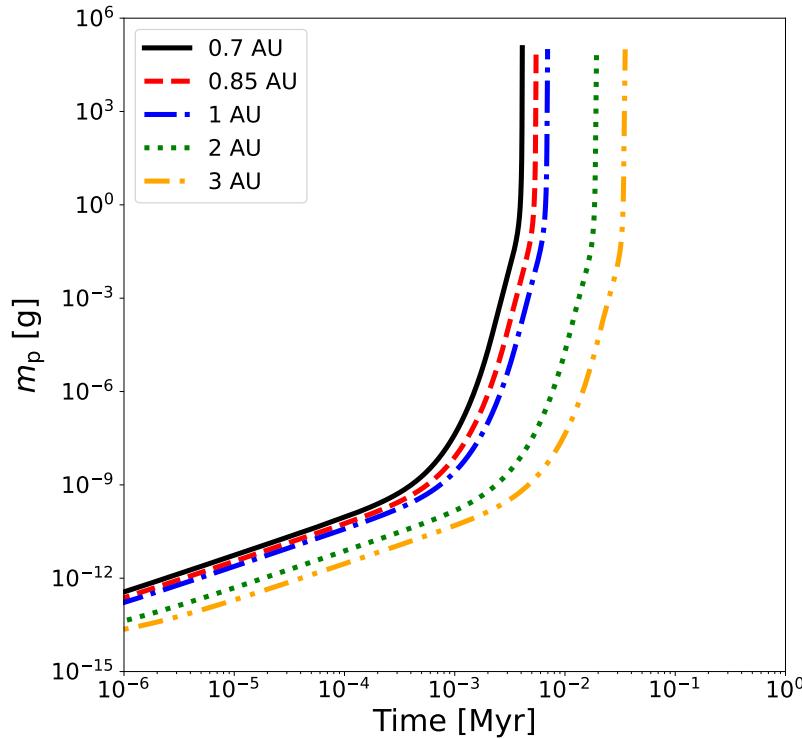


図 11 ダスト質量 m_p の時間進化：各線は、異なる初期位置を持つダストの成長を表している。本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している ([27] より改変)。

図 11 に、上述したダスト成長モデルを用いたダスト質量の時間進化を示す。本モデルでは、原始惑星系円盤内の降着率 \dot{M} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ と仮定している。また、図中の異なる曲線は各円盤半径でのダスト成長過程を表している。全ての計算において、初期ダストサイズは $0.1\mu\text{m}$ に設定している。この図から、ダストが臨界質量 m_c まで成長するタイムスケールを各円盤半径で求めることができる。

4.3.1 項で議論したように、本研究では簡単のために、初期にダストはダスト間相互衝突によってその場で成長し、 m_c まで成長するとガス抵抗を効率的に受けることで中心星方向へドリフトを開始すると仮定している。しかし、少なくとも我々のモデルでは、これらの仮定は単純化されすぎている可能性も考えられる。そこで、以下ではダストのドリフトを考慮した成長モデルの結果を示し、ダストのその場成長の妥当性を示す。

ダスト成長過程にダストの動径ドリフト速度を組み込むのは比較的容易であり、ダストの動径移動距離を式 (4.19) の積分と同時に計算して、ダスト位置を各タイムステップで

更新することで再現できる。ここで、ダストの動径ドリフト速度は、[54, 55] より

$$v_{rp} = \frac{2\text{St}}{1 + \text{St}^2} \eta r \Omega \quad (4.42)$$

で与えられる。

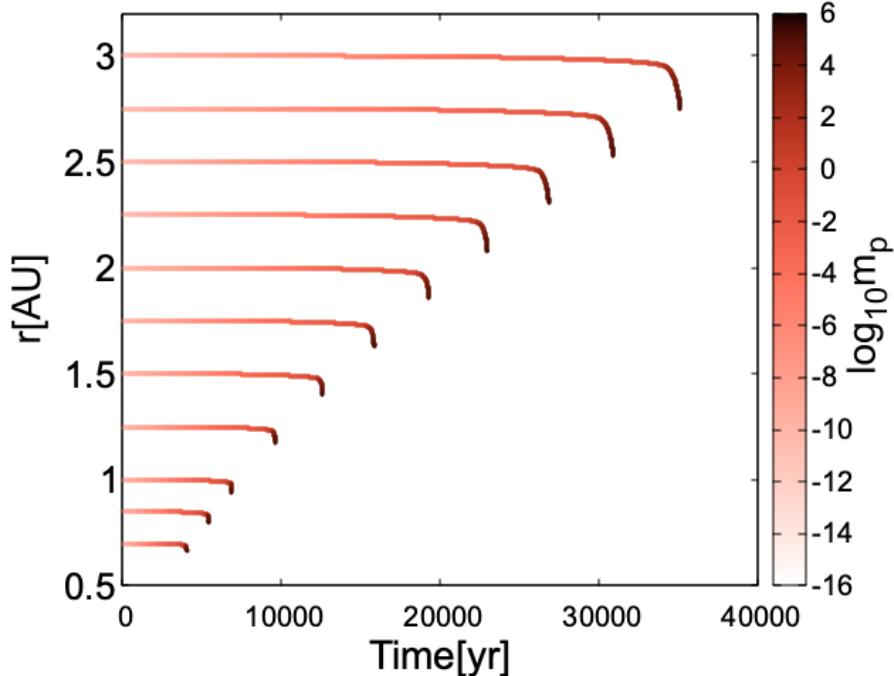


図 12 ダスト動径距離の時間進化：各線は、異なる初期位置を持つダストの成長を示しており、各線の色は各時刻でのダスト質量を表している。本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している ([27] から引用)。

図 12 と図 13 に、時間とダスト質量の関数で表したダスト動径距離 r_p の進化をそれぞれ示す。図 12 において、各曲線の色はダスト質量の常用対数を取った値を表している。一方で、図 13 では、各曲線の色は時間を表している。これらの図から、ダスト質量が $\sim 10^2 \text{ g}$ を超えると、ダストの動径方向ドリフトが顕著になる。しかし、それと同時にダストの成長率も非常に早くなることがわかる。つまり、ダスト成長に対して動径ドリフトが卓越する臨界質量 m_c は、図 12、および図 13 から $m_c \sim 10^{2-5} \text{ g}$ 程度であることがわかる。

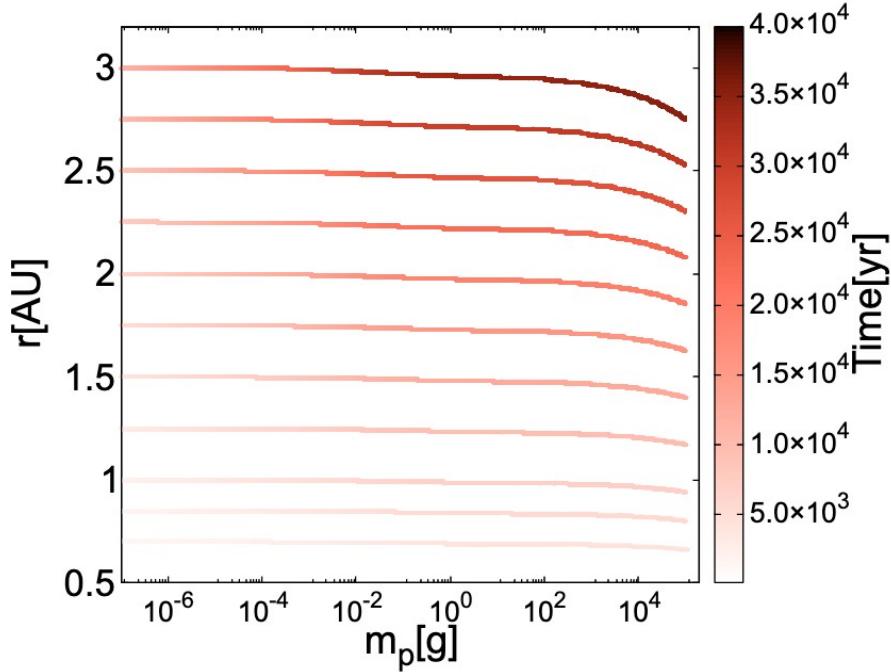


図 13 中心星-ダスト間距離を質量の関数で示した図：各線は、異なる初期位置を持つダストの成長を示しており、各線の色は時間を表している。本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している ([27] から引用)。

4.3.3 ダストの成長とドリフトタイムスケール

4.3.2 項では、ダスト進化プロセスはダストのその場成長と動径ドリフトの 2 段階に分けて考えることができる事を示した。本項では、ダスト成長タイムスケールとドリフトタイムスケールを比較することで、臨界質量 m_c の具体的な値を見積もる。

式 (4.19) と式 (4.42) を用いると、ダスト成長タイムスケール t_{growth} とダストドリフトタイムスケール t_{drift} は、

$$t_{\text{growth}} = \frac{m_p}{\frac{dm_p}{dt}} = \frac{m_p}{\pi a_p^2 \rho_p v_{\text{rel,pp}} \left(1 + \frac{2Gm_p}{a_p v_{\text{rel,pp}}^2} \right)}, \quad (4.43)$$

$$t_{\text{drift}} = \frac{(r_p - r_{\text{in}})}{v_{\text{rp}}} = (r_p - r_{\text{in}}) \frac{1 + \text{St}^2}{2(\text{St})\eta r \Omega} \quad (4.44)$$

と書き表すことができる。ここで、 r_p はダストの中心星からの距離で、 r_{in} は式 (4.12) で与えられる IDB の位置である。

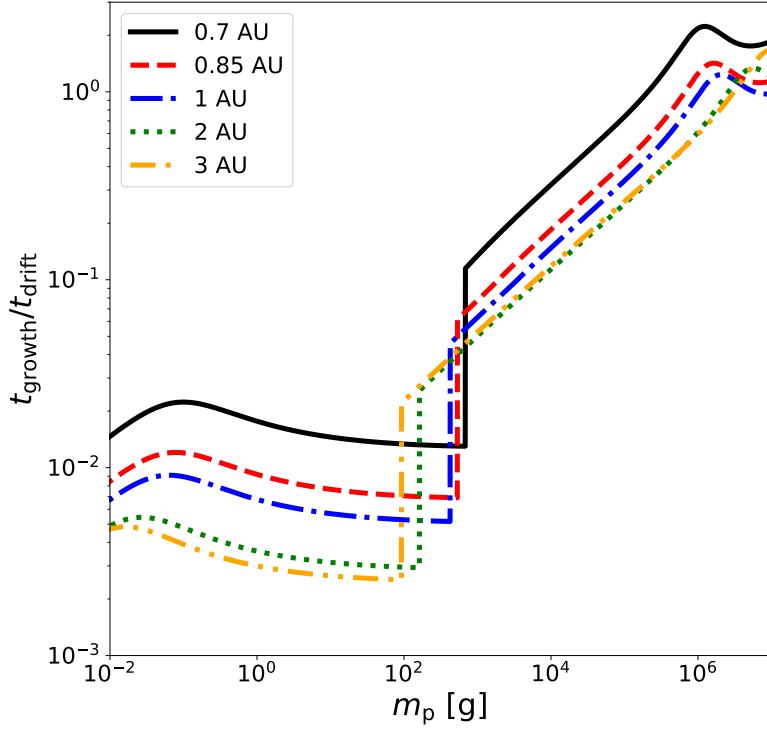


図 14 ダスト成長タイムスケールとダストドリフトタイムスケールの比を質量の関数で示した図：各線は、異なる初期位置を持つダストの結果を表している。本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している ([27] より改変)。

図 14 は、ダスト成長タイムスケール t_{growth} とダストドリフトタイムスケール t_{drift} の比をダスト質量の関数で表した図である。この図から、ダストの位置に依らず $m_p < 10^5$ g である限りは、常に t_{drift} の方が t_{growth} よりも長いことがわかる。従って、本研究では、ダストのドリフトが開始する臨界質量 m_c を 10^5 g と仮定し、 m_c を超えるダストをペブルと見做す。

以上までの議論から、ダストが m_c まで成長するのに要する時間と、動径方向ドリフトタイムスケールを円盤の各半径で求めることができる。この 2 種類のタイムスケールの和を質量流入タイムスケール t_{acc} と定義して、 t_{acc} とダスト面密度分布を用いることで、質量降着を求めることができる。図 15 に、IDB への累積質量降着量を時間の関数で表した結果を示す。我々のモデルでは、IDB よりも外側、かつ WSZ よりも内側に存在する全てのダストが最終的に IDB へ降着すると仮定していることから、IDB への質量降着は、時

間 t の関数として $t = 3.7 \times 10^4$ 年頃まで継続することが、図 15 からわかる（詳しくは、付録 E 参照）。

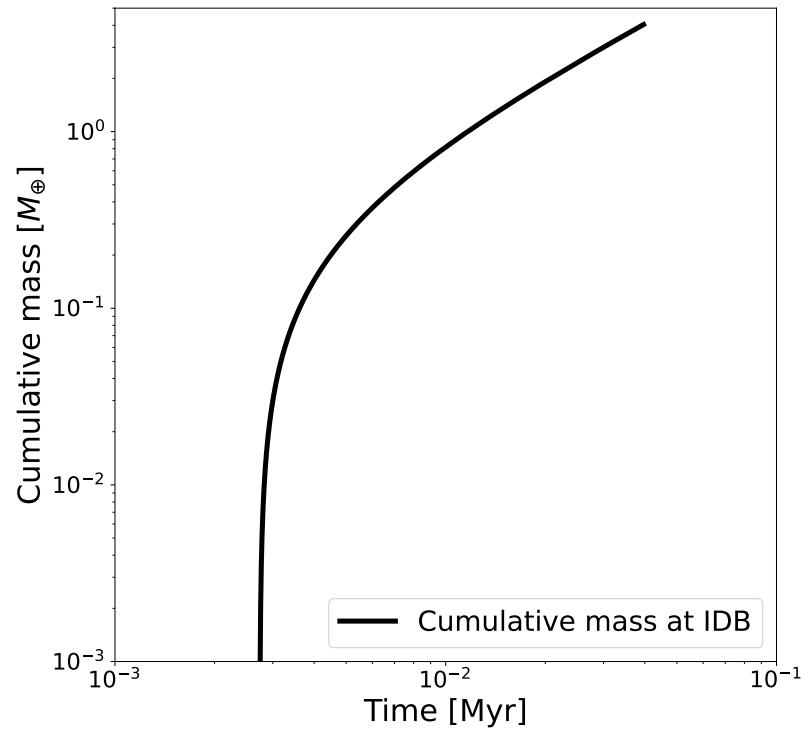


図 15 IDB への累積降着質量を時間の関数で示した図：本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している ([27] より改変)。

5 ダストリング形成モデルの N 体シミュレーション

4.2 節と 4.3 節で議論したガス円盤モデルとダスト成長・ドリフトモデルを用いることで、理論的に IDB へのダスト降着タイムスケールを見積もることができる。IDB へダストが降着すると、IDB 近傍のダスト密度が高くなり、その結果、IDB 近傍で効率的に惑星が形成される。この惑星形成段階は、天体間の重力相互作用が支配的となる非線形進化過程である。従って、この段階からは N 体シミュレーションを用いて、惑星形成過程を調べていく。

本章では、まず 5.1 節で、本研究で使用する N 体シミュレーションコード GPLUM[14] の概要を説明する。そして、5.2 節では、4.2 節と 4.3 節で構築した円盤モデルとダスト進化モデルをどのように GPLUM へ実装するかを示す。また、5.3 節では、 N 体シミュレーションの詳細な初期条件を説明する。

5.1 N -body simulation code: GPLUM

GPLUM は、惑星系形成を研究するために開発された並列 N 体シミュレーションコードである。本コードは、大規模並列粒子法シミュレーションのための汎用高性能ライブラリ FDPS[85, 86] を用いて、大規模なスーパーコンピュータ上でも高い性能を実現している。以下で、GPLUM で使用されている数値スキームについて簡単に説明していく。

GPLUM は、微惑星系 N 体シミュレーションを大規模に行っていくために、ハミルトニアン分割に基づくハイブリッド積分器である particle-particle particle-tree (P^3T) 法を使用している [87]。 P^3T 法では、系のハミルトニアンを粒子のカットオフ半径によって 2 つのパートへ分割する。このカットオフ半径を用いることで、2 粒子間の重力を短距離パート (short-range part) と 長距離パート (long-range part) に分割することができる。短距離パートと長距離パートは、それぞれハードパートとソフトパートと呼ばれる。

ハードパートは、中心星による重力ポテンシャルと粒子の短距離相互作用で構成されており、独立時間刻み法 [88] を用いた 4 次エルミート法 [89] によって積分される。カットオフ半径内に近傍粒子が存在しない場合は、中心星まわりのケプラー軌道の解析解が与えられる。ソフトパートは、FDPS で利用可能な Barnes-Hut Tree scheme[90] を用いて計

算される。P³T 法で使用されるハミルトニアンのハードパートとソフトパートは、

$$H = H_{\text{Hard}} + H_{\text{Soft}}, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{Hard}} &= \sum_i \left[\frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} - \frac{GM_* m_i}{r_i} \right] \\ &\quad - \sum_i \sum_{j>i} \frac{GM_* m_i}{r_{ij}} [1 - W(r_{ij}; r_{\text{out}})], \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$H_{\text{Soft}} = - \sum_i \sum_{j>i} \frac{GM_* m_i}{r_{ij}} W(r_{ij}; r_{\text{out}}), \quad (5.3)$$

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \quad (5.4)$$

で与えられる。ここで、 m_i , \mathbf{p}_i , \mathbf{r}_i , r_{out} と $W(r_{ij}; r_{\text{out}})$ はそれぞれ、 i 番目の粒子の質量、運動量、位置とカットオフ半径、カットオフ関数を表している。

第 i 番目と j 番目の粒子間のカットオフ半径は、

$$\begin{aligned} r_{\text{out},ij} &= \max(\tilde{R}_{\text{cut},0} r_{\text{Hill},i}, \tilde{R}_{\text{cut},1} v_{\text{ran},i} \Delta t, \tilde{R}_{\text{cut},0} r_{\text{Hill},j}, \\ &\quad \tilde{R}_{\text{cut},1} v_{\text{ran},j} \Delta t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{R}_{\text{cut},0}$ と $\tilde{R}_{\text{cut},1}$ は任意パラメータで、 $r_{\text{Hill},i}$, $r_{\text{Hill},j}$ と $v_{\text{ran},i}$, $v_{\text{ran},j}$ は i 番目と j 番目の粒子のヒル半径とランダム速度の二乗平均平方根を表している。ヒル半径とランダム速度に関しては、付録 D.2 と 3.2.2.1 目を参照されたい。

GPLUM は、[91] と同じカットオフ関数を用いており、

$$W(y; \gamma) = \begin{cases} \frac{7\gamma^6 - 9\gamma^5 + 45\gamma^4 - 60\gamma^3 \ln \gamma - 45\gamma^2 + 9\gamma - 1}{3(\gamma - 1)^7} y, & (y < \gamma), \\ f(y; \gamma) + [1 - f(1; \gamma)y], & (\gamma \leq y < 1), \\ 1, & (1 \leq y), \end{cases} \quad (5.6)$$

と定義される。ここで、関数 $f(y; \gamma)$ は

$$f(y; \gamma) = \{-10/3y^7 + 14(\gamma + 1)y^6 - 21(\gamma^2 + 3\gamma + 1)y^5 \quad (5.7)$$

$$+ [35(\gamma^3 + 9\gamma^2 + 9\gamma + 1)/3]y^4 \quad (5.8)$$

$$- 70(\gamma^3 + 3\gamma^2 + \gamma)y^3 \quad (5.9)$$

$$+ 210(\gamma^3 + \gamma^2)y^2 - 140\gamma^3 y \ln y \quad (5.10)$$

$$+ (\gamma^7 - 7\gamma^6 + 21\gamma^5 - 35\gamma^4)\}/(\gamma - 1)^7 \quad (5.11)$$

で与えられる。カットオフ関数の値は、 r_{ij} がカットオフ半径よりも大きい場合 ($r_{ij} > r_{\text{out},ij}$) に、 $W(y; \gamma) = 1$ となる。従って、ハードパートの粒子間重力相互作用は、 $r_{ij} < r_{\text{out},ij}$ の場合のみに働くことがわかる。

GPLUM は、上述したカットオフ半径を各粒子ペアで設定することで、全ての粒子ペアに対して共通のカットオフ半径を用いていた従来の P³T 法よりも効率的にハミルトニアンを分割することが可能になっている。このカットオフの決め方は、individual cut-off method と呼ばれ、GPLUM で初めて導入された手法である。GPLUM は、individual cut-off method を採用した P³T 法を用いることで、大規模な粒子数 ($N \sim 10^6$)、計算範囲 (数 au 以上) で惑星系形成過程をシミュレーションすることができる。

5.2 N 体シミュレーションへのダストリング形成モデルの実装

本研究の目的は、4.3 節で議論したダストのその場成長とドリフトを考慮した原始惑星系円盤内で、どのように惑星が形成されるのかを明らかにすることである。そこで、本節では次の 3 つの効果をどのように GPLUM へ実装するかを順に説明する：

1. ダストのその場成長
2. ガス抵抗によるダストドリフト
3. IDB 近傍での惑星形成過程

ダストのその場成長

本研究で行う N 体シミュレーションでは、4 章で議論した円盤面密度分布に合うように、各シミュレーションの粒子数に応じて、初期粒子質量 $m_{\text{p,init}}$ を 10^{22} g から 10^{24} g に設定する。これらの粒子は、それぞれ m_c の質量を持つペブル群を表す超粒子と仮定する。これらの粒子は、4.3.1 節で求めたダストが m_c まで成長するタイムスケールに達するまで、配置した軌道上で運動させることで、ペブルのその場成長を再現する (付録 E も参照)。この粒子のその場軌道運動を再現するためには、粒子間の重力相互作用の影響を抑える必要がある。そこで、本研究ではダストのその場成長段階での粒子間重力相互作用の影響を最小化するために、計算開始と同時に各粒子質量を GPLUM で扱える最小質量 10^{14} g に再設定し直す。さらに、ダスト質量が m_c に成長するタイムスケールまでは、各粒子に作用するガス抵抗は無視する。以上の仮定を課すことで、我々はダストのその場成長を GPLUM 内で再現している。

ガス抵抗によるダストドリフト

原始惑星系円盤内の各位置で、ダスト質量が m_c にまで成長するタイムスケールに達す

ると、そこからはダスト降着タイムスケールに一致するように粒子へガス抵抗を与えることで、ダストのドリフト、及び IDB への質量流入を再現する（付録 E も参照）。この際、各粒子へ与えるガス抵抗の表式は、Epstein drag と Stokes drag における stopping time が等しくなるダストサイズで場合分けすることで、

$$F_{\text{drag}} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \rho_g a_p^2 c_s v_{\text{rel,pp}} & \text{For Epstein region } (a_p < \frac{9}{4}\lambda) \\ -6\pi\rho_g\nu a_p v_{\text{rel,pp}} & \text{For Stokes region } (a_p > \frac{9}{4}\lambda) \end{cases} \quad (5.12)$$

で与えられる（3.2.1.1 目、および付録 C 参照）。ここで、式 (5.12) 中の a_p は粒子をペブルの超粒子と仮定していることから、質量 m_c の粒子半径であることに注意する。

IDB 近傍での惑星形成過程

本研究では、IDB 近傍へのダスト集積過程を再現するために、粒子が IDB を通過するとその粒子に作用するガス抵抗を切ることで粒子のドリフトを止める。また、その際に粒子質量を 10^{14} g から、初期条件で与えた実際の質量に戻すことに注意する。これは、IDB を通過した粒子が、IDB 近傍に集積することで引き起こされる重力不安定によって、初期条件で与えた質量 ($\sim 10^{22-24}$ g) を持つ微惑星まで成長したと扱うことと等価である（e.g., [8, 79]）。同様に、動径方向にドリフトしている粒子（ペブル群）が、既に IDB を通過した粒子（微惑星）と衝突合体する場合、ドリフト中の粒子質量を微惑星との衝突合体前に初期条件で与えた質量へ変換するような処理を行っている。ここで、本研究でメインに行った N 体シミュレーションでは、粒子間衝突に完全合体の仮定を用いていることに注意する。そこで 6 章では、完全合体の仮定の下でのダストリング形成モデルによる惑星形成過程の結果を示し、ダストリング形成モデルにおける衝突破壊の効果に関しては、7.1 節で改めて議論する。

5.3 初期条件設定

本研究では、 3×10^3 体から 1×10^6 体の粒子を原始惑星系円盤内の $r_{\text{in}} = 0.58$ AU $\leq r \leq r_{\text{WSZ}} = 3.28$ AU までに配置して惑星系形成 N 体シミュレーションを行う。以下で、ダスト粒子の初期配置について詳しく説明していく。

円盤内の r_{in} から r_{WSZ} までに存在するダストの総質量は、

$$M_{\text{d,tot}} = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{WSZ}}} 2\pi r \Sigma_{\text{p}} dr \quad (5.13)$$

で表すことができる。この式を用いることで、各シミュレーションで用いる粒子質量を、

$$m_p = \frac{M_{d,tot}}{N} \quad (5.14)$$

で与えることができる。また、それぞれの粒子の動径方向成分（中心星からの距離） r は、

$$M(r) = \int_{r_{i-1}}^{r_i} 2\pi r \Sigma_p dr = m_p \quad (5.15)$$

から、求めることができる。ここで、 $r_1 = r_{in}$ であることに注意する。

Name	$\bar{f}(\bar{f}_{MMSN})$	$M_{tot}(M_\oplus)$	N_p	$m_{p,init}(M_\oplus)$	$m_{p,max}(M_\oplus)$	$N_{frag}(\text{col}^{-1})$
N120Kc1	1	4.07	1.2×10^5	3.3×10^{-5}	2.4	0
N120Ka	0.25	1.02	1.2×10^5	8.2×10^{-6}	0.49	0
N120Kb	0.5	2.03	1.2×10^5	4.1×10^{-6}	1.4	0
N120Kd	2	8.14	1.2×10^5	6.6×10^{-5}	5.4	0
N120Ke	4	16.27	1.2×10^5	1.3×10^{-4}	7.2	0
N60Kc	1	4.07	6.0×10^4	6.6×10^{-5}	2.6	0
N200Kc	1	4.07	2.0×10^5	2.0×10^{-5}	2.1	0
N1Mc	1	4.07	1.0×10^6	4.0×10^{-6}	2.5	0
N120Kc2	1	4.07	1.2×10^5	3.3×10^{-5}	2.7	0
N120Kc3	1	4.07	1.2×10^5	3.3×10^{-5}	2.5	0
N3Kcol0	1	4.07	3.0×10^3	1.3×10^{-3}	1.8	0
N3Kcol3	1	4.07	3.0×10^3	1.3×10^{-3}	1.2	3
N3Kcol10	1	4.07	3.0×10^3	1.3×10^{-3}	1.0	10

表 1 List of models

表 1 に、本研究で行ったシミュレーションの初期条件をリストする。表中の値は、左列からそれぞれモデル名、ガスダスト比、総ダスト質量、粒子数、初期粒子質量、各シミュレーションで形成された最大惑星質量、衝突あたりの最大破片数を表している。ただし、ガスダスト比は MMSN のガスダスト比を基準に、質量は地球質量を基準としている。本研究では、粒子数 $N = 1.2 \times 10^5$ で、ガスダスト比 $\bar{f} = 1$ のモデル N120Kc1 をリファレンスモデルと呼ぶ。

本研究では、リファレンスモデルを基準にして、4 つのモデルクラスを作成した。それぞれのクラスは

1. ガスダスト比 \bar{f} を 0.25 から 4 まで変化させたモデル：表中一番上の N120Kc から N120Ke
2. 粒子数を 6×10^4 から 1×10^6 まで変化させたモデル：表中一番上の N120Kc1 と N60Kc から N1Mc
3. リファレンスモデルと同じパラメータで、粒子初期位置の方位角成分のみが異なるモデル：表中一番上の N120Kc1 と N120Kc2、N120Kc3
4. 衝突破壊を考慮したモデル：N3Kcol0 と N3Kcol3、N3Kcol10

で与えられる。

6 結果

ここまでに、ダストリング形成メカニズムを考慮したガス円盤モデルとその円盤内のダスト進化モデルの構築手法、およびそれらをどのように N 体シミュレーションへ実装するかを見てきた。本章では、ダストリング形成モデルの N 体シミュレーション結果を示していく。但し、本章では粒子間衝突に完全合体の仮定を課したモデルの結果のみを示す。衝突破壊の効果に関しては、7.1 節を参照されたい。

6.1 節では、リファレンスマルク (N120Kc1) の結果を用いて、累積質量分布、最大質量天体、および天体平均質量の時間進化を示し、ダストリング形成モデルでの惑星形成過程をまとめた。6.2 節では、ダストガス比を変化させたクラスの結果を用いて、円盤質量が惑星形成過程に及ぼす影響を示す。そして、6.3 節では、粒子数を変化させたクラスの結果を比較し、ダストリング形成モデルの質量分解能依存性を示す。

6.1 ダストリング形成モデルにおける惑星形成シナリオ

図 16 に、モデル N120Kc1 の各時刻におけるスナップショットを示す。横軸と縦軸は、それぞれ天体軌道長半径と離心率を表しており、各点のサイズは粒子半径に比例している（点のサイズ $\propto m_p^{1/3}$ ）。図 16 の左上パネルから、 $t = 4410$ 年と非常に早い段階で水星質量程度の天体が形成されていることがわかる。本モデルでは最終的に、IDB 近傍に地球質量を超える惑星が 1 個形成され、その周りにそれよりも少し小さい惑星が 2 個形成される。

図 17 に、モデル N120Kc1 で形成される 3 つの惑星の質量時間進化を示す。この図から、 $t = 2.16 \times 10^4$ 年に最大質量天体質量（実線）の急激な成長が起こっていることがわかる。詳しく解析すると、この瞬間に $1.0 M_\oplus$ の天体と $0.36 M_\oplus$ の天体が衝突していることがわかった。他にも、類似する惑星の成長過程が 2 番目に大きな天体でも、 $t = 3.9 \times 10^4$ 年に生じていることがわかる。この瞬間には、 $0.66 M_\oplus$ の天体と $0.35 M_\oplus$ の天体が衝突している。これら 2 回の衝突は惑星の巨大衝突であり、その結果として月が形成される可能性を示すものである。

図 18 に、モデル N120Kc1 において微惑星サイズ以上の粒子数（左図）、および平均粒子質量（右図）の時間進化を示す。図 18 の左図から、ほぼ一定数を保っていた粒子数が、 $t = 3.7 \times 10^4$ 年に急激に減少することがわかる。これは、4.3.3 項で議論したデッドゾーン内の WSZ よりも内側のペブルが全て降着するまでのタイムスケールと一致している。

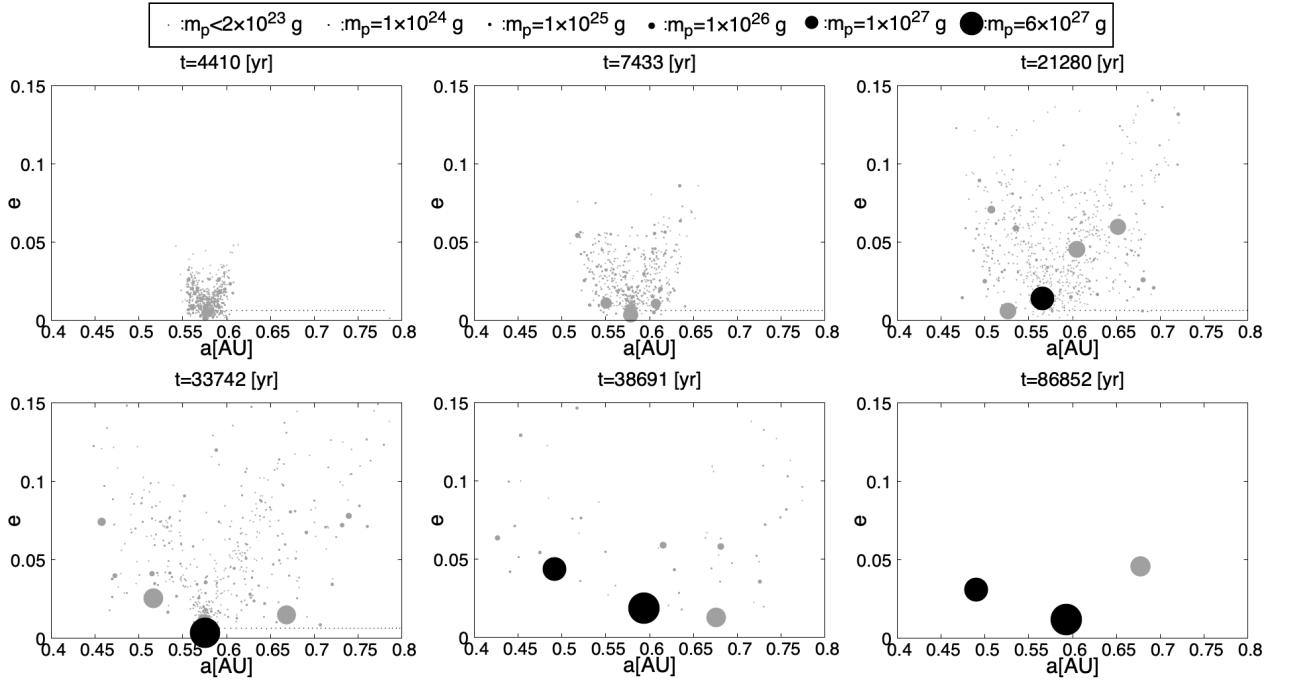


図 16 モデル N120Kc1 の結果を左上から右下まで時系列で見たスナップショット：横軸と縦軸は、それぞれ軌道長半径と離心率を表しており、粒子サイズは粒子半径に比例している ($\propto m_p^{1/3}$)。また、粒子サイズの質量区分を凡例に付している。灰色点（黒点）は、地球質量未満（地球質量以上）の天体を示している。（[27] から引用）。

したがって、この急激な粒子数減少はペブル降着が終焉を迎えることで IDB へのダスト供給が止まり、これ以上の微惑星形成が阻害されることを示している。図 18 の右図からは、ペブル降着によるダスト供給が存在する限り、平均的に粒子はほぼ線形的に成長することがわかる。しかし、 $t = 3.7 \times 10^4$ 年にダスト供給が終わると、粒子数の急激な減少に伴って平均粒子質量が急激に増加することがわかる。また、平均粒子質量進化の後期段階は、巨大衝突による急激な惑星の質量増加によって特徴づけられることもわかる。但し、図 18 に見られる急激な変化は、上述したようにダスト供給が終焉を迎えたことによる効果であり、3.2.2 項で議論したような惑星成長モードの遷移を表しているわけではないことに注意する。

図 19 に、図 16 で示したスナップショットと同時刻の累積質量分布を示す。この図から、我々のモデルにおける累積質量分布の進化は、ガス抵抗や Type-I migration によるダストや惑星移動を考慮していない MMSN を仮定する古典的標準理論と類似していることがわかる [62, 92, 93]。図 19 から、本モデルでは初めにべき乗分布が形成され（赤色実線）、その後に周囲よりもわずかに大きくなった少数の天体が暴走的に成長することで、

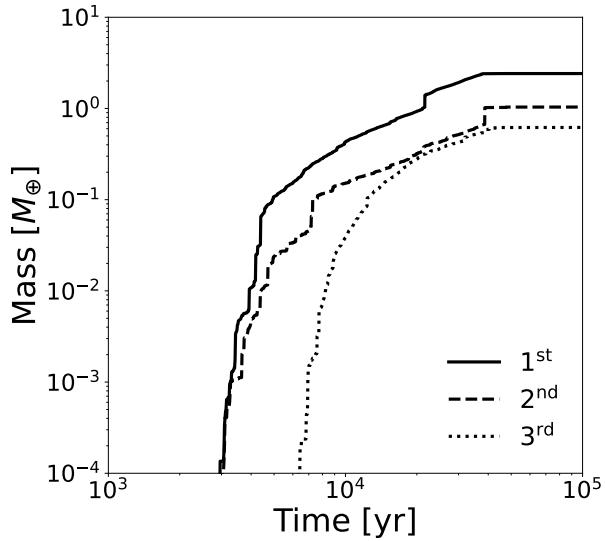


図 17 モデル N120Kc1 で形成される 3 つの惑星質量の時間進化：実線、破線、点線はそれぞれ 1 番目、2 番目と 3 番目に大きな天体を表している ([27] より改変)。

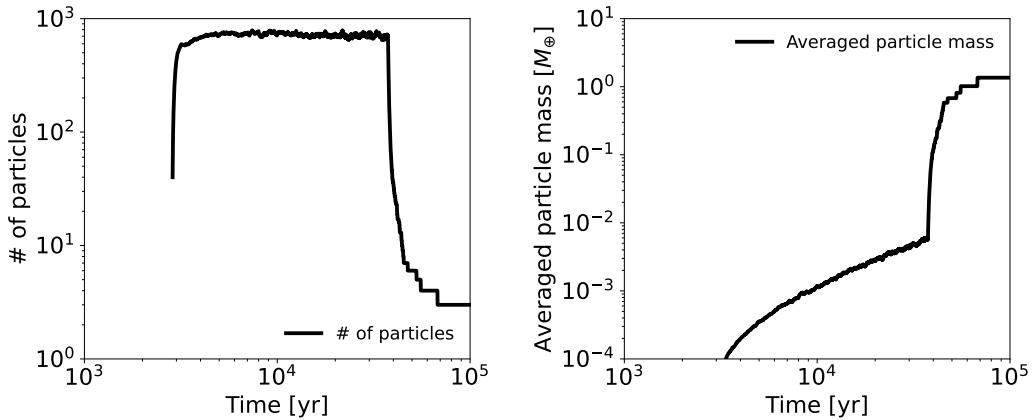


図 18 モデル N120Kc1 における微惑星サイズ以上の粒子数 (左) と平均粒子質量の時間進化 (右) : ([27] より改変)。

他の小質量天体を置いていく (青色点線から紫点線)。そして、ペブルの供給が終焉を迎えると、これらの少数の大質量天体が残された微惑星を食べ尽くすことで、惑星系が形成される (橙色点線と黒色実線)。本モデルの累積質量分布進化過程は古典的標準理論と類似するが、その場成長を仮定する古典的標準理論と違い円盤内の特定箇所 (i.e., 圧力バン

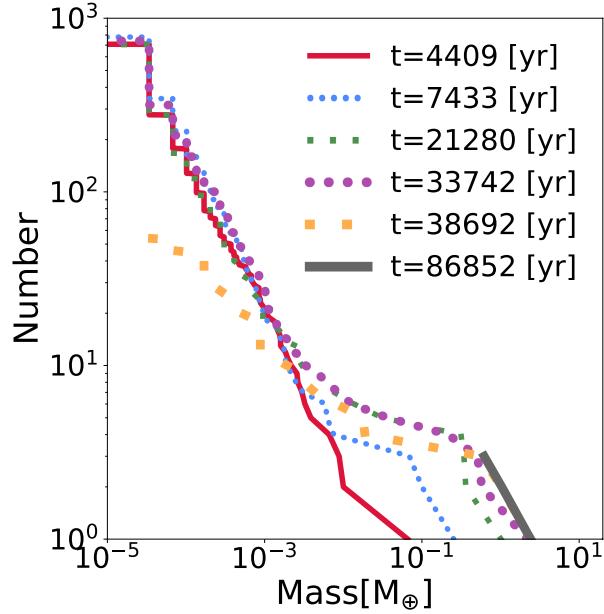


図 19 モデル N120Kc1 における累積質量分布の時間進化 (但し、IDB へ降着していないダストは含まれていない) ([27] から引用)。

プ) へダストが集積することで、地球型惑星の形成タイムスケールは古典的標準理論に比べて非常に早くなる (3.3 節参照)。これは、円盤外側から IDB へペブル集積が起こる限り、IDB 近傍で惑星が効率的に形成されることを示している。

6.2 ダスト円盤質量が惑星形成過程に及ぼす影響

一般に、巨大惑星の存在頻度は、原始惑星系円盤の金属量が多いほど上がると予想されている (2.2.3 項,[94])。そこで本節では、ガスダスト比を変えたシミュレーション結果から、原始惑星円盤の金属量がダストリング形成モデルへ及ぼす影響を議論する。

図 20 に、各ガスダスト比 \bar{f} のシミュレーションで形成される惑星の質量時間進化を示す。4.3.2 項より、我々のモデルではダストの成長タイムスケールはダスト数密度、つまり \bar{f} に比例することから、 \bar{f} が大きいほどダスト成長タイムスケールは短くなる。したがって、ダスト降着タイムスケールは \bar{f} が大きいほど短くなる。よって、 \bar{f} が大きいほど、つまり円盤金属量が多いほどより巨大な惑星が短時間で形成される。

図 20 から、全てのモデルで 3 個 (2 つのモデルでは 4 個) の惑星が形成されることがわかる。この結果は、ダスト降着タイムスケールや総ダスト質量が変わっても、我々のモ

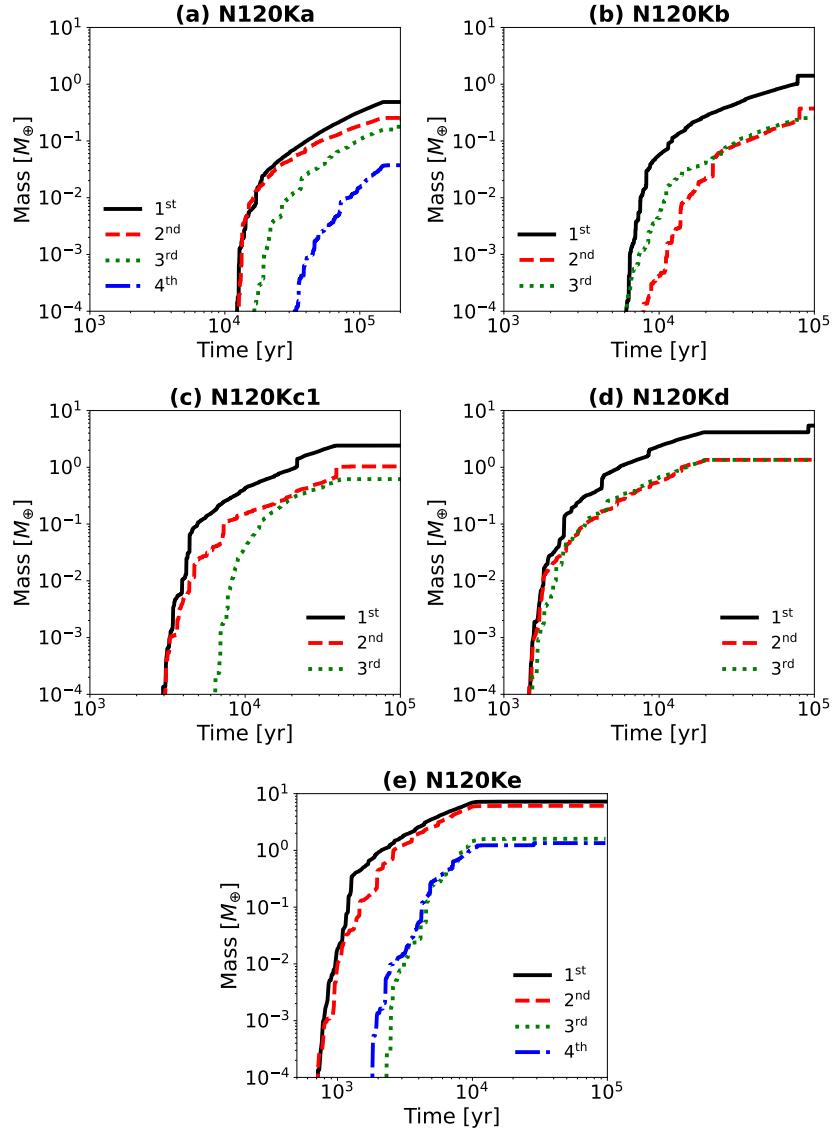


図 20 各ダストガス比 \bar{f} で形成される惑星質量の時間進化：パネル (a) から (e) は、それぞれ左上から右下にかけて $\bar{f} = (0.25, 0.5, 1, 2, 4) \times \bar{f}_{\text{MMSN}}$ の結果を表している。パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）、一点鎖線（青色）は、それぞれ各モデルで形成された 1、2、3、4 番目に大きな惑星を表している ([27] より改変)。

ルにおける惑星形成過程は非常に類似したものになることを示している。

図 21 に、各ダストガス比のシミュレーションで形成された惑星の質量、および軌道長半

径のシミュレーション終了時の分布を示す(詳細な惑星質量は、表2を参照されたい³⁰)。

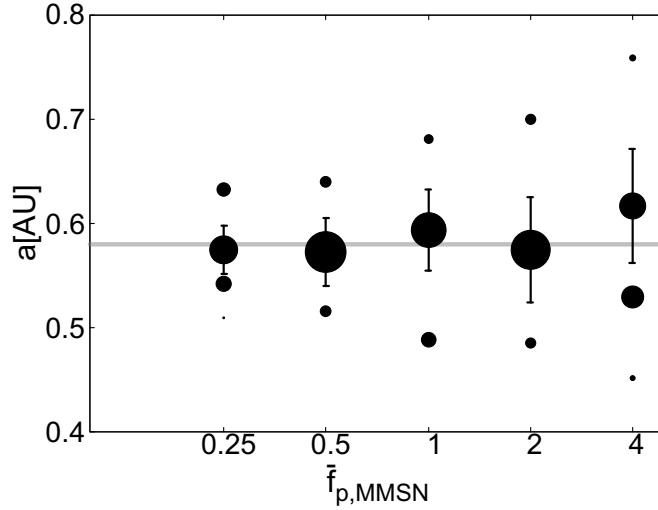


図21 各ダストガス比 \bar{f} で形成される惑星の軌道長半径: 天体サイズは、各シミュレーションの総ダスト量で規格化されている。各シミュレーションで形成される最大質量天体から伸びるエラーバーは、最大質量天体のヒル半径 r_{Hill} の5倍の長さを表している。また、横軸に並行な灰色線は IDB の位置 (~ 0.58 au) を示している。([27] から引用)。

Name	$\bar{f}(\bar{f}_{\text{MMSN}})$	$M_{1\text{st}}(M_{\oplus})$	$M_{2\text{nd}}(M_{\oplus})$	$M_{3\text{rd}}(M_{\oplus})$	$M_{4\text{th}}(M_{\oplus})$
N120Ka	0.25	0.49	0.25	0.23	0.03
N120Kb	0.5	1.4	0.37	0.25	-
N120Kc1	1	2.4	1.0	0.60	-
N120Kd	2	5.4	1.4	1.4	-
N120Ke	4	7.2	6.1	1.6	1.34

表2 Summary of models with different dust to gas ratios \bar{f}

図21中のエラーバーは最大質量と隣接する惑星間との理論的に見積もられる軌道間隔を表しており、その位置 a は

$$a = r_p \pm 5r_{\text{Hill}}, \quad (6.1)$$

*³⁰ M_i は、各ガスダスト比 \bar{f} で形成された i 番目に大きな惑星の質量を表している。

で与えられる。ここで、 r_{Hill} は最大質量天体のヒル半径である。この図から、各モデルにおける最終的な惑星軌道間隔の \bar{f} への依存性は、最大質量天体のヒル半径の違いによるものであることがわかる。

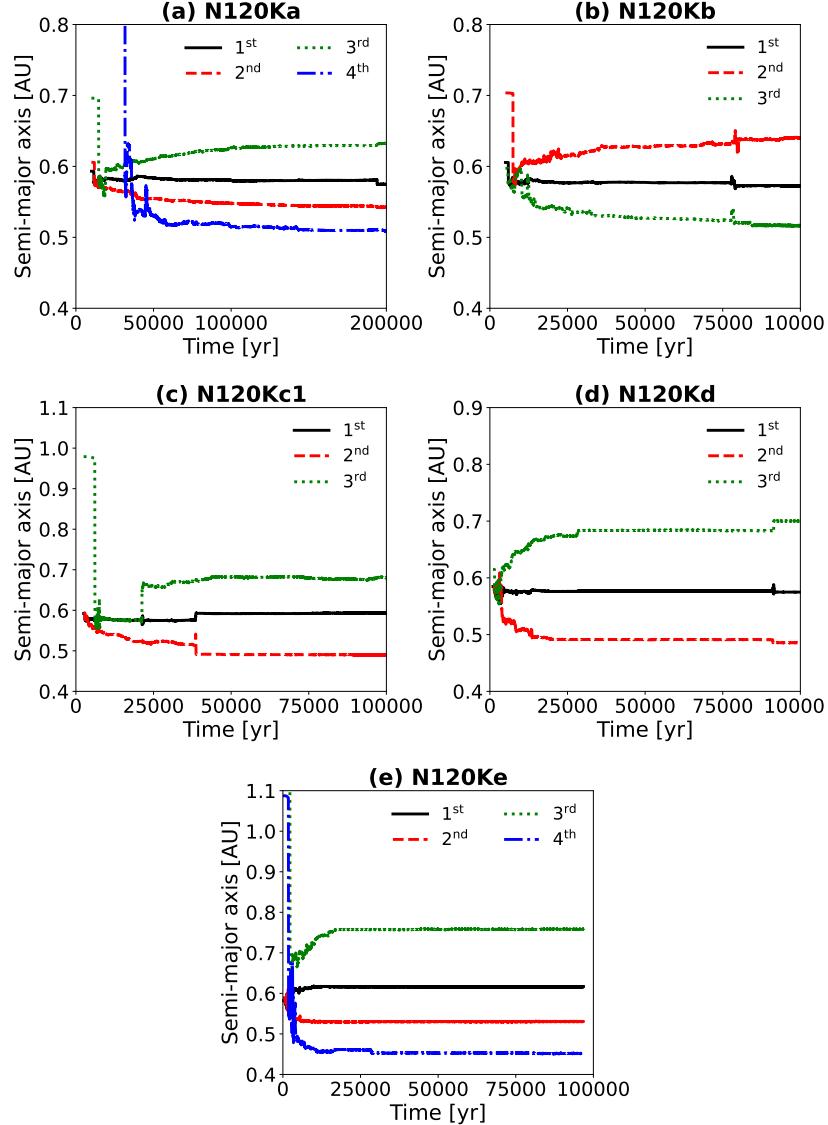


図 22 各ダストガス比 \bar{f} で形成される惑星軌道長半径の時間進化：パネル (a) から (e) は、それぞれ左上から右下にかけて $\bar{f} = (0.25, 0.5, 1, 2, 4) \times \bar{f}_{\text{MMSN}}$ の結果を表している。パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）、一点鎖線（青色）は、それぞれ各モデルで形成された 1、2、3、4 番目に大きな惑星を表している ([27] より改変)。

図 22 に各 \bar{f} のモデルで形成された惑星の軌道長半径の時間進化を示す。この図から、

最終的な惑星軌道間隔は、 \bar{f} が大きいモデルほど広くなることがわかる。この結果は、 \bar{f} が大きいモデルほど形成される惑星質量が大きくなることからも容易に理解することができる。

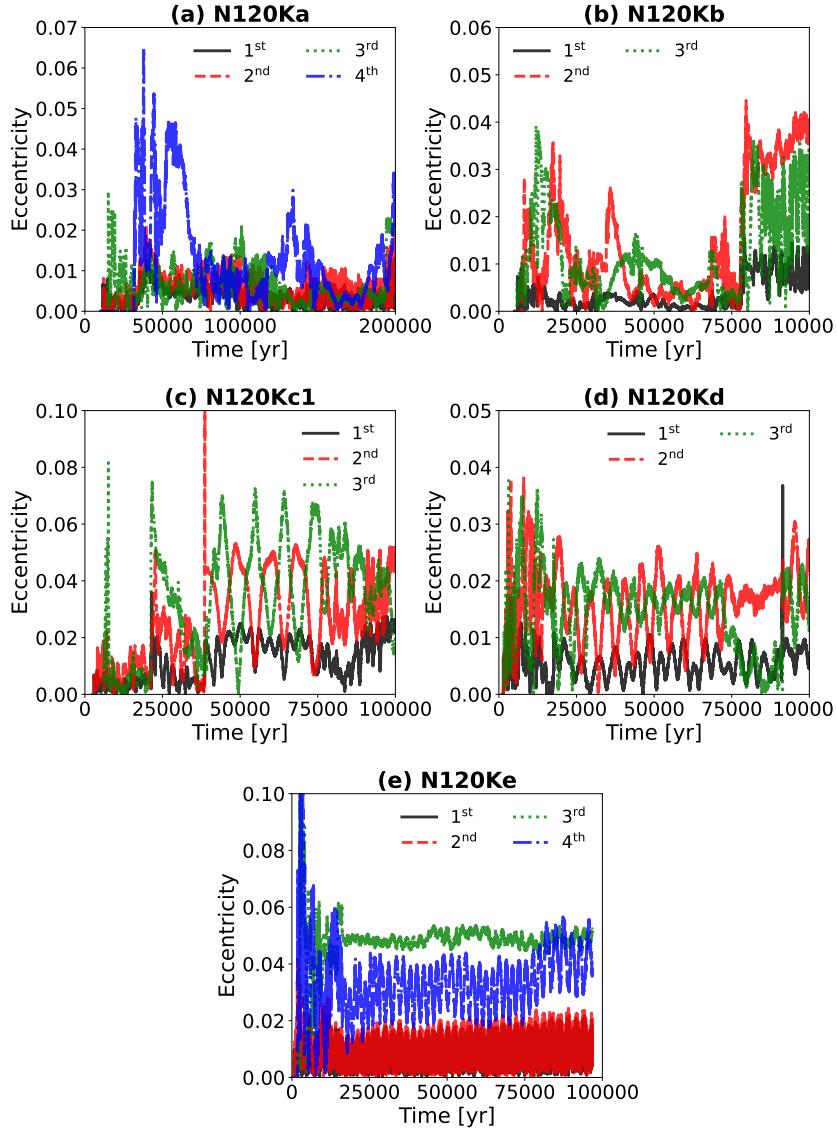


図 23 各ダストガス比 \bar{f} で形成される惑星の軌道離心率の時間進化：パネル (a) から (e) は、それぞれ左上から右下にかけて $\bar{f} = (0.25, 0.5, 1, 2, 4) \times \bar{f}_{\text{MMSN}}$ の結果を表している。パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）、一点鎖線（青色）は、それぞれ各モデルで形成された 1、2、3、4 番目に大きな惑星を表している ([27] より改変)。

図 23 に各 \bar{f} のモデルで形成された惑星の軌道離心率の時間進化を示す。この図から、

全体的に惑星の軌道離心率は小さいことがわかる。これは、原始惑星間の巨大衝突を引き起こすために離心率を上げる必要がある古典的標準理論の予想とは反する結果である。我々のモデルでは、ペブル集積が惑星の成長過程において支配的ではあるが、6.1 節で示したように、惑星間の巨大衝突も普遍的に起こり得る。しかし、我々のモデルでは惑星間の動径方向間隔が小さいため、巨大衝突を起こすために惑星の軌道離心率を大きくする必要はないことに注意する。

6.3 ダストリング形成モデルの質量分解能依存性

本節では、粒子数を 6×10^4 から 1×10^6 まで変化させた 4 つのモデル結果を比較することで、我々の構築したダストリング形成モデルの質量分解能依存性を調べる。

図 24、および図 25 に各粒子数で形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化を示す。図 15 の左列には粒子数 $N = 6 \times 10^4$ のモデル N60Kc を、右列には粒子数 $N = 1.2 \times 10^5$ のモデル N120Kc1 の結果を上 1 列目から質量、軌道長半径、離心率の順に示している。また、図 15 と同様の配置で、図 16 の左列には粒子数 $N = 2 \times 10^5$ のモデル N200Kc を、右列には粒子数 $N = 1 \times 10^6$ のモデル N1Mc の結果を示している。

これらの図から、全てのモデルで惑星形成過程は非常に似ていることがわかる。例えば、どのモデルでも最大質量惑星の質量は、 $2 M_{\oplus}$ 程度であり、2 番目と 3 番目に大きな惑星の質量もそれぞれ $1 M_{\oplus}$ と $0.6 M_{\oplus}$ 程度まで成長する（各粒子数のモデルで得られた詳細な惑星質量に関しては、表 3 を参照^{*31}）。軌道長半径に関しては、1 番目、2 番目（または 3 番目）に大きい惑星、3 番目（または 2 番目）に大きい惑星のそれぞれで約 0.58 AU、0.5 AU と 0.65 AU となる。さらに、最終的な惑星離心率は全てのモデルにおいて、0.05 未満となる。図 26 で示している各粒子数のモデルで形成された惑星の質量、および軌道長半径のシミュレーション終了時の分布も参照されたい。

Name	N_p	$M_{1\text{st}}(M_{\oplus})$	$M_{2\text{nd}}(M_{\oplus})$	$M_{3\text{rd}}(M_{\oplus})$	$M_{4\text{th}}(M_{\oplus})$	$M_{5\text{th}}(M_{\oplus})$
N60Kc	6×10^4	2.67	0.81	0.60	-	-
N120Kc1	1.2×10^5	2.4	1.0	0.60	-	-
N200Kc	2×10^5	2.1	0.72	0.62	0.54	0.09
N1Mc	1×10^6	2.5	0.92	0.62	-	-

表 3 Summary of models with different particle numbers N_p

*31 表 2 と同様に M_i は、各粒子数のモデルで形成された i 番目に大きな惑星の質量を表している。

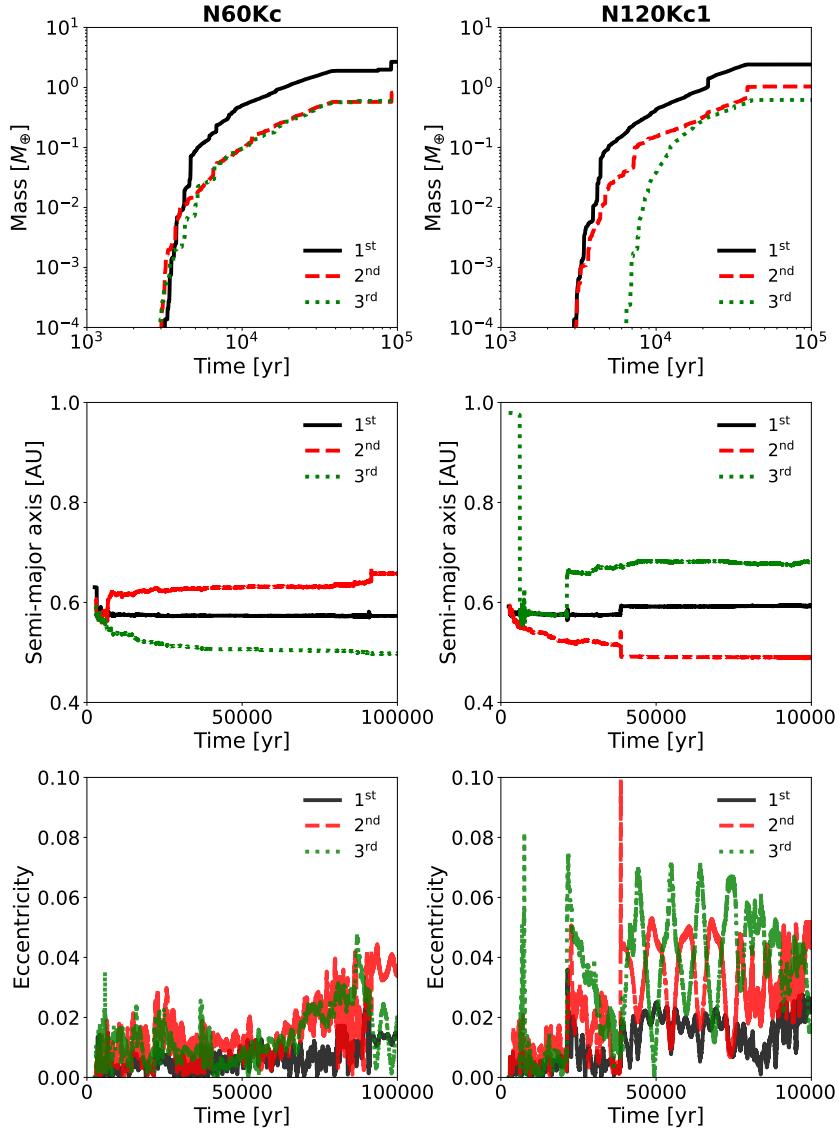


図 24 モデル N60Kc と N120Kc1 で形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化：パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）は、それぞれ各モデルで形成された 1、2、3 番目に大きな惑星を表している（[27] より改変）。

圧力バンプが存在する IDB にダストが最も集積すると考えられることから、典型的には IDB で惑星が最も効率的に形成されると考えられる。これは、IDB 最近傍に最大質量惑星が形成される本研究の結果とも一致する。さらに、その後に形成される惑星や微惑星は、IDB 最近傍に形成された最大質量惑星との重力相互作用によって散乱し、IDB の内

外に移動する。[95]による研究でも、IDB 近傍に形成されるダストリング内の最大質量惑星の位置は、次点で大きい惑星の位置に比べてリング中央付近に形成される傾向があることが見出されている。

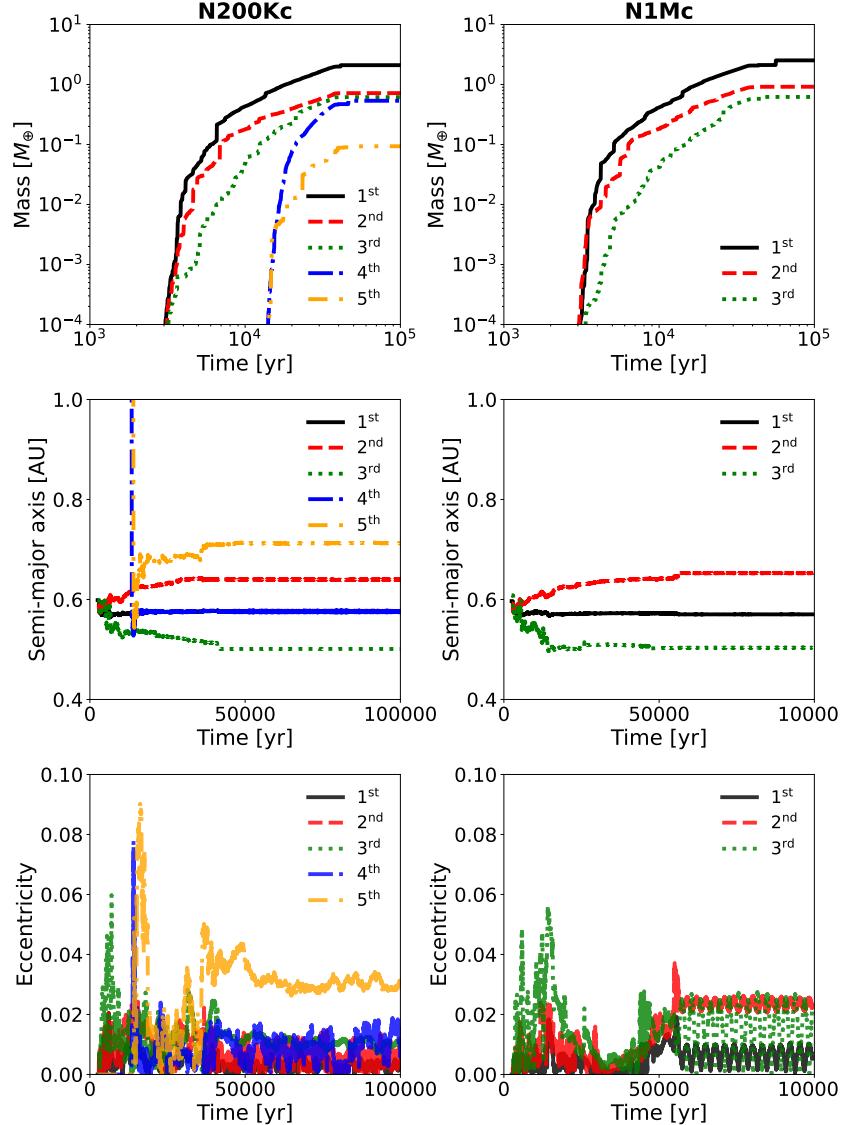


図 25 モデル N200Kc と N1Mc で形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化：パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）、一点鎖線（青色）、二点鎖線（橙色）は、それぞれ各モデルで形成された 1、2、3、4、5 番目に大きな惑星を表している ([27] より改変)。

以上の粒子数依存性を調べたモデル結果から、我々の構築したダストリング形成モデル

による惑星形成過程は、降着するペブルの質量には依存しないと結論づけられる。但し、計算コストの制約から、本研究で仮定したペブル質量は実際のペブル質量よりも未だ何桁も大きいことには注意する必要がある。

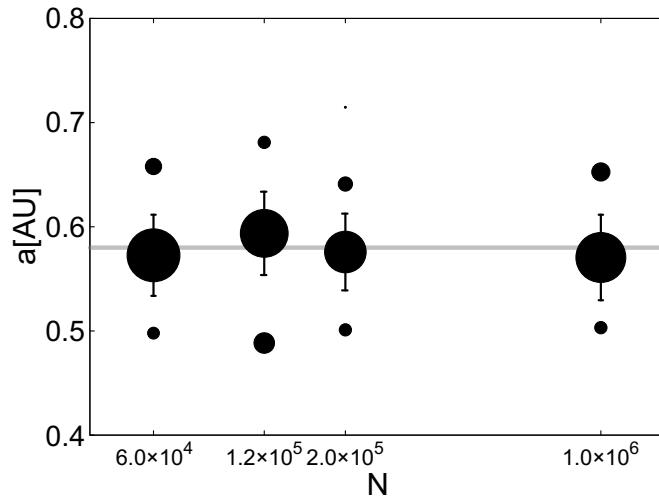


図 26 各粒子数で形成される惑星の軌道長半径：天体サイズは、各シミュレーションの総ダスト量で規格化されている。各シミュレーションで形成される最大質量天体から出るエラーバーは、ヒル半径 r_{Hill} の 5 倍の長さを表している。また、灰色水平線は IDB の位置 (~ 0.58 au) を示している。

7 議論

7.1 完全合体と衝突破壊の比較

6章で議論した結果や従来の N 体シミュレーションを用いた惑星形成研究では、衝突する微惑星や原始惑星は破壊されずに合体すると仮定してきた。しかし、微惑星円盤内で大きな原始惑星が形成されると、原始惑星からの重力散乱によってその周囲に存在する微惑星のランダム速度(相対速度)が引き上げられることで、衝突時に破壊を起こすようになる。先行研究からは、衝突破壊を考慮することで衝突破片の掃き集めが長引き、地球型惑星やガス惑星コアが形成されるまでのタイムスケールが延びる可能性が指摘されている[96]。また、衝突破片と原始惑星や微惑星間に生じる力学的摩擦によって微惑星や原始惑星のランダム速度が引き下げられることも指摘されている。

上述したように衝突破壊は、惑星形成プロセスに大きな影響を及ぼす。そこで本研究では、我々の構築したダストリング形成モデルに新たに衝突破壊の効果を取り入れることで、衝突破壊が惑星形成過程に及ぼす影響も調べた。以下で、我々が採用した衝突破壊モデルの概要を示し、衝突破壊が惑星形成過程に及ぼす影響を議論していく。

7.1.1 衝突破壊モデル

本研究では、Kominami model (Kominami et al., in preparation) と呼ばれる衝突破壊モデルを採用する。以下で、本モデルの概要を示す。

Kominami model では、衝突によって生じる破片の最小質量 m_{\min} を任意パラメータ b を用いて

$$m_{\min} = bm_{\text{init}} \quad (7.1)$$

と設定する。ここで、 m_{init} は初期粒子質量を表している。さらに、衝突破片は一方の粒子質量の a 倍分だけ生成されると仮定する(但し、 $0 \leq a \leq 1$)。つまり、衝突破片の総質量 $m_{\text{frag,tot}}$ は

$$m_{\text{frag,tot}} = am_{\text{imp}}, \quad (0 \leq a \leq 1) \quad (7.2)$$

で与えられる。ここで、 m_{imp} は一方の粒子から見た他方の粒子質量を表している。したがって、式(7.1)と式(7.2)より、1回の衝突あたりの破片数 n_{frag} と合体によって生じる

最大破片質量 m_k は、それぞれ

$$n_{\text{frag}} = \frac{am_{\text{imp}}}{m_{\text{min}}}, \quad (7.3)$$

$$m_k = (1 - a)m_{\text{imp}} + m_{\text{tar}} \quad (7.4)$$

となることがわかる。ここで、 m_{tar} は impactor が衝突を起こす target の質量を表している。但し、破片数 n_{frag} が 1 より小さい場合は完全合体を仮定する。この衝突によって生じる最大破片の位置と速度には、衝突を起こす 2 粒子の重心、および加重平均速度をそれぞれ与え、その他の小さな衝突破片は衝突を起こす 2 粒子の相対位置ベクトルと相対速度ベクトルがなす平面上に最大破片を中心にして、脱出速度の 1.05 倍の速度で放射状に射出する。図 27 に 3 つの衝突破片が生じる場合の衝突破壊モデルの概念図を示す。図中のそれぞれのパネルは、左上からアルファベット順に (a) 衝突前の 2 粒子の運動、(b) 衝突の瞬間、(c) 衝突後に破片が射出される瞬間、(d) 衝突後の各衝突破片の運動を表している。

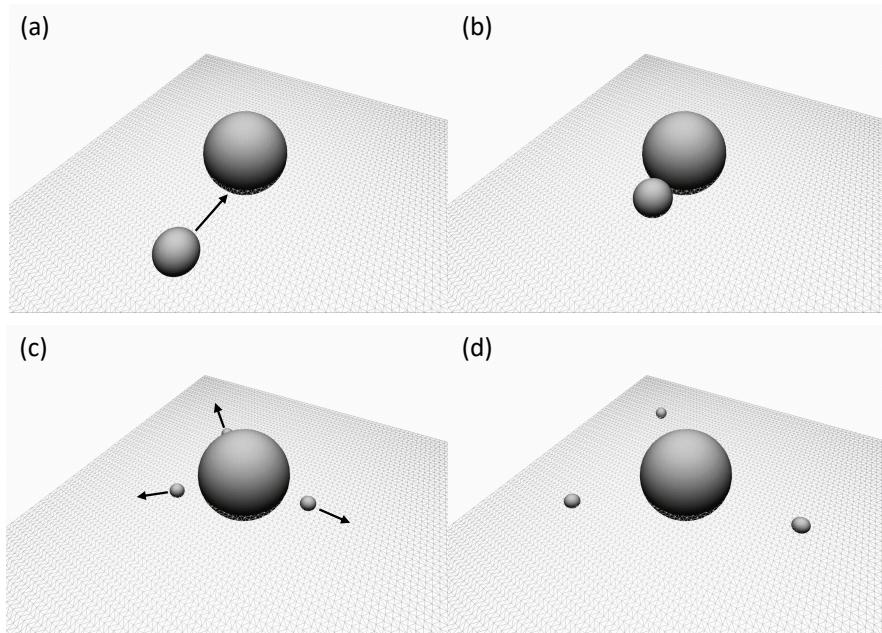


図 27 Kominami model の概念図：(a) Target (大きな粒子) へ impactor (小さな粒子) が接近 (b) 2 粒子の衝突 (c) 衝突後に 2 粒子の重心に最大破片が形成され、3 つの小さな衝突破片が相対位置ベクトルと相対速度ベクトルがなす平面に放射状に射出される (d) 射出された 3 つの衝突破片が最大破片に対して脱出速度の 1.05 倍の速度で運動する

7.1.2 衝突破壊の効果

本節では、前節で与えた衝突破壊モデルを組み込んだダストリング形成モデルの N 体シミュレーション結果を示し、衝突破壊が惑星形成過程に及ぼす影響を議論していく。

本研究では、表 4 に示す 3 つのモデル計算を行い衝突破壊が惑星形成過程に及ぼす効果を調べた。

Name	N_p	\bar{f}	a	b
N3Kcol0	3×10^3	1	0.5	0
N3Kcol3	3×10^3	1	0.5	$1/3$
N3Kcol10	3×10^3	1	0.5	$1/10$

表 4 Detailed summary of fragment model

表中の a , b はそれぞれ衝突破壊片の総質量（最大破片を除く）に対する impactor 質量の割合と衝突によって生じる破片の最小質量 m_{\min} を決める任意パラメータである。この表から、全モデルで衝突破壊片の総質量は impactor 質量の半分であり、N3Kcol0 から N3Kcol10 まで順に衝突破壊片の最小質量が $0 \times m_{\min}$ (つまり、完全合体)、 $1/3 \times m_{\min}$ 、 $1/10 \times m_{\min}$ である。

図 28 から図 30 に各モデルで形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化を示す。これらの図から、 $t = 2.4 \times 10^5$ 年にはどのモデルでも最大惑星の質量は地球質量程度まで成長することがわかる。この結果は、衝突破壊の有無に関わらず、ダストリング内で惑星が効率的に形成されることを示している。しかし、衝突破壊を考慮したモデルでは最大惑星は IDB よりも内側で成長し、2 番目 (4 番目) に大きな惑星が最も IDB に近い位置で成長することがわかった。この結果は、最大惑星が IDB 最近傍で形成される完全合体を仮定したモデルとは異なるものである。惑星離心率は、質量と同様に衝突破壊の有無に関わらず全体的に小さい。

図 31 に各モデルの累積質量分布の時間進化を示す。この図から、惑星形成初期段階 (赤線、青点線) には、衝突によって生じる破片の最小質量が小さいモデルほど (つまり、 b が小さいほど) 累積質量分布の傾きが急になる。これは、衝突によって生じる破片の最小質量が大きいほど (つまり、 b が大きいほど)、惑星が効率的に成長し、かつ破片の数が制限されることで衝突による微惑星の破碎を抑えることができるからである。しかし、どのモデルでも惑星形成中期段階 (緑点線、紫点線) には、暴走成長により火星サイズの惑星が形成されることがわかる。また、惑星形成後期段階 (橙点線、黒色線) には、衝突破壊の

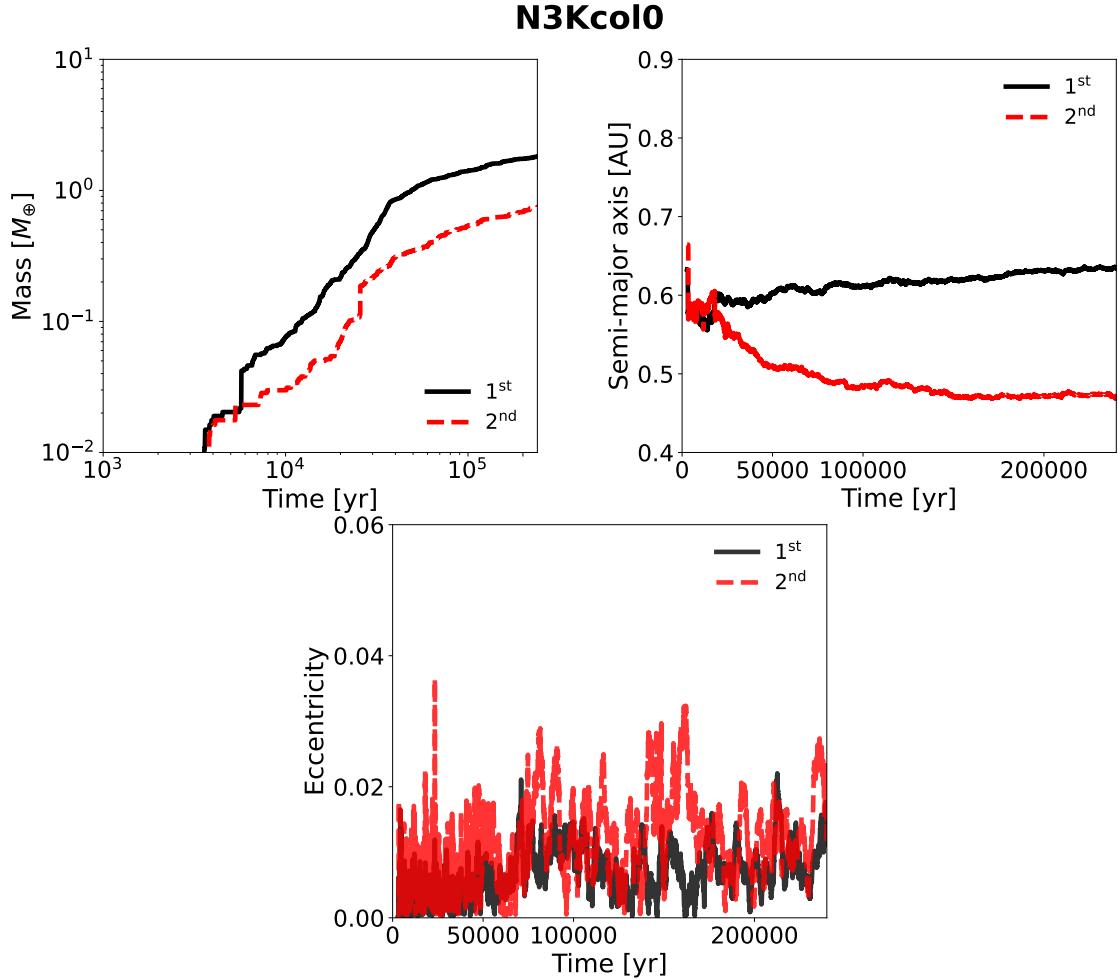


図 28 モデル N3Kcol0 で形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化：パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）はそれぞれ本モデルで形成された 1、2 番目に大きな惑星を表している。

有無に関わらず地球質量程度の惑星が形成される。

図 32 に各モデルにおける粒子数の時間進化を示す。この図から、 $b = 1/10$ のモデルでは $t = 3.7 \times 10^4$ 年までに粒子数が初期の 2 倍程度まで増加することがわかる。この時間は、6.1 節で議論したペブル降着が終了する時間と一致していることから、円盤外側から IDB へのダスト供給が続く限り、 $b = 1/10$ のモデルでは衝突破壊によって粒子数が増加することがわかる。一方で、 $b = 1/3$ のモデルは完全合体モデル ($b = 0$) と同様に、時間と共に粒子数は単調に減少していく。しかし、 $b = 1/3$ のモデルでは衝突破片が生じることによって、完全合体モデルに比べて粒子数の減少は緩やかである。

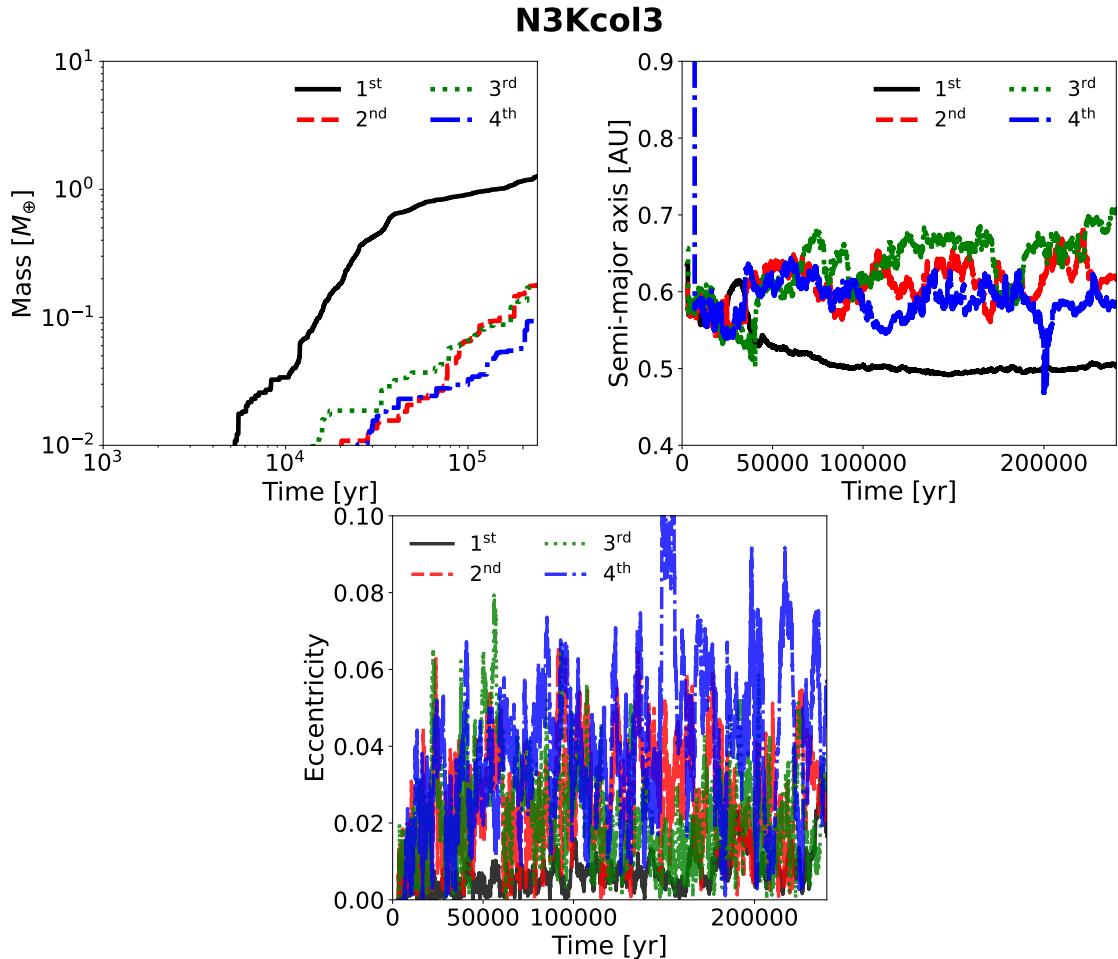


図 29 モデル N3Kcol3 で形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化：パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）、一点鎖線（青色）はそれぞれ本モデルで形成された 1、2、3、4 番目に大きな惑星を表している。

7.2 近年の先行研究との比較

本節では、原始惑星系円盤の動径方向構造を考慮した近年の惑星形成研究と我々のダストリング形成モデルによる惑星形成過程を比較する。

Ogihara et al. (2018) [97] では、ガス円盤面密度が動径方向外側に向かってフラット、または増加する MRI-active (-inactive) disk 内での惑星形成過程を N 体シミュレーションを用いて調べた。彼らは、このようなガス円盤中に初期条件として 0.7 から 1 AU の範囲に 400 体の等質量惑星胚を円環上に配置し（それぞれの粒子質量は、 $0.005 M_{\oplus}$ で総質

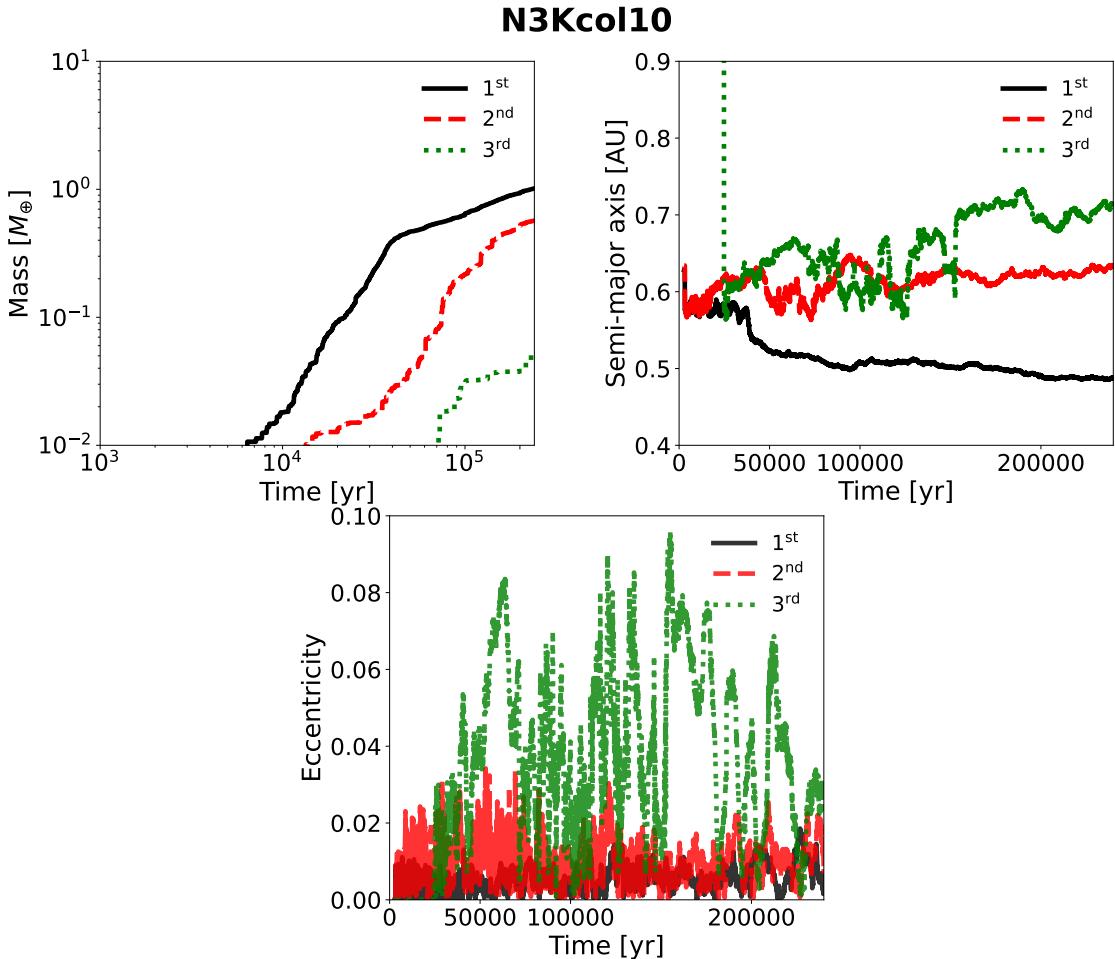


図 30 モデル N3Kcol10 で形成される惑星の質量、軌道長半径、離心率の時間進化：パネル内の実線（黒色）、破線（赤色）、点線（緑色）はそれぞれ本モデルで形成された1、2、3番目に大きな惑星を表している。

量は $2 M_{\oplus}$ ）、シミュレーションを行った。その結果、惑星胚同士の衝突によって、地球型惑星が 10^6 年のタイムスケールで形成されることを明らかにした。また、このようなガス円盤中では惑星とガス円盤間の重力相互作用によって生じる Type-I migration が抑制され、1 AU 近傍の広い領域で惑星形成が生じることも明らかにした。

惑星胚同士の衝突による原始惑星の成長をシミュレーションした [97] に対して、我々の研究ではペブル集積による原始惑星の形成と成長過程を N 体シミュレーションで調べた。我々の結果と [97] の顕著な違いは、惑星形成タイムスケールである。彼らのシミュレーションでは、地球型惑星が 10^6 年のタイムスケールで形成されるのに対して、我々の

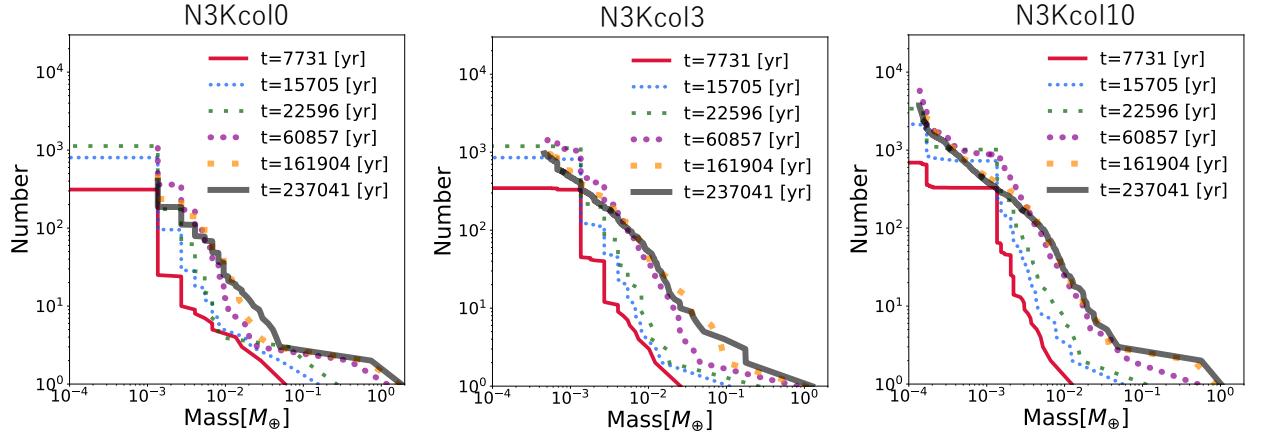


図 31 各モデルの累積質量分布の時間進化 (但し、IDB へ降着していないダストは含まれていない)

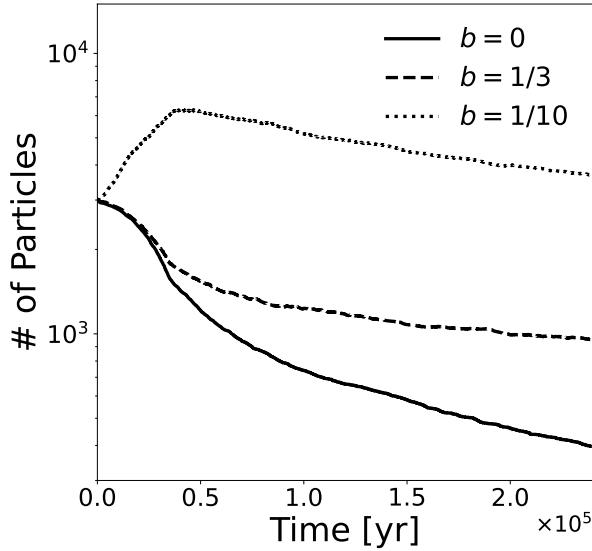


図 32 各モデルにおける粒子数の時間進化

シミュレーションでは 10^5 年以内に形成される。これは、我々のモデルでは円盤外側から IDB へ断続的にペブルが供給されることで、微惑星間衝突、およびペブル集積によって効率的に微惑星が成長するためである。

Jiang and Ormel (2023) [98] は、円盤内の特定領域に予めダストが集積している領域 (clumpy ring model: CR model)、および圧力バンプ (permanent pressure bump

model: PB model)へのペブル集積を考慮した惑星形成過程を N 体シミュレーションを用いて調べた。また、Lau et al. (2022) [73] も [98] と同様に圧力バンプ内の惑星形成とその軌道進化について調べている。しかし、どちらの研究もダストリング観測の研究結果 [2] を用いて圧力バンプを再現しており、その形成メカニズムまでは考慮していない。そのため、彼らのシミュレーションでは圧力バンプの位置は中心星から 75 AU や 10 AU と円盤外縁部に焦点を当てており、地球型惑星形成過程は調べられていない。一方で、我々の研究ではダストリング形成メカニズムまで考慮している点が大きな違いである。しかし、我々のモデルでは、1 AU 近傍での惑星形成過程に焦点を当てているため、彼らの研究結果と我々の研究結果を直接比較することは難しい。

8 まとめ

本研究では、まず近年の原始惑星系円盤研究から推測されるモデルを基に約 $0.5 - 3$ AU にわたってデッドゾーンを持つ円盤モデルを構築した。そして、我々はこの領域でのダスト成長と動径方向ドリフトをモデル化し、 N 体シミュレーションコードへと組み込むことで、デッドゾーンから IDB へのペブル集積、および IDB 近傍でのダストリング形成が惑星形成過程に及ぼす影響を粒子数 $6 \times 10^4 - 1 \times 10^6$ を用いた大規模な N 体シミュレーションによって調べた。

我々の行ったダストリング形成モデルの N 体シミュレーションから、惑星形成初期段階では、累積質量分布の高質量（右端）側に存在する少数の微惑星が微惑星間衝突、およびペブル集積によって急速に成長し、無数の小さい微惑星は取り残されたことがわかった（図 19、31）。これら少数の微惑星は、円盤外側からのダスト供給が終わるまで効率的に成長し続ける（図 17、20）。また、このダスト供給段階では、ダストが IDB へ断続的に供給されるにも関わらず、IDB 近傍の総粒子数はほぼ一定に保たれることもわかった（図 18 左）。これは、急速に成長した少数の微惑星が降着してくるダストを食べながら原始惑星へと成長し、一定数の小さい微惑星を重力的に散乱することで、それらの成長を阻害していることを示している。そして、ダスト供給段階が終了すると、原始惑星がダストリング内に残った微惑星を食べ尽くすことで、最終的には IDB 近傍に 2 個から 5 個の惑星が形成される。これら惑星間の軌道間隔は、シミュレーション終了時には $5 r_{\text{Hill}}$ 以上となる（図 21、26）。これは、隣接する惑星間で軌道反発が生じるためである（[63]、3.2.2.3 目）。

本研究の結果をまとめると以下の通りである：

1. 本研究では、粒子が IDB を通過するとその粒子に作用するガス抵抗を切ることで粒子のドリフトを止め、IDB 近傍へのダスト集積過程を再現した。その結果、ダストが高密度に集積する IDB 近傍で非常に効率的に惑星が形成されることがわかった。また、ダスト供給段階終了時点で地球サイズの惑星が形成され、この形成過程はペブルの降着率に依存しないこともわかった。さらに、IDB 近傍では、惑星の暴走成長によって、2 個から 5 個の惑星が形成され、それらの総質量は惑星形成の早い段階で供給されるダスト総質量に匹敵することが見出された。
2. 粒子数を 6×10^4 体から 1×10^6 体まで変化させた 4 つのモデル結果から、我々のダストリング形成モデルは N 体シミュレーションの質量分解能に依存しないことがわかった。この結果は、IDB へ供給されるダスト総質量が同程度であれば、シ

ミュレーションで用いた超粒子よりも質量が十分小さい実際のペブルでも同様の惑星形成過程が起こることを示している。

3. 我々のダストリング形成モデルでは、惑星は主にペブル集積によって成長するため、最終的な惑星離心率は比較的小さくなる。しかし、それにもかかわらずジャイアントインパクトと見做せる巨大衝突現象が普遍的に生じることがわかった。

本研究の結果は、動径方向に構造を持つ原始惑星系円盤内では太陽系に似た惑星系が非常に効率的に形成される可能性を示している。近年の ALMA による観測的研究 (e.g., [2]) からは、中心星が形成されてから 10^6 年程度の若い原始惑星系円盤内にもダストリング構造が存在することが明らかになっており、さらに最新の研究では、中心星が形成されてから $10^5 - 10^6$ 年のタイムスケールで惑星形成が急速に進むことが示唆されている [99]。我々の結果は、このようなダストリングの中で惑星系が効率的に形成されることの理論的な裏付けとなることが期待される。

現在の我々のダストリング形成モデルの限界は、ガス円盤構造が単純化され過ぎている点である。本研究では、乱流領域とデッドゾーン境界に不連続境界を仮定している。先行研究 (e.g.,[100, 101]) で示唆されているように、ガス円盤の内側境界は不連続ではなく、磁気円盤風によってより滑らかな遷移構造を持つ可能性がある。また、惑星形成後の惑星軌道進化を調べるために Type-I migration の影響を考慮することも重要である ([73, 98])。将来的には、これらの効果を組み込んだ改良型モデルを構築することで、より現実に則した惑星系形成過程を明らかにしていく。

謝辞

本論文の執筆にあたり、指導教員である牧野淳一郎教授と斎藤貴之准教授には、研究手法から議論に至るまで多くの面でお世話になりました。先生方には心より深く感謝します。また、計算惑星学教育研究分野、および惑星宇宙物理学教育研究分野の皆様とはセミナーを通して活発な議論を行うことができました。この場を借りて感謝の意を示します。

本研究のシミュレーションは、国立天文台 天文シミュレーションプロジェクト (CfCA) の Cray XC50 を用いて実施しました。また、本研究は文部科学省「富岳」成果創出プログラム「シミュレーションと AI の融合で解明する宇宙の構造と進化 (課題番号: JPMXP1020230406)」の支援により実施しました。

参考文献

- [1] C. Hayashi. Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Vol. 70, pp. 35–53, January 1981.
- [2] Sean M. Andrews, Jane Huang, Laura M. Pérez, Andrea Isella, Cornelis P. Dullemond, Nicolás T. Kurtovic, Viviana V. Guzmán, John M. Carpenter, David J. Wilner, Shangjia Zhang, Zhaoquan Zhu, Tilman Birnstiel, Xue-Ning Bai, Myriam Benisty, A. Meredith Hughes, Karin I. Öberg, and Luca Ricci. The Disk Substructures at High Angular Resolution Project (DSHARP). I. Motivation, Sample, Calibration, and Overview. *ApJL*, Vol. 869, No. 2, p. L41, December 2018.
- [3] M. Benisty, C. Dominik, K. Follette, A. Garufi, C. Ginski, J. Hashimoto, M. Keppler, W. Kley, and J. Monnier. Optical and Near-infrared View of Planet-forming Disks and Protoplanets. Vol. 534 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 605, July 2023.
- [4] Michel Mayor and Didier Queloz. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, Vol. 378, No. 6555, pp. 355–359, November 1995.
- [5] Wei Zhu and Subo Dong. Exoplanet Statistics and Theoretical Implications. *ARA&A*, Vol. 59, pp. 291–336, September 2021.
- [6] Kevin J. Walsh, Alessandro Morbidelli, Sean N. Raymond, David P. O’Brien, and Avi M. Mandell. A low mass for Mars from Jupiter’s early gas-driven migration. *Nature*, Vol. 475, No. 7355, pp. 206–209, July 2011.
- [7] M. Lambrechts and A. Johansen. Rapid growth of gas-giant cores by pebble accretion. *A&A*, Vol. 544, p. A32, August 2012.
- [8] Sourav Chatterjee and Jonathan C. Tan. Inside-out Planet Formation. *ApJ*, Vol. 780, No. 1, p. 53, January 2014.
- [9] V. S. Safronov. *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the earth and planets*. 1972.
- [10] C. Hayashi, K. Nakazawa, and Y. Nakagawa. Formation of the solar system. In D. C. Black and M. S. Matthews, editors, *Protostars and Planets II*, pp. 1100–1153, January 1985.

- [11] H. Mizuno. Formation of the Giant Planets. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 64, No. 2, pp. 544–557, August 1980.
- [12] Toshikazu Ebisuzaki and Yusuke Imaeda. United theory of planet formation (i): Tandem regime. *New Astronomy*, Vol. 54, pp. 7–23, July 2017.
- [13] Yusuke Imaeda and Toshikazu Ebisuzaki. Tandem planet formation for solar system-like planetary systems. *Geoscience Frontiers*, Vol. 8, No. 2, pp. 223–231, March 2017.
- [14] Yota Ishigaki, Junko Kominami, Junichiro Makino, Masaki Fujimoto, and Masaki Iwasawa. Particle-particle particle-tree code for planetary system formation with individual cut-off method: GPLUM. *PASJ*, Vol. 73, No. 3, pp. 660–676, June 2021.
- [15] Sean M. Andrews. Observations of Protoplanetary Disk Structures. *ARA&A*, Vol. 58, pp. 483–528, August 2020.
- [16] Ke Zhang, Edwin A. Bergin, Geoffrey A. Blake, L. Ilsedore Cleeves, Michiel Hogerheijde, Vachail Salinas, and Kamber R. Schwarz. On the Commonality of 10-30 AU Sized Axisymmetric Dust Structures in Protoplanetary Disks. *ApJL*, Vol. 818, No. 1, p. L16, February 2016.
- [17] Feng Long, Paola Pinilla, Gregory J. Herczeg, Daniel Harsono, Giovanni Dipierro, Ilaria Pascucci, Nathan Helder, Marco Tazzari, Enrico Ragusa, Colette Salyk, Suzan Edwards, Giuseppe Lodato, Gerrit van de Plas, Doug Johnstone, Yao Liu, Yann Boehler, Sylvie Cabrit, Carlo F. Manara, Francois Menard, Gijs D. Mulders, Brunella Nisini, William J. Fischer, Elisabetta Rigliaco, Andrea Banzatti, Henning Avenhaus, and Michael Gully-Santiago. Gaps and Rings in an ALMA Survey of Disks in the Taurus Star-forming Region. *ApJ*, Vol. 869, No. 1, p. 17, December 2018.
- [18] C. J. Clarke, M. Tazzari, A. Juhasz, G. Rosotti, R. Booth, S. Facchini, J. D. Ilee, C. M. Johns-Krull, M. Kama, F. Meru, and L. Prato. High-resolution Millimeter Imaging of the CI Tau Protoplanetary Disk: A Massive Ensemble of Protoplanets from 0.1 to 100 au. *ApJL*, Vol. 866, No. 1, p. L6, October 2018.
- [19] Nienke van der Marel, Ewine F. van Dishoeck, Simon Bruderer, Til Birnstiel, Paola Pinilla, Cornelis P. Dullemond, Tim A. van Kempen, Markus Schmalzl, Joanna M. Brown, Gregory J. Herczeg, Geoffrey S. Mathews, and Vincent Geers. A Major Asymmetric Dust Trap in a Transition Disk. *Science*, Vol. 340, No.

6137, pp. 1199–1202, June 2013.

- [20] Ryan A. Loomis, Karin I. Öberg, Sean M. Andrews, and Meredith A. MacGregor. A Multi-ringed, Modestly Inclined Protoplanetary Disk around AA Tau. *ApJ*, Vol. 840, No. 1, p. 23, May 2017.
- [21] Eiji Akiyama, Jun Hashimoto, Hauyu Baobab Liu, Jennifer I-Hsiu Li, Michael Bonnefoy, Ruobing Dong, Yasuhiro Hasegawa, Thomas Henning, Michael L. Sitko, Markus Janson, Markus Feldt, John Wisniewski, Tomoyuki Kudo, Nobuhiko Kusakabe, Takashi Tsukagoshi, Munetake Momose, Takayuki Muto, Tetsuo Taki, Masayuki Kuzuhara, Mayama Satoshi, Michihiro Takami, Nagayoshi Ohashi, Carol A. Grady, Jungmi Kwon, Christian Thalmann, Lyu Abe, Wolfgang Brandner, Timothy D. Brandt, Joseph C. Carson, Sebastian Egner, Miwa Goto, Olivier Guyon, Yutaka Hayano, Masahiko Hayashi, Saeko S. Hayashi, Klaus W. Hodapp, Miki Ishii, Masanori Iye, Gillian R. Knapp, Ryo Kandori, Taro Matsuo, Michael W. McElwain, Shoken Miyama, Jun-Ichi Morino, Amaya Moro-Martin, Tetsuo Nishimura, Tae-Soo Pyo, Eugene Serabyn, Takuya Suenaga, Hiroshi Suto, Ryuji Suzuki, Yasuhiro H. Takahashi, Naruhisa Takato, Hiroshi Terada, Daigo Tomono, Edwin L. Turner, Makoto Watanabe, Toru Yamada, Hideki Takami, Tomonori Usuda, and Motohide Tamura. Spiral Structure and Differential Dust Size Distribution in the LKH α 330 Disk. *AJ*, Vol. 152, No. 6, p. 222, December 2016.
- [22] John D. Monnier, Tim J. Harries, Jaehan Bae, Benjamin R. Setterholm, Anna Laws, Alicia Aarnio, Fred C. Adams, Sean Andrews, Nuria Calvet, Catherine Espaillat, Lee Hartmann, Stefan Kraus, Melissa McClure, Chris Miller, Rebecca Oppenheimer, David Wilner, and Zhaohuan Zhu. Multiple Spiral Arms in the Disk around Intermediate-mass Binary HD 34700A. *ApJ*, Vol. 872, No. 2, p. 122, February 2019.
- [23] Jane Huang, Sean M. Andrews, Laura M. Pérez, Zhaohuan Zhu, Cornelis P. Dullemond, Andrea Isella, Myriam Benisty, Xue-Ning Bai, Tilman Birnstiel, John M. Carpenter, Viviana V. Guzmán, A. Meredith Hughes, Karin I. Öberg, Luca Ricci, David J. Wilner, and Shangjia Zhang. The Disk Substructures at High Angular Resolution Project (DSHARP). III. Spiral Structures in the Millimeter Continuum of the Elias 27, IM Lup, and WaOph 6 Disks. *ApJL*, Vol. 869, No. 2, p. L43, December 2018.

- [24] Nienke van der Marel, Jonathan P. Williams, M. Ansdell, Carlo F. Manara, Anna Miotello, Marco Tazzari, Leonardo Testi, Michiel Hogerheijde, Simon Bruderer, Sierk E. van Terwisga, and Ewine F. van Dishoeck. New Insights into the Nature of Transition Disks from a Complete Disk Survey of the Lupus Star-forming Region. *ApJ*, Vol. 854, No. 2, p. 177, February 2018.
- [25] Jane Huang, Sean M. Andrews, Cornelis P. Dullemond, Andrea Isella, Laura M. Pérez, Viviana V. Guzmán, Karin I. Öberg, Zhaohuan Zhu, Shangjia Zhang, Xue-Ning Bai, Myriam Benisty, Tilman Birnstiel, John M. Carpenter, A. Meredith Hughes, Luca Ricci, Erik Weaver, and David J. Wilner. The Disk Substructures at High Angular Resolution Project (DSHARP). II. Characteristics of Annular Substructures. *ApJL*, Vol. 869, No. 2, p. L42, December 2018.
- [26] Cornelis P. Dullemond, Tilman Birnstiel, Jane Huang, Nicolás T. Kurtovic, Sean M. Andrews, Viviana V. Guzmán, Laura M. Pérez, Andrea Isella, Zhao-huan Zhu, Myriam Benisty, David J. Wilner, Xue-Ning Bai, John M. Carpenter, Shangjia Zhang, and Luca Ricci. The Disk Substructures at High Angular Resolution Project (DSHARP). VI. Dust Trapping in Thin-ringed Protoplanetary Disks. *ApJL*, Vol. 869, No. 2, p. L46, December 2018.
- [27] Tenri Jinno, Takayuki R. Saitoh, Yota Ishigaki, and Junichiro Makino. N-body simulation of planetary formation through pebble accretion in a radially structured protoplanetary disk. *PASJ*, Vol. 75, No. 5, pp. 951–969, October 2023.
- [28] A. Santerne, C. Moutou, M. Tsantaki, F. Bouchy, G. Hébrard, V. Adibekyan, J. M. Almenara, L. Amard, S. C. C. Barros, I. Boisse, A. S. Bonomo, G. Bruno, B. Courcol, M. Deleuil, O. Demangeon, R. F. Díaz, T. Guillot, M. Havel, G. Montagnier, A. S. Rajpurohit, J. Rey, and N. C. Santos. SOPHIE velocimetry of Kepler transit candidates. XVII. The physical properties of giant exoplanets within 400 days of period. *A&A*, Vol. 587, p. A64, March 2016.
- [29] Masahiro Ogiara, Shu-ichiro Inutsuka, and Hiroshi Kobayashi. Crowding-out of Giants by Dwarfs: An Origin for the Lack of Companion Planets in Hot Jupiter Systems. *ApJL*, Vol. 778, No. 1, p. L9, November 2013.
- [30] James E. Owen and Dong Lai. Photoevaporation and high-eccentricity migration created the sub-Jovian desert. *MNRAS*, Vol. 479, No. 4, pp. 5012–5021, October 2018.

- [31] Eve J. Lee and Eugene Chiang. Magnetospheric Truncation, Tidal Inspiral, and the Creation of Short-period and Ultra-short-period Planets. *ApJ*, Vol. 842, No. 1, p. 40, June 2017.
- [32] Benjamin J. Fulton, Erik A. Petigura, Andrew W. Howard, Howard Isaacson, Geoffrey W. Marcy, Phillip A. Cargile, Leslie Hebb, Lauren M. Weiss, John Asher Johnson, Timothy D. Morton, Evan Sinukoff, Ian J. M. Crossfield, and Lea A. Hirsch. The California-Kepler Survey. III. A Gap in the Radius Distribution of Small Planets. *AJ*, Vol. 154, No. 3, p. 109, September 2017.
- [33] V. Van Eylen, Camilla Agentoft, M. S. Lundkvist, H. Kjeldsen, J. E. Owen, B. J. Fulton, E. Petigura, and I. Snellen. An asteroseismic view of the radius valley: stripped cores, not born rocky. *MNRAS*, Vol. 479, No. 4, pp. 4786–4795, October 2018.
- [34] Travis A. Berger, Daniel Huber, Eric Gaidos, Jennifer L. van Saders, and Lauren M. Weiss. The Gaia-Kepler Stellar Properties Catalog. II. Planet Radius Demographics as a Function of Stellar Mass and Age. *AJ*, Vol. 160, No. 3, p. 108, September 2020.
- [35] James E. Owen and Yanqin Wu. Kepler Planets: A Tale of Evaporation. *ApJ*, Vol. 775, No. 2, p. 105, October 2013.
- [36] James E. Owen and Yanqin Wu. The Evaporation Valley in the Kepler Planets. *ApJ*, Vol. 847, No. 1, p. 29, September 2017.
- [37] Eve J. Lee and Nicholas J. Connors. Primordial Radius Gap and Potentially Broad Core Mass Distributions of Super-Earths and Sub-Neptunes. *ApJ*, Vol. 908, No. 1, p. 32, February 2021.
- [38] Jack J. Lissauer, Darin Ragozzine, Daniel C. Fabrycky, Jason H. Steffen, Eric B. Ford, Jon M. Jenkins, Avi Shporer, Matthew J. Holman, Jason F. Rowe, Elisa V. Quintana, Natalie M. Batalha, William J. Borucki, Stephen T. Bryson, Douglas A. Caldwell, Joshua A. Carter, David Ciardi, Edward W. Dunham, Jonathan J. Fortney, III Gautier, Thomas N., Steve B. Howell, David G. Koch, David W. Latham, Geoffrey W. Marcy, Robert C. Morehead, and Dimitar Sasselov. Architecture and Dynamics of Kepler’s Candidate Multiple Transiting Planet Systems. *ApJS*, Vol. 197, No. 1, p. 8, November 2011.
- [39] Lauren M. Weiss, Geoffrey W. Marcy, Erik A. Petigura, Benjamin J. Fulton, Andrew W. Howard, Joshua N. Winn, Howard T. Isaacson, Timothy D. Morton,

- Lea A. Hirsch, Evan J. Sinukoff, Andrew Cumming, Leslie Hebb, and Phillip A. Cargile. The California-Kepler Survey. V. Peas in a Pod: Planets in a Kepler Multi-planet System Are Similar in Size and Regularly Spaced. *AJ*, Vol. 155, No. 1, p. 48, January 2018.
- [40] Wei Zhu. On the Patterns Observed in Kepler Multi-planet Systems. *AJ*, Vol. 159, No. 5, p. 188, May 2020.
- [41] Bonan Pu and Yanqin Wu. Spacing of Kepler Planets: Sculpting by Dynamical Instability. *ApJ*, Vol. 807, No. 1, p. 44, July 2015.
- [42] Wei Zhu, Cristobal Petrovich, Yanqin Wu, Subo Dong, and Jiwei Xie. About 30% of Sun-like Stars Have Kepler-like Planetary Systems: A Study of Their Intrinsic Architecture. *ApJ*, Vol. 860, No. 2, p. 101, June 2018.
- [43] N. C. Santos, G. Israelian, and M. Mayor. The metal-rich nature of stars with planets. *A&A*, Vol. 373, pp. 1019–1031, July 2001.
- [44] John Asher Johnson, Kimberly M. Aller, Andrew W. Howard, and Justin R. Crepp. Giant Planet Occurrence in the Stellar Mass-Metallicity Plane. *PASP*, Vol. 122, No. 894, p. 905, August 2010.
- [45] Rebekah I. Dawson and Ruth A. Murray-Clay. Giant Planets Orbiting Metal-rich Stars Show Signatures of Planet-Planet Interactions. *ApJL*, Vol. 767, No. 2, p. L24, April 2013.
- [46] Lars A. Buchhave, David W. Latham, Anders Johansen, Martin Bizzarro, Guillermo Torres, Jason F. Rowe, Natalie M. Batalha, William J. Borucki, Erik Brugamyer, Caroline Caldwell, Stephen T. Bryson, David R. Ciardi, William D. Cochran, Michael Endl, Gilbert A. Esquerdo, Eric B. Ford, John C. Geary, Ronald L. Gilliland, Terese Hansen, Howard Isaacson, John B. Laird, Philip W. Lucas, Geoffrey W. Marcy, Jon A. Morse, Paul Robertson, Avi Shporer, Robert P. Stefanik, Martin Still, and Samuel N. Quinn. An abundance of small exoplanets around stars with a wide range of metallicities. *Nature*, Vol. 486, No. 7403, pp. 375–377, June 2012.
- [47] Wei Zhu. Influence of Stellar Metallicity on Occurrence Rates of Planets and Planetary Systems. *ApJ*, Vol. 873, No. 1, p. 8, March 2019.
- [48] Debra A. Fischer and Jeff Valenti. The Planet-Metallicity Correlation. *ApJ*, Vol. 622, No. 2, pp. 1102–1117, April 2005.
- [49] Sean M. Andrews, Katherine A. Rosenfeld, Adam L. Kraus, and David J.

- Wilner. The Mass Dependence between Protoplanetary Disks and their Stellar Hosts. *ApJ*, Vol. 771, No. 2, p. 129, July 2013.
- [50] 井田茂. 系外惑星. 東京大学出版会, 2007.
- [51] 井田茂, 中本泰史. 惑星形成の物理 太陽系と系外惑星系の形成論入門. 共立出版, 2015.
- [52] Philip J. Armitage. *Astrophysics of planet formation, Second Edition*. 2020.
- [53] Sean M. Andrews, D. J. Wilner, A. M. Hughes, Chunhua Qi, and C. P. Dullemond. Protoplanetary Disk Structures in Ophiuchus. II. Extension to Fainter Sources. *ApJ*, Vol. 723, No. 2, pp. 1241–1254, November 2010.
- [54] S. J. Weidenschilling. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *MNRAS*, Vol. 180, pp. 57–70, July 1977.
- [55] Y. Nakagawa, M. Sekiya, and C. Hayashi. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass solar nebula. *Icarus*, Vol. 67, No. 3, pp. 375–390, September 1986.
- [56] J. Drążkowska, B. Bitsch, M. Lambrechts, G. D. Mulders, D. Harsono, A. Vazan, B. Liu, C. W. Ormel, K. Kretke, and A. Morbidelli. Planet Formation Theory in the Era of ALMA and Kepler: from Pebbles to Exoplanets. In S. Inutsuka, Y. Aikawa, T. Muto, K. Tomida, and M. Tamura, editors, *Protostars and Planets VII*, Vol. 534 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 717, July 2023.
- [57] Steven A. Balbus and John F. Hawley. A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis. *ApJ*, Vol. 376, p. 214, July 1991.
- [58] Xue-Ning Bai and James M. Stone. Wind-driven Accretion in Protoplanetary Disks. I. Suppression of the Magnetorotational Instability and Launching of the Magnetocentrifugal Wind. *ApJ*, Vol. 769, No. 1, p. 76, May 2013.
- [59] A. Johansen, H. Klahr, and Th. Henning. Gravoturbulent Formation of Planetesimals. *ApJ*, Vol. 636, No. 2, pp. 1121–1134, January 2006.
- [60] Shigeru Ida. Stirring and dynamical friction rates of planetesimals in the solar gravitational field. *Icarus*, Vol. 88, No. 1, pp. 129–145, November 1990.
- [61] G. W. Wetherill and G. R. Stewart. Accumulation of a swarm of small planetesimals. *Icarus*, Vol. 77, No. 2, pp. 330–357, February 1989.
- [62] Eiichiro Kokubo and Shigeru Ida. On Runaway Growth of Planetesimals. *Icarus*, Vol. 123, No. 1, pp. 180–191, September 1996.

- [63] E. Kokubo and S. Ida. Orbital evolution of protoplanets embedded in a swarm of planetesimals. *Icarus*, Vol. 114, No. 2, pp. 247–257, April 1995.
- [64] Eiichiro Kokubo and Shigeru Ida. Formation of Protoplanet Systems and Diversity of Planetary Systems. *ApJ*, Vol. 581, No. 1, pp. 666–680, December 2002.
- [65] Eiichiro Kokubo, Junko Kominami, and Shigeru Ida. Formation of Terrestrial Planets from Protoplanets. I. Statistics of Basic Dynamical Properties. *ApJ*, Vol. 642, No. 2, pp. 1131–1139, May 2006.
- [66] W. K. Hartmann and D. R. Davis. Satellite-Sized Planetesimals and Lunar Origin. *Icarus*, Vol. 24, No. 4, pp. 504–515, April 1975.
- [67] A. G. W. Cameron and W. R. Ward. The Origin of the Moon. In *Lunar and Planetary Science Conference*, Vol. 7 of *Lunar and Planetary Science Conference*, p. 120, March 1976.
- [68] Robin M. Canup. Dynamics of Lunar Formation. *ARA&A*, Vol. 42, No. 1, pp. 441–475, September 2004.
- [69] Natsuki Hosono, Shun-ichi Karato, Junichiro Makino, and Takayuki R. Saitoh. Terrestrial magma ocean origin of the Moon. *Nature Geoscience*, Vol. 12, No. 6, pp. 418–423, April 2019.
- [70] Masahiro Ikoma, Kiyoshi Nakazawa, and Hiroyuki Emori. Formation of Giant Planets: Dependences on Core Accretion Rate and Grain Opacity. *ApJ*, Vol. 537, No. 2, pp. 1013–1025, July 2000.
- [71] 梅村雅之, 福江純, 野村英子. 輻射輸送と輻射流体力学. 日本評論社, 2016.
- [72] Jr. Haisch, Karl E., Elizabeth A. Lada, and Charles J. Lada. Disk Frequencies and Lifetimes in Young Clusters. *ApJL*, Vol. 553, No. 2, pp. L153–L156, June 2001.
- [73] Tommy Chi Ho Lau, Joanna Drażkowska, Sebastian M. Stammmer, Tilman Birnstiel, and Cornelis P. Dullemond. Rapid formation of massive planetary cores in a pressure bump. *A&A*, Vol. 668, p. A170, December 2022.
- [74] Oliver Gressel, Neal J. Turner, Richard P. Nelson, and Colin P. McNally. Global Simulations of Protoplanetary Disks With Ohmic Resistivity and Ambipolar Diffusion. *ApJ*, Vol. 801, No. 2, p. 84, March 2015.
- [75] Shane W. Davis, James M. Stone, and Martin E. Pessah. Sustained Magnetorotational Turbulence in Local Simulations of Stratified Disks with Zero Net

Magnetic Flux. *ApJ*, Vol. 713, No. 1, pp. 52–65, April 2010.

- [76] I. Hubeny. Vertical Structure of Accretion Disks: A Simplified Analytical Model. *ApJ*, Vol. 351, p. 632, March 1990.
- [77] Tomasz F. Stepinski. The Solar Nebula as a Process-An Analytic Model. *Icarus*, Vol. 132, No. 1, pp. 100–112, March 1998.
- [78] Gavin A. L. Coleman and Richard P. Nelson. On the formation of planetary systems via oligarchic growth in thermally evolving viscous discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 445, No. 1, pp. 479–499, 09 2014.
- [79] M. T. Kato, M. Fujimoto, and S. Ida. Dust Concentration at the Boundary Between Steady Super/Sub-Keplerian Flow Created by Inhomogeneous Growth of Magneto-rotational Instability. *ApJ*, Vol. 714, No. 2, pp. 1155–1169, May 2010.
- [80] I. Adachi, C. Hayashi, and K. Nakazawa. The gas drag effect on the elliptical motion of a solid body in the primordial solar nebula. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 56, pp. 1756–1771, December 1976.
- [81] M. Lambrechts and A. Johansen. Forming the cores of giant planets from the radial pebble flux in protoplanetary discs. *A&A*, Vol. 572, p. A107, December 2014.
- [82] A. Youdin and A. Johansen. Protoplanetary Disk Turbulence Driven by the Streaming Instability: Linear Evolution and Numerical Methods. *ApJ*, Vol. 662, No. 1, pp. 613–626, June 2007.
- [83] Takao Sato, Satoshi Okuzumi, and Shigeru Ida. On the water delivery to terrestrial embryos by ice pebble accretion. *A&A*, Vol. 589, p. A15, May 2016.
- [84] C. W. Ormel and J. N. Cuzzi. Closed-form expressions for particle relative velocities induced by turbulence. *A&A*, Vol. 466, No. 2, pp. 413–420, May 2007.
- [85] Masaki Iwasawa, Ataru Tanikawa, Natsuki Hosono, Keigo Nitadori, Takayuki Muranushi, and Junichiro Makino. Implementation and performance of FDPS: a framework for developing parallel particle simulation codes. *PASJ*, Vol. 68, No. 4, p. 54, August 2016.
- [86] Daisuke Namekata, Masaki Iwasawa, Keigo Nitadori, Ataru Tanikawa, Takayuki Muranushi, Long Wang, Natsuki Hosono, Kentaro Nomura, and Junichiro Makino. Fortran interface layer of the framework for developing particle simu-

- lator FDPS. PASJ, Vol. 70, No. 4, p. 70, August 2018.
- [87] Shoichi Oshino, Yoko Funato, and Junichiro Makino. Particle-Particle Particle-Tree: A Direct-Tree Hybrid Scheme for Collisional N-Body Simulations. PASJ, Vol. 63, p. 881, August 2011.
 - [88] S. J. Aarseth. Dynamical evolution of clusters of galaxies, I. MNRAS, Vol. 126, p. 223, January 1963.
 - [89] Junichiro Makino. Optimal Order and Time-Step Criterion for Aarseth-Type N-Body Integrators. ApJ, Vol. 369, p. 200, March 1991.
 - [90] Josh Barnes and Piet Hut. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. Nature, Vol. 324, No. 6096, pp. 446–449, December 1986.
 - [91] Masaki Iwasawa, Shoichi Oshino, Michiko S. Fujii, and Yasunori Hori. PETACLE: Parallelized particle-particle particle-tree code for planet formation. PASJ, Vol. 69, No. 5, p. 81, October 2017.
 - [92] Eiichiro Kokubo and Shigeru Ida. Oligarchic Growth of Protoplanets. *Icarus*, Vol. 131, No. 1, pp. 171–178, January 1998.
 - [93] Junichiro Makino, Toshiyuki Fukushige, Yoko Funato, and Eiichiro Kokubo. On the mass distribution of planetesimals in the early runaway stage. *NewA*, Vol. 3, No. 7, pp. 411–417, November 1998.
 - [94] Rebekah I. Dawson, Eugene Chiang, and Eve J. Lee. A metallicity recipe for rocky planets. MNRAS, Vol. 453, No. 2, pp. 1471–1483, October 2015.
 - [95] Maxwell X. Cai, Jonathan C. Tan, and Simon Portegies Zwart. Inside-out planet formation: VI. oligarchic coagulation of planetesimals from a pebble ring? MNRAS, Vol. 510, No. 4, pp. 5486–5499, March 2022.
 - [96] J. E. Chambers. Late-stage planetary accretion including hit-and-run collisions and fragmentation. *Icarus*, Vol. 224, No. 1, pp. 43–56, May 2013.
 - [97] Masahiro Ogihara, Eiichiro Kokubo, Takeru K. Suzuki, and Alessandro Morbidelli. Formation of the terrestrial planets in the solar system around 1 au via radial concentration of planetesimals. A&A, Vol. 612, p. L5, May 2018.
 - [98] Haochang Jiang and Chris W. Ormel. Efficient planet formation by pebble accretion in ALMA rings. MNRAS, Vol. 518, No. 3, pp. 3877–3900, January 2023.
 - [99] Nagayoshi Ohashi, John J. Tobin, Jes K. Jørgensen, Shigehisa Takakuwa, Patrick Sheehan, Yuri Aikawa, Zhi-Yun Li, Leslie W. Looney, Jonathan P.

Williams, Yusuke Aso, Rajeeb Sharma, Jinshi Sai Insa Choi, Yoshihide Yamato, Jeong-Eun Lee, Kengo Tomida, Hsi-Wei Yen, Frankie J. Encalada, Christian Flores, Sacha Gavino, Miyu Kido, Ilseung Han, Zhe-Yu Daniel Lin, Suchitra Narayanan, Nguyen Thi Phuong, Alejandro Santamaría-Miranda, Travis J. Thieme, Merel L. R. van't Hoff, Itziar de Gregorio-Monsalvo, Patrick M. Koch, Woojin Kwon, Shih-Ping Lai, Chang Won Lee, Adele Plunkett, Kazuya Saigo, Shingo Hirano, Ka Ho Lam, and Shoji Mori. Early Planet Formation in Embedded Disks (eDisk). I. Overview of the Program and First Results. *ApJ*, Vol. 951, No. 1, p. 8, July 2023.

- [100] Takeru K. Suzuki, Takayuki Muto, and Shu-ichiro Inutsuka. Protoplanetary Disk Winds via Magnetorotational Instability: Formation of an Inner Hole and a Crucial Assist for Planet Formation. *ApJ*, Vol. 718, No. 2, pp. 1289–1304, August 2010.
- [101] Takeru K. Suzuki, Masahiro Ogiara, Alessandro Morbidelli, Aurélien Crida, and Tristan Guillot. Evolution of protoplanetary discs with magnetically driven disc winds. *A&A*, Vol. 596, p. A74, December 2016.
- [102] 今井功. 流体力学 (前編). 裳華房, 1973.
- [103] 日野幹雄. 流体力学. 朝倉書店, 1992.
- [104] 異友正. 流体力学. 培風館, 1995.
- [105] 太田有, 藤澤信道. 流体の力学. 共立出版, 2020.
- [106] 後藤仁志. 流れの方程式. 共立出版, 2023.
- [107] 加納孝太郎. Ice line 近傍における氷ダストの凝縮・昇華による成長. 物性研究・電子版, Vol. 3, No. 2, 5 2014.
- [108] Paul S. Epstein. On the Resistance Experienced by Spheres in their Motion through Gases. *Physical Review*, Vol. 23, No. 6, pp. 710–733, June 1924.
- [109] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. 1987.

付録 A 流体の基礎方程式

ここでは、流体力学の考え方や基礎方程式をまとめた。本付録は、[102, 103, 104, 105, 106] を参考に作成している。

A.1 オイラー的記述法とラグランジュ的記述

流体力学には、2種類の流れの運動を記述する方法が存在する：

- ラグランジュ的記述：

流体を多数の粒子（流体要素）と見做し、各粒子に印をつけて、時間の経過に沿ってそれぞれの粒子の運動を追跡する手法

- オイラー的記述：

空間に固定された観測点において、時間の経過に伴う流体の物理量の変化を観測する手法

流体力学では、後者の記述方法を用いながら、流体中の同一流体要素の運動を考えることがある。その際に、ラグランジュ微分（物質微分）と呼ばれる考え方方が重要となる。以下では、簡単にラグランジュ微分に関して説明する。

オイラー的記述法では任意の物理量 f は場の量、すなわちある流体要素に着目した量ではなく、各瞬間の各位置に対する量 $f(x, y, z, t)$ と与えられる。ここで、時刻 t に位置 (x, y, z) にいる流体要素が微小時間 δt 後に位置 $(x + u_x \delta t, y + u_y \delta t, z + u_z \delta t)$ に移動したときのその流体要素に対する物理量 f の変化 δf は

$$f(x, y, z, t) + \delta f = f(x + u_x \delta t, y + u_y \delta t, z + u_z \delta t) \quad (\text{付録 A.1})$$

と表すことができる。ここで、右辺を泰イラー展開して、一次までで近似すると

$$f(x, y, z, t) + \delta f \simeq f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} u_x \delta t + \frac{\partial f}{\partial y} u_y \delta t + \frac{\partial f}{\partial z} u_z \delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t \quad (\text{付録 A.2})$$

となり、さらに、両辺 δt で割って整理すると

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{付録 A.3})$$

となる。ここで、 $\lim_{\delta t \rightarrow 0}$ の極限を取ると

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z + \frac{\partial f}{\partial t} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{付録 A.4})$$

が得られる。ここで、 $\frac{Df}{Dt}$ をラグランジュ微分と呼ぶ。式(付録 A.2)を見ると、 $\frac{\partial f}{\partial t}\delta t$ は、局所的物理量変化でそれ以外は流体要素の移動に伴う物理量変化を表している。つまり、これらを δt で割り、 $\lim_{\delta t \rightarrow 0}$ の極限を取った式(付録 A.4)の中式は、それぞれ $\frac{\partial f}{\partial t}$ が局所的物理量変化率、その他が流体要素の移動に伴う物理量変化率を表している。したがって、式(付録 A.4)は、「流体要素と共に移動するときの流体の物理量の時間変化率」を表している。

A.2 連続の式

3次元空間の位置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 、時刻 t における流体の密度を $\rho(\mathbf{x}, t)$ 、流速ベクトルを $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$ とする。流速ベクトルは場の量、つまり、流体要素そのものの速度ではなく、その位置における流体粒子群の速度を表していることに注意する。

導出

閉曲面 S で囲まれた 3 次元の領域 V にある流体の質量は、

$$\int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (\text{付録 A.5})$$

である。また閉曲面を通して単位時間あたりに出入りする流体の質量は次のような式で求められる。

$$\int_S \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{付録 A.6})$$

ここで、 \mathbf{n} は閉曲面上の外向き法線ベクトルである。このようにして法線ベクトルの向きをとると、式(A.2)の被積分関数部分(ここでは dS も含む微小領域における質量の流入出)は、質量の流出に対して正の値を持つので、全体で流出量が流入量を上回る場合この積分は正の値となる。しかし、式(付録 A.5)を用いて領域 V にある流体の単位時間あたりの質量変化率($\frac{\partial}{\partial t}$)を考えると、質量が流出(減少)する場合は流体の単位時間あたりの質量変化率は負の値になる。従って、式(付録 A.5)と式(付録 A.6)をイコールで結ぶためには、流出をマイナスと捉えるように式(付録 A.6)にマイナスをかける必要がある。よって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_S \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{付録 A.7})$$

これが積分形の連続の式である。これを微分形に変形するためには式(付録 A.7)の右辺

をガウスの定理を使って変形する必要がある。変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV &= - \int_V \nabla \cdot \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) &= -\nabla \cdot \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \{\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{付録 A.8})$$

となって微分形の連続の式が得られる。

A.3 流体の運動方程式

A.2で考えた領域 V について、次は運動量保存の法則を考える。ここでは、まず非粘性流体の場合を考え、次に圧縮性粘性流体の場合をまとめる。

A.3.1 非粘性流体：オイラーの運動方程式

ここでは、流体の各部分に単位質量あたり $\mathbf{K}(x, y, z)$ の外力が働いているものと仮定する。このとき、微小な体積要素 dV を占める流体の質量は ρdV となることから、それに働く外力は $\rho \mathbf{K} dV$ である。また、流体部分の流れている加速度を \mathbf{a} とすれば、d'Alembertの原理により、慣性力 $-\rho \mathbf{a} dV$ を附加的に考えることによって、動力学の問題を静力学に帰着させることができる。以上より、 V を占める流体に働く全ての力（慣性力も含めて）の釣り合いは、

$$\begin{aligned} \int_V \rho \mathbf{K} dV + \int_S P(-\mathbf{n}) dS &= \int_V \rho \mathbf{a} dV \\ \int_V (\mathbf{K} - \mathbf{a}) \rho dV - \int_S p \mathbf{n} dS &= 0 \end{aligned} \quad (\text{付録 A.9})$$

となる。ここで、左辺第2項は V の表面 S において V の外側にある流体から受ける圧力の総和（面積力と呼ばれる外力）を表している^{*32}。式(付録 A.9)を、ガウスの定理を使って変形すると、

$$\int_V \{\rho(\mathbf{K} - \mathbf{a}) - \nabla P\} dV = 0 \quad (\text{付録 A.10})$$

^{*32} 面積要素 dS には、 $p dS$ の大きさの圧力が $-\mathbf{n}$ の方向に働いていることに注意したい（ \mathbf{n} は外向き法線ベクトルである）。

となる。式(付録 A.10)は、任意の領域 V について成り立つので、被積分関数が流れの中のいたるところで恒等的に 0 となる。したがって、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (\text{付録 A.11})$$

が得られ、これをオイラーの運動方程式と呼ぶ。

A.3.2 圧縮性粘性流体の運動方程式：ナヴィエ–ストークス方程式

圧縮性粘性流体では、式(付録 A.11)に粘性項を加えることで運動方程式を導くことができる。

粘性応力によって i 方向へ働く単位体積あたりの力 f_{si} は、

$$f_{si} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -P\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right) + \zeta e_{kk}\delta_{ij} \right\} \quad (\text{付録 A.12})$$

で与えられる。ここで、 δ_{ij} 、 μ 、 e_{ij} 、 ζ はそれぞれクロネッカーデルタ、粘性係数、変形速度テンソルと体積粘性率である。 δ_{ij} と e_{ij} は以下のように与えられる：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{付録 A.13})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{付録 A.14})$$

式(付録 A.12)の右辺第 3 項目は体積変化に抗する粘性を意味するが、ここではストークスの仮定を用いて体積粘性率 $\zeta = 0$ とする^{*33}。また、式(付録 A.12)の右辺第 2 項目の $2\mu(e_{ij} - 1/3e_{kk}\delta_{ij})$ を粘性ストレス・テンソル p_{ij} と定義する：

$$p_{ij} = 2\rho\nu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (\text{付録 A.15})$$

ここで、 $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数を表している。

以上、式(付録 A.11)と式(付録 A.12)、式(付録 A.15)を用いることで、

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + K_i \quad (\text{付録 A.16})$$

が得られる。これを、圧縮性粘性流体のナヴィエ–ストークス方程式と呼ぶ。

^{*33} 応力やナヴィエ–ストークス方程式、ストークスの仮定については、[106] に詳しい。

A.4 音速

ここでは、非粘性圧縮性流体の音速を導出する。以下の議論では、流体の外部境界の温度が常に一定、かつ流体の熱伝導率が極めて大きい場合、つまり、流体は空間的に温度一定で、時間的にも等温変化すると仮定する。また、

まず、等温を仮定しているので、状態方程式は圧力 P と密度 ρ の間に一つの関係式

$$f(P, \rho) = 0 \quad (\text{付録 A.17})$$

を与える^{*34}。したがって、

$$P = P(\rho) \quad (\text{付録 A.18})$$

の形に表すことができる。この式(付録 A.18)と式(付録 A.8)、(付録 A.11)を用いることで非圧縮性完全流体に対する閉じた基礎方程式を与える。

一様な密度と圧力を持ち静止している流体を考えると、 $\rho = \rho_0 = \text{const}$ 、 $p = p_0 = \text{const}$ 、 $\mathbf{u} = 0$ は、確かに式(付録 A.8)と(付録 A.11)を満たすことがわかる。ここで、静止状態に対して微小な擾乱を加え、流体の密度、圧力、速度がそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho'$ 、 $p = p_0 + p'$ 、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ となる場合を考える。微小な変動量についての 2 次以上の項を無視すると、式(付録 A.8)は

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho_0 + \rho') + (\rho_0 + \rho') \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{付録 A.19})$$

となる。また、式(付録 A.11)は、

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla (P_0 + P') &= 0 \end{aligned}$$

^{*34} これは熱力学によるもので、熱平衡にある系においては系の状態によって定まる状態変数のうち独立に選べるものは二つであって、他の変数は全てこれらの二つの変数で表されるからである。ここでは、状態変数として圧力 P 、密度 ρ と温度 T を用いて、その関係を表した式が状態方程式である。

ここで、式(付録 A.18)の $P = P(\rho)$ を使って $\nabla P = \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho$ とすると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{d\rho} \nabla \rho = 0 \quad (\text{付録 A.20})$$

となる。式(付録 A.19)の両辺を t で偏微分したものと式(付録 A.20)の両辺を \mathbf{x} で偏微分したものの差を取り、これらの方程式から \mathbf{u} を消去すると

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 \rho = 0 \\ a_0 = \sqrt{\left(\frac{dP}{d\rho}\right)} \end{cases} \quad (\text{付録 A.21})$$

となる。これは、密度変動 ρ に対する波動方程式である。ここで a_0 について考えると、これは密度波の伝播速度、つまり音速を表している。したがって、音速は

$$a_0 = \sqrt{\left(\frac{dP}{d\rho}\right)} \quad (\text{付録 A.22})$$

であることが示された^{*35}。

付録 B 角運動量輸送と質量分布進化の導出

B.1 角運動量輸送式

圧縮性粘性流体のナヴィエ-ストークス方程式(式(付録 A.16))を用いて、角運動量輸送の式を導いてみる。

回転運動が卓越している円盤(つまり、ほぼケプラー回転する円盤)の場合、 ϕ 方向に働く粘性応力 $p_{r\phi}$ によるトルクが角運動量輸送を考える上で重要となる。そこで、まずはこのトルクの表式を求める。円盤は、軸対称($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$)、かつ回転運動が卓越している($v_\phi \gg v_r, v_z$)と仮定すると、式(付録 A.16)の ϕ 成分は、

$$\frac{D}{Dt}(rv_\phi) = r \frac{\partial p_{r\phi}}{\partial r} \quad (\text{付録 B.1})$$

^{*35} a_0 が密度波の伝播速度を表すのか直感的なイメージ：

式(付録 A.21)は波動として伝わる密度に関する波動方程式である。波動方程式の一般解は、 $\rho = \rho_1(\mathbf{x} - at) + \rho_2(\mathbf{x} + at)$ として与えられる。これは、例えば $\epsilon = \mathbf{x} - at, \eta = \mathbf{x} + at$ として合成関数の微分を用いることで容易に確かめることができる。このとき、 ρ_1 は \mathbf{x} 方向に速度 a で進んでおり、 ρ_2 は反対方向に同じ速度で進んでいることを表している。なぜそう言えるのかというと、例えば $t = 0$ のとき、 $x = 0$ の点での値は $\rho_1(0)$ であるが、 t 秒後には $x = at$ の点が $\rho_1(0)$ という値を持つことになるからといった具合で理解できるだろう。したがって、上述した一般解が式(付録 A.21)を満たすためには $a^2 = a_0^2$ が成り立つ必要がある。このことから $a = a_0$ であることがわかるので、 a_0 が密度波の伝播速度、すなわち音速であるといえる。

と書くことができる。ここで、 rv_ϕ は角運動量を表しているので、これは角運動量保存の式を表しており、単位質量あたりトルク ($r\frac{\partial p_{r\phi}}{\partial r}$) だけ角運動量は時間と共に増加することを意味している。これを F_{vis} として、位置 r に幅 δr を持つ高さ 1 の円環の角運動量の時間変化 $2\pi r \delta r \rho F_{\text{vis}}$ について考える。位置 r に幅 δr を持つ円環の粘性応力 $p_{r\phi}$ によって生じるトルクは、円環内縁と外縁の差で表されるので、

$$\begin{aligned} 2\pi r \delta r \rho F_{\text{vis}} &= 2\pi(r + \delta r)^2 p_{r\phi}(r + \delta r) - 2\pi r^2 p_{r\phi}(r) \\ &= 2\pi \delta(r^2 p_{r\phi}) \end{aligned} \quad (\text{付録 B.2})$$

となる。ここで、 $\delta r \rightarrow 0$ として、 F_{vis} について解くと

$$F_{\text{vis}} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 p_{r\phi})$$

が得られる。 $F_{\text{vis}} = r \frac{\partial p_{r\phi}}{\partial r}$ なので、

$$\frac{\partial p_{r\phi}}{\partial r} = \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 p_{r\phi}) \quad (\text{付録 B.3})$$

であることがわかる。粘性応力 $p_{r\phi}$ は、式(付録 A.15)から

$$\begin{aligned} p_{r\phi} &= \rho \nu \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r e_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi e_\phi}{\partial r} \right) \right] \\ &= -\frac{v_\phi}{r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} = \rho \nu r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{付録 B.4})$$

なので、式(付録 B.1)、(付録 B.3)、(付録 B.4)から

$$\frac{D}{Dt}(rv_\phi) = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \rho \nu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (\text{付録 B.5})$$

が得られる。これが ϕ 方向に働く粘性応力 $p_{r\phi}$ のトルクによる角運動量輸送の式である。円盤ガスはほぼケプラー回転していることから、 $v_\phi = r\Omega_K$ とすると、中心星質量の時間進化が十分小さいという仮定の下では $\frac{\partial rv_\phi}{\partial t} = 0$ となる。したがって、式(付録 B.5)は

$$r \Sigma v_r \frac{\partial rv_\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \Sigma \nu \frac{\partial \Omega_K}{\partial r} \right) \quad (\text{付録 B.6})$$

とよりシンプルな形で表される。但し、上式は z 方向に積分している。

B.2 質量分布進化

ここでは、式 (3.26) の解析解の導出過程を示す。その上で置く仮定は以下のとおりである：

1. 円盤はほぼケプラー回転しているので、回転角速度を Ω_K と見做す (3.1.1 項)
2. 動粘性係数 ν は時間依存せず、半径 r に比例する形で表される (4.2 節)

まずは、粘性トルクを用いて式 (3.26) を書き換える。半径 r の円筒面に働く粘性トルク g は、ケプラー回転する円盤に対する式 (付録 B.4) を用いて、

$$\begin{aligned} g &= -2\pi r \int_{-h}^h rp_{r\phi} dz \\ &= -2\pi r \int_{-h}^h \rho \nu r^2 \frac{\partial \Omega_K}{\partial r} dz \\ &= -2\pi r^3 \frac{\partial \Omega_K}{\partial r} \nu \Sigma = 3\pi \Sigma \nu J \end{aligned} \quad (\text{付録 B.7})$$

ここで、 J は式 (3.15) で定義されている比角運動量である。したがって、面密度の局所時間微分は

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{3\pi \nu J} \frac{\partial g}{\partial t} \quad (\text{付録 B.8})$$

と表される。次に、質量降着率 (式 (3.25)) を g を使って表すと、

$$\dot{M} = 6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Sigma \nu r^{1/2} \right) = \frac{\partial g}{\partial J} \quad (\text{付録 B.9})$$

となる。ここで、 $\frac{\partial J}{\partial r} = \frac{1}{2} \sqrt{GM_*/r}$ であることを使った。以上の式 (付録 B.8)、(付録 B.9) から、式 (3.26) は

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{3\nu GM_*}{4r} \frac{\partial^2 g}{\partial J^2} \quad (\text{付録 B.10})$$

となる。仮定 2 より、式 (付録 B.10) の右辺の係数は定数となる。したがって、

$$\kappa \equiv \frac{3\nu GM_*}{4r} \quad (\text{付録 B.11})$$

とすると、式 (付録 B.10) は

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 g}{\partial J^2} \quad (\text{付録 B.12})$$

と表すことができる。これは、半径 r の円筒面に働く粘性トルク g の定数一次元拡散方程式であり、時間に関して 1 階、空間に関して 2 階の偏微分方程式であるから、解を決定す

るためには境界条件(2個)と初期条件(1個)を課す必要がある。ここでは、境界条件を

$$\begin{cases} \text{when } J = 0 \ (r = 0) & g(0, t) = 0 \\ \text{when } J \rightarrow \infty \ (r \rightarrow \infty) & \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial J} [g(J, t)] = 0 \end{cases} \quad (\text{付録 B.13})$$

とする。さらに、 $g^+ \equiv \int_J^\infty g(J', t) dJ'$ を定義し、式(付録B.13)の境界条件を考慮して、式(付録B.12)を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_J^\infty g dJ' &= \kappa \int_J^\infty \frac{\partial^2 g}{\partial J'^2} dJ' \\ &= \kappa \left\{ \frac{\partial g}{\partial J'} \Big|_{J' \rightarrow \infty} - \frac{\partial g}{\partial J'} \Big|_{J' = J} \right\} \\ &= -\kappa \frac{\partial g}{\partial J'} \Big|_{J' = J} \end{aligned} \quad (\text{付録 B.14})$$

となる。さらに、 $-\frac{\partial g^+}{\partial J} = g(J, t)$ であることを使って、

$$\frac{\partial g^+}{\partial t} = \kappa \frac{d^2 g^+}{dJ^2} \quad (\text{付録 B.15})$$

が得られる。これは、 g の拡散方程式を g^+ のものへと変換したことになる。この変換によって、式(付録B.13)の境界条件から、 $\frac{\partial g^+}{\partial J}|_{J=0} = 0$ が得られる。さらに初期条件には、 $t = t_0$ で、 $g^+(J, t_0) = g_0^+ \delta(J)$ (g_0^+ は定数)のようにディラックの δ 関数で初期条件が与えられている場合を考える。

ここまでで、式(付録B.15)の境界条件、および初期条件を定めたので、以下ではFourier変換を用いて実際に式(付録B.15)の解を求めていく^{*36}。 g^+ の逆フーリエ変換

$$g^+(J, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^+(k_J, t) \exp(ik_J J) dk_J \quad (\text{付録 B.16})$$

なので、これを式(付録B.15)に代入して

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{g}^+(k_J, t)}{\partial t} \exp(ik_J J) dk_J = \kappa \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-k_J^2) \hat{g}^+(k_J, t) \exp(ik_J J) dk_J \quad (\text{付録 B.17})$$

を得る。任意の J に対して、式(付録B.17)が成り立つためには、被積分関数が0でなければならないので、

$$\frac{\partial \hat{g}^+(k_J, t)}{\partial t} + k_J^2 \hat{g}^+(k_J, t) = 0 \quad (\text{付録 B.18})$$

^{*36} 以下の導出過程は、[107]を参考にしている。

が得られる。式(付録B.18)を解くと

$$\hat{g}^+(k_J, t) = \hat{g}^+(k_J, t_0) \exp(-\kappa k_J^2(t - t_0)) \quad (\text{付録 B.19})$$

となる。これを式(付録B.16)へ代入して

$$g^+(J, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^+(k_J, t_0) \exp(ik_J J - \kappa k_J^2(t - t_0)) dk_J \quad (\text{付録 B.20})$$

が得られる。ここで、初期条件を用いると

$$g_0^+ \delta(J) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^+(k_J, t_0) \exp(ik_J J) dk_J \quad (\text{付録 B.21})$$

と表される。次に、式(付録B.21)をフーリエ変換すると、

$$\hat{g}^+(k_J, t_0) = g_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(J) \exp(-ik_J J) dJ = g_0^+ \quad (\text{付録 B.22})$$

と求まる。よって、式(付録B.20)は

$$g^+(J, t) = \frac{g_0^+}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_J J - \kappa k_J^2(t - t_0)) dk_J \quad (\text{付録 B.23})$$

となる。被積分関数の指数部を平方完成して、式(付録B.23)を整理すると

$$\begin{aligned} g^+(J, t) &= \frac{g_0^+}{2\pi} \exp\left(-\frac{J^2}{4\kappa(t - t_0)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\kappa(t - t_0)\left[k_J - i\frac{J}{2\kappa(t - t_0)}\right]^2\right) dk_J \\ &= \frac{g_0^+}{\sqrt{4\pi\kappa(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{J^2}{4\kappa(t - t_0)}\right) \end{aligned} \quad (\text{付録 B.24})$$

が得られる。積分計算には、複素ガウス積分を用いている。

最後に、式(付録B.24)を面密度を用いた表式へと変換する。 $g(J, t) = -\frac{\partial g^+}{\partial J}$ だったので、

$$g(J, t) = \frac{2g_0^+ J}{\sqrt{\pi}[4\kappa(t - t_0)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{J^2}{4\kappa(t - t_0)}\right) \quad (\text{付録 B.25})$$

となる。ここで、変数を以下のように無次元化する：

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_0} \quad (\text{付録 B.26})$$

$$\tilde{\nu} \equiv \frac{\nu}{\nu_0} = \tilde{r} \quad (\text{付録 B.27})$$

$$\tilde{J} \equiv \frac{J}{J_0} = \tilde{r}^{1/2} \quad (\text{付録 B.28})$$

$$\tilde{t} \equiv \frac{4\kappa(t - t_0)}{J_0^2} = \frac{t}{(r_0^2/3\nu_0)} + 1 \quad (\text{付録 B.29})$$

但し、半径 $r = r_0$ における J, ν をそれぞれ J_0, ν_0 、また $r_0 \equiv -4\kappa t_0/GM_*$ と定義した。式 (付録 B.26) から式 (付録 B.29) までを用いると式 (付録 B.25) は

$$g(J, t) = C \frac{\tilde{r}^{1/2}}{\tilde{t}^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \quad (\text{付録 B.30})$$

となる (C は定数)。式 (付録 B.30) と式 (付録 B.7) を連立すると

$$\Sigma = \frac{C}{3\pi\nu_0 J_0} \frac{1}{\tilde{r}\tilde{t}^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \quad (\text{付録 B.31})$$

が得られる。さらに、式 (付録 B.30) と式 (付録 B.31)、式 (付録 B.9) を連立すると

$$\dot{M} = \frac{C}{J_0} \frac{1}{\tilde{t}^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \left(1 - \frac{2\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) = 3\pi\nu\Sigma \left(1 - \frac{2\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) \quad (\text{付録 B.32})$$

を得る。ここで、 $\tilde{\xi} = \tilde{r}/\tilde{t}$ として、以下の無次元変数を定義すると

$$\tilde{\Sigma} = \frac{3\pi\nu_0 J_0}{C} \tilde{t}^{5/2} \Sigma \quad (\text{付録 B.33})$$

$$\tilde{M} = \frac{J_0}{C} \tilde{t}^{3/2} \dot{M} \Sigma \quad (\text{付録 B.34})$$

これらの無次元変数は、 $\tilde{\xi}$ のみの関数として、以下のように表すことができる。

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{\xi}^{-1} \exp\left(-\tilde{\xi}\right) \quad (\text{付録 B.35})$$

$$\tilde{M} = \exp\left(-\tilde{\xi}\right) \left(1 - 2\tilde{\xi}\right) \quad (\text{付録 B.36})$$

式 (付録 B.35) と式 (付録 B.36) は、自己相似解、つまり各時間でそれぞれの関数形を一定の比率で縦横に伸縮させた関数である。

付録 C ガス抵抗則と動粘性係数

ここでは、3.2 節で用いる 2 種類のガス抵抗 (Stokes drag・Epstein drag) と動粘性係数の導出過程をまとめた。本付録は、[54, 106, 107, 108, 109] を参考に作成している。

C.1 Stokes drag

遅い流れ (低 Reynolds 数流れ : $Re < 1$) 中で、ダスト半径が平均自由行程よりも大きい ($a > l_g$) 場合、ガスは粘性流体として扱われる。このような系において、ダストへ働く

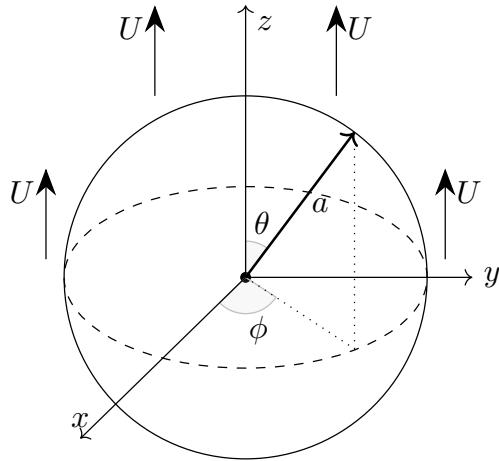


図 33 Stokes drag

ガス抵抗は Stokes drag と呼ばれる。以下では、低 Reynolds 数流れの非圧縮性粘性流体中で、球形粒子へ働く抵抗力 (Stokes drag) を導出する。

図 33 のように、座標系の原点が半径 a の球の中心にあり、 z 軸負の方向から一様流 (流速 U) が流れている状況を考える。このとき非圧縮性 ($\rho = \text{const}$) を仮定しているので、連続の式 (式 (付録 A.8)) から

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{付録 C.1})$$

となる。ここで、流れは z 軸対称であることから、 $u_\phi = 0$, $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ であることに注意する。この式 (付録 C.1) から、 u_r , u_θ はスカラー関数 Ψ を用いて、

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (\text{付録 C.2})$$

の形で表すことができる。スカラー関数 Ψ は、Stokes の流れ関数と呼ばれる。

式 (付録 C.1) より、式 (付録 A.15) で定義した粘性ストレス・テンソルを用いると、接線応力による単位体積あたりに働く力は

$$\frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} = 2\rho\nu \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ij} = \rho\nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \rho\nu \nabla^2 u_i \quad (\text{付録 C.3})$$

のようになる。また、低 Reynolds 数の仮定 ($\text{Re} \ll 1$) から

$$\frac{\text{慣性項} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{\text{粘性項} \mu \nabla^2 \mathbf{u}} = \frac{\rho U^2 / a}{\rho U / a^2} = \frac{\rho U a}{\mu} \equiv \text{Re} \ll 1 \quad (\text{付録 C.4})$$

となる。これは、遅い流れにおけるナヴィエ-ストークス方程式において移流慣性項が粘性項に比べて、十分小さい（つまり、無視できる）ことを意味している。これを Stokes の近似と呼ぶ。以上、式（付録 C.3）と（付録 C.4）を考慮して、式（付録 A.16）の圧縮性流体のナヴィエ-ストークス方程式を書き換えると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{付録 C.5})$$

が得られる。この式を Stokes 方程式と呼ぶ。ここで、式（付録 C.5）の回転をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{u}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla P + \nu \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (\text{付録 C.6})$$

を得る。ここで、 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度を表している。定常流 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) では

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (\text{付録 C.7})$$

となって、渦度はラプラス方程式を満たす。さらに、式（付録 C.5）の発散をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P + \nu \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{付録 C.8})$$

なので、非圧縮性流体 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) では、

$$\nabla^2 P = 0 \quad (\text{付録 C.9})$$

となり、 P もラプラス方程式を満たす。つまり、渦度と圧力は調和関数である。

次に、式（付録 C.7）で表される定常ストークス流れの渦度を基に球周りの速度場、および渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を求めていく。球座標系での \mathbf{u} の回転は、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r u_\phi}{\partial r} \right) \\ &\quad + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{付録 C.10})$$

である。ここで、流れは軸対称であることから、 $v_\phi = 0$, $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ であることに注意し、式（付録 C.2）を代入すると、

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left(\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (\text{付録 C.11})$$

を得る。また、

$$\mathbf{u} = \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) \quad (\text{付録 C.12})$$

と書けるので、

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = \frac{D\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{付録 C.13})$$

を得る。ここで、 D は演算子で

$$D \equiv - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (\text{付録 C.14})$$

と定義される^{*37}。式 (付録 C.12) から、

$$\nabla \times \nabla \times \left(\frac{D\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = 0 \quad (\text{付録 C.15})$$

と書ける^{*38}。式 (付録 C.13) で Ψ を $D\Psi$ に置き換えると、

$$\nabla \times \nabla \times \left(\frac{D\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = \frac{D^2\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{付録 C.16})$$

なので、

$$\frac{D^2\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi = 0 \rightarrow D^2\Psi = 0 \quad (\text{付録 C.17})$$

となる。したがって、

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \Psi = 0 \quad (\text{付録 C.18})$$

^{*37} 式 (付録 C.11) と式 (付録 C.12) の導出は、[106] の 7.1 節に詳しい。

^{*38} 式 (付録 C.14) の導出：

定常流の Stokes 方程式 (式 (付録 C.5)) の回転をとると、

$$\nabla \times \nabla P = \mu \nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} \rightarrow \nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} = 0$$

となる。さらに、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ 、かつ $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ なので、

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

となる。よって、

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0$$

を得る。ここで、式 (付録 C.13) を用いると

$$\nabla \times \nabla \times \left(\frac{D\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = 0 \quad (\text{付録 C.15})$$

となる。

を得る。これを解くことで、Stokes の流れの関数を求めていく。まずは、無限遠での流れの関数の表式を求める。無限遠では、 z 軸負の方向から一様流が流れているので、

$$u_r = U \cos \theta, \quad u_\theta = -U \sin \theta \quad (\text{付録 C.19})$$

である。これを式 (付録 C.2) へ代入すると、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = Ur^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = Ur \sin^2 \theta \quad (\text{付録 C.20})$$

となる。したがって、これを満たす Ψ として、

$$\Psi = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{付録 C.21})$$

が得られる。ここで、式 (付録 C.21) を $\Psi = f(r) \sin^2 \theta$ とおいて、式 (付録 C.14) で定義される演算子 D を作用させると、第 2 項目は

$$\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f(r) \sin^2 \theta = -\frac{2}{r^2} f(r) \sin^2 \theta \quad (\text{付録 C.22})$$

となる。したがって、式 (付録 C.18) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 f(r) = 0 \quad (\text{付録 C.23})$$

と表すことができる。ここで、 $f(r)$ の幕乗型の解を仮定して、 $f(r) = r^2$ を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 r^n &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) [n(n-1)r^{n-2} - 2r^{n-2}] \\ &= (n^2 - n - 2) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) r^{n-2} \\ &= (n^2 - n - 2)[(n-2)n - 30r^{n-4} - 2r^{n-4}] \\ &= (n+1)(n-2)(n-1)(n-4)r^{n-4} = 0 \end{aligned} \quad (\text{付録 C.24})$$

となる。したがって、式 (付録 C.23) で表される 4 階線形非齊次微分方程式の一般解は、 $n = -1, 1, 2, 4$ を用いて

$$\Psi = \sin^2 \theta \left(\frac{C_{-1}}{r} + C_1 r + C_2 r^2 + C_4 r^4 \right) \quad (\text{付録 C.25})$$

と表すことができる（但し、 C_{-1} , C_1 , C_2 , C_4 は定数）。ここで、無限遠では式（付録 C.21）となることから、 $C_4 = 0$, $C_2 = U/2$ となる。したがって、

$$\Psi = \sin^2 \theta \left(\frac{C_{-1}}{r} + C_1 r + \frac{U}{2} r^2 \right) \quad (\text{付録 C.26})$$

が得られる。次に、上式を式（付録 C.2）へ代入すると、

$$u_r = \cos \theta \left(\frac{2C_{-1}}{r^3} + \frac{2C_1}{r} + U \right), \quad u_\theta = -\sin \theta \left(-\frac{C_{-1}}{r^3} + \frac{C_1}{r} + U \right) \quad (\text{付録 C.27})$$

となる。ここで、球表面上 ($r = a$) で $u_r = u_\theta = 0$ となることから、

$$C_{-1} = \frac{1}{4} U a^3, \quad C_1 = -\frac{3}{4} U a \quad (\text{付録 C.28})$$

を得る。したがって、球まわりの流速は

$$u_r = U \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = -U \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \quad (\text{付録 C.29})$$

となり、Stokes の流れ関数は、

$$\Psi = \frac{U}{2} r^2 \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin^2 \theta \quad (\text{付録 C.30})$$

と表される。上式を用いると、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{U}{2} \left(2 + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -U r^2 \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (\text{付録 C.31})$$

となる。したがって、式（付録 C.11）を用いると渦度は、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{U \sin \theta}{r} \mathbf{e}_\phi \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} - 1 + \frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) = -\frac{3U a \sin \theta}{2r^2} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{付録 C.32})$$

と表すことができる。

ここまで議論を基に、遅い流れ（低 Reynolds 数流れ）の非圧縮性粘性流体中で、球へ働く抵抗力（Stokes drag）を求めていく。定常流では、式（付録 C.5）は

$$\nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{付録 C.33})$$

と書ける。ここで、脚注 22 より $\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ であることから、上式は

$$\nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (\text{付録 C.34})$$

となる。式(付録 C.13)の u_i を ω_i に置き換えて、式(付録 C.32)を用いると

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \theta} + \frac{\omega_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \right) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r \omega_\phi}{\partial r} \\ &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega_\phi \sin \theta) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r \omega_\phi}{\partial r} = -\frac{3Ua}{2r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)\end{aligned}\quad (\text{付録 C.35})$$

を得る。以上、式(付録 C.34)と式(付録 C.35)から、

$$\begin{aligned}\nabla P &= \frac{3U\mu a}{2r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= 3U\mu a \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2} U\mu a \frac{\sin \theta}{r^3}\end{aligned}\quad (\text{付録 C.36})$$

となる。よって、圧力 P は基準圧力 P_0 を用いて

$$P = -\frac{3}{2} U\mu a \frac{\cos \theta}{r^2} + P_0 \quad (\text{付録 C.37})$$

と表される。これを用いて、球面上に働く圧力(法線応力)の z 方向成分の合力 F^p は、単位面積あたりに働く圧力の z 成分が $-P \cos \theta \mathbf{e}_r$ と書けることに注意して、球面上で積分すると

$$\begin{aligned}F^p &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-P|_{r=a} \cos \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} U\mu a \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - P_0 \cos \theta \right) a^2 \sin \theta d\theta = 3\pi\mu U a \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi\mu U a\end{aligned}\quad (\text{付録 C.38})$$

となる。次に、球の表面に働く粘性応力(接線応力)の z 方向成分の合力 F^{vis} を求める。Newton の粘性法則より、粘性応力は

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (\text{付録 C.39})$$

と書けるが、式(付録 C.29)を考慮すると、球面上($r = a$)ではそのほとんどが 0 になり、結局は

$$e_{\theta r} = -\frac{3U}{4a} \sin \theta \quad (\text{付録 C.40})$$

の \mathbf{r} を法線とする θ 方向成分のみとなる^{*39}。よって、 z 方向成分の合力 F^{vis} は

$$\begin{aligned} F^{\text{vis}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-2\mu e_{\theta r}|_{r=a} \sin \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{3\mu U}{2a} a^2 \sin^3 \theta d\theta = 3\pi \mu U a \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= 3\pi \mu U a \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^\pi = 4\pi \mu U a \end{aligned} \quad (\text{付録 C.41})$$

となる。以上より、遅い流れ（低 Reynolds 数流れ）の非圧縮性粘性流体中で、球へ働く抵抗力（Stokes drag）は

$$F_{\text{drag}}^{\text{Stokes}} = F^{\text{P}} + F^{\text{vis}} = 6\pi \mu U a \quad (\text{付録 C.42})$$

と表される。また、ここまで議論は、静止しているガス中を球が速さ U で z 軸負の方向へ運動していると考えることもできる。したがって、 z 軸を球の運動方向に取り直すと、球に働く抵抗力は

$$F_{\text{drag}}^{\text{Stokes}} = -(F^{\text{P}} + F^{\text{vis}}) = -6\pi \mu U a \quad (\text{付録 C.43})$$

となる。

C.2 Epstein drag

ダストサイズ a が平均自由行程 l_g よりも小さくなると ($a \lesssim l_g$)、ダストガス間の相互作用において、ガスは流体近似ができなくなり、ガス分子を音速 $c_{s,g}$ 程度で飛び回る粒子として考える方が適切となる。そこで、ここでは円盤ガスがダストに及ぼす抵抗力を気体分子運動論の立場から調べていく。

ガス分子は、マクスウェル・ボルツマン分布しているものと仮定する。したがって、静止系から見た位相空間内の (\mathbf{r}, \mathbf{v}) から $(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$ の範囲内にあるガス分子の個数 $f_0(\mathbf{v})d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ は、

$$f_0(\mathbf{v})d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} v^2} d\mathbf{r}d\mathbf{v} \quad (\text{付録 C.44})$$

^{*39} ここで考慮すべきなのは接線応力なので、残る変形速度テンソルの \mathbf{r} を法線とする成分を考えれば良い。 $e_{\theta r}$ は、 \mathbf{r} 方向に垂直な面で、 θ 方向の応力を表しており、式（付録 C.40）より、ここでは負の値を持つので、実際の応力の向きは $-\theta$ 方向であることに注意する。

で与えられる。さらに、静止系で速度 \mathbf{v} のガス分子は、速度 \mathbf{V} で運動するダストから見ると速度 $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ で運動しているように見えることからダストとともに動く慣性系において、位相空間中の $(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \mathbf{V})$ から $(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{v} - \mathbf{V} + d\mathbf{v})$ に存在する分子の個数は

$$f_V(\mathbf{v} - \mathbf{V})d\mathbf{r}d\mathbf{v} = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_g}{2k_B T}(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2} d\mathbf{r}d\mathbf{v} \quad (\text{付録 C.45})$$

と表される^{*40}。また、ダスト速度 \mathbf{V} は、 \mathbf{V} の直交座標 (x, y, z) に関する方向余弦を α, β, γ として、

$$\mathbf{V} = \alpha V \mathbf{e}_x + \beta V \mathbf{e}_y + \gamma V \mathbf{e}_z \quad (\text{付録 C.46})$$

で与える。さらに、ダストは音速よりも十分ゆっくりと動いていると仮定すると、式(付録 C.44)は

$$\begin{aligned} f_V(\mathbf{v}) &= n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_g}{2k_B T}(\mathbf{v}+\mathbf{V})^2} \\ &\simeq n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{m_g}{k_B T} V(\alpha V \mathbf{e}_x + \beta V \mathbf{e}_y + \gamma V \mathbf{e}_z) \right\} e^{-\frac{m_g}{2k_B T}(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2} \end{aligned} \quad (\text{付録 C.47})$$

と V の 1 次まで近似できる。ここで、 z 軸に垂直な微小面積 dS に対して $v_z < 0$ で衝突する分子について考えていく。図 34 のように dS を底として、 \mathbf{v} の方向に伸びた円柱を考えた場合、この円柱内で速度が \mathbf{v} の分子は単位時間中に必ず dS に衝突する。したがって、この円柱内で \mathbf{v} から $\mathbf{v} + d^3\mathbf{v}$ の範囲内にある分子数(単位時間あたりに微小面 dS に衝突する分子数)は、

$$N(\mathbf{v})dSd^3\mathbf{v} = -v_z f_V(\mathbf{v})dSd^3\mathbf{v} \quad (\text{付録 C.48})$$

と表すことができる。ここで、 $dS \times v_z$ は斜円柱の体積であり、さらに $v_z < 0$ であることからマイナスを掛けていることに注意しよう。

微小面 dS が単位時間あたりにガス分子から受け取る運動量(z 座標負の向き)は、弾性

^{*40} \mathbf{V} で動く慣性系から見たとき、 $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ ならば、それは静止系で \mathbf{v} の速度で動くガスのことになることから、その時の分子数は静止系でのガス分布の \mathbf{v} のときと同じである。

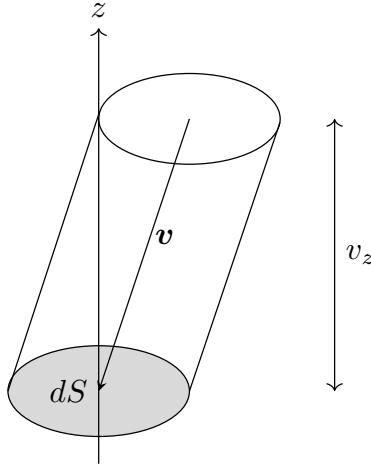


図 34 斜円柱底面 dS へ単位時間あたりに衝突するガス分子

衝突を仮定して、

$$\begin{aligned}
 M dS &= dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z 2m_g v_z \times (-v_z f_V(\mathbf{v}) dS) \\
 &= -2dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z m_g v_z^2 f_V(\mathbf{v}) \\
 &= -2dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z m_g v_z^2 n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \\
 &\quad \left\{ 1 - \frac{m_g}{k_B T} V(\alpha V \mathbf{e}_x + \beta V \mathbf{e}_y + \gamma V \mathbf{e}_z) \right\} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} \quad (\text{付録 C.49})
 \end{aligned}$$

となる^{*41}。さらにここで、 $\rho_g \equiv m_g n_g$ をガスの空間密度、 $c_{s,g} \equiv \sqrt{k_B T / m_g}$ をガスの音速とすると、

$$\begin{aligned}
 M dS &= -2\rho_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} dS \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z v_z^2 \\
 &\quad \left\{ 1 - \frac{m_g}{k_B T} V(\alpha V \mathbf{e}_x + \beta V \mathbf{e}_y + \gamma V \mathbf{e}_z) \right\} e^{-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2} \\
 &= -2\rho_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} dS \int_{-\infty}^0 dv_z \left(v_z^2 - \frac{m_g}{k_B T} V \gamma v_z^3 \right) e^{-\frac{m_g}{2k_B T} v_z^2}
 \end{aligned}$$

を得る。但し、 $\alpha V \mathbf{e}_x, \beta V \mathbf{e}_y$ などにガウス積分を用いている。最後に、 v_z に関しての積

^{*41} 式の一行目右辺の v_z での積分は \mathbf{V} で (すなわちダストと共に) 動く慣性系から見ているので、 $v_z > 0$ だとそもそもダストとガス分子が衝突を起こさない。また、円柱の高さ v_z は $[-\infty, 0]$ まで考えられる。

分を行い、式を整理すると

$$MdS = -\rho_g \left(\frac{k_B T}{m_g} + \gamma \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_{s,g} V \right) dS \quad (\text{付録 C.50})$$

が得られる。

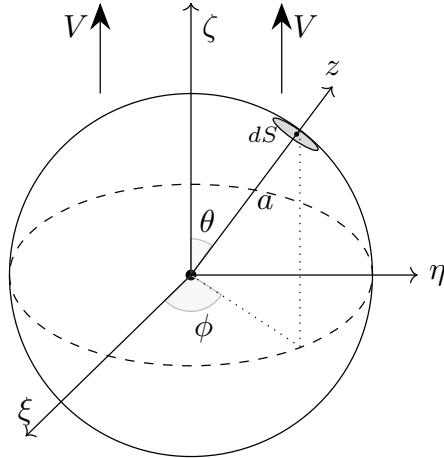


図 35 球形ダスト上の微小面 dS

図 35 のように、 $\mathbf{V}/V = e_\zeta$ となるような直交座標 (ξ, η, ζ) を張る。すると、式 (付録 C.50) の γ は \mathbf{V} の z 座標に関する方向余弦であることから、 $\gamma = \cos \theta$ と書くことができる。したがって、角度 θ に位置する微小面 dS が単位時間あたりに受け取る運動量は

$$MdS = -\rho_g \left(\frac{k_B T}{m_g} + \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_{s,g} V \cos \theta \right) dS \quad (\text{付録 C.51})$$

と書くことができる。運動が ζ 軸対称であることに注意して、 MdS の \mathbf{V} 方向の成分 $M \cos \theta dS$ をダスト球面上で積分することで、単位時間あたりのダストの運動量変化が計算できる。以上より、Epstein drag は直交座標系 (ξ, η, ζ) から極座標系 (r, θ, ϕ) へ変換して

$$\begin{aligned} F_{\text{drag}}^{\text{Epstein}} &= \iint M dS \cos \theta \\ &= a^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi M \cos \theta \sin \theta \\ &= -\frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \rho_g a^2 c_{s,g} V \end{aligned} \quad (\text{付録 C.52})$$

となる。

C.3 動粘性係数

ここでは、ガス分子の動粘性係数の導出過程を示す。その上で、ガス分子は熱平衡状態で、かつ系内に一様に分布しているものと仮定する。

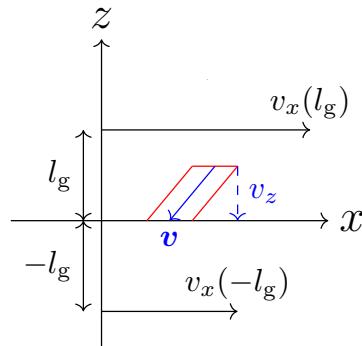


図 36 任意の $z = 0$ 上の単位面積を単位時間に通過する速度 v の分子が含まれ得る領域

図 36 のように、ここでは流体が全体として x 軸正の方向に流れしており、その速度 $v_x(z)$ は、 z だけに依存しているとする。しかし、ガス分子はそれぞれランダムに熱運動していると考えられる。そこでまずは、 $z = 0$ を z 軸負の方向へと通過する分子数のフラックスを考えていく。これは、以下のようにして考えられる。仮定より、ガス分子は空間に一様に分布しているので、単位体積あたり \mathbf{v} から $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ の速度を持つ分子の確率は、分布関数 $f_g(\mathbf{v})$ を用いて $f_g(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ と書ける。したがって、この速度を持つ分子で、かつ任意の $z = 0$ 上の単位面積を単位時間に通過する分子数は、その任意の $z = 0$ 上の単位面積を底として、 \mathbf{v} の方向に伸びた円柱内に限られるため、個数密度を n_g とすると

$$f = n_g f_g(\mathbf{v}) v_z d\mathbf{v} \quad (\text{付録 C.53})$$

となる。これを全ての ($v_z > 0$ を除く) 考えられる速度 \mathbf{v} で考えることで、 $z = 0$ を z 軸負の方向へと通過する分子数のフラックス F_- は、

$$\begin{aligned} F_- &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z v_z n_g f_g(\mathbf{v}) \\ &= n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 dv_z v_z \exp\left(-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2\right) \end{aligned} \quad (\text{付録 C.54})$$

となる。ここで、ガス分子は熱平衡状態を仮定しているので、分布関数 $f_g(\mathbf{v})$ はマクス

ウェル・ボルツマン分布を用いて

$$f_g(\mathbf{v}) = \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2 \right) \quad (\text{付録 C.55})$$

とした。 $z = 0$ を z 軸正の方向へと通過する分子数のフラックス F_+ も同様に考えて、

$$F_+ = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_0^{\infty} dv_z v_z \exp\left(-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2 \right) \quad (\text{付録 C.56})$$

となる。そして、ガウス積分を用いて、式 (付録 C.55) と (付録 C.56) を積分すると

$$F_+ = F_- = \frac{1}{4} n_g v_m \quad (\text{付録 C.57})$$

を得る。ここで、 v_m は、

$$v_m \equiv \left(\frac{m_g}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int d\mathbf{v} |\mathbf{v}| \exp\left(-\frac{m_g}{2k_B T} \mathbf{v}^2 \right) = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_g}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_s \quad (\text{付録 C.58})$$

で定義される速さの期待値 (熱速度) である。

流体は全体として、 x 軸正の方向へ $v_x(z)$ の速度で流れているので、式 (付録 C.57) を用いて、 $z = 0$ における z 軸正の向きと負の向きの運動量フラックス M_+ , M_- は、以下のように書ける。

$$M_+ = \frac{1}{4} m_g n_g v_m v_x(-l_g) = \frac{1}{4} \rho_g v_m \left[v_x(z=0) - l_g \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] \quad (\text{付録 C.59})$$

$$M_+ = \frac{1}{4} m_g n_g v_m v_x(l_g) = \frac{1}{4} \rho_g v_m \left[v_x(z=0) + l_g \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] \quad (\text{付録 C.60})$$

ここで、 z 軸正 (負) の方向から $z = 0$ へ運ばれてくる流体は、 $z = 0$ から $\pm l_g$ 程度離れたところから運ばれてくると考えていることに注意する。したがって、 $z = 0$ における正味の運動量フラックス M は、

$$M = M_+ - M_- = -\frac{1}{4} \rho_g v_m l_g \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (\text{付録 C.61})$$

となる。これが、粘性応力 $\tau_{xz} = -\mu(\partial v_x / \partial z)$ と等しくなるので、以上より動粘性係数 ν は、

$$\nu = \frac{1}{2} v_m l_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_s l_g \quad (\text{付録 C.62})$$

と表すことができる。

付録 D ヤコビ・エネルギーとヒル半径

ヒル半径とは、惑星の重力圏の大きさを表す代表的な長さであり、惑星がどの程度成長することができるかや惑星間の重力相互作用の強さを測る基準となる量である。したがって、惑星形成過程や惑星軌道進化を考える上でヒル半径を理解することは非常に重要である。そこで本付録では、円制限三体問題の保存量であるヤコビ・エネルギーを用いたヒル半径の導出過程を示す。

D.1 ヤコビ・エネルギー

質量 M の原始惑星が軌道長半径 a で円軌道している系を考えていく。座標系には、原始惑星を原点とした中心星（質量 M_* ）から距離 a でケプラー角速度 Ω_K で回る回転座標系を設定する。また、この座標系での質量 m の微惑星速度を v として、中心星からの原始惑星、および微惑星の位置ベクトルをそれぞれ \mathbf{a} と \mathbf{R} とする（図 37 参照）。この座標系は、中心星周りを公転する惑星の周囲の粒子の運動などを記述する場合に広く用いられ、ヒル座標系と呼ばれる。

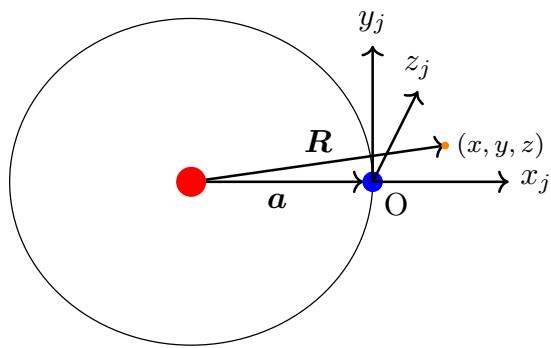


図 37 ヒル座標系：円運動する原始惑星（青）を原点とした座標系で赤点と橙点はそれぞれ中心星と微惑星を表している。

この座標系を用いると、微惑星の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM_* m}{|\mathbf{R}|^2} \mathbf{e}_R - \frac{GM m}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|^2} \mathbf{e}_{R-a} - m\Omega_K \times (\Omega_K \times \mathbf{R}) - 2m\Omega_K \times \mathbf{v} - m \frac{d\Omega_K}{dt} \times \mathbf{R} \quad (\text{付録 D.1})$$

となる。ここで、右辺 1, 2 項目は中心星重力と原始惑星重力であり、3, 4, 5 項目はそれぞれ遠心力、コリオリ力とオイラー力を表している。式 (付録 D.1)において、 Ω_K は時間

に依存しないので消えて、かつ両辺 \mathbf{v} で内積を取ると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega}_K \times \mathbf{R}|^2 - \frac{GM_*}{|\mathbf{R}|} - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|} \right) = 0 \quad (\text{付録 D.2})$$

となることから、被微分項は保存することがわかる。これを、以下のように

$$E_J \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2 - |\boldsymbol{\Omega}_K \times \mathbf{R}|^2) - \frac{GM_*}{|\mathbf{R}|} - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|} \quad (\text{付録 D.3})$$

ヤコビ・エネルギー E_J と定義する。ここで、右辺 1,2,3,4 項はそれぞれ微惑星の運動エネルギー、遠心力ポテンシャル、中心星重力ポテンシャルと原始惑星重力ポテンシャルを表している。

次に、式 (付録 D.3) を原始惑星まわりの局所回転座標系で書き下していく。その上で、局所近似 (ヒル近似と呼ばれる) とヒル近似の下での微惑星の運動方程式の知識が必要となる。そこで、以下ではまずこれらを簡潔に説明し、その後ヤコビ・エネルギーの式変形を考察する。

ヒル近似は、

$$\begin{cases} M_* \gg M, m \\ |a_p - a| \ll a \\ e, i \ll 1 \end{cases} \quad (\text{付録 D.4})$$

で与えられる。ここで、 a_p, e, i はそれぞれ微惑星の軌道長半径、離心率と軌道傾斜角である。次に、運動方程式は式 (付録 D.4) の近似と式 (付録 D.1) を用いて

$$\ddot{x} = 2\Omega_K \dot{y} + 3\Omega_K^2 x - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|^3} x \quad (\text{付録 D.5})$$

$$\ddot{y} = -2\Omega_K \dot{x} - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|^3} y \quad (\text{付録 D.6})$$

$$\ddot{z} = -\Omega_K^2 z - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|^3} z \quad (\text{付録 D.7})$$

と表すことができる。式 (付録 D.5) と式 (付録 D.6) の左辺 1 項目はコリオリ力、式 (付録 D.5) の左辺 2 項目は中心星重力の x 成分と遠心力の合力、式 (付録 D.7) の左辺 1 項目は中心星重力の z 成分を表している。

ここで、さらに原始惑星と微惑星が独立に中心星の周りをケプラー回転すると考えて、相互作用を無視すると式 (付録 D.5) – 式 (付録 D.7) は、

$$\ddot{x} = 2\Omega_K \dot{y} + 3\Omega_K^2 x \quad (\text{付録 D.8})$$

$$\ddot{y} = -2\Omega_K \dot{x} \quad (\text{付録 D.9})$$

$$\ddot{z} = -\Omega_K^2 z \quad (\text{付録 D.10})$$

となり、面内運動と面外運動を分離して考えることができるようになる。以下では、それぞれの成分について計算を進めていく。まず、式(付録D.9)を積分して、

$$\dot{y} = -2\Omega x + \frac{B\Omega_K}{2} \quad (\text{付録 D.11})$$

を得る(ただし、 B は積分定数)。これを、式(付録D.8)へ代入すると、式(付録D.8)は解析的に解けて、

$$\begin{aligned} x &= A \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] + B \\ &= (a_p - a) - ea_p \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \simeq \Delta a - ea \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \end{aligned} \quad (\text{付録 D.12})$$

となる(A, τ_p は積分定数)。ただし、 $\Delta a = a_p - a$ 、かつ積分定数を求める際に $t = \tau_p$ で $x = (1 - e)a_p - a$ と、 $t = \tau_p + (\pi/\Omega_K)$ で $x = (1 + e)a_p - a$ という条件、つまり $A = -ea_p, B = \Delta a$ を課した。さらに、式(付録D.11)と式(付録D.12)より、

$$\dot{y} = -\frac{3}{2}\Omega_K \Delta a + 2ea_p \Omega_K \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \simeq -\frac{3}{2}\Omega_K \Delta a + 2ea \Omega_K \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.13})$$

となる。また、 \dot{x} に関しては、式(付録D.12)を微分して、

$$\dot{x} \simeq ea \Omega_K \sin[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.14})$$

となる。一方で、 z 方向に関しては式(付録D.10)より、

$$\dot{z} \simeq ia \Omega_K \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.15})$$

$$z \simeq ia \sin[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.16})$$

が得られる。以上をまとめると、

$$x \simeq \Delta a - ea \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.17})$$

$$z \simeq ia \sin[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.18})$$

$$\dot{x} \simeq ea \Omega_K \sin[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.19})$$

$$\dot{y} \simeq -\frac{3}{2}\Omega_K \Delta a + 2ea \Omega_K \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.20})$$

$$\dot{z} \simeq ia \Omega_K \cos[\Omega_K(t - \tau_p)] \quad (\text{付録 D.21})$$

となる。

ここまでで、ヒル近似とは何か、そして微惑星の運動を軌道要素で書き下してきた。以下では、これらを用いて式(付録D.3)をヒル近似で近似し、軌道要素で書き下していく。

まずは、式(付録D.3)において、 \mathbf{R} の動径成分を $r \simeq a + x$ として、原始惑星軌道面に対して鉛直方向を z 成分とする。ここで、ヒル近似より $(x, z \ll a)$ であることと、 $(|\Omega_K \times \mathbf{R}|^2)/2 = \Omega_K^2 r^2/2 = \Omega_K^2(a^2 + 2ax + x^2)/2, GM_*/|\mathbf{R}| = \Omega_K^2 a^3 / \sqrt{r^2 + z^2} = \Omega_K^2 [a^2 - ax + (3/2)x^2 - x^2/2 - z^2/2]$ となることに注意して、定数項を無視すると式(付録D.3)は、

$$E_J = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Omega_K^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 \right) - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|} \quad (\text{付録 D.22})$$

と局所座標系を用いた表式で表すことができる。さらに、式(付録D.17)–式(付録D.21)を式(付録D.22)へ代入すると、局所座標系での軌道要素を含むヤコビ・エネルギーの表式

$$E_J = \frac{1}{2}(e^2 + i^2)v_K^2 - \frac{3}{8}(\Delta a)^2\Omega_K^2 - \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{付録 D.23})$$

が得られる。

D.2 ヒル半径

最後に、本付録前節で求めたヤコビ・エネルギーからヒル半径を求めてみよう。ヤコビ・エネルギーを局所座標系で表した式(付録D.22)のポテンシャル部分を ϕ_J とすると、

$$\phi_J \equiv \Omega_K^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 \right) - \frac{GM}{|\mathbf{R} - \mathbf{a}|} \quad (\text{付録 D.24})$$

となる。この ϕ_J の x 軸上($y = z = 0$)での振る舞いは、

$$\phi_J = -\frac{3}{2}x^2\Omega_K^2 - \frac{GM}{|x|} \quad (\text{付録 D.25})$$

となり、右辺1項は中心星ポテンシャルを、2項は原始惑星の重力ポテンシャルを表していることがわかる。つまり、 x が小さいほど原始惑星の重力ポテンシャルが卓越し、逆に x が大きいほど中心星の重力ポテンシャルが卓越する。その境界は、 $\frac{d\phi_J}{dx} = 0$ より求めることができて、

$$x = \left(\frac{M}{3M_*} \right)^{1/3} a \equiv r_{\text{Hill}} \quad (\text{付録 D.26})$$

となる。これは、惑星の重力圏の大きさを表す代表的な長さと考えられることから、式(付録D.26)をヒル半径 r_{Hill} と定義する。

付録 E 内側デッドゾーン境界へのダスト降着率

我々のモデルでは、ダストはその場で成長し、臨界質量 m_c に達すると中心星方向へドリフトすると仮定した(4.3)。この仮定から、シミュレーション開始時に、中心星から距離 r に存在するダストの内側デッドゾーン境界(IDB)へのダスト降着タイムスケール t_{acc} は、ダストが m_c まで成長するまでの時間 t_{grow} と式(4.44)で与えられるダストの動径ドリフトタイムスケール t_{drift} を用いて、

$$t_{\text{acc}}(r) = t_{\text{grow}}(r) + t_{\text{drift}}(r) \quad (\text{付録 E.1})$$

で与えられる。

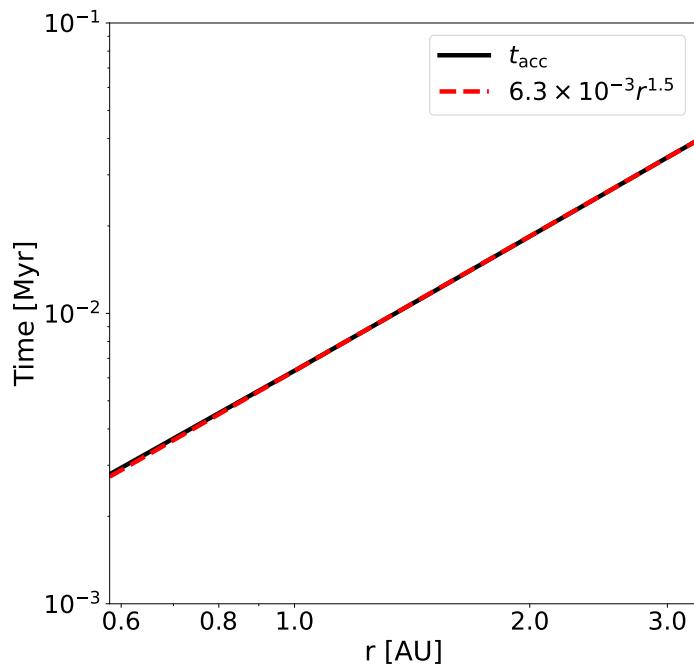


図 38 異なる中心星からの距離 r におけるダスト降着タイムスケール(黒色実線)：赤色破線は、 t_{acc} を r の幕乗関数でフィッティングした近似曲線を示している。本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している([27] より改変)。

図 38 に中心星からの距離 r の関数で表したダスト降着タイムスケールを示す。赤色破線は、数値シミュレーション結果(黒色実線)に対して、距離 r の幕乗関数でフィッティ

ングしたものである。このフィッティング関数による降着タイムスケールの関数形は

$$t_{\text{acc}}(r) = 6.3 \times 10^{-3} r^{1.5} \text{ Myr} \quad (\text{付録 E.2})$$

で与えられる。この式を r について解くことで、デッドゾーン内 WSZ よりも内側の任意の距離 r に存在するダストの降着タイムスケールを見積もることができる。

我々の N 体シミュレーションでは、式 (付録 E.2) のタイムスケールに則って IDB へのダスト粒子の降着を再現する。そこで、我々のシミュレーションがこのダスト降着モデルを正確に再現するかを確認するために、本研究では式 (付録 E.2) で与えられる t_{acc} を用いて解析的に導出した質量フラックスと N 体シミュレーションの結果が一致するかを比較した。以下では、質量フラックスを解析的に求める方法を簡単に説明し、解析解と我々の N 体シミュレーション結果を比較した結果を示す。

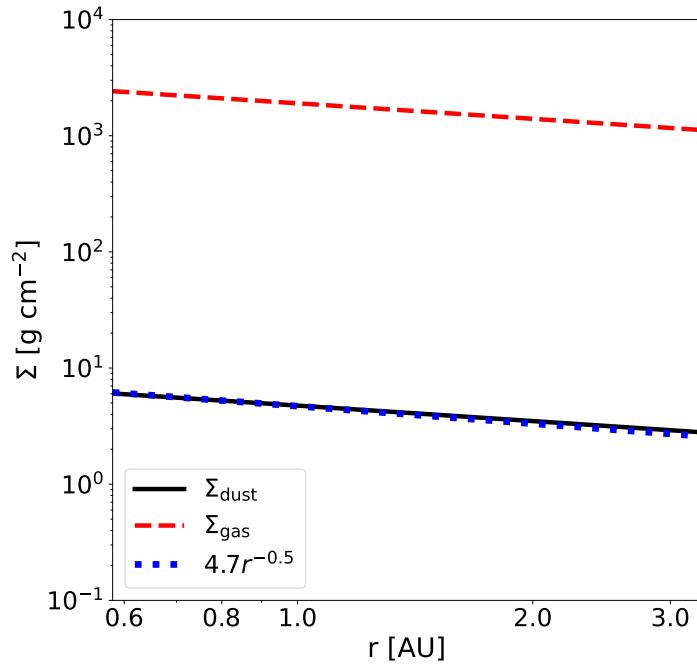


図 39 円盤面密度の動径方向分布：赤色破線と黒色実線はそれぞれガス面密度 Σ_{gas} とダスト面密度 Σ_{dust} を表している。青色点線は、 Σ_{dust} を距離 r の幕乗関数でフィッティングしたものである。本モデルでは、円盤降着率 \dot{M} とガスダスト比 \bar{f} を $\dot{M} = 10^{-7.0} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, $\bar{f} = \bar{f}_{\text{MMSN}}$ に設定している ([27] より改変)。

図 39 に、デッドゾーン内 WSZ よりも内側領域のダスト面密度 Σ_{dust} とガス面密度 Σ_{gas} の動径方向構造を示す。図 39 から、 Σ_{dust} を距離 r の幕乗関数でフィッティングす

ると

$$\Sigma_{\text{dust}} = \bar{f} \Sigma_{\text{gas}} = 4.69 \left(\frac{\bar{f}}{\bar{f}_{\text{MMSN}}} \right) r^{-0.5} \text{ g cm}^{-2}. \quad (\text{付録 E.3})$$

が得られる。ここで、 $\bar{f}/\bar{f}_{\text{MMSN}}$ は MMSN のガスダスト比で規格化したガスダスト比である。式 (付録 E.2) を r について解くことで、与えられた時間にどの距離 r までのダストが IDB へ降着するかを見積もることができるので、この r を式 (付録 E.3) へ代入し、時間積分することである時間までにどれだけのダストが IDB へ降着するかを計算することができる。これを我々は “theoretical mass flux” と呼ぶ。

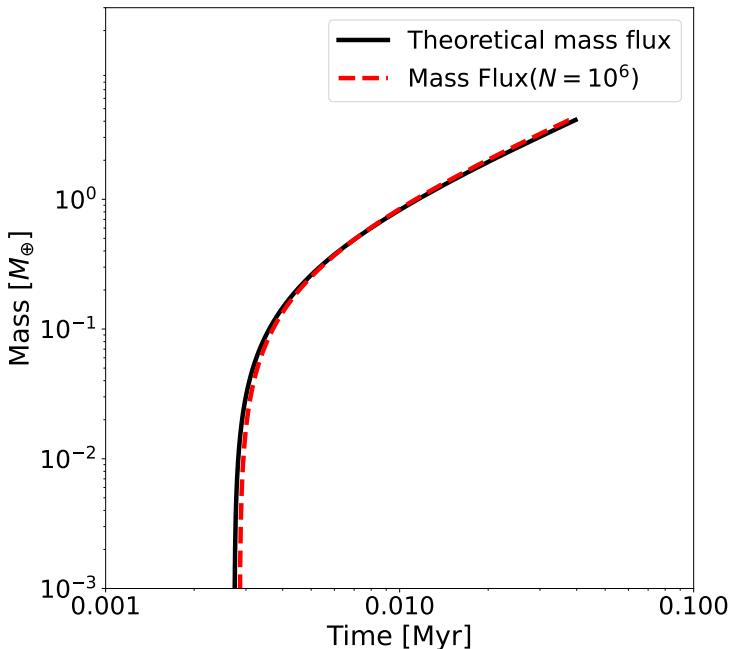


図 40 Theoretical mass flux と本研究の N 体シミュレーションで得られた mass flux の比較：黒色実線が theoretical mass flux を表しており、赤色点線が我々の N 体シミュレーション（モデル：N1Mc）の mass flux である ([27] より改変)。

図 40 に、theoretical mass flux (黒色実線) と我々の N 体シミュレーション (モデル：N1Mc) の mass flux (赤色点線) の比較結果を示す。この図から、我々の N 体シミュレーションは、ダスト進化モデルで見積もられた IDB へのダスト降着を高い精度で再現できていることがわかる。

付録 F N 体シミュレーションのエネルギー誤差

我々の N 体シミュレーションでは、ペブル超粒子が IDB まで集積すると微惑星まで成長すると仮定する。この仮定より、本研究では粒子の IDB 到達に合わせて粒子質量を 10^{8-10} 倍することで微惑星形成を再現している（5.2 節）。この粒子質量の急激な変化は、シミュレーションの過程で非力学的なエネルギー変化を生み出すため、 N 体シミュレーションの積分精度を調べるためにには、この非力学的なエネルギー変化を補正する必要がある。本付録では、急激な粒子質量の変化に伴って生じる非力学的なエネルギーの補正手法、およびその結果を示す。

F.1 非力学的エネルギーの補正手法

粒子質量変化に伴うエネルギー変化、すなわち非力学的エネルギー変化は、質量変化による粒子の運動エネルギーと重力エネルギーの増加分の和として計算される。従って、単一粒子の質量増加に伴う 1 タイムステップあたりの非力学的エネルギー変化は

$$\Delta E_{\text{n.m.}} = \sum_i [\epsilon_{0,i} + \epsilon_{1,i} + \epsilon_{2,i} + \epsilon_{3,i}], \quad (\text{付録 F.1})$$

$$\epsilon_{0,i} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_p^2, \quad (\text{付録 F.2})$$

$$\epsilon_{1,i} = -G \Delta m_i \sum_{k \in N_i} m_k \left[\frac{W(r_{ij}; r_{\text{out},ij})}{r_{ik}} \right] \quad (\text{付録 F.3})$$

$$\epsilon_{2,i} = -\frac{G \Delta m_i M_*}{r_i}, \quad (\text{付録 F.4})$$

$$\epsilon_{3,i} = \Delta m_i \phi_{\text{soft},i}, \quad (\text{付録 F.5})$$

で与えられる。ここで、 Δm_i は i 番目の粒子の質量変化 ($m_{\text{new}} = m_{\text{old}} + \Delta m_i$) であり、 $W(r_{ij}; r_{\text{out}}, ij)$ は、P³T 法のカットオフ関数、 N_i は i 番目の粒子のネイバー粒子数、 ϕ_{soft} は i 番目の粒子に関するソフトパートの重力ポテンシャルを表している（5.1 節）。式（付録 F.2）から式（付録 F.5）は、それぞれ運動エネルギー、近接重力相互作用に伴う重力ポテンシャル、中心星重力ポテンシャル、および遠距離重力相互作用に伴う重力ポテンシャルのエネルギー変化を表している。本研究では、粒子質量が増加する毎に生じる非力学的エネルギー変化（式（付録 F.1））を全体のエネルギーから差し引くことで、急激な粒子質量の変化に伴って生じる非力学的なエネルギーの補正を行った。

F.2 エネルギー誤差の推移

図 41 に、我々の N 体シミュレーションモデルの 1 つである N120Kc1 のエネルギー補正後のエネルギー誤差の時間進化を示す。図 41 では、シミュレーション開始から 4×10^4 年だけを示しているが、これはペブル降着が約 4×10^4 年で終わり、これ以降は質量変化を補正する必要がないからである。この図から、エネルギー誤差は $\mathcal{O}(10^{-7})$ 程度であることから、質量増加に伴う非力学的エネルギー変化の補正が正しく機能していることがわかる。

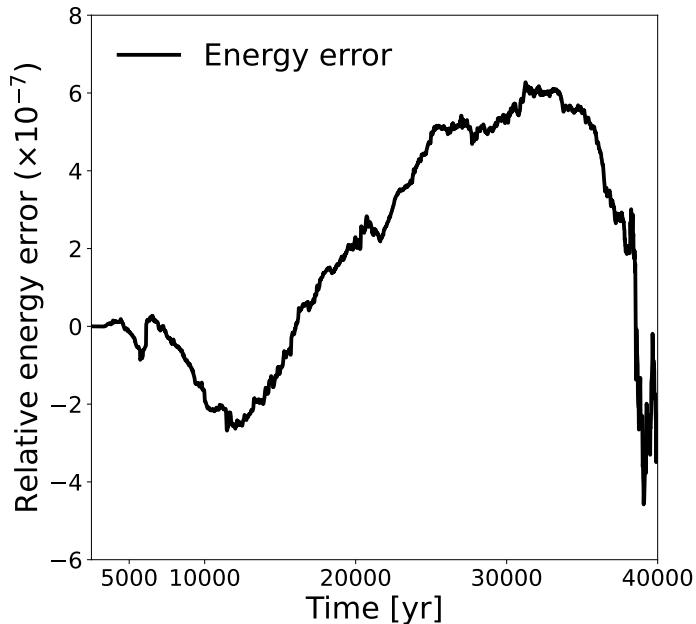


図 41 N120Kc1 のエネルギー補正後のエネルギー誤差の時間進化: Relative energy error は、 $(E_{\text{now}} - E_{\text{initial}} - \Delta E_{\text{n.m}})/E_{\text{now}}$ で与えられる ([27] より改変)。

付録 G 馬蹄軌道 –惑星の 1:1 共鳴–

6.3 節で示した粒子数 6×10^4 から 1×10^6 までの 4 つの N 体シミュレーション結果のうち $N = 2 \times 10^5$ のモデル N200Kc では、IDB 近傍にある最大質量惑星の軌道とほぼ同じ軌道上に 4 番目に大きい惑星が形成される。この 2 つの惑星は 1:1 共鳴状態にあると考え

えられる。そこで、本研究ではこの共鳴運動を詳細に解析するために、 $t = 97,993$ 年から $t = 98,452$ 年にかけて時間積分間隔をさらに短くして再計算を行った。図 42 に、中心星-最大質量惑星を基準とした回転座標系から見た最大惑星近傍を公転する 4 番目に大きい惑星の軌道を示す。図中の灰色の点は、 $t = 97,993$ 年から $t = 98,452$ 年にかけて $100/2\pi$ 年毎に 4 番目に大きい惑星の位置を示したトレーサーを表している。この図より、最大質量惑星から見て、4 番目に大きい惑星の軌道は U 字ループを描くことがわかる。つまり、4 番目に大きい惑星の軌道は U 字ループの頂点に最大質量惑星を挟んだ馬蹄形の軌跡を描いている。したがって、最大質量惑星と 4 番目に大きい惑星は 1:1 の平均運動共鳴を起こしていると結論づけられる。

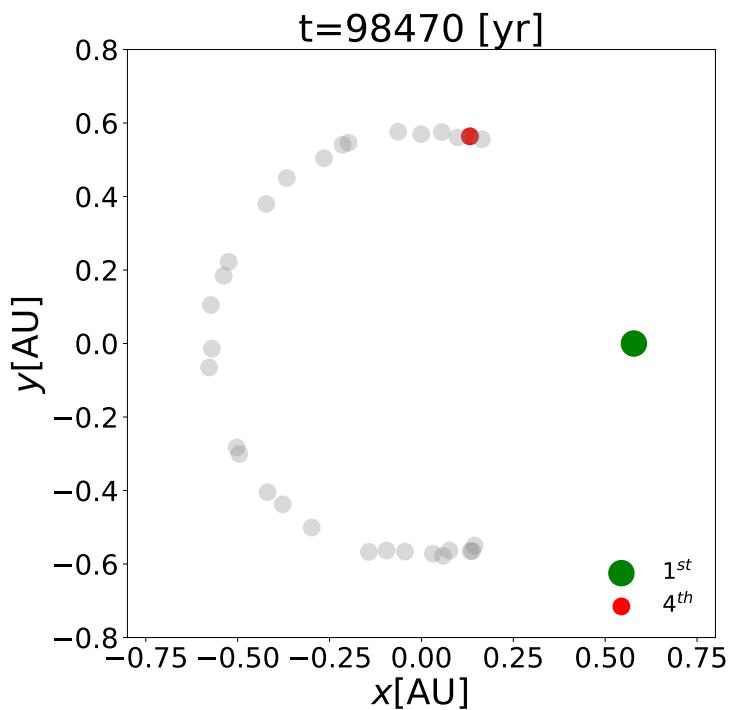


図 42 N200Kc における、中心星-最大質量惑星を基準とした回転座標系から見た最大惑星近傍を公転する 4 番目に大きい惑星の軌道：緑色と赤色の点は、それぞれ最大質量惑星と 4 番目に大きい惑星を表している。灰色の点は、 $t = 97,993$ 年から $t = 98,452$ 年にかけて $100/2\pi$ 年毎に 4 番目に大きい惑星の位置を示したトレーサーである。