

Quantum Annealing: Fondamenti e Applicazioni a Problemi di Ottimizzazione di Interesse Ingegneristico

**Tesi di Laurea in
Ingegneria Informatica**

Candidato

Francesco Panattoni

Relatore

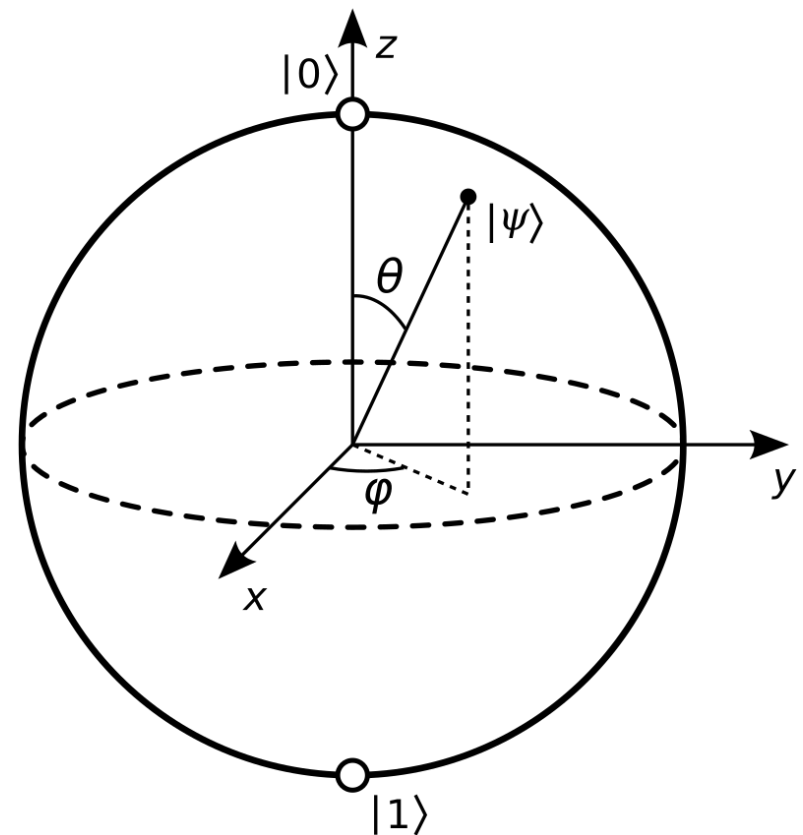
Prof. Marco Cococcioni



UNIVERSITÀ DI PISA

Quantum Bit

- Nella computazione quantistica, l'analogo del bit è il qubit, un'entità che sfrutta le proprietà della meccanica quantistica per rappresentare e processare informazioni.
- $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- Proprietà del qubit
 - Sovrapposizione
 - Entanglement
 - Interferenza
 - Effetto Tunnel



Quantum Annealing

- Modello di Ising

- $H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} x_i x_j - \sum_i h_i x_i \rightarrow \min_{x \in \{-1;1\}^N} (\sum_i \sum_{j < i} x_i x_j Q_{ij} + \sum_i x_i Q_{ii})$

- QUBO

- $H = x^T Q x \rightarrow \min_{x \in \{0;1\}^N} (\sum_i \sum_{j < i} x_i x_j Q_{ij} + \sum_i x_i Q_{ii})$

- Teorema Adiabatico

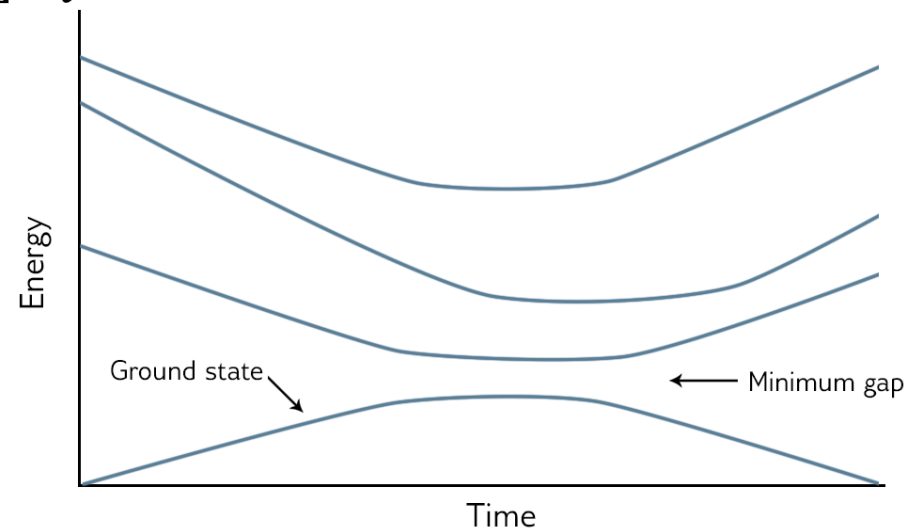
- $H(t) = s(t)H_f + [1 - s(t)]H_i$

- $s(t): [0, T] \rightarrow [0, 1]$

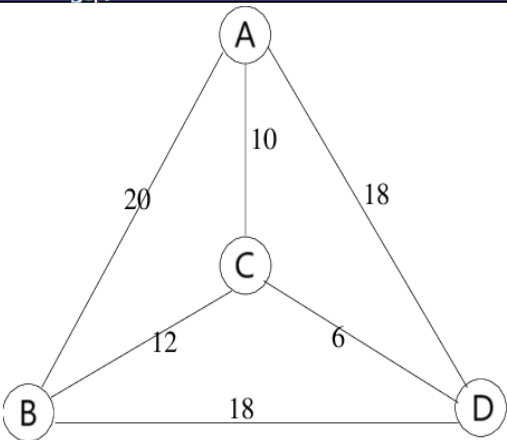
- Gap Minimo g_{min}

- $T \approx O\left(\frac{1}{g_{min}^2}\right)$

- Effetto Tunnel



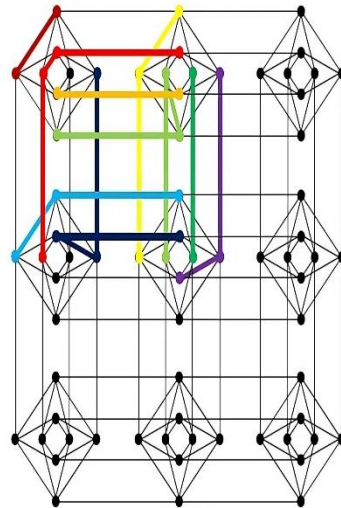
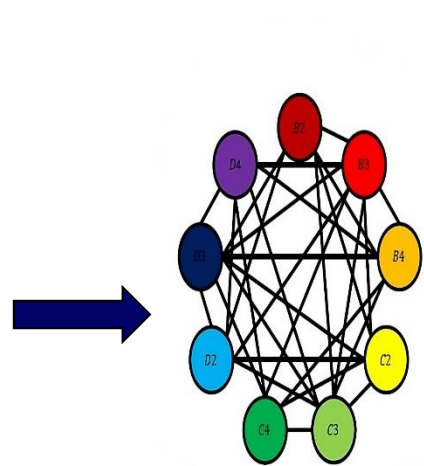
Applicazione ad un TSP



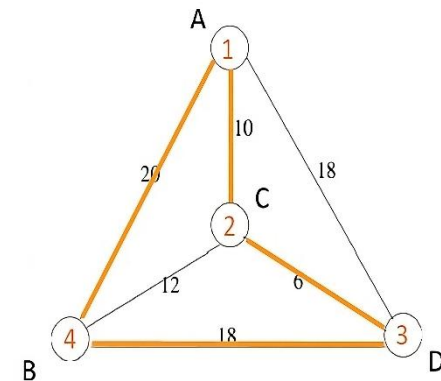
	B2	B3	B4	C2	C3	C4	D2	D3	D4
B2	-5	30	30	30	12	0	30	18	0
B3		-25	30	12	30	12	18	30	18
B4			-5	0	12	30	0	18	30
C2				-15	30	30	30	6	0
C3					-25	30	6	30	6
C4						-15	0	6	30
D2							-7	30	30
D3								-25	30
D4									-7



	B2	B3	B4	C2	C3	C4	D2	D3	D4
B2	35	7,5	7,5	7,5	3	0	7,5	4,5	0
B3		32,5	7,5	3	7,5	3	4,5	7,5	4,5
B4			35	0	3	7,5	0	4,5	7,5
C2				27	7,5	7,5	7,5	1,5	0
C3					26,5	7,5	1,5	7,5	1,5
C4						27	0	1,5	7,5
D2							32,5	7,5	7,5
D3								29,5	7,5
D4									32,5



		-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
		B2	B3	B4	C2	C3	C4	D2	D3	D4
-1	B2	35	7,5	7,5	7,5	3	0	7,5	4,5	0
-1	B3		32,5	7,5	3	7,5	3	4,5	7,5	4,5
1	B4			35	0	3	7,5	0	4,5	7,5
1	C2				27	7,5	7,5	7,5	1,5	0
-1	C3					26,5	7,5	1,5	7,5	1,5
-1	C4						27	0	1,5	7,5
-1	D2							32,5	7,5	7,5
1	D3								29,5	7,5
-1	D4									32,5



■ Algoritmo di Grover

- Algoritmo di ricerca in un database indifferenziato con N elementi con complessità $O(\sqrt{N})$
- Porta di Hadamard
- Oracolo
- Iterazione di Grover: $G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - Id)O$

■ Implementazione attraverso Quantum Annealing

- $H_i = Id - |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle$ lo stato iniziale del sistema
- $H_f = Id - |\beta\rangle\langle\beta|$ con $|\beta\rangle$ la soluzione che cerchiamo
- $s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{N-1}} \tan\left(\left(2\frac{t}{T} - 1\right) \arctan(\sqrt{N-1})\right)$
- $T \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{N} \rightarrow$ Complessità $O(\sqrt{N})$
- $H(t) = s(t)H_f + [1 - s(t)]H_i$