计算物理作业 1

SA22234036　　肖添宁

1. 双摆

★ 理论分析：取 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，不难写出体系的拉氏量

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

由于 y 方向取向下为正方向，因此需要加个负号；对于角量的换算有：

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1) \qquad \dot{x}_1 = l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1$$

$$y_1 = l_1 \cos(\theta_1) \qquad \dot{y}_1 = -l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1$$

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \qquad \dot{x}_2 = l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$y_1 = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2) \qquad \dot{y}_1 = -l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2$$

再将其代入 L 当中，得到 $L(\theta_1, \theta_2)$, 从而根据欧拉-拉格朗日方程，即可进行动力学的研究。

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \qquad (i = 1, 2)$$

★ 模拟结果：取如下参量：

$$g = 10 \quad l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 1 \quad \theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$$

将相同质量的两个小球，在水平位置释放，如图1所示，红色的点代表初始时距离原点较远的球，蓝色代表近的。可见，此时红点的分布十分分散，具有混沌的特征。

若将参数调整如下，则呈现周期性振荡而没有混沌的现象，如图2所示

$$g = 10 \quad l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 1 \quad \theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{3}$$

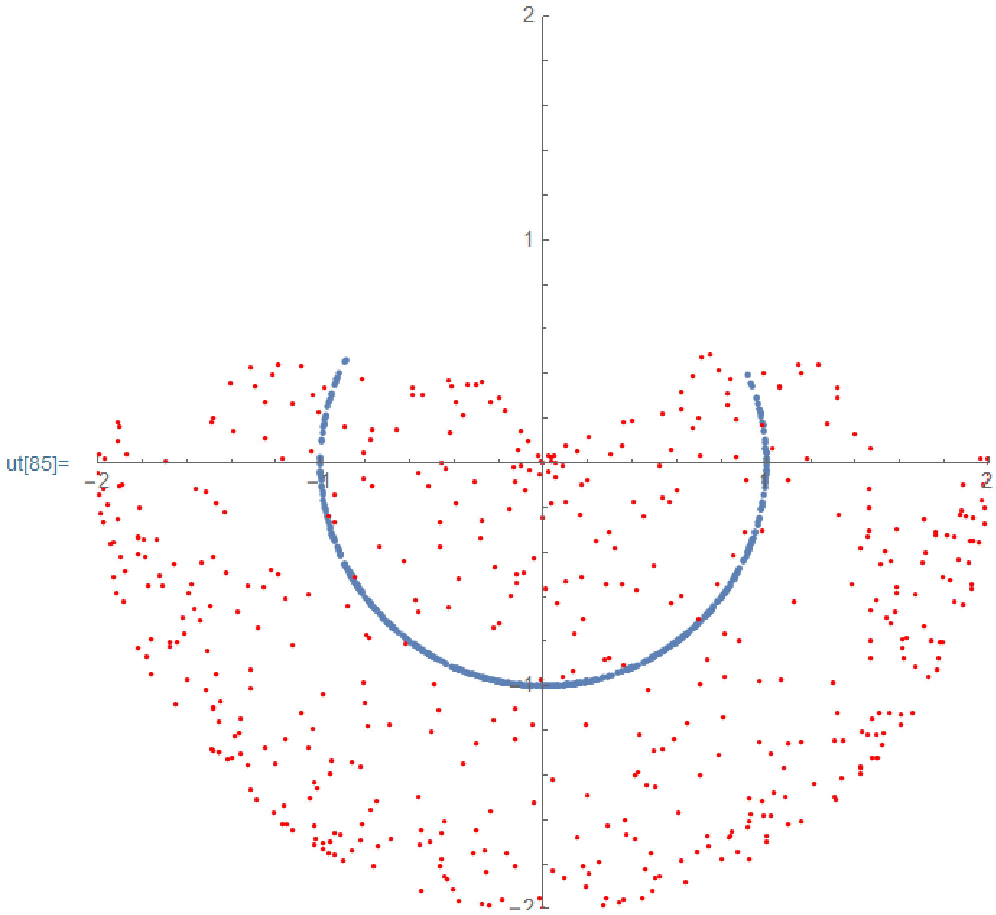

图 1: 混沌的双摆

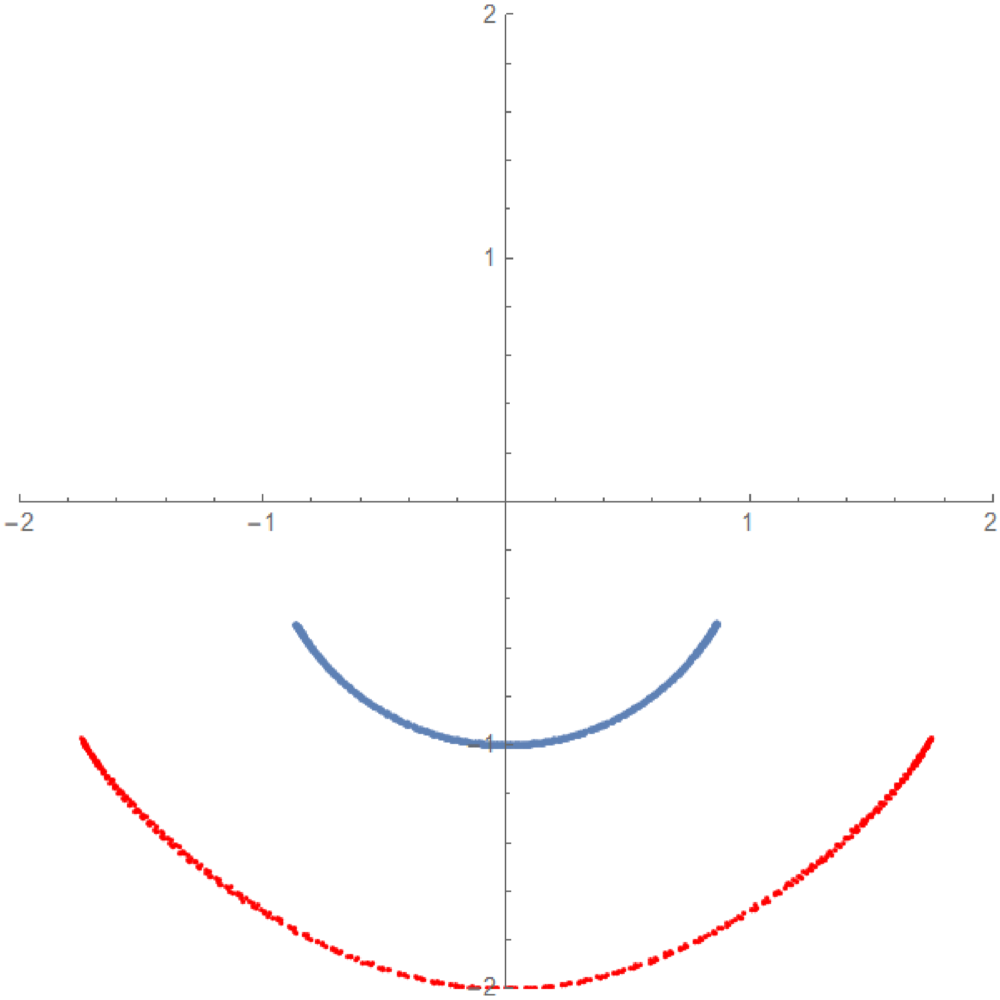

图 2: 普通的双摆

2. 中心力场

★ 理论分析：设 (r,θ) 作为广义坐标，拉氏量为：

$$L(r,\theta)=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{A}{r^\alpha}$$

这里将质量 m 约化到 A 当中。根据 $\dot{\theta}=\frac{l}{r^2}$, 其中 l 为角动量, 得到：

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{l^2}{2r^2}+\frac{A}{r^\alpha}=E$$

进而可以分析得到在 $0<\alpha<2$ 轨道稳定，$\alpha>2$ 时轨道不稳定。因此在模拟时，主要在 $0<\alpha<2$ 中进行。

★ 模拟结果：取如下参量：

$$A=1 \quad b=1 \quad vt=0.6 \quad vn=\theta=0$$

即相互作用强度设为 1, 截距 b 设为 1. 切向速度设为 0.6, 法向速度和角度设为 0. 通过改变 α 从 0.4 到 1.6 得到如图3的运动轨迹。其中图4为熟知的万有引力的轨迹。

3. 杆下落时间

★ 理论分析：不难分析出，势能为 $V=mgx$; 由于地面光滑，因而水平方向没有作用，故只考虑竖直方向，且杆在转动时，绕着质心转动，因而可以利用柯尼希定理，求出杆的动能：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

其中 J 为杆绕质心的转动惯量，$J=\frac{1}{12}ml^2$, x 为竖直方向的坐标，再利用几何关系 $\frac{l}{2}\sin(\theta)=x$ 代入欧拉-拉格朗日方程，即可进行数值模拟。

★ 模拟结果：取如下参量：

$$g=10 \quad l=m=1$$

通过改变 θ 值，求出下落时间 t 随 θ 的变化曲线，如图5：

可以看出，当 $\theta\to 0$ 时，时间也趋于 0；当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时，时间趋于无穷大，这符合物理直接，即杆立起来的情况，与地面二力平衡，不运动。

====================================

代码 1———双摆

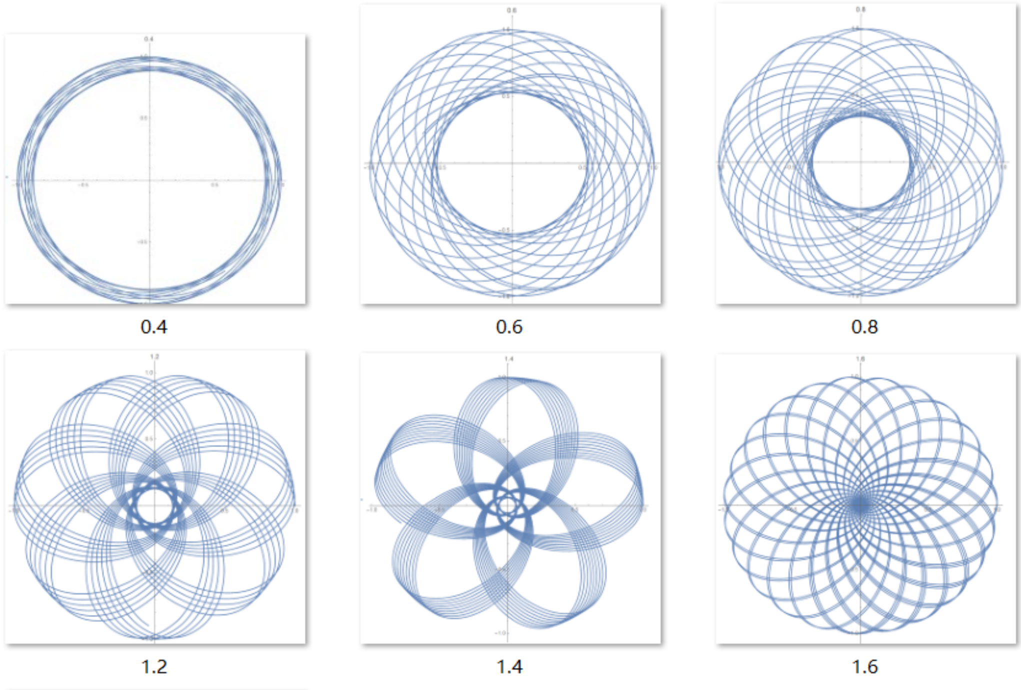

图 3: 不同势能的轨迹

```
(*参数设置*)
Clear[\[Theta]1, \[Theta]2];
g = 10;(*重力加速度*)
l1 = 1; l2 = 1;(*摆长*)
m1 = 1; m2 = 1;(*小球质量*)
\[Theta]1i = Pi/180*0; \[Theta]2i = Pi/180*90;(*初始条件*)
x1 = l1*Sin[\[Theta]1[t]];
y1 = l1*Cos[\[Theta]1[t]];
x2 = x1 + l2*Sin[\[Theta]2[t]];
y2 = y1 + l2*Cos[\[Theta]2[t]];
x1p = D[x1, t];
y1p = D[y1, t];
x2p = D[x2, t];
y2p = D[y2, t];
L = 1/2 m1 (x1p^2 + y1p^2) + 1/2 m2 (x2p^2 + y2p^2) + m1*g*y1 +
```

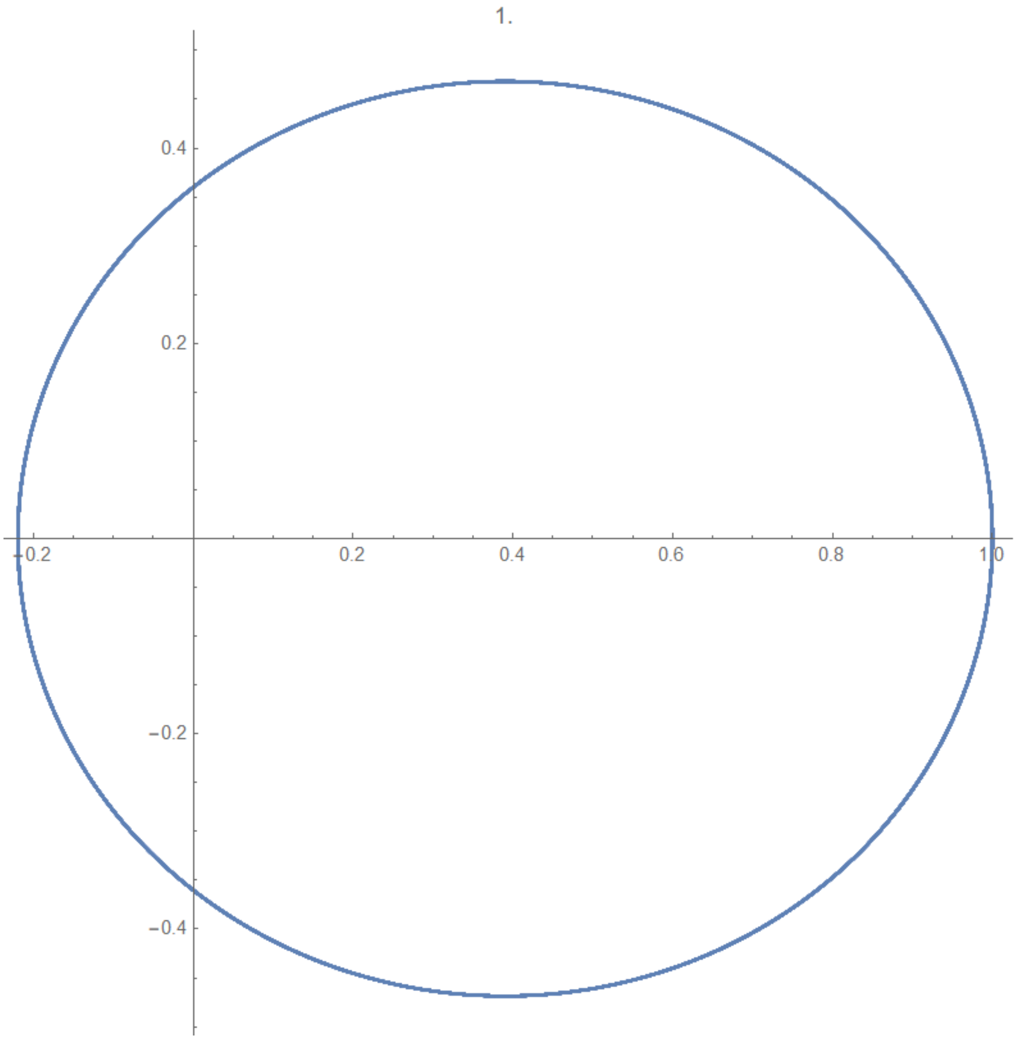

图 4: 万有引力的轨迹

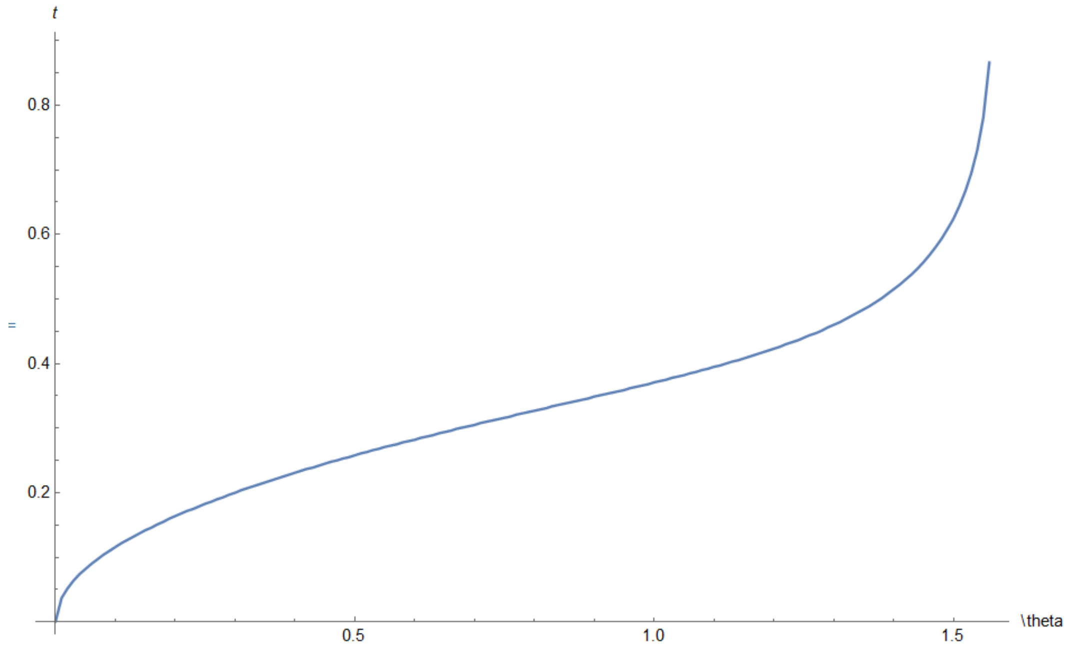

图 5: 下落时间与角度的关系

```
    m2*g*y2;
    (*生成演化方程*)
eq1 = D[L, \[Theta]1[t]] == D[D[L, \[Theta]1'[t]], t];
eq2 = D[L, \[Theta]2[t]] == D[D[L, \[Theta]2'[t]], t];
\[Theta]1v = 0; \[Theta]2v = 0;(*初始角速度*)

sol = NDSolve[{
     eq1,
     eq2,
     \[Theta]1[0] == \[Theta]1i,
     \[Theta]2[0] == \[Theta]2i,
     \[Theta]1'[0] == \[Theta]1v,
     \[Theta]2'[0] == \[Theta]2v

     }, {\[Theta]1, \[Theta]2}, {t, 0, 9000}];
```

```
(*赋值*)
\[Theta]1r = \[Theta]1 /. sol[[1]];
\[Theta]2r = \[Theta]2 /. sol[[1]];
(*画图(x1,-y1)与(x2,-y2)*)
data1 = Table[{l1*Sin[\[Theta]1r[t]], -l1*Cos[\[Theta]1r[t]]}, {t, 0,
    50, 0.1}];
data2 = Table[{l1*Sin[\[Theta]1r[t]] +
     l2*Sin[\[Theta]2r[t]], -l1*Cos[\[Theta]1r[t]] -
     l2*Cos[\[Theta]2r[t]]}, {t, 0, 50, 0.1}];
ListPlot[data1, AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> {{-l1 - l2, l1 + l2}, {-l1 - l2, l1 + l2}}]~Show~
 ListPlot[data2, AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> {{-l1 - l2, l1 + l2}, {-l1 - l2, l1 + l2}},
  PlotStyle -> Blue]
 (*生成动画*)
 data0 = Table[{0, 0}, Length[data1]];
flash = Table[
   ListLinePlot[
    Partition[
     Transpose[{Transpose[{data0, data1}], data2}][[i]] // Flatten,
     2], AspectRatio -> 1,
    PlotRange -> {{-l1 - l2, l1 + l2}, {-l1 - l2, l1 + l2}},
    PlotStyle -> Blue], {i, 1, Length[data1]}];
    Manipulate[flash[[i]], {i, 1, Length[data1], 1}]
```

代码 2———中心力场

```
(*参数设置*)
Clear[r, \[Theta]];
a = 2; k = 1;(*引力距离阶数&耦合系数*)
L = 1/2 (r'[t]^2 + r[t]^2 \[Theta]'[t]^2) + k/r[t]^a;
(*生成演化方程*)
eq1 = D[L, \[Theta][t]] == D[D[L, \[Theta]'[t]], t];
```

```
eq2 = D[L, r[t]] == D[D[L, r'[t]], t];
b = 1;              (*初始截距*)
theta = 0; (*初始角度*)
vn = 0;          (*初始径向速度*)
vt = 1.5;      (*初始法向速度*)
ol = NDSolve[{
    eq1,
    eq2,
    r[0] == b,
    \[Theta][0] == theta,
    r'[0] == vn,
    \[Theta]'[0] == vt/b
    }, {r, \[Theta]}, {t, 0, 100}];

(*赋值*)
rt = r /. sol[[1]];
\[Theta]t = \[Theta] /. sol[[1]];
(*画图*)
data = Table[{rt[t]*Cos[\[Theta]t[t]], rt[t]*Sin[\[Theta]t[t]]}, {t,
    0, 100, 0.001}];
ListPlot[data, AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}}]
```

代码 3———杆下落时间

```
Clear[p];
p = Table[0, {i, 0, Pi/2, 0.01}];
j = 1;
Table[{
   (*参数设置*)
   g = 10;
   l = 1;
   m = 1;
   \[Theta]i = h;(*初始角度*)
```

```
    xc = l/2 Sin[\[Theta][t]];
    xcp = D[xc, t];
    L = 1/2 m*xcp^2 + 1/2*1/12 m*l^2 (xcp/(l/2 Cos[\[Theta][t]]))^2 -
      m*g*xc;
    (*生成演化方程*)
    eq1 = D[L, \[Theta][t]] == D[D[L, \[Theta]'[t]], t];
    \[Theta]v = 0;
    (*初始角速度*)
    sol = NDSolve[{
       eq1,
       \[Theta][0] == \[Theta]i,
       \[Theta]'[0] == \[Theta]v
       }, {\[Theta]}, {t, 0, 1}];
    (*赋值*)
    \[Theta]r = \[Theta] /. sol[[1]];
    (*画图*)
    data = Table[{t, \[Theta]r[t]}, {t, 0, 1, 0.001}];
    Do[{If[
        data[[i, 2]] < 0, {p[[j]] = {h, data[[i, 1]]}, j++,
         Break[];} ,];} , {i, 1, Length[data]}];
    }, {h, 0, Pi/2, 0.01}];
(*绘图*)
ListLinePlot[p,
 AxesLabel -> {RawBoxes[RowBox[{"\\", "theta"}]], HoldForm[t]},
 PlotLabel -> None, LabelStyle -> {GrayLevel[0]}]
```