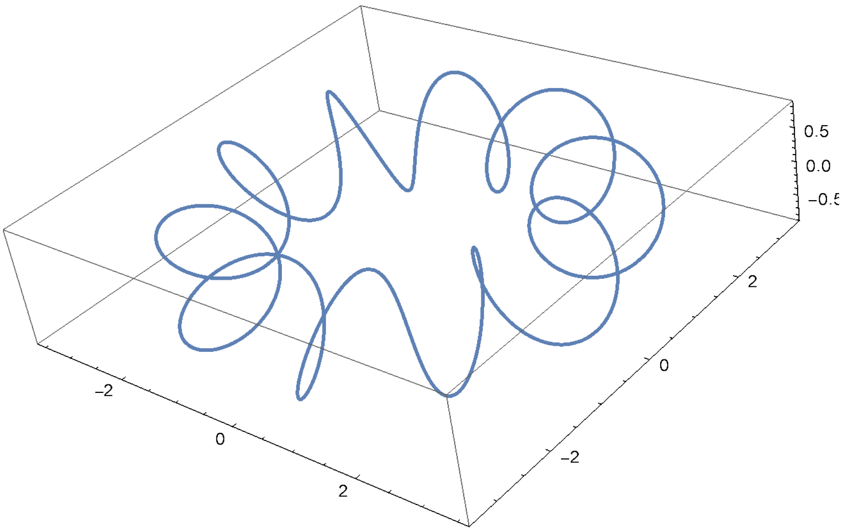
Driven toroidal helix as a generalization of the Kapitza pendulum

不难画出带电粒子运动的螺旋轨迹，如下图：

In[730]:=

```
R=2.5;r=0.8;M=10;V0=5;
ParametricPlot3D[{(R+r Cos[u])Cos[u/M],(R+r Cos[u])Sin[u/M],r Sin[u]},{u,0,2π*M}]
```

Out[731]=



In[732]:=

In[733]:=

```
Clear["Global`*"];
```

考虑体系的拉氏量，对位置r(u)关于时间求导，得到与论文当中一致的结果：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}(u)}{dt}\right)^2 - q\cos(\omega t)\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}(u) - V_0\cos\left(\frac{u}{M}\right)\\
&= \frac{m}{2}(r^2 + a^2(R + r\cos(u))^2)\dot{u}^2\\
&\quad - qE_0(R + r\cos(u))\cos(\omega t)\cos(au) - V_0\cos(au), \quad (5)
\end{aligned}
$$

In[734]:=
```
rad={(R+r Cos[u[t]])Cos[u[t]/M],(R+r Cos[u[t]])Sin[u[t]/M],r Sin[u[t]]};
v2=Dot[D[rad,t],D[rad,t]]/.{M→1/a}//Simplify
{(R+r Cos[u[t]])^2//Expand}/.{Cos[u[t]]^2→(1+Cos[2 u[t]])/2}//Expand
L=m/2 v2-q Cos[w t]*Dot[rad,{E0,0,0}]-V0 Cos[u[t]/M]/.{M→1/a};
L//TraditionalForm
```

Out[735]= $\frac{1}{2}\left(2 r^2+a^2 r^2+2 a^2 R^2+4 a^2 r R \mathrm{Cos}[u[t]]+a^2 r^2 \mathrm{Cos}[2 u[t]]\right) u'[t]^2$

Out[736]= $\left\{\frac{r^2}{2}+R^2+2 r R \mathrm{Cos}[u[t]]+\frac{1}{2} r^2 \mathrm{Cos}[2 u[t]]\right\}$

Out[738]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{4} m\, u'(t)^2 \left(a^2 r^2 \cos(2 u(t))+a^2 r^2+4 a^2 r R \cos(u(t))+2 a^2 R^2+2 r^2\right)- \mathrm{E0}\, q \cos(t\, w) \cos(a\, u(t)) (r \cos(u(t))+R)-\mathrm{V0} \cos(a\, u(t))$$

之后，定义l^2带入拉氏量当中，并与之前结果相减，发现为0说明前后结果一致：

$$l^2(u) := \frac{1}{a^2}(r^2+a^2(R+r\cos(u))^2).$$

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} l^2(u)\dot{u}^2 - \left(V_0 + qE_0 \frac{\sqrt{l^2(u)a^2-r^2}}{a}\cos(\omega t)\right)\cos(au). \quad (7)$$

In[739]:=
```
l2=1/a^2*(r^2+a^2(R+r Cos[u[t]])^2);
LL=(m a^2)/2 l2 u'[t]^2-Cos[a u[t]](V0+q E0 Cos[w t] Sqrt[l2*a^2-r^2]/a);
Simplify[LL,{a>0,R>0,r>0,Cos[u[t]]>0}]-L//Simplify
```

Out[741]= 0

令r->0，从而得到Kapitza pendulum 模型的拉氏量：

$$\mathcal{L}_K = \frac{m}{2}a^2R^2\dot{u}^2 + (V_0 + qE_0R\cos(\omega t))\cos(au).$$

In[742]:=
```
Simplify[LL/.{r→0},{a>0,R>0}]
```

Out[742]= $-\left(\mathrm{V0}+\mathrm{E0}\, q R \mathrm{Cos}[t w]\right) \mathrm{Cos}[a u[t]]+\frac{1}{2} a^2 m R^2 u'[t]^2$

将拉氏量带入拉格朗日方程，得到运动方程，并于原文结果对比，发现结果的一项差了1/2的系数，不过这不影响最终结果

$$m[r^2+a^2(R+r\cos(u))^2]\ddot{u} - V_0 a\sin(au) - qE_0\cos(\omega t)[r\sin(u)\cos(au)+a(R+r\cos(u))\sin(au)] + ma^2 r\sin(u)(R+r\cos(u))\dot{u}^2\underline{/2} = 0. \quad (9)$$

In[743]:=
```
motion=-Simplify[D[LL,u[t]]-D[D[LL,u'[t]],t],{a>0,R>0,r>0,Cos[u[t]]>0}];
motion//TraditionalForm
```

Out[744]//TraditionalForm=

$$m\,u''(t)\left(a^2\,(r\cos(u(t))+R)^2+r^2\right)-a^2\,m\,r\,u'(t)^2\sin(u(t))\,(r\cos(u(t))+R)-a\sin(a\,u(t))\,(\mathrm{E0}\,q\cos(t\,w)\,(r\cos(u(t))+R)+\mathrm{V0})-\mathrm{E0}\,q\,r\sin(u(t))\cos(t\,w)\cos(a\,u(t))$$

对运动方程令r->0，得到Kapitza形式的运动方程，与原文的对比：

$$ma^2R^2\ddot{u}=[V_0a+qE_0\cos(\omega t)aR]\sin(au). \qquad (12)$$

In[745]:=
```
motion/.{r→0}
```

Out[745]=

$$-a\,(\mathrm{V0}+\mathrm{E0}\,q\,R\,\mathrm{Cos}[t\,w])\,\mathrm{Sin}[a\,u[t]]+a^2\,m\,R^2\,u''[t]$$

最后，对于有限的r，我们仿照类似的形式，求出系数：

In[746]:=
```
Solve[motion==0,u''[t]]
```

Out[746]=

$$\Big\{\Big\{u''[t]\to\big(\mathrm{E0}\,q\,r\,\mathrm{Cos}[t\,w]\times\mathrm{Cos}[a\,u[t]]\times\mathrm{Sin}[u[t]]+a\,\mathrm{V0}\,\mathrm{Sin}[a\,u[t]]+a\,\mathrm{E0}\,q\,R\,\mathrm{Cos}[t\,w]\times\mathrm{Sin}[a\,u[t]]+a\,\mathrm{E0}\,q\,r\,\mathrm{Cos}[t\,w]\times\mathrm{Cos}[u[t]]\times\mathrm{Sin}[a\,u[t]]+a^2\,m\,r\,R\,\mathrm{Sin}[u[t]]\,u'[t]^2+a^2\,m\,r^2\,\mathrm{Cos}[u[t]]\times\mathrm{Sin}[u[t]]\,u'[t]^2\big)\Big/\big(m\,(r^2+a^2\,R^2+2\,a^2\,r\,R\,\mathrm{Cos}[u[t]]+a^2\,r^2\,\mathrm{Cos}[u[t]]^2)\big)\Big\}\Big\}$$

$$\tilde{t}=t\frac{\omega}{2\pi},\quad \tilde{r}=\frac{r}{R},\quad \tilde{E}=\frac{4\pi^2qE}{mR\omega^2},\quad \tilde{V}=\frac{4\pi^2V}{mR^2\omega^2}. \quad (10)$$

In[747]:=
```
(E0 q r Cos[t w]×Cos[a u[t]]×Sin[u[t]]+a V0 Sin[a u[t]]+a E0 q R Cos[t w]*Sin[a u[t]]+a E0 c
```

Out[747]=

$$\left(w^2\left(a\,\mathrm{V0}\,\mathrm{Sin}\!\left[a\,u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]+\mathrm{E0}\,\mathrm{Cos}[2\pi t]\left(r\,\mathrm{Cos}\!\left[a\,u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]\times\mathrm{Sin}\!\left[u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]+a\left(1+r\,\mathrm{Cos}\!\left[u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]\right)\mathrm{Sin}\!\left[a\,u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]\right)\right)+4\,a^2\pi^2 r\left(1+r\,\mathrm{Cos}\!\left[u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]\right)\mathrm{Sin}\!\left[u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]u'\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]^2\right)\Big/\left(4\pi^2\left(a^2+r^2+2\,a^2\,r\,\mathrm{Cos}\!\left[u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]+a^2\,r^2\,\mathrm{Cos}\!\left[u\!\left[\frac{2\pi t}{w}\right]\right]^2\right)\right)$$

In[748]:=
```
%/.{Cos[u[2 π t/w]]→1,Cos[a u[2 π t/w]]→1,Sin[u[2 π t/w]]→u,Sin[a u[2 π t/w]]→a u,u′[2 π t/w]→0}/
```

Out[748]=

$$\frac{u\,w^2\left(a^2\,\mathrm{V0}+\mathrm{E0}\left(r+a^2\,(1+r)\right)\mathrm{Cos}[2\pi t]\right)}{4\pi^2\left(r^2+a^2\,(1+r)^2\right)}$$

$$\alpha_1=-\frac{V_0a^2}{4\pi^2(r^2+a^2(1+r)^2)},$$

$$\beta_1=\frac{E_0(a^2(1+r)+r)}{4\pi^2(r^2+a^2(1+r)^2)}.$$

发现系数完全吻合！