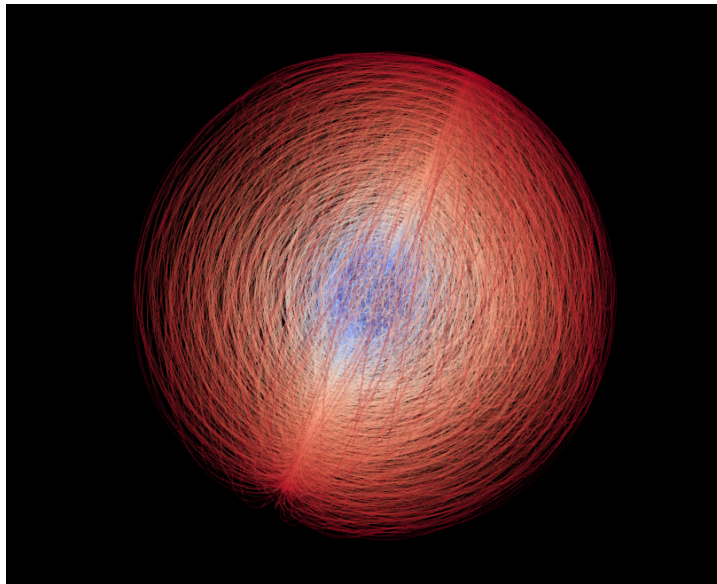


Simulation de trajectoires de géodésiques dans l'espace-temps de Kerr

louis Touzalin

May 2024



Ce petit projet vise à simuler en C des trajectoires de géodésiques dans un espace temps de Kerr le tout affiché dans le logiciel Paraview

1 Introduction

La théorie de la relativité générale, développée par Albert Einstein au début du XXe siècle, a révolutionné notre compréhension de l'espace-temps et de la gravitation. Cette théorie décrit la gravitation comme une courbure de l'espace-temps causée par la présence de matière et d'énergie. L'une des solutions les plus importantes des équations d'Einstein est la métrique de Kerr, qui décrit la géométrie de l'espace-temps autour d'un trou noir en rotation.

L'étude des géodésiques, qui sont les trajectoires suivies par des particules en chute libre dans un espace-temps courbe, est essentielle pour comprendre la structure de l'espace-temps de Kerr. Ces trajectoires sont régies par les équations des géodésiques, qui peuvent être dérivées à partir du principe de moindre action. La simulation numérique de ces trajectoires permet de visualiser et d'analyser les propriétés de l'espace-temps de Kerr, telles que les effets de la rotation du trou noir sur les orbites des particules.

Dans ce projet, je présente l'étude de ces phénomènes physique avec un programme basique en langage C pour simuler les trajectoires de géodésiques dans l'espace-temps de Kerr. Les résultats de ces simulations seront ensuite visualisés à l'aide du logiciel ParaView, un outil puissant pour la visualisation de données scientifiques. Cette approche introduit la structure de l'espace-temps autour d'un trou noir en rotation et des effets relativistes associés.

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Un peu de théorie | 4 |
| 2.1 | Métrie de Kerr | 4 |
| 3 | Tenseurs de courbure | 5 |
| 3.1 | Tenseur de Riemann et tenseur de Ricci | 6 |
| 4 | Mathématiques usuelles | 8 |
| 4.1 | Discretisations des concepts | 8 |
| 4.2 | Géodésiques et dérivée numérique | 10 |
| 5 | Affichage et interprétation physique | 13 |
| 6 | Bibliographie | 19 |

2 Un peu de théorie

2.1 Métrique de Kerr

Comme pour la métrique de Schwarzschild, la métrique de Kerr décrit un espace-temps courbe, toutefois la différence repose dans l'objet étudié. En effet, elle décrit la géométrie de l'espace-temps autour d'un trou noir en rotation. Elle est une généralisation de la métrique de Schwarzschild, qui décrit la géométrie autour d'un trou noir non rotatif. La métrique de Kerr est nommée d'après le physicien Roy Kerr, qui l'a décrite pour la première fois en 1963.

Elle est donnée par :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

Où :

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

M est la masse du trou noir, a est le paramètre de rotation (moment cinétique par unité de masse), r est la distance radiale par rapport au centre du trou noir, θ est l'angle polaire, ϕ est l'angle azimutal, c est la vitesse de la lumière dans le vide et G est la constante gravitationnelle.

Dans le cadre de la simulation, nous avons donné la métrique par cette forme au vu du fait que nous allons considérer que $G = c = 1$ ce qui enlèvera de la charge computationnelle.

Ses composants métriques sont :

$$\begin{aligned} g_{tt} &= - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \\ g_{t\phi} &= - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2 \\ g_{\phi\phi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

qui sous forme de matrice donne :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Les composants de la métrique de Kerr, $g_{\mu\nu}$, sont des fonctions des coordonnées spatiales et temporelles qui suivent les mêmes règles algébriques que les composants de la métrique de Schwarzschild soit :

$$t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi], r \neq 2m, 0 \quad (2.2)$$

Ces composants métriques décrivent les propriétés géométriques de l'espace-temps autour du trou noir en rotation, telles que la courbure de l'espace-temps et la façon dont les particules se déplacent dans cet espace-temps courbé.

L'espace-temps est une variété suivant les propriétés algébriques suivantes :

$$\mathcal{M} := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 / \mathcal{R} \quad (2.3)$$

où :

$$\mathcal{R} := p \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid r(p) = 0, \theta(p) = \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

(t, r) s'étend à \mathbb{R}^2 et (θ, ϕ) s'étend à \mathbb{S}^2 .

La métrique de Kerr est essentielle pour comprendre les propriétés des trous noirs en rotation, y compris leur ergosphère et leur horizon des événements. Elle est également utilisée pour étudier les phénomènes astrophysiques associés aux trous noirs en rotation, tels que les jets de matière et l'accrétion de matière dans le disque d'accrétion.

3 Tenseurs de courbure

Avant d'introduire la notion principale de cette simulation de trajectoire, il est pertinent de présenter le concept mathématique le plus fondamental et élégant de la relativité générale : le tenseur de Riemann, qui permet de calculer la courbure de l'espace à partir d'une métrique donnée.

En effet, les métriques décrivent l'espace dans lequel va se placer le système physique étudié. Pour décrire et représenter correctement le comportement des particules dans cet espace-temps courbe, il est nécessaire

d'introduire le concept fondamental de courbure.

En relativité générale, l'objet mathématique qui décrit la courbure de l'espace est appelé le tenseur de Riemann.

3.1 Tenseur de Riemann et tenseur de Ricci

Le tenseur de Riemann est défini comme une quantité tensorielle qui apparaît en géométrie différentielle et en relativité générale. Il mesure la courbure intrinsèque de l'espace-temps. Comme mentionné précédemment, il est défini par ses opérateurs de connexion Levi-Civita comme :

$$R(\mu, \nu)\sigma = \nabla_\mu \nabla_\nu \omega - \nabla_\nu \nabla_\mu \omega - \nabla_{[\mu, \nu]} \omega \quad (3.1)$$

Ici, $R(\mu, \nu)$ est une transformation linéaire dépendante de chacun des points de l'espace tangent à la variété et $[\mu, \nu]$ est un crochet de Lie. Dans l'idée, si $\mu = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\nu = \frac{\partial}{\partial x_j}$ sont des champs de vecteurs de coordonnées, alors le crochet dépendant du tenseur est nul. On peut donc réécrire l'expression comme :

$$R(\mu, \nu)\sigma = \nabla_\mu \nabla_\nu \omega - \nabla_\nu \nabla_\mu \omega \quad (3.2)$$

Dans le cadre d'une application relativiste, donc spatiale, du tenseur de Riemann, il est préférable de le définir par ses identités dépendantes du système de coordonnées :

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu} \quad (3.3)$$

Avec les symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ définis dans la section précédente. Il est possible de le contracter en un tenseur compact de Ricci qui est une composante essentielle des équations d'Einstein, qui décrivent comment la matière et l'énergie affectent la courbure de l'espace-temps.

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ij} \Gamma^l_{mk} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{mj} \quad (3.4)$$

où R^l_{ijk} représente le tenseur de Riemann, Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel, x^k sont les coordonnées spatiales et ∂ représente les dérivées partielles. Cette expression encapsule la façon dont les dérivées secondes des composantes de la métrique de l'espace-temps varient d'un point à un autre, fournissant ainsi des informations cruciales sur la courbure de l'espace-temps.

Pour contracter le tenseur de Riemann et obtenir le tenseur de Ricci, on utilise la notation de sommation d'Einstein, où les indices répétés sont sommés. En contractant les deux premiers indices du tenseur de Riemann, ce qui donne :

$$Ric_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu}, \quad (3.5)$$

où $R_{\mu\sigma\nu}^\sigma$ est une composante du tenseur de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$. Cette contraction revient à fixer $\alpha = \sigma$ et à sommer sur cet indice commun σ .

Géométriquement, le tenseur de Ricci fournit une mesure de la courbure moyenne de l'espace-temps en un point, en prenant en compte la contribution de toutes les directions. C'est un tenseur de rang deux qui nécessite au préalable, bien que facilitant les calculs, une bonne compréhension du tenseur de Riemann.

Le tenseur de Riemann peut donc s'exprimer de la manière suivante, suivant les connexions affine entre les différents vecteurs :

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.6)$$

Où ∇ est le symbole de connexion affine entre les champs de vecteur X et Y sur le champ tensoriel Z .

Pour développer davantage le concept, considérons une variété riemannienne (M, g) avec une connexion Levi-Civita ∇ et M un champ de vecteurs lisses X, Y, Z tels que :

$$R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M, \quad p \in M \quad (3.7)$$

où R est un champ tensoriel dans \mathbb{R} tel que :

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad Ric_p : T_p M \times T_p M \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

Qui permet de définir Ricci comme suit :

$$Ric_p(X, Z) := \text{tr}(X \rightarrow R_p(X, Y)Z) \quad (3.9)$$

$$Ric_p(X, Z) := \sum_{i=1}^n \langle R_p(v_i, Y)Z_{v_i} \rangle \quad (3.10)$$

Soit une application du tenseur de Riemann à $(v_i, Y)Z_{v_i}$, cela peut être vérifié algébriquement par :

$$Ric_{\mu\nu} = R_{\nu\sigma\mu}^\sigma = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma \quad (3.11)$$

En outre, le symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ peut s'exprimer comme une somme vectorielle des dérivées partielles des composantes de la métrique :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^n \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) g^{\lambda\sigma} \quad (3.12)$$

Ainsi,

$$R_{ij} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \Gamma_{\mu i}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \Gamma_{\mu i}^{\mu}}{\partial x^j} + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} \Gamma_{ij}^{\nu} - \Gamma_{i\nu}^{\mu} \Gamma_{\mu j}^{\nu}) \quad (3.13)$$

avec :

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.14)$$

Notons que cette section est introductive et permet uniquement de se situer dans la documentation de cet article. C'est en somme une introduction à cette notion complexe et élégante que sont les tenseurs de la relativité générale. Pour donner un ordre d'idée, nous pourrions développer un article complet sur ces notions, ce qui n'est pas le but ici.

4 Mathématiques usuelles

Dans cette section, nous allons aborder les concepts mathématiques fondamentaux nécessaires à la simulation numérique de la trajectoire des particules dans l'espace-temps de Kerr.

Nous commencerons par introduire la notion de discrétisation, qui est essentielle pour transformer les équations continues de la relativité générale en un système d'équations algébriques pouvant être résolues par un ordinateur.

je vais surtout me pencher sur les équations de géodésiques qui décrivent le mouvement des particules dans un espace-temps courbe, et nous discuterons de leur résolution numérique à l'aide de méthodes d'intégration appropriées.

4.1 Discrétisations des concepts

La discrétisation est le processus de transformation d'un système continu en un ensemble discret de points ou de valeurs. Cela est souvent nécessaire lors de la résolution numérique de problèmes, en discrétisant un système, on le subdivise en éléments finis qui peuvent être manipulés et calculés numériquement.

Dans le contexte d'une simulation numérique, la discrétisation est utilisée pour rendre les équations continues de la relativité générale manipulables sur un ordinateur. Cela implique de discrétiser l'espace-temps en une grille tridimensionnelle et de représenter les quantités physiques telles que le champ magnétique, la densité du plasma, etc., sous forme de valeurs discrètes sur cette grille.

Le choix de la taille de la grille (c'est-à-dire les valeurs de $\delta\mu, \delta\beta, \delta\nu$) est un compromis entre la précision et le coût computationnel : une grille plus fine donnera des résultats plus précis, mais nécessitera plus de ressources de calcul.

Prenons un exemple simple avec un symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ donne par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (4.1)$$

et se discrétise en différences finies par l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{g_{\mu\beta}(\beta + \delta\beta) - g_{\mu\beta}(\beta)}{\delta\beta} + \frac{g_{\beta\nu}(\mu + \delta\mu) - g_{\beta\nu}(\mu)}{\delta\mu} - \frac{g_{\beta\mu}(\nu + \delta\nu) - g_{\beta\mu}(\nu)}{\delta\nu} \right) \quad (4.2)$$

Dans cette équation :

- $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ représente le symbole de Christoffel.
- n représente la dimension de l'espace-temps.
- μ, ν , et σ sont des indices spatiaux.
- β est un indice de sommation sur toutes les directions de l'espace-temps.
- $g_{\mu\beta}, g_{\beta\nu}$, et $g_{\beta\mu}$ sont les composantes du tenseur métrique.
- $\delta\beta, \delta\mu$, et $\delta\nu$ sont les intervalles de discrétisations dans les directions β, μ , et ν respectivement.

Il est donc par définition possible de le faire avec le tenseur de Riemann comme suit :

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu i}^\mu(\mu + \delta\mu) - \Gamma_{\mu i}^\mu(\mu)}{\delta\mu} - \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu i}^\mu(j + \delta j) - \Gamma_{\mu i}^\mu(j)}{\delta j} \\ & + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\Gamma_{\mu\nu}^\mu(\mu + \delta\mu) - \Gamma_{\mu\nu}^\mu(\mu)}{\delta\mu} \frac{\Gamma_{ij}^\nu(j + \delta j) - \Gamma_{ij}^\nu(j)}{\delta j} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\Gamma_{i\nu}^\mu(\mu + \delta\mu) - \Gamma_{i\nu}^\mu(\mu)}{\delta\mu} \frac{\Gamma_{\mu j}^\nu(j + \delta j) - \Gamma_{\mu j}^\nu(j)}{\delta j} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ces équations illustrent comment les dérivées spatiales peuvent être estimées sur une grille discrète en utilisant une différence finie. Dans le cadre de ce petit projet, j'ai surtout utilisé les symboles de Christoffel que j'ai dérivé numériquement du tenseur métrique.

4.2 Géodésiques et dérivée numérique

Les géodésiques sont les trajectoires suivies par des particules en chute libre dans un espace-temps courbe. Elles sont définies comme les courbes qui minimisent la distance (ou le temps propre) entre deux points de l'espace-temps. Les équations des géodésiques peuvent être dérivées à partir du principe de moindre action :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (4.4)$$

où $x^\mu(\tau)$ représente les coordonnées de la particule en fonction du temps propre τ .

Afin de faire des approximations des valeurs que prennent les géodésiques pour chaque point de la grille, j'utilise une méthode Runge-Kutta4 qui permet une bonne précision tout en restant acceptable d'un point de vue computationnel.

Cette méthode approxime la solution en calculant quatre incréments intermédiaires (k_1, k_2, k_3, k_4) à chaque pas d'intégration :

$$k_1 = f(x_n, v_n) \quad (4.5)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (4.6)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (4.7)$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3, v_n + hk_3) \quad (4.8)$$

où $f(x, v)$ est la fonction qui calcule la dérivée seconde de x^μ en utilisant l'équation des géodésiques, et h est la taille du pas d'intégration.

La position et la 4-vitesse de la particule sont ensuite mises à jour en utilisant une moyenne pondérée des incréments intermédiaires :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.9)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.10)$$

Les points de la géodésique calculée sont stockés à l'aide d'une fonction, qui convertit les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en coordonnées cartésiennes (x, y, z) et stocke également la valeur du paramètre affine λ correspondant à chaque point.

En utilisant des directives OpenMP `pragma omp parallel for`, certaines boucles sont parallélisées pour accélérer le calcul en tirant parti des systèmes multiprocesseurs.

Dans le code, cette fonction prend en paramètres deux tableaux $x[4]$ et $v[4]$ qui prennent les positions et les vitesses initiales des particules qui seront itérées dans les directions données.

Le paramètre principal est le tableau *christoffel*[4][4][4] qui prend les calculs préalables des symboles en fonction de la métrique. Les géodésiques sont calculés comme suit avec en premier une définition de la métrique choisie sous sa forme matricielle :

```
ldouble_a32 H = 10.0;
ldouble_a32 r = sqrt_asm(powf(x[1], 2) + powf(a, 2) * \
    powf(cos(x[2]), 2));
ldouble_a32 f = 2 * r * H / (powf(r, 2) + powf(a, 2) * \
    powf(cos(x[2]), 2));
ldouble_a32 rho2 = powf(r, 2) + powf(a, 2) * \
    powf(cos(M_PI / 2), 2);
ldouble_a32 delta = powf(r, 2) - Rs * r + powf(a, 2);
ldouble_a32 Sigma = powf(r, 2) + powf(a, 2);
ldouble_a32 A = (powf(r, 2) + powf(a, 2)) * Sigma + Rs * \
    r * powf(a, 2) * powf(sin(M_PI / 2), 2);
ldouble_a32 g00 = -(1-Rs*r/rho2);
ldouble_a32 g03 = -Rs*r*a*powf(sinf(M_PI / 2), 2)/rho2;
ldouble_a32 g11 = rho2 / delta;
ldouble_a32 g22 = rho2;
ldouble_a32 g30 = -Rs*r*a*powf(sinf(M_PI/2),2)/rho2;
ldouble_a32 g33 = (Sigma*powf(sinf(M_PI/2),2))/rho2;
long double g_kerr[4][4] =
{
    {g00, 0, 0, g03},
    {0, g11, 0, 0},
    {0, 0, g22, 0},
    {g03, 0, 0, g33}
};
```

Cette première partie définit la métrique de Kerr (une autre peut être choisie). Ensuite, le paramètre *gkerr*[4][4] est envoyé à la fonction *christoffel* :

```
void christoffel(long double g[4][4], long double christoffel[4][4][4])
{
    for (int mu = 0; mu < 4; mu++) {
        for (int beta = 0; beta < 4; beta++) {
            for (int nu = 0; nu < 4; nu++) {
                long double sum = 0;
                for (int sigma = 0; sigma < 4; sigma++) {
                    sum += 0.5 * (g[mu][sigma] * (g[sigma][beta] + \
                        g[beta][sigma] - g[beta][nu]));
                }
                christoffel[mu][beta][nu] = sum;
            }
        }
    }
}
```

La fonction Christoffel prend en entrée un tableau *g*[4][4] représentant la métrique de l'espace-temps, et renvoie un tableau *christoffel*[4][4][4] contenant les symboles de Christoffel calculés.

où $g^{\mu\sigma}$ est l'inverse de la métrique $g_{\mu\sigma}$, et $\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta}$ représente la dérivée partielle de la composante $g_{\sigma\alpha}$ de la métrique par rapport à la coordonnée x^β .

Dans la fonction christoffel, cette formule est approximée en utilisant des différences finies. Plus précisément, la dérivée partielle est remplacée par une différence finie centrée :

$$\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} \approx \frac{g_{\sigma\alpha}(x^\beta + h) - g_{\sigma\alpha}(x^\beta - h)}{2h} \quad (4.11)$$

où h est un petit pas de discrétisation.

En utilisant cette approximation, la formule des symboles de Christoffel devient :

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \approx & \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{g_{\sigma\alpha}(x^\beta + h) - g_{\sigma\alpha}(x^\beta - h)}{2h} \right. \\ & + \frac{g_{\sigma\beta}(x^\alpha + h) - g_{\sigma\beta}(x^\alpha - h)}{2h} \\ & \left. - \frac{g_{\alpha\beta}(x^\sigma + h) - g_{\alpha\beta}(x^\sigma - h)}{2h} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

La fonction `christoffel` implémente cette formule en utilisant des boucles imbriquées sur les indices μ , α , β et σ . Pour chaque triplet d'indices (μ, α, β) , elle calcule la somme sur σ en utilisant l'approximation par différences finies, puis stocke le résultat dans le tableau `christoffel` $[\mu][\alpha][\beta]$.

Il est important de noter que cette implémentation utilise une approximation par différences finies pour calculer les dérivées partielles, ce qui peut introduire des erreurs numériques. Des méthodes plus précises, comme les différences finies d'ordre supérieur ou les méthodes spectrales, pourraient être utilisées pour améliorer la précision du calcul des symboles de Christoffel, au prix d'une complexité accrue.

5 Affichage et interprétation physique

En visualisant les géodésiques dans l'espace-temps de Kerr, nous pouvons observer directement les effets de la courbure de l'espace-temps sur les trajectoires des particules. Les géodésiques peuvent présenter des caractéristiques uniques, telles que des orbites stables, des orbites instables, des trajectoires capturées par le trou noir ou des trajectoires échappant à l'attraction gravitationnelle. L'analyse de ces trajectoires nous permet de mieux comprendre la nature des trous noirs et les limites de la relativité générale.

En outre, l'étude des propriétés physiques des géodésiques, telles que l'énergie, le moment angulaire et le temps propre, nous fournit des informations précieuses sur les caractéristiques des particules se déplaçant dans l'espace-temps de Kerr. Ces informations peuvent être utilisées pour étudier des phénomènes tels que l'effet Lense-Thirring, les orbites marginalement stables et les processus d'accrétion autour des trous noirs.

Pour afficher les résultats, j'ai utilisé le logiciel de visualisation Paraview qui permet de simplifier le traitement de ce genre de données avec des fichiers au bon format (VTK dans mon cas).

Une fois les calculs finit et stocke dans un tableau, j'écris dans le fichier et je le lance simplement dans Paraview.

Pour l'exemple, j'ai simulé une orbite basique à partir de mon code avec un pas de temps raisonnable et un nombre d'itérations assez faible pour avoir une visibilité relativement bonne pour interpréter les résultats :

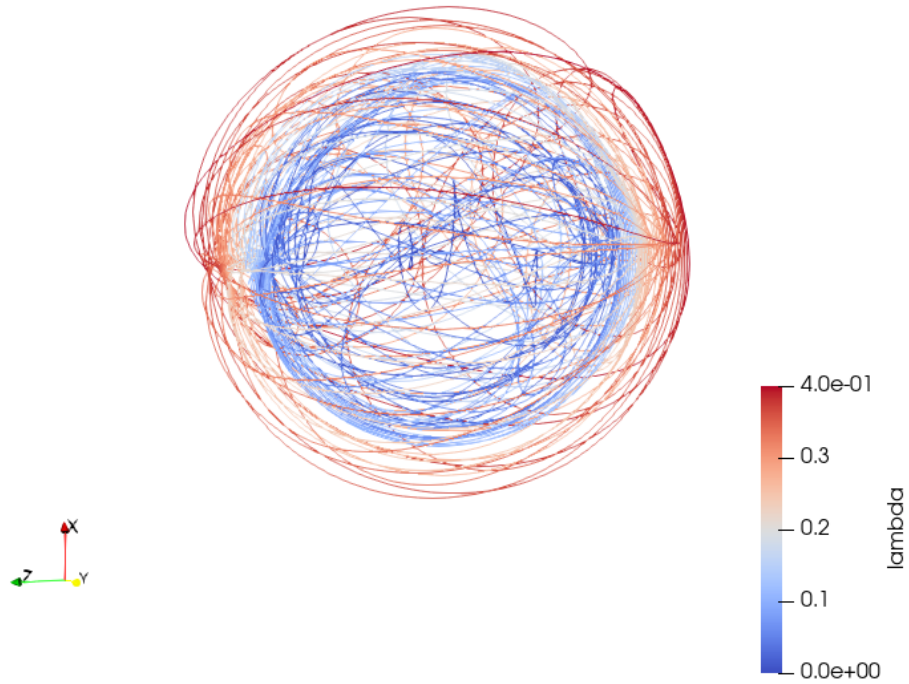


Figure 1: *paramètres* : $a = 0.4$, $M = 1.989 \times 10^{21}$ et $\lambda = 2.1$

Dans cette simulation, on peut clairement voir la précession des orbites due à l'effet Lense-Thirring qui est clairement visible dans les trajectoires en spirale des particules, révélant l'impact de la rotation du trou noir sur la courbure de l'espace-temps environnant.

De plus, le phénomène de capture des particules par l'horizon des événements est mis en évidence par les géodésiques qui s'enroulent de manière irréversible vers le centre, disparaissant au-delà d'une certaine limite critique.

L'asymétrie et l'irrégularité frappantes de la distribution des géodésiques témoignent de la nature chaotique et non-linéaire du mouvement des particules soumises à des forces de marée intenses au voisinage du trou noir de Kerr.

Toutefois il est possible d'aller plus loin dans le nombre d'itérations, pour mettre en évidence la géométrie de l'espace temps de Kerr :

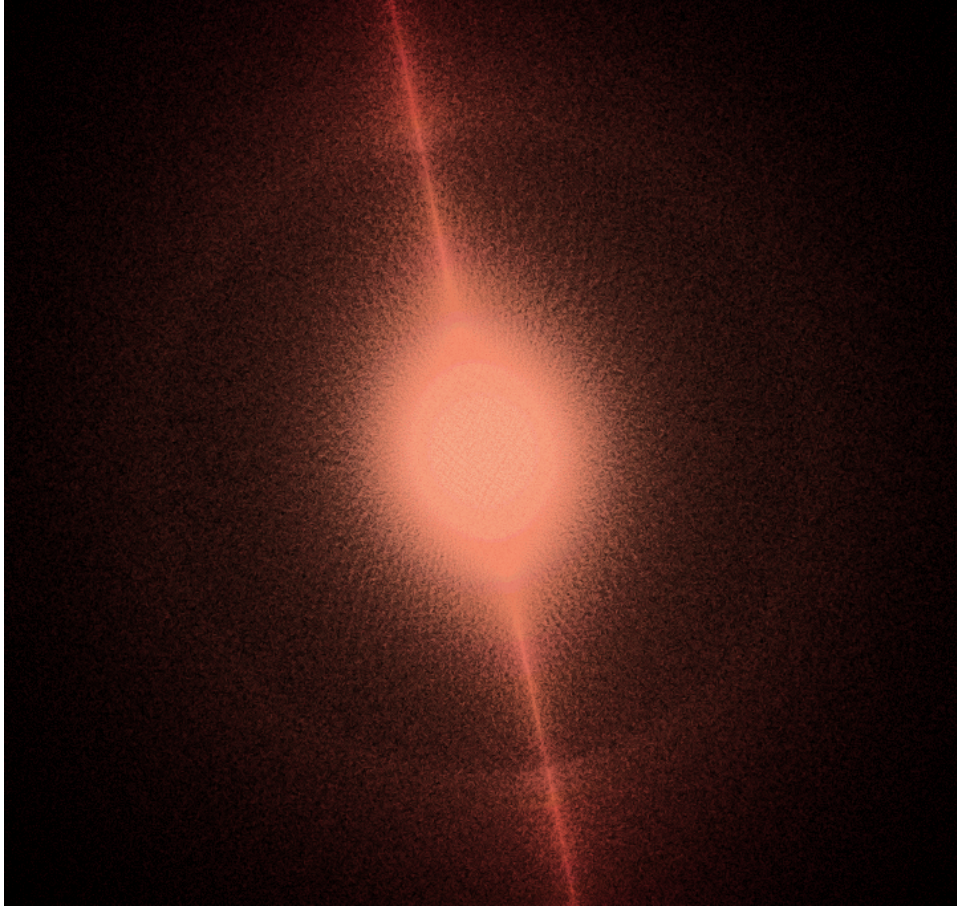


Figure 2: *Inner Horizon* : $a = 0.9$, $M = 1.989 \times 10^{21}$ et $\lambda = 40.0$

En zoomant légèrement, on peut voir en partie l'horizon intérieur du trou noir. Cet horizon intérieur, appelée horizon de Cauchy, est une surface nulle, tout comme l'horizon des événements extérieur situé à un rayon r_+ :

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (5.1)$$

Contrairement à l'horizon extérieur, qui agit comme une membrane unidirectionnelle à travers laquelle les particules et la lumière peuvent entrer, mais pas ressortir, l'horizon intérieur possède des propriétés plus exotiques. Il est considéré comme une singularité de courbure, au-delà de laquelle la causalité est violée et le déterminisme brisé.

Il est important de noter que pour un trou noir de Kerr physiquement réaliste, le paramètre de rotation est contraint par la relation $|a| \leq M$. Dans

le cas limite où $|a| = M$, appelé trou noir extrémal, les horizons intérieur et extérieur coïncident à $r = M$. Si $|a| > M$, la métrique de Kerr décrit un objet hypothétique appelé singularité nue, qui n'est pas censé exister dans l'univers réel.

Toutefois, en zoomant encore, on peut mettre en évidence la surface interne de redshift infini

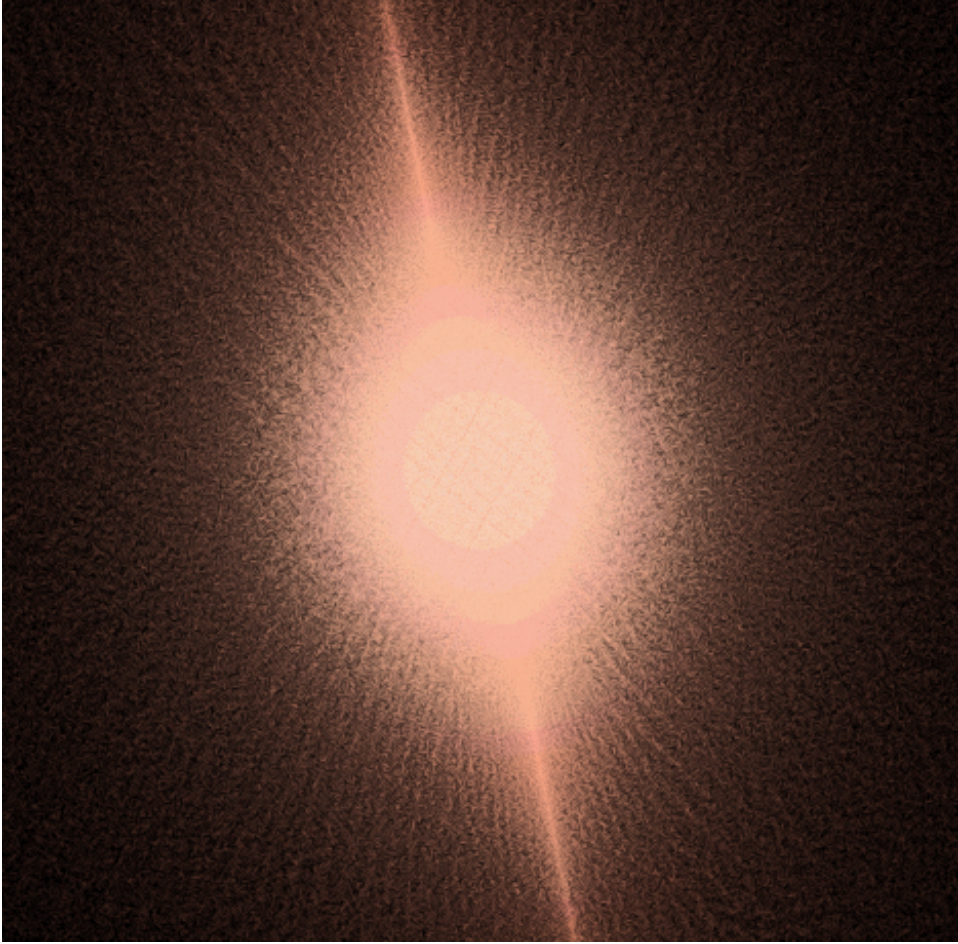


Figure 3: *Infinite redshift surface* : $a = 0.9$, $M = 1.989 \times 10^{21}$ et $\lambda = 40.0$

la surface de redshift infini (également appelée surface de décalage critique ou surface ergosphérique intérieure) est une frontière située à l'intérieur de l'ergosphère, où le facteur de décalage vers le rouge devient infini. Cette surface est définie par l'équation suivante :

$$r_{rs} = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (5.2)$$

À l'intérieur de cette surface, la courbure de l'espace-temps devient si ex-

trême que le décalage vers le rouge des objets émettant de la lumière tend vers l'infini, les rendant invisibles pour un observateur externe. De plus, dans cette région, la rotation de l'espace-temps devient superluminique, ce qui signifie que même la lumière est entraînée dans la direction de rotation du trou noir.

L'équation $r_{rs} = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ capture ainsi un aspect fondamental de la géométrie de Kerr et met en évidence la complexité de la relativité générale dans ces conditions limites.

Pour aller plus loin, je me suis amusé à zoomer près de la singularité en anneau afin de voir ce que pourraient faire les géodésiques en présence de cette singularité : La structure complexe et tourbillonnante des géodésiques

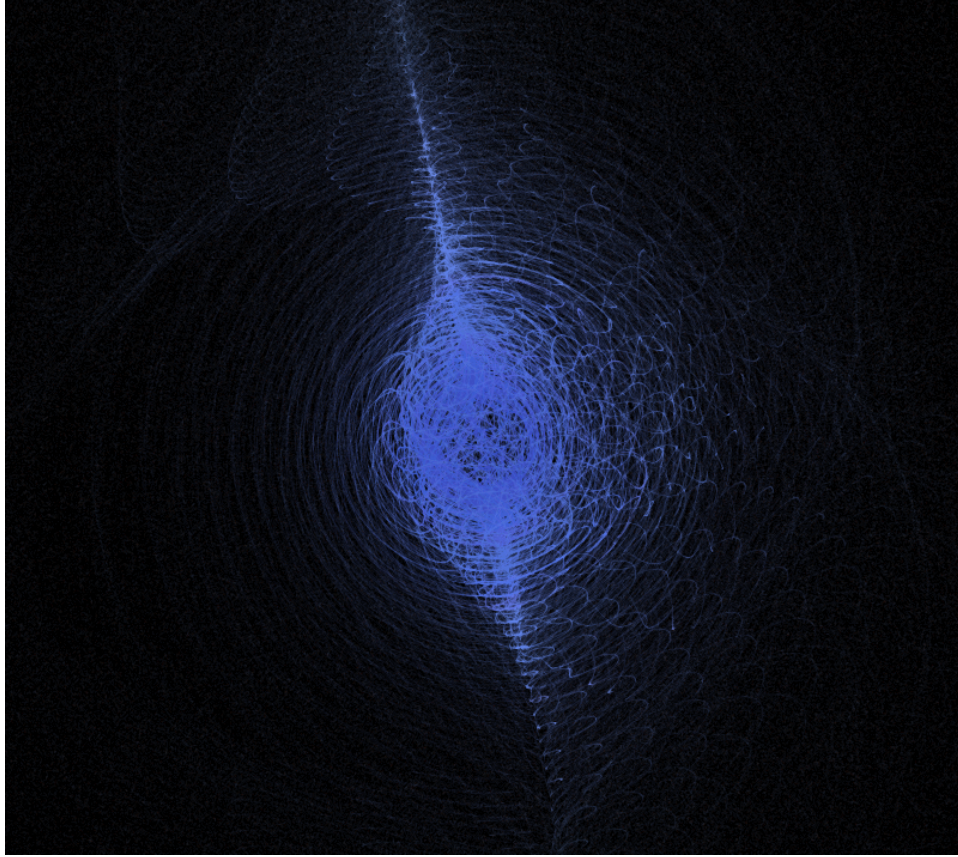


Figure 4: *Kerr Singularity* : $a = 0.9$, $M = 1.989 \times 10^{21}$ et $\lambda = 40.0$

révèle les effets gravitationnels extrêmes et la distorsion de l'espace-temps au voisinage de la singularité.

Au centre de l'image, on distingue une zone d'un bleu profond et intense, qui semble représenter la singularité elle-même. La concentration des lignes de champ gravitationnel autour de cette région suggère une courbure extrême de l'espace-temps, où la densité et les forces de marée tendent vers l'infini.

Émanant de la singularité, on observe une structure en forme de vortex, composée de filaments lumineux entrelacés. Ces filaments représentent probablement les géodésiques de particules et de rayons lumineux qui sont fortement déviés et déformés par le champ gravitationnel intense du trou noir. Leur aspect enchevêtré et chaotique témoigne de la complexité des trajectoires dans cette région extrême de l'espace-temps.

Cette singularité en anneau est située dans le plan équatorial du trou noir, à une coordonnée radiale r donnée par :

$$r_{sing} = 0 \tag{5.3}$$

Cependant, cette singularité n'est pas un véritable point de l'espace-temps, car elle ne peut être atteinte par aucune géodésique de type temps ou lumière provenant de l'extérieur du trou noir. En effet, dans les coordonnées de Boyer-Lindquist, la véritable nature de la singularité est quelque peu obscurcie.

Dans ma simulation, les géodésiques l'atteignent bien que la représentation visuelle des géodésiques près de la singularité peut être trompeuse. La singularité elle-même n'est pas un véritable point de l'espace-temps, mais plutôt une limite théorique. La façon dont les géodésiques sont tracées à proximité de cette limite peut donner l'impression qu'elles la traversent, même si ce n'est pas le cas d'un point de vue mathématique.

6 Bibliographie

Xiaoling Yang, 2009. YNOGK : *A new public code for calculating null geodesics in the kerr spacetime*. <https://arxiv.org/abs/1305.1250>

Piotr T. Chrusciel, 2018 revised. *Geometry of black holes*. University of Vienna. <https://homepage.univie.ac.at/>

Susan Larsen, 2023, *Chapter 4: Christoffel Symbols, Geodesic Equations and Killing Vectors*, <https://physicssusan.mono.net/>

Tristan OZUCH-MEERSSEMAN, *Introduction au domaine de recherche Singularités en analyse géométrique : Flot de Ricci et Équations d'Einstein*, https://www.math.ens.psl.eu/shared-files/9745/?IDR_tristan_ozuch-meersseman.pdf download = 1

A. DIMAKIS and F. MULLER-HOISSEN, *Discrete Riemannian Geometry* Max-Planck-Institut für Stromungsforschung, Bunsenstrasse 10, D-37073 Gottingen, Germany, <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9808023>