$\boxed{Algorithme \quad de \quad Cuthill - Mac \quad Kee}$

Randimbinirina Mamitiana
MISA M1

05 Juillet 2021

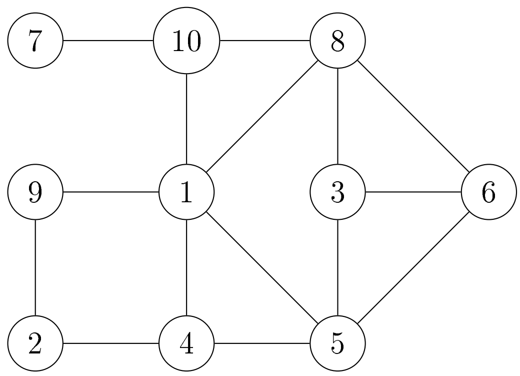
I/ RÉSOLUTION DU SYSTEME SUIVANT :

L'objectif c'est de rÃ©soudre Ax = b. A est une matrice symétrique définie positive.

$$\begin{bmatrix} 6 & & & & & & & & & \\ . & 4 & & & & & & & & \\ . & . & 4 & & & & & & & \\ 1 & 1 & . & 6 & & & & & & \\ 1 & . & 1 & 1 & 6 & & & & & \\ . & . & 1 & . & 1 & 4 & & & & \\ . & . & . & . & . & . & 4 & & & \\ 1 & . & 1 & . & . & 1 & . & 6 & & \\ 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 4 & \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \\ 18 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

I . 1- Graphe correspondante :

La graphe correspondant à la matrice A est:



Pour remplir ce graphe, on a numéroté les lignes de la matrice A, puis on récupère comme voisins tous les numéros de ligne non nul.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & & & & & & & & & \\ . & 4 & & & & & & & & \\ . & . & 4 & & & & & & & \\ 1 & 1 & . & 6 & & & & & & \\ 1 & . & 1 & 1 & 6 & & & & & \\ . & . & 1 & . & 1 & 4 & & & & \\ . & . & . & . & . & . & 4 & & & \\ 1 & . & 1 & . & . & 1 & . & 6 & & \\ 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 4 & \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & 6 \end{bmatrix}$$

I . 2- Recherche d'un sommet périphérique :

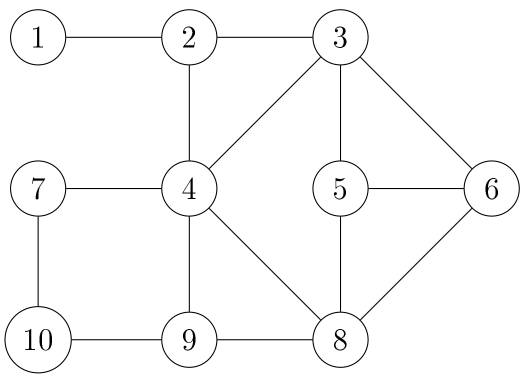
Prenons le sommet n = 9, et cherchons sont éxcentricité[1].

- $\boxed{n = 9}$
  $N_0 = \{9\}$
  $N_1 = \{1, 2\}$
  $N_2 = V_{N_1} - N_0 = \{\cancel{9}, 4, 5, 8, 10, \cancel{9}, \cancel{4}\} = \{4, 5, 8, 10\}$
  $N_3 = V_{N_2} - N_1 = \{\cancel{2}, \cancel{5}, \cancel{1}, \cancel{1}, \cancel{4}, 3, 6, \cancel{3}, \cancel{6}, \cancel{10}, \cancel{1}, \cancel{1}, \cancel{8}, 7\} = \{3, 6, 7\}$
  $N_4 = V_{N_3} - N_2 = \{\cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{8}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{8}, \cancel{10}\} = \{\}$
  D'où e(9) = 3

[1]distance max d'un sommet par rapport aux autres sommets

- $\boxed{n=3}$, $\boxed{n=6}$ et $\boxed{n=7}$
  On procède de la même manière et on obtient: e(3) $=$ 3, e(6) $=$ 3 et e(7) $=$ 4.
  Comme e(7) $>$ e(9) $=$ e(3) $=$ e(6), alors prenons **7 comme sommet périphérique**.

Ainsi, on obtient la graphe suivante :



I . 3- <u>Recherche de sigma</u> :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_i	7	10	8	1	6	3	5	9	4	2

NTF $=$ 37

D'où la matrice correspondant à σ_i :

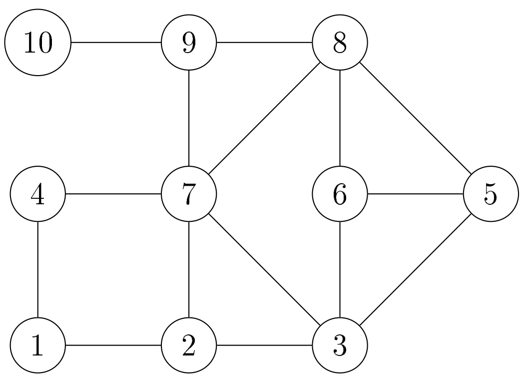
$$\begin{bmatrix}
\times & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\times & \times & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & \times & \times & . & . & . & . & . & . & . \\
. & \times & \times & \times & . & . & . & . & . & . \\
. & . & \times & . & \times & . & . & . & . & . \\
. & . & \times & . & \times & \times & . & . & . & . \\
. & . & . & \times & . & . & \times & . & . & . \\
. & . & . & \times & \times & \times & . & \times & . & . \\
. & . & . & \times & . & . & . & \times & \times & . \\
. & . & . & \times & . & . & \times & . & . & \times
\end{bmatrix}$$

I . 4- <u>Recherche de sigma inverse</u> :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_i	7	10	8	1	6	3	5	9	4	2
$\sigma \mathrm{I}_i$	4	1	3	10	5	8	6	2	7	9

NTF $=$ 31

La graphe et la matrice correspondantes à $\sigma \mathrm{I}_i$:



$$\begin{bmatrix}
\times & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\times & \times & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & \times & \times & . & . & . & . & . & . & . \\
\times & . & . & \times & . & . & . & . & . & . \\
. & . & \times & . & \times & . & . & . & . & . \\
. & . & \times & . & \times & \times & . & . & . & . \\
. & \times & \times & \times & . & . & \times & . & . & . \\
. & . & . & . & \times & \times & \times & \times & . & . \\
. & . & . & . & . & . & \times & \times & \times & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \times & \times
\end{bmatrix}$$

Cette graphe donne la matrice dont son profil est le plus optimisé possible.

I . 5- Recherche de la matrice de passage P :

P est la matrice de passage de i vers $\sigma \mathrm{I}_i$.
Pour retrouver les éléments de P :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{ij}} = \delta_{i\sigma\mathrm{I}_i} = \begin{cases} 1 & \text{si i} = \sigma\mathrm{I}_j \\ O & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où :

$$P = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{bmatrix}$$

Posons A' la matrice $P^t.A.P$
Comme $Ax = b$,

$A.(P.P^t)x = b,$

$P^t.A.(P.P^t)x = P^t.b,$

$(P^t.A.P).P^t x = P^t.b,$

$$\begin{cases} A' = P^t.A.P \\ b' = P^t.b \\ A'.x' = b' \\ P^t.x = x' \end{cases}$$

Après avoir fait les calculs (dans un programme "*algo_Cuthill_MacKee.ipynb*"), on a les résultats suivants :

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b' = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -4 & 8 & 2 & 4 & 11 & 18 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$