UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA

VICERRECTORADO ACADÉMICO

ÁREA DE MATEMÁTICA

MATEMATICA I (175 – 176 - 177)
Cód. de Carrera: 126, 236, 237, 280, 281, 508, 521, 542, 610, 612, 613, 614
Fecha: 09/11/2024

P R E G U N T A S P:1, O II.3

1. Después de observar el número de pasajeros que en los últimos 50 días han decidido viajar con **P&P Airlines**, se obtuvieron los siguientes datos:

68	71	77	83	79
72	74	57	67	69
50	60	70	66	76
70	84	59	75	94
65	72	85	79	71
83	84	74	82	97
77	73	78	93	95
78	81	79	90	83
80	84	91	101	86
93	92	102	80	69

a) Elaborar una tabla de frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas, clasificando estos datos en 8 intervalos de clase y una longitud l =7 (usando redondeo).
b) Elaborar el histograma de frecuencias para estos datos.

Repuesta:

Para resolver el problema, procederemos paso a paso.

Parte a: Tabla de frecuencias relativas y frecuencias acumuladas

1. Determinar el rango de los datos

Primero, encontramos el valor mínimo y máximo de los datos:

- **Mínimo**: 50

- **Máximo**: 102

El rango se calcula como:

$$
\text{Rango} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} = 102 - 50 = 52
$$

2. Determinar el número de intervalos

Se nos indica que queremos 8 intervalos de clase. La longitud de cada intervalo l es 7.

3. Definir los intervalos de clase

Los intervalos se definen a partir del mínimo:

- Intervalo 1: *[50, 56)*
- Intervalo 2: *[57, 63)*
- Intervalo 3: *[64, 70)*
- Intervalo 4: *[71, 77)*
- Intervalo 5: *[78, 84)*
- Intervalo 6: *[85, 91)*
- Intervalo 7: *[92, 98)*
- Intervalo 8: *[99, 105)*

4. Contar las frecuencias absolutas

Contamos cuántos datos caen en cada intervalo:

Intervalo	Frecuencia Absoluta (f)
[50, 56)	1

[57, 63)	2
[64, 70)	8
[71, 77)	10
[78, 84)	12
[85, 91)	7
[92, 98)	6
[99, 105)	2

5. Calcular las frecuencias relativas

La frecuencia relativa $ f_r $ se calcula como:

f_r = \frac{f}{N}

donde *N* es el total de datos (50).

Intervalo	Frecuencia Absoluta (f)	Frecuencia Relativa (f_r)
[50, 56)	1	0.02
[57, 63)	2	0.04
[64, 70)	8	0.16
[71, 77)	10	0.20
[78, 84)	12	0.24
[85, 91)	7	0.14
[92, 98)	6	0.12
[99, 105)	2	0.04

6. Calcular las frecuencias acumuladas

La frecuencia acumulada *F* se calcula sumando las frecuencias absolutas hasta el intervalo actual.

Intervalo	Frecuencia Absoluta (f)	Frecuencia Relativa (f_r)	Frecuencia Acumulada (F)
[50, 56)	1	0.02	1
[57, 63)	2	0.04	3
[64, 70)	8	0.16	11
[71, 77)	10	0.20	21
[78, 84)	12	0.24	33
[85, 91)	7	0.14	40
[92, 98)	6	0.12	46
[99, 105)	2	0.04	48

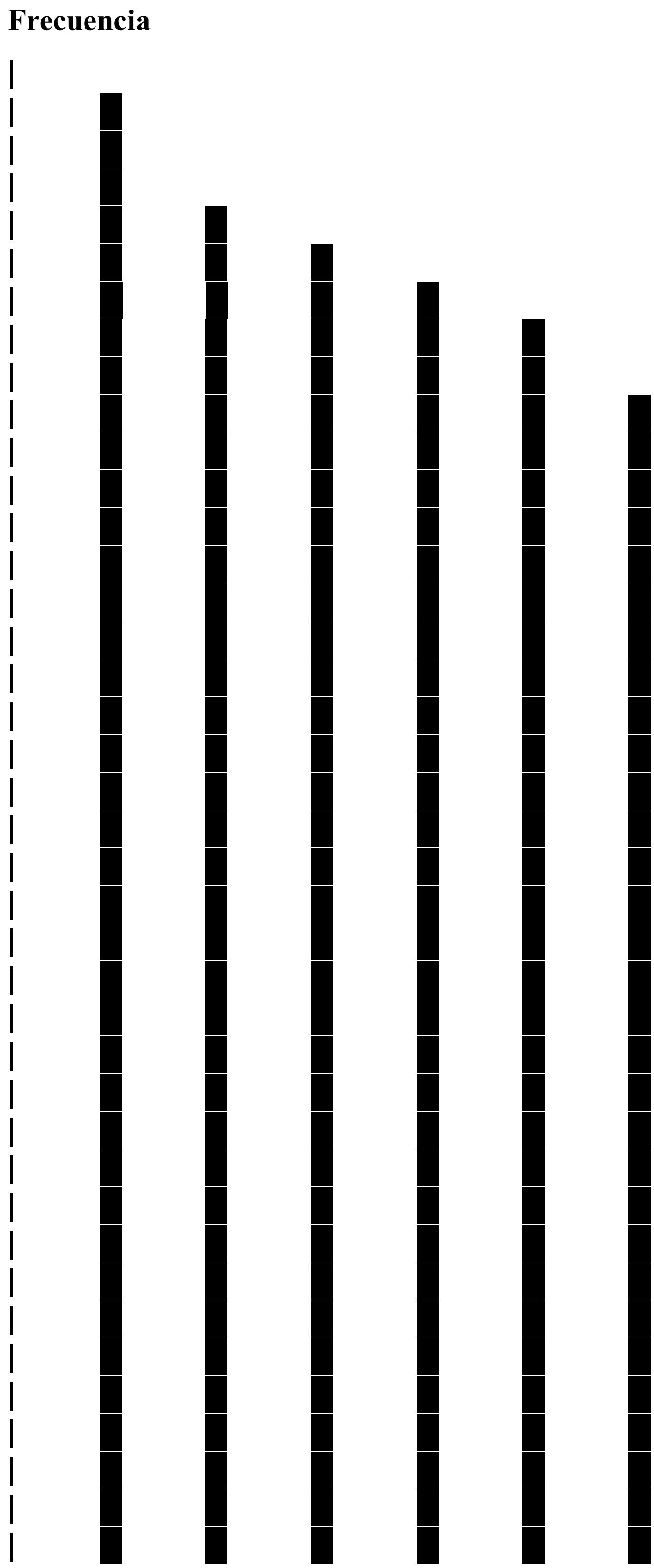
Parte b: Histograma de frecuencias

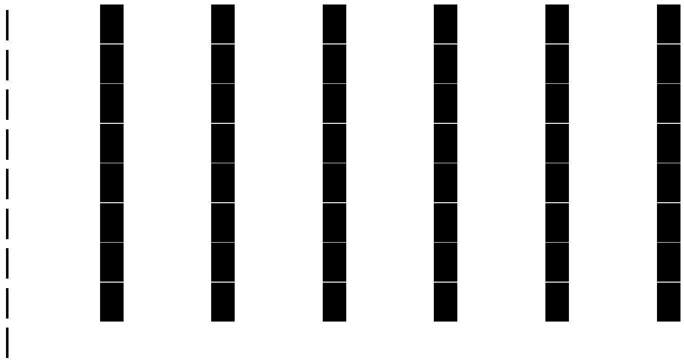
Para elaborar el histograma, se grafican los intervalos en el eje *x* y las frecuencias absolutas en el eje *y*.

1. **Ejes**:
   - Eje *x*: Intervalos de clase
   - Eje *y*: Frecuencia Absoluta

2. **Barras**: Cada barra representa la frecuencia absoluta de cada intervalo.

Aquí está la representación del histograma:


Frecuencia



2. En una encuesta realizada a 500 personas donde se pregunta si consumen exclusivamente algunos de los tres productos considerados en la encuesta, se obtuvieron los siguientes resultados:

Consumen producto 1	**Consumen producto 2**	**Consumen producto 3**	**No consumen los productos o consumen más de uno**
175 personas	125 personas	150 personas	50 personas

Representa estos datos haciendo un diagrama de tortas.

C.R: Para el logro del objetivo II.3 Ud. debe responder correctamente todas las preguntas con los siguientes aspectos:

1. El procedimiento debe estar bien desarrollado y completo (justificado detalladamente).
2. El resultado final debe estar correcto y simplificado si es posible.
3. Debe trabajar ordenada, secuencialmente y emplear <u>únicamente</u> las definiciones y notación del texto UNA.
4. Las preguntas teóricas deben ser respondidas con precisión y buen uso de nuestro idioma.

Repuesta:

Para representar los datos de la encuesta en un diagrama de tortas (o gráfico circular), seguiremos un procedimiento detallado y ordenado.

Paso 1: Recopilación de datos

Los datos obtenidos de la encuesta son los siguientes:

- **Consumen producto 1**: 175 personas
- **Consumen producto 2**: 125 personas
- **Consumen producto 3**: 150 personas
- **No consumen los productos o consumen más de uno**: 50 personas

Paso 2: Calcular el total de respuestas

El total de personas encuestadas es:

$$N = 500 \text{ personas}$$

Paso 3: Calcular las proporciones

Para representar los datos en un diagrama de tortas, necesitamos calcular la proporción de cada categoría respecto al total. Esto se hace dividiendo la cantidad de personas que consumen cada producto entre el total de encuestados y luego multiplicando por 100 para obtener el porcentaje.

1. **Producto 1**:

$$P_1 = \frac{175}{500}\, x\, 100 = 35\%$$

2. **Producto 2**:

$$P_2 = \frac{125}{500}\, x\, 100 = 25\%$$

3. **Producto 3**:

$$P_3 = \frac{150}{500}\, x\, 100 = 30\%$$

4. **No consumen o consumen más de uno**:

$$P_n = \frac{50}{500}\, x\, 100 = 10\%$$

Paso 4: Resumen de los porcentajes

Categoría	Personas	Porcentaje
Consumen producto 1	175	35%

Consumen producto 2	125	25%
Consumen producto 3	150	30%
No consumen o consumen más de uno	50	10%

Paso 5: Representación gráfica

Para crear el diagrama de tortas, cada sector del círculo representará la proporción de cada categoría. Los ángulos de cada sector se pueden calcular multiplicando el porcentaje de cada categoría por 360°.

1. **Ángulo para Producto 1**:

$$A_1 = \frac{35}{100}\, x\, 360 = 126°$$

2. **Ángulo para Producto 2**:

$$A_2 = \frac{25}{100}\, x\, 360 = 90°$$

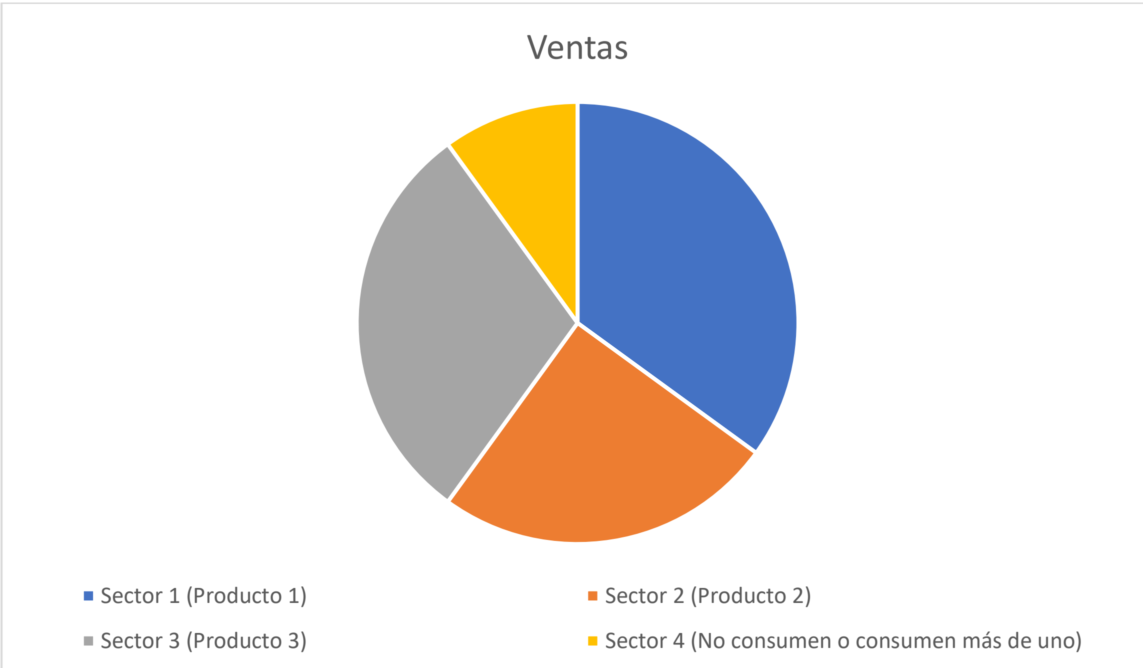
3.**Ángulo para Producto 3**:

$$A_3 = \frac{30}{100}\, x\, 360 = 108°$$

4. **Ángulo para No consumen o consumen más de uno**:

$$A_n = \frac{10}{100}\, x\, 360 = 36°$$

Paso 6: Diagrama de tortas


Ventas
Sector 1 (Producto 1)
Sector 2 (Producto 2)
Sector 3 (Producto 3)
Sector 4 (No consumen o consumen más de uno)

P:2, O III.1

1. Sea la sucesión

$$a_n = \left\{2 + \frac{1}{n}\right\} \quad \text{y} \quad b_n = \left\{\frac{5}{n^2} - 4\right\}.$$

   Hallar

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

2. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_n = 3\ (12)n-1.$$

   a) Halle los 5 primeros términos de esta sucesión.

   b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   c) Halle la suma de los 20 primeros términos de $\{a_n\}$.

C.R: Para el logro del objetivo III.1 Ud. debe responder correctamente todas las preguntas con los siguientes aspectos:
1. El procedimiento debe estar bien desarrollado y completo (justificado detalladamente).
2. El resultado final debe estar correcto y simplificado si es posible.
3. Debe trabajar ordenada, secuencialmente y emplear <u>únicamente</u> las definiciones y notación del texto UNA.
4. Las preguntas teóricas deben ser respondidas con precisión y buen uso de nuestro idioma.

Repuesta:

Vamos a resolver cada parte del problema paso a paso.

Parte 1: Hallar $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n})$

Dadas las sucesiones:

- $\boldsymbol{a_n} = 2 + \frac{1}{n}$

- $\boldsymbol{b_n} = \frac{5}{n^2}$ - *4*

1.1: Calcular el límite de $\boldsymbol{a_n}$

Calculamos el límite de $\boldsymbol{a_n}$ cuando **n** tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + 0 = 2$$

1.2: Calcular el límite de $\boldsymbol{b_n}$

Calculamos el límite de $\boldsymbol{b_n}$ cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2} - 4\right) = 0 - 4 = -4$$

1.3: Calcular el límite de$\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}$

Ahora sumamos los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} + \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b_n} = 2 + (-4) = -2$$

Resultado Parte 1

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}) = -2$$

Parte 2: Sucesión $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{3(12)^{n-1}}$

2.1: Hallar los 5 primeros términos de la sucesión

Calculamos los primeros cinco términos de la sucesión:

- Para **n = 1**:

$\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{3(12)^{1-1}} = \boldsymbol{3(12)^{0}}$ = 3 x 1 = 3

- Para **n = 2**:

$\boldsymbol{a_2} = \mathbf{3(12)^{2-1}} = \mathbf{3(12)^1}$ = 3 x 12 = 36

- Para **n = 3**:

$\boldsymbol{a_3} = \mathbf{3(12)^{3-1}} = \mathbf{3(12)^2}$ = 3 x 14 = 432

- Para **n = 4**:

$\boldsymbol{a_4} = \mathbf{3(12)^{4-1}} = \mathbf{3(12)^3}$ = 3 x 1728 = 5184

- Para **n = 5**:

$\boldsymbol{a_5} = \mathbf{3(12)^{5-1}} = \mathbf{3(12)^4}$ = 3 x 20736 = 62208

Los primeros cinco términos son:

$\boldsymbol{a_1}$ = 3, $\boldsymbol{a_2}$= 36, $\boldsymbol{a_3}$= 432, $\boldsymbol{a_4}$ = 5184, $\boldsymbol{a_5}$= 62208

2.2: Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$

Dado que $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{3(12)^{\boldsymbol{n}-1}}$ y $\mathbf{12^{\boldsymbol{n}-1}}$ tiende a infinito cuando *n* tiende a infinito, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \mathop{lim}_{n\to\infty} \mathbf{3(12)^{\boldsymbol{n}-1}} = \infty$$

Resultado Parte 2.2

$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \infty$

2.3: Hallar la suma de los 20 primeros términos de $\{\boldsymbol{a_n}\}$

La suma de los primeros *N* términos de una sucesión geométrica se calcula con la fórmula:

$S_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a_1} \frac{\boldsymbol{r^N - 1}}{\boldsymbol{r - 1}}$

donde $\boldsymbol{a_1}$ es el primer término, *r* es la razón común y *N* es el número de términos.

En este caso:

- $\boldsymbol{a_1}$**= 3**
- **r = 12**
- **N = 20**

Sustituyendo en la fórmula:

$S_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{3} \frac{\boldsymbol{12^{20} - 1}}{\boldsymbol{12 - 1}} = \boldsymbol{3} \frac{\boldsymbol{12^{20} - 1}}{\boldsymbol{11}}$

Resultado Parte 2.3

La suma de los 20 primeros términos es:

$S_{\boldsymbol{20}} = \boldsymbol{3} \frac{\boldsymbol{12^{20} - 1}}{\boldsymbol{11}}$

Resumen de Resultados

1. $\lim_{n \to \infty} (\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}) = -2$
2. Primeros cinco términos de $\{\boldsymbol{a_n}\}$: 3, 36, 432, 5184, 62208
3. $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{a_n} = \infty$
4. Suma de los 20 primeros términos: $S_{\boldsymbol{20}} = \boldsymbol{3} \frac{\boldsymbol{12^{20} - 1}}{\boldsymbol{11}}$

P:3, O III.2

1. Calcular $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{12(\sqrt{x}-3)}$

2. Sea *f* : **R**-{2} → **R** la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Halle $\lim_{x \to 2-} f(x)$ y . $\lim_{x \to 2+} f(x)$

a) ¿Puede definirse *f* en 2 de modo que exista $\lim f(x)$? ¿Por qué? $x \to 2$

C.R: Para el logro del objetivo Ud. debe responder correctamente todas las preguntas con los siguientes aspectos:
1. El procedimiento debe estar bien desarrollado y completo (justificado detalladamente).
2. El resultado final debe estar correcto y simplificado si es posible.
3. Debe trabajar ordenada, secuencialmente y emplear <u>únicamente</u> las definiciones y notación del texto UNA.
4. Las preguntas teóricas deben ser respondidas con precisión y buen uso de nuestro idioma.

P:3, O III.2

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{12(\sqrt{x}-3)}$

4. Sea *f* : **R**-{2} → **R** la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Halle $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$ y . $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$

b) ¿Puede definirse *f* en 2 de modo que exista $\lim f(x)$? ¿Por qué? $x\to 2$

C.R: Para el logro del objetivo Ud. debe responder correctamente todas las preguntas con los siguientes aspectos:

5. El procedimiento debe estar bien desarrollado y completo (justificado detalladamente).
6. El resultado final debe estar correcto y simplificado si es posible.
7. Debe trabajar ordenada, secuencialmente y emplear <u>únicamente</u> las definiciones y notación del texto UNA.
8. Las preguntas teóricas deben ser respondidas con precisión y buen uso de nuestro idioma.

Repuesta:

Para resolver esta serie de problemas de límites, abordaremos cada pregunta de manera ordenada y secuencial.

Problema 1

Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{12(\sqrt{x}-3)}$$

Observamos que al evaluar x = 9 directamente en la función, obtenemos una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Para resolver esto, racionalizaremos el denominador.

Paso 1: Multiplicar por el conjugado

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, x+3:

$$\lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{12(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}$$

Paso 2: Simplificar

Al simplificar, el denominador se convierte en una diferencia de cuadrados:

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{12(x-9)}$$

Podemos cancelar $x - 9$ en el numerador y denominador, y luego evaluar el límite restante.

Problema 2

Sea f: R −{2}→R la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Queremos encontrar:

- $\lim_{x\to 2-} f(x)$
- . $\lim_{x\to 2+} f(x)$
- Si es posible definir f(2) de modo que exista $\lim_{x\to 2} f(x)$

Paso 1: Límite por la izquierda $\lim_{x\to 2-} f(x)$

Para el límite por la izquierda, usamos la expresión $\frac{x^2-4}{x-2}$. Observamos que:

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

Al simplificar, encontramos el límite como $x\to 2-$.

Paso 2: Límite por la derecha $\lim_{x \to 2+} f(x)$

Para el límite por la derecha, la función toma el valor constante 1 cuando x > 2, por lo que $\lim_{x \to 2+} f(x)=1$.

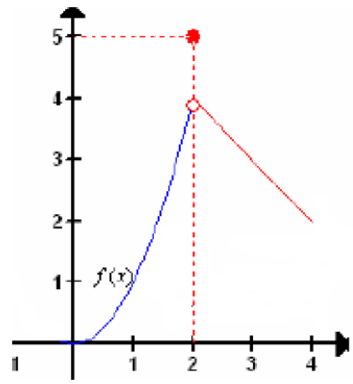
Paso 3: ¿Es posible definir f(2) de modo que exista $\lim_{x \to 2} f(x)$?

El límite solo existe si ambos límites laterales son iguales.

P:4, O III.3

1. A la derecha esta la gráfica de la siguiente

Función f(x) = $\begin{cases} x^2 & x \in [0,2) \\ 5 & x = 2 \\ -x+6 & (2,4] \end{cases}$



Responde las siguientes preguntas

a. Al observar la gráfica de la función se observan un __________ en el punto $x_0 = 2$, por ello, la función es _______________.
b. En el intervalo **[0, 2)** la función es _______________.
c. En el intervalo **[0, 4]** la función es **continua** solamente en el caso en que $f(2)=$ _______.
d. Finalmente, en el intervalo __________ la función es discontinúa.

2. Las tarifas en Bolívares por el envío de documentos y paquetes hasta 10 kilos que ofrece a nivel local una empresa son las mostradas en el siguiente cuadro:

TARIFAS DE DOCUMENTOS Y PAQUETES HASTA 10 KILOS	
Pesos (Kg.)	**Bs.**
hasta 1	500
Más de 1 hasta 4	1200
Más de 4 hasta 7	2000
Más de 7 hasta 10	3500

a. Construye explícitamente una función que describa la tabla anterior.
b. Realice la representación gráfica de dicha función.
c. Determine si la misma corresponde a una función continua.

C.R: Para el logro del objetivo III.3 Ud. debe responder correctamente todas las preguntas con los siguientes aspectos:

1. El procedimiento debe estar bien desarrollado y completo (justificado detalladamente).
2. El resultado final debe estar correcto y simplificado si es posible.
3. Debe trabajar ordenada, secuencialmente y emplear <u>únicamente</u> las definiciones y notación del texto UNA.
4. Las preguntas teóricas deben ser respondidas con precisión y buen uso de nuestro idioma.

Repuesta:

La función f(x) está definida por partes:

- f(x) = x^2 cuando x ∈ [0,2)
- f(x) = 5 cuando x=2
- f(x) = −x+6cuando x ∈ (2,4]

Con base en esto:

1. **Al observar la gráfica de la función se observan un salto en el punto x_0 = 2, por ello, la función es discontinua en ese punto.**

Esto se debe a que en x = 2, la función cambia de valor bruscamente de x^2 a 5, lo cual causa una discontinuidad de tipo salto.

2. **En el intervalo [0,2) la función es continua.**

En este intervalo, la función está definida como f(x) = x^2, que es una función continua en todo el intervalo de [0,2).

3. **En el intervalo [0,4] la función es continua solamente en el caso en que (f(2) = 4.**

Para que la función sea continua en x=2, los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en ese punto. Aquí, el límite de f(x) al acercarse a x = 2 desde la izquierda es 4 (porque $\lim_{x \to 2-} x^2 = 4$).

Por lo tanto, f(2) debería ser igual a 4 para que la función sea continua en todo el intervalo [0,4].

4. **Finalmente, en el intervalo (2,4] la función es discontinua en x=2**.

Función para las Tarifas de Documentos y Paquetes

A continuación, definiremos la función por tramos basada en las tarifas.

La función tarifaria T(x) se define como:

1. $$T(x)=\begin{cases} 500 & si\ 0 < x \leq 1 \\ 1200 & si\ 1 < x \leq 4 \\ 2000 & \text{si } 4 < \text{x} \leq 7 \\ 3500 & \text{si } 7 < \text{x} \leq 10 \end{cases}$$

   Esta función representa los costos en bolívares T(x)T(x)T(x) en función del peso xxx del paquete en kilogramos.

Representación Gráfica de la Función

Para graficar esta función, podríamos usar un gráfico de líneas escalonadas o un gráfico de puntos que muestre los intervalos de tarifas para cada rango de peso.

Para construir el gráfico escalonado de tarifas:

1. Marca en el eje horizontal los intervalos de peso: de 0 a 1 kg, de 1 a 4 kg, de 4 a 7 kg y de 7 a 10 kg.
2. En cada uno de esos intervalos, dibuja una línea horizontal a la altura de la tarifa correspondiente (500 Bs, 1200 Bs, 2000 Bs, y 3500 Bs).
3. Para cada cambio de tarifa, indica un punto (por ejemplo, en el borde derecho de cada intervalo).

Determinación de la Continuidad

La función tarifaria no es continua en su dominio, ya que en cada punto de cambio de intervalo (1, 4, y 7 kg), existe un salto en el valor de la tarifa. Esto significa que hay discontinuidades de salto en estos puntos.