Tentamen i Linjär algebra och differentialekvationer

M0031M

Tentamensdatum: **2019-12-18**
Skrivtid: **09.00 - 14.00**

Jourhavande lärare: Stefan Ericsson, tel: 0920-493330.
Antal uppgifter: 6, totalpoäng: 30.
Betygsgränser: 0-13 **U**, 14-18 **3**, 19-24 **4**, 25-30 **5**

Tillåtna hjälpmedel: Skrivverktyg

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt redovisade att de blir svåra att följa. Även delvis lösta uppgifter bör emellertid lämnas in.

Lycka till!

Allmänna anvisningar: Kontrollera att du fått samtliga uppgifter. Besvara endast en uppgift per lösningsblad. Skriv inte på baksidan. Skriv tydligt, texta gärna men använd inte rödpenna.

Efter tentamen: Tentamensresultat meddelas senast tre veckor efter tentamenstillfället och senast två veckor före nästa omtentamenstillfälle. Tentamensresultatet syns på Mitt LTU - Ladok för studenter. Din rättade tentamen skannas och blir synlig på Mitt LTU - Rättade tentor.

Uppgifter till tryckeriet:

Projektnummer: 211009, antal exemplar: 150, antal sidor: 2.
Övrigt: **Dubbelsidigt**.

1.

a) Bestäm samtliga lösningar till $z^2 + (-1 + 5i)z - 6 - 2i = 0$.

b) Bestäm ett argument för $-i(1 - i)^3/(-3 + \sqrt{3}i)^5$. (5 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -24 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisera A, det vill säga bestäm P och D, där D är en diagonalmatris, så att $A = PDP^{-1}$. Bestäm A^7. (5 p)

3. Utrusta $\mathbb{P}_2$ med skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = 3p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(2)q(2).$$

a) Bestäm $\|1 + 2t\|$ och $\operatorname{dist}(t, 3 - t)$.

b) Bestäm en ortogonal bas för underrummet $\mathbb{P}_1$. (5 p)

4.

a) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} xy' - 2y = 3x^4, \quad x > 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} xy' = 1 + y^2, \quad x > 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(5 p)

5.

a) Visa att e^{-3x} är en lösning till $y''' + 9y'' + 28y' + 30y = 0$.

b) Bestäm samtliga lösningar till $y''' + 9y'' + 28y' + 30y = 1 + 3e^{-2x}$. (5 p)

6. Låt V och W vara vektorrum.

a) Vad menas med att T är en linjär avbildning från V till W? Ge en definition.

b) Låt T vara en linjär avbildning från V till W. Bevisa att $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

c) Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vara (abstrakta) vektorer i V sådana att

$$\{T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

är linjärt oberoende. Visa att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ är linjärt oberoende. (5 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG M0031M 18/12 -19

1a) $z^2+(-1+5i)z-6-2i=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{-1+5i}{2}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{-1+5i}{2}\right)^2}_{=\frac{1-10i-25}{4}=-6-\frac{5}{2}i}-6-2i=0$

LÅT $\boxed{w=z+\frac{-1+5i}{2}}$ OCH VI FÅR:

$w^2+\frac{1}{2}i=0 \Leftrightarrow w^2=-\frac{1}{2}i$. LÅT $\boxed{w=a+bi}$ OCH VI FÅR:

$a^2+2abi-b^2=-\frac{1}{2}i \Leftrightarrow$

Re: $a^2-b^2=0$ (1)

Im: $2ab=-\frac{1}{2}$ (2)

UR (2): $\boxed{b=-\frac{1}{4a}}$ IN I (1):

$a^2-\frac{1}{16a^2}=0 \Leftrightarrow a^4=\frac{1}{16} \Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$: $b=-\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$, $w=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $z=\underline{1-3i}$

$a=-\frac{1}{2}$: $b=\frac{1}{2}$, $w=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, $z=\underline{-2i}$

LÖSNINGARNA ÄR: $\underline{\underline{1-3i}}$ & $\underline{\underline{-2i}}$

b) $\arg\left(\frac{-i(1-i)^3}{(-3+\sqrt{3}i)^5}\right)=\arg(-i)+3\arg(1-i)-5\arg(-3+\sqrt{3}i)$

$=-\frac{\pi}{2}+3\left(-\frac{\pi}{4}\right)-5\,\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(-6-9-50)=-\frac{65}{12}\pi$

EGENTLIGEN $+2\pi k$

$=\underbrace{-6\pi}_{\text{TRE VARV MEDURS}}+\frac{7\pi}{12}$

∴ ETT ARGUMENT ÄR $\underline{\underline{\frac{7\pi}{12}}}$

2 $\quad A = \begin{bmatrix} 15 & -24 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$

BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

EGENVÄRDEN: KAR. EKV.: $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 15-\lambda & -24 \\ 8 & -13-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$

$(15-\lambda)(-13-\lambda) + 8 \cdot 24 = 0 \iff -195 - 2\lambda + \lambda^2 + 192 = 0 \iff$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = -1 ; 3$

[KOLL: $-1+3 = 2$, $\operatorname{tr} A = 15-13 = 2$

$(-1)\cdot 3 = -3$, $\det A = -3$

OK]

EGENVEKTORER:

$\lambda = -1$: $\quad A\bar{v} = -1\bar{v} \iff (A+I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 16 & -24 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN, x_2 FRI

SÄTT $x_2 = t$ OCH $x_1 = \frac{3t}{2}$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$: $\quad A\bar{v} = 3\bar{v} \iff (A-3I)\bar{v} = \bar{0}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & -24 & 0 \\ 8 & -16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_1 BUNDEN x_2 FRI $\quad x_2 = t$ GER $x_1 = 2t$

$\therefore \bar{v} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ VÄLJ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A = PDP^{-1}$ MED $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ OCH $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

NU A^7, $\quad A^7 = (PDP^{-1})^7 = PD^7P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} =$

[$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$D^7 = \begin{bmatrix} (-1)^7 & 0 \\ 0 & 3^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^7 \end{bmatrix}$]

$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2\cdot 3^7 & -3^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4\cdot 3^7 & -6-2\cdot 3^8 \\ 2+3^7 & -4-3^8 \end{bmatrix}$

3. $\langle p,q\rangle = 3p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(2)q(2)$

a) $\|1+2t\|^2 = \langle 1+2t, 1+2t\rangle = 3(-1)^2 + 1^2 + 5^2 = 29$

$\therefore \; \|1+2t\| = \sqrt{29}$

$\text{dist}(t, 3-t)^2 = \|t-(3-t)\|^2 = \|2t-3\|^2 =$

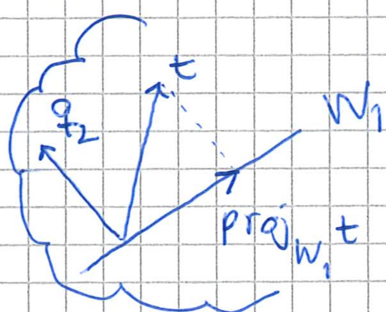
$\langle 2t-3, 2t-3\rangle = 3(-5)^2 + (-3)^2 + 1^2 = 85$

$\therefore \; \text{dist}(t, 3-t) = \sqrt{85}$

b) EN BAS FÖR $\mathbb{P}_1$ ÄR $\{1, t\}$. ORTOGONALISERA DENNA.

1) $q_1(t) = 1$, $W_1 = \text{Span}\{q_1\}$

2) $q_2(t) = t - \text{proj}_{W_1} t =$



$= t - \dfrac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 =$

$= t + \dfrac{1}{5}$

$\langle t, 1\rangle = 3(-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 = -1$

$\langle 1, 1\rangle = 3\cdot 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5$

$\therefore \; \{1, t+\frac{1}{5}\}$ ÄR EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{P}_1$

4 a) $xy' - 2y = 3x^4 \iff y' - \frac{2}{x}y = 3x^3$

$\ulcorner$ IF $\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln|x| + C = -\ln x^2 + C$

Välj: $IF = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{e^{\ln x^2}} = \frac{1}{x^2}$ $\lrcorner$

$\iff \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = 3x \iff \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = 3x \iff$

$\frac{1}{x^2}y = \frac{3}{2}x^2 + C \iff y = \frac{3}{2}x^4 + Cx^2$

MEN, $y(1) = 1$ så $1 = \frac{3}{2} + C$ $\therefore C = -\frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

b) $xy' = 1 + y^2 \iff \frac{1}{1+y^2}y' = \frac{1}{x} \iff \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\iff \arctan y = \ln|x| + C \underset{x>0}{\iff} y = \tan(\ln x + C)$ om $-\frac{\pi}{2} < \ln x + C < \frac{\pi}{2}$

MEN, $y(1) = 0$:

$0 = \tan(\ln 1 + C) \iff C = 0$ $\therefore y = \tan(\ln x)$

(på $(e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$)

5 a) Om $y = e^{-3x}$ fås $y' = -3e^{-3x}$, $y'' = 9e^{-3x}$, $y''' = -27e^{-3x}$

Och därför $y''' + 9y'' + 28y' + 30y = -27e^{-3x} + 81e^{-3x} - 84e^{-3x} + 30e^{-3x}$

$= 0$ alla x OK

b) "Homogen + partikulär"

Hom.: Kar. ekv.: $r^3 + 9r^2 + 28r + 30 = 0$ Enligt a) är $r = -3$ en rot.

$$
\begin{array}{r|l}
 & r^2 + 6r + 10 \\
\hline
r+3 & r^3 + 9r^2 + 28r + 30 \\
 & r^3 + 3r^2 \\
\hline
 & 6r^2 + 28r + 30 \\
 & 6r^2 + 18r \\
\hline
 & 10r + 30 \\
 & 10r + 30 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$0 \Leftarrow$ vi visste!

$\therefore r^3 + 9r^2 + 28r + 30 = (r+3)(r^2 + 6r + 10)$

De övriga rötterna till kar. ekv. fås från $r^2 + 6r + 10 = 0$

$\iff r = -3 \pm \sqrt{9 - 10} = -3 \pm i$

$\therefore$ De homogena lösningarna ges av

$$y_h = Ae^{-3x} + e^{-3x}(B\cos x + C\sin x)$$

Part.: $HL = 1 + 3e^{-2x}$. Fixa en partikulärlösning för vardera del 1 resp. $3e^{-2x}$.

För $HL = 1$ fås $y_{p_1} = \frac{1}{30}$

För $HL = 3e^{-2x}$. Ansats $y_{p_2} = ae^{-2x}$, $y'_{p_2} = -2ae^{-2x}$, $y''_{p_2} = 4ae^{-2x}$

$y'''_{p_2} = -8ae^{-2x}$. In i ekv.:

$$-8a\cancel{e^{-2x}} + 36a\cancel{e^{-2x}} - 56a\cancel{e^{-2x}} + 30a\cancel{e^{-2x}} = 3\cancel{e^{-2x}} \iff 2a = 3$$

$\iff a = 3/2 \therefore y_{p_2} = \frac{3}{2}e^{-2x} \therefore y_p = \frac{1}{30} + \frac{3}{2}e^{-2x}$

Den allmänna lösningen är således:

$$y = Ae^{-3x} + e^{-3x}(B\cos x + C\sin x) + \frac{1}{30} + \frac{3}{2}e^{-2x}$$

6 a) T ÄR EN FUNKTION FRÅN V TILL W SÅ ATT

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u})+T(\bar{v})$ OCH $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$

b) $T(\bar{0}) = T(0\bar{0}) = 0T(\bar{0}) = \bar{0}$ ok

c) ANTAG ATT OS ÄR LINJÄRT BEROENDE OCH HÄRLED EN MOTSÄGELSE. ANTAG $c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + \ldots + c_n\bar{u}_n = \bar{0}$ DÄR NÅGON $c_i \neq 0$.

DETTA MEDFÖR

$$\bar{0} \underset{\text{b)}}{=} T(\bar{0}) = T(c_1\bar{u}_1 + \ldots + c_n\bar{u}_n) \underset{\substack{\text{LINJÄR} \\ \text{(MÅNGA GÅNGER)}}}{=} c_1T(\bar{u}_1) + c_2T(\bar{u}_2) + \ldots + c_nT(\bar{u}_n)$$

MEN DETTA MOTSÄGER ATT $\{T(\bar{u}_1), \ldots, T(\bar{u}_n)\}$ ÄR LINJÄRT OBEROENDE. ok

(TY NÅGON $c_i \neq 0$)