Daniel ALIBERT

Formes quadratiques. Espaces vectoriels euclidiens. Géométrie euclidienne.

Objectifs :

Savoir reconnaître une forme bilinéaire, une forme quadratique. Passer d'une forme à une autre. Décomposer une forme quadratique en somme de carrés indépendants. Déterminer une base orthogonale.

Utiliser la structure d'espace euclidien : supplémentaire orthogonal, projection orthogonale, plus courte distance.

Utiliser les isométries de R^3, le produit vectoriel, le produit mixte.

Organisation, mode d'emploi

Cet ouvrage, comme tous ceux de la série, a été conçu en vue d'un usage pratique simple.

Il s'agit d'un livre d'exercices corrigés, avec rappels de cours.

Il ne se substitue en aucune façon à un cours de mathématiques complet, il doit au contraire l'accompagner en fournissant des exemples illustratifs, et des exercices pour aider à l'assimilation du cours.

Ce livre a été écrit pour des étudiants de première et seconde années des Licences de sciences, dans les parcours où les mathématiques tiennent une place importante.

Il est le fruit de nombreuses années d'enseignement auprès de ces étudiants, et de l'observation des difficultés qu'ils rencontrent dans l'abord des mathématiques au niveau du premier cycle des universités :

- difficulté à valoriser les nombreuses connaissances mathématiques dont ils disposent lorsqu'ils quittent le lycée,
- difficulté pour comprendre un énoncé, une définition, dès lors qu'ils mettent en jeu des objets abstraits, alors que c'est la nature même des mathématiques de le faire,
- difficulté de conception et de rédaction de raisonnements même simples,
- manque de méthodes de base de résolution des problèmes.

L'ambition de cet ouvrage est de contribuer à la résolution de ces difficultés aux côtés des enseignants.

Ce livre comporte trois parties.

La première, intitulée "A Savoir", rassemble les définitions et résultats qui sont utilisés dans les exercices qui suivent. Elle ne contient ni démonstration, ni exemple.

La seconde est intitulée "Pour Voir" : son rôle est de présenter des exemples de toutes les définitions, et de tous les résultats de la partie précédente, en ne faisant référence qu'aux connaissances qu'un étudiant abordant le chapitre considéré a nécessairement déjà rencontré (souvent des objets et résultats abordés avant le baccalauréat). La moitié environ de ces exemples sont développés complètement, pour éclairer la définition ou l'énoncé correspondant. L'autre moitié est formée d'énoncés intitulés "exemple à traiter" : il s'agit de questions permettant au lecteur de réfléchir de manière active à d'autres exemples très proches des précédents. Ils sont suivis immédiatement d'explications détaillées.

La troisième partie est intitulée "Pour Comprendre et Utiliser" : des énoncés d'exercices y sont rassemblés, en référence à des objectifs.

Tous les exercices sont corrigés de manière très détaillée dans la partie 3 - 2.

Certains livres d'exercices comportent un grand nombre d'exercices assez voisins, privilégiant un aspect "entraînement" dans le travail de l'étudiant en mathématiques. Ce n'est pas le choix qui a été fait ici : les exemples à traiter, les exercices et les questions complémentaires proposés abordent des aspects variés d'une question du niveau du L1 L2 de sciences pour l'éclairer de diverses manières et ainsi aider à sa compréhension.

Le lecteur est invité, à propos de chacun d'entre eux, à s'interroger sur ce qu'il a de général (on l'y aide par quelques commentaires)

Table des matières

1 A Savoir

Dans cette partie, on rappelle rapidement les principales définitions et les principaux énoncés utilisés. Vous devrez vous référer à votre cours pour les démonstrations.

Vous trouverez des exemples dans la partie 2*Pour Voir.

1-1 Formes bilinéaires, formes quadratiques.

Définition

Soient E un espace vectoriel réel, et ϕ une application de $E \times E$ dans R.

On dit que ϕ est une **forme bilinéaire** si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

⁂ Pour tout x de E, l'application :

$$y \rightarrow \phi(x, y)$$

est une application linéaire de E dans R.

⁂ Pour tout y de E, l'application :

$$x \rightarrow \phi(x, y)$$

est une application linéaire de E dans R.

⁂ Si pour tout x et tout y de E, $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, on dit que ϕ est une **forme bilinéaire symétrique** sur E.

⁂ Si, dans les mêmes conditions, on a :

$$\phi(x, y) = -\phi(y, x),$$

on dit que ϕ est **antisymétrique**.

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. Soit B une base de E :

$$B = (e_1,\ldots, e_n).$$

On appelle **matrice associée à ϕ** la matrice symétrique A telle que :

$$a_{i,\,j} = \phi(e_i, e_j).$$

⁂ Soient x et y des vecteurs de E, et X et Y les matrices-colonnes représentant x et y dans la base B. On a l'égalité :

$${}^tXAY = \phi(x, y).$$

⁂ Dans cette égalité, ${}^tX$ désigne la matrice-ligne transposée de X, et on a assimilé une matrice à un coefficient ${}^tXAY$ à ce coefficient $\phi(x, y)$.

⁂ Soit B' une autre base de E, et P la matrice de passage de B à B'.

La matrice de ϕ dans la base B' est :

$$A' = {}^tPAP.$$

⁂ Soit f une application linéaire de E dans R (on dit que f est une **forme linéaire** sur E). L'application ϕ définie par :

$$\phi(x, y) = f(x)f(y)$$

est une forme bilinéaire symétrique.

⁂ Si $E = R^n$, l'application :

$$((x_1,\ldots, x_n)\ , (y_1,\ldots, y_n)) \rightarrow x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

est une forme bilinéaire symétrique, appelée **canonique**.

Définition

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E.

On appelle forme quadratique associée à ϕ l'application :

$$q : E \rightarrow R$$
$$x \rightarrow \phi(x, x).$$

⁂ Si q est la forme quadratique associée à une forme bilinéaire de matrice A, alors :

$$q(x) = {}^tXAX.$$

⁂ L'application q n'est pas linéaire :

$$q(\alpha x) = \alpha^2 q(x).$$

⁂ Si $E = R^n$, on a une forme quadratique canonique :

$$q((x_1,\dots, x_n)) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

⁂ Connaissant q, on peut calculer ϕ de la manière suivante :

$$2\phi(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y).$$

L'application ϕ est dite **forme polaire** de q.

⁂ Soit (x, y) un élément de $E \times E$, on dit que x et y sont **orthogonaux** (pour la forme bilinéaire symétrique ϕ) si :

$$\phi(x, y) = 0.$$

⁂ L'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur d'une partie F de E est un sous-espace vectoriel, l'**orthogonal de F**.

Définition

Soit E un espace vectoriel et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E.

Une base de E est dite **orthogonale** (pour ϕ) si deux vecteurs distincts quelconques de cette base sont orthogonaux. Une base est **orthonormale**, ou orthonormée si elle est orthogonale et si de plus pour tout vecteur x de la base, $\phi(x, x) = 1$.

⁂ Si E est de dimension finie, pour toute forme bilinéaire symétrique, il existe une base orthogonale.

⁂ Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale pour ϕ, et si des vecteurs x et y s'écrivent $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$, alors :

$$\phi(x, y) = x_1y_1\, q(e_1) + \dots + x_ny_n\, q(e_n),$$

et parmi les réels $q(e_i)$, il y en a r strictement positifs, s strictement négatifs et $n - r - s$ nuls. Le couple (r, s) est indépendant du choix de la base orthogonale (**loi d'inertie**). On appelle ce couple la **signature** de la forme quadratique (ou de la forme bilinéaire).

Définition

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. On appelle **noyau de ϕ** le sous-espace vectoriel orthogonal de E :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \phi(x, y) = 0\}.$$

Si $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$, on dit que ϕ est **non dégénérée**.

⁂ On dira aussi que la forme quadratique associée est non dégénérée.

⁂ Dans le cas contraire, ces formes sont dégénérées.

Définition

On dit qu'un élément de E est **isotrope** relativement à ϕ (ou à q) si on a :

$$q(x) = 0.$$

⁂ Tout élément du noyau est isotrope.

⁂ La réciproque n'est pas toujours vraie.

⁂ Si ϕ est non dégénérée, et E de dimension finie, pour toute forme linéaire f sur E, il existe un élément x de E tel que :

$$\forall y, f(y) = \phi(x, y).$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et ϕ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, si ϕ est non dégénérée sur F, alors le sous-espace orthogonal de F est un supplémentaire de F.

Définition

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. Soit u un endomorphisme de E.

On dit que u est un endomorphisme **orthogonal** (pour ϕ) si pour tout x et tout y de E, on a :

$$\phi(u(x), u(y)) = \phi(x, y).$$

On dit que u est un endomorphisme **auto-adjoint** si pour tout x et tout y de E, on a :

$$\phi(u(x) , y) = \phi(x , u(y)).$$

⁂ Un endomorphisme orthogonal est toujours bijectif. L'ensemble des rotations est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E, appelé le **groupe orthogonal** de E.

Définition

Soit E un espace vectoriel réel, et q une forme quadratique sur E.
Si $q(x) \geq 0$, pour tout x de E, on dit que q (ou sa forme polaire) est **positive**.

⁂ Sur R^n, la forme quadratique canonique est non dégénérée et positive.

⁂ Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée positive sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Il existe une base orthonormale pour ϕ.

⁂ Dans une base orthonormale de E, la matrice M d'un endomorphisme orthogonal vérifie :

$$^{t}M.M = I.$$

On appelle une telle matrice (dont la transposée est égale à l'inverse) une **matrice orthogonale**.

⁂ La matrice A d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormale est une matrice symétrique, c'est-à-dire vérifie :

$$^{t}A = A.$$

Proposition

Soit (E, q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique positive.
Soit ϕ la forme polaire de q. L'inégalité suivante est vérifiée pour tout x et tout y de E :

$$\phi(x, y)^2 \leq q(x)q(y).$$

De plus si $\phi(x, y)^2 = q(x)q(y)$, les vecteurs x et y sont liés.

⁂ Il s'agit de l'**inégalité de Schwarz**.

⁂ Si q est positive il est équivalent de dire qu'elle n'a pas de vecteur isotrope ou qu'elle est non dégénérée.

1-2 Espaces vectoriels euclidiens

Définition

On appelle **espace vectoriel euclidien** un couple (E, q) formé d'un espace vectoriel de dimension finie, E, et d'une forme quadratique non dégénérée positive q.

⁂ Si E n'est pas nécessairement de dimension finie, on l'appellera **espace vectoriel préhilbertien réel**.

⁂ Le nombre $\|x\| = \sqrt{q(x)}$ s'appelle la **norme** du vecteur x.

⁂ Un espace euclidien a une **base orthonormale**.

Sauf mention expresse du contraire, DANS UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN, ON CHOISIT TOUJOURS UNE BASE ORTHONORMEE.

⁂ Le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt** permet de calculer une base orthonormale à partir d'une base donnée d'un espace vectoriel euclidien.

⁂ La matrice de q dans une base orthonormée est la matrice identité.

⁂ Dans un espace euclidien, on appelle souvent **produit scalaire**, la forme polaire associée à q.

Une notation usuelle pour cette forme polaire est :

$$<x, y>.$$

⁂ Si E = R^n, et q est la forme quadratique canonique, la base canonique est orthonormée.

⁂ Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou –1.

⁂ Les valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale valent 1 ou –1.

⁂ Une matrice d'ordre n est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de R^n.

⁂ Si le déterminant vaut 1, on dit que cette base orthonormée est directe (sous-entendu : par rapport à la base canonique).

Proposition

Soit S une matrice symétrique d'ordre n.

1) Les valeurs propres de S sont réelles.

2) Des vecteurs propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3) Il existe une base orthonormée de R^n dans laquelle S est diagonale.

⁂ Autrement dit, il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$^{t}P\ S\ P \text{ est diagonale.}$$

⁂ Toute forme quadratique q peut s'écrire de la manière suivante, après un changement de base orthonormale :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1(x_1)^2 + \dots + \lambda_n(x_n)^2,$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de la matrice de q.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, on note souvent son orthogonal $F^{\perp}$

On appelle **projection orthogonale** sur F l'application qui associe à tout vecteur de E sa composante sur F dans la décomposition en somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$.

⁂ Soit x dans E, et p_F la projection orthogonale sur F.

Alors $p_F(x) \in F$, et pour tout z de F :

$$\langle z, x - p_F(x)\rangle = 0.$$

⁂ On a l'égalité :

$$\langle p_F(x), x\rangle = \|p_F(x)\|^2.$$

⁂ Le vecteur $p_F(x)$ est le vecteur de F "le plus proche" de x : si z est un vecteur de F, on a l'inégalité :

$$\|x - z\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

⁂ Comme toutes les projections, p_F vérifie $p_F \circ p_F = p_F$.

1-3 Géométrie euclidienne

Dans cette partie, E est l'espace euclidien R^2, ou R^3, muni du produit scalaire canonique. La matrice de passage d'une base orthonormée B à une autre B' est une matrice orthogonale, de déterminant 1 ou –1.

Définition

On dit que les bases B et B' ont la **même orientation** si la matrice de passage a pour déterminant 1. Choisir une orientation, c'est choisir une base. Les bases ayant la même orientation que la base choisie sont alors dites **directes**, et les autres **indirectes**.

⁂ Si F est un plan de R^3, ou une droite de R^2, on peut orienter F à partir d'une orientation de E, en choisissant un vecteur unitaire orthogonal à F.

Définition

Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle **produit mixte** de (u, v, w) le nombre [u, v, w] égal au déterminant des trois vecteurs dans une base orthonormée directe de E.

Proposition

Les vecteurs sont liés si et seulement si leur produit mixte est nul.

⁂ Les vecteurs forment une base directe si et seulement si leur produit mixte est strictement positif.

⁂ Le produit mixte est linéaire par rapport à chaque vecteur.

Définition

Soient u et v des vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle **produit vectoriel** de u et v le vecteur w qui vérifie, pour tout vecteur x :

$$[u, v, x] = \langle w , x \rangle.$$

⁂ L'existence de w résulte de la linéarité du produit mixte par rapport à x.

⁂ Le produit vectoriel est généralement noté :

$$u \wedge v.$$

⁂ Les propriétés suivantes sont à connaître pour les calculs :

$$u \wedge v = -v \wedge u,$$

$$< u \wedge v, w > \;=\; < v \wedge w, u > \;=\; < w \wedge u, v >,$$

$u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont liés,

$u \wedge v$ est orthogonal à u et v.

⁂ La norme du produit vectoriel est donnée par l'égalité :

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2 - < u, v >^2 .$$

⁂ Les coordonnées du produit vectoriel se calculent à partir de coordonnées de u et v dans une base orthonormée par :

$$u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3),$$

$$u \wedge v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

⁂ Le produit vectoriel n'est pas associatif :

$$(u \wedge v) \wedge w = < u, w > v - < v, w > u,$$

$$u \wedge (v \wedge w) = < u, w > v - < u, v > w.$$

Matrices orthogonales en dimension 2

⁂ Il y a deux types de matrices orthogonales.

Celles de déterminant 1 sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

et celles de déterminant –1 sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

⁂ Dans la représentation usuelle du plan (plan affine euclidien), les premières représentent des rotations d'angle t autour de l'origine, les secondes des réflexions par rapport à l'axe d'angle t/2 avec l'axe des abscisses.

⁂ Toute rotation est un produit de réflexions.

Matrices orthogonales en dimension 3

⁂ Si une matrice orthogonale a un sous-espace invariant de dimension 2, alors c'est la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à ce plan invariant. Cette matrice est diagonalisable sur R, et semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est –1.

⁂ Si une matrice orthogonale a un sous-espace invariant de dimension 1, alors c'est une rotation autour de cette droite.

Soit w un vecteur non nul invariant, et u, v des vecteurs tels que (u, v, w) soit une base orthonormée directe, alors dans la base (u, v, w) la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le paramètre t, défini modulo 2π, est l'**angle de la rotation** orientée.

Son déterminant est 1, et sa trace 1 + 2cos(t).

⁂ Si une matrice orthogonale n'a pas de vecteur invariant non nul, alors elle est le produit d'une matrice de réflexion et d'une matrice de rotation.

Son déterminant est –1.

Trièdres

⁂ On appelle **trièdre** (dans R^3) la figure formée par trois demi-droites de même origine, non coplanaires (notées ici Ox, Oy, Oz). Ces demi-droites sont les **arêtes** du trièdre. Un trièdre est donc défini par la donnée de trois vecteurs indépendants. Si le produit mixte de ces vecteurs est positif, on dira que le trièdre est direct.

⁂ Dans un trièdre, on appelle **faces** les angles (compris entre 0 et π) de deux des arêtes. Il y a trois faces.

⁂ On appelle **angle dièdre** d'arête Ox (resp. Oy, Oz) le couple formé des demi-plans limités par la droite portant Ox, et définis par les couples de demi-droites (Ox, Oy) et (Ox, Oz). On mesure un angle dièdre en coupant par un plan perpendiculaire à l'arête, et en mesurant l'angle des demi-droites ainsi obtenues par intersection.

Proposition

1) Dans un trièdre, chaque face est inférieure à la somme des deux autres.

2) Dans un trièdre, chaque face est supérieure ou égale à la valeur absolue de la différence des deux autres.

3) La somme des faces d'un trièdre est inférieure ou égale à 2π.

⁂ Le point 2) est une conséquence du 1) de manière formelle.

Définition

Soit un trièdre direct défini par les vecteurs u, v, w.

On appelle **trièdre supplémentaire** de ce trièdre, le trièdre défini par :

$$u' = v \wedge w,$$

$$v' = w \wedge u,$$

$$w' = u \wedge v.$$

⁂ On peut aussi dire que le trièdre supplémentaire du trièdre Oxyz est le trièdre Ox'y'z' défini de la manière suivante :

Ox' est perpendiculaire au plan Oyz, du même côté que Ox,

et de même pour les autres arêtes.

Proposition

La somme de la mesure du dièdre d'arête Ox' dans Ox'y'z' et de la mesure de la face (Oy, Oz) dans Oxyz vaut π.

Corollaire

Dans un trièdre Oxyz, notons a (resp. b, c) la mesure du dièdre d'arête Ox (resp. Oy, Oz). On a les relations suivantes :

$$b + c < a + \pi$$

$$c + a < b + \pi$$

$$a + b < c + \pi$$

$$a + b + c > \pi.$$

⁂ Les énoncés sur les trièdres n'étant pas classiquement intégrés dans le cours de licence, on en verra des démonstrations sous forme d'exercices.

2 Pour Voir

Dans cette partie, on présente des exemples simples des notions ou résultats abordés dans la partie précédente. Ils sont suivis de questions très élémentaires pour vérifier votre compréhension.

2-1 Formes bilinéaires, formes quadratiques.

"Soient E un espace vectoriel réel, et ϕ une application de $E \times E$ dans R. On dit que ϕ est une **forme bilinéaire** si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

⁂ Pour tout x de E, l'application $y \to \phi(x , y)$ est une application linéaire de E dans R.⁂ Pour tout y de E, l'application $x\to \phi(x , y)$ est une application linéaire de E dans R."

exemple 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies et dérivables sur [0 , 2]. On pose :

$$\phi(f , g) = f(2)g(0) + f'(1)g'(1).$$

Cette application est une forme bilinéaire sur E. On vérifie en effet :

$$\begin{aligned}\phi(u + v, w) &= (u(2) + v(2))w(0) + (u'(1) + v'(1))w'(1)\\ &= u(2)w(0) + u'(1)w'(1) + v(2)w(0) + v'(1)w'(1)\\ &= \phi(u, w) + \phi(v, w).\end{aligned}$$

Un calcul analogue donne $\phi(u, v + w) = \phi(u, v) + \phi(u, w)$. De même :

$$\phi(\alpha u, v) = (\alpha u)(2)v(0) + (\alpha u)'(1)v'(1) = \alpha(u(2)v(0) + u'(1)v'(1)).$$

exemple 2

(à traiter)

Sur le même espace vectoriel, l'application δ :

$$\delta(u, v) = u(0)(1 + v(0)) + u(1)v(1)$$

est-elle bilinéaire ?

réponse

Non, bien sûr, elle est linéaire par rapport à u, mais pas par rapport à v, par exemple parce que $\delta(u, 0) = u(0)$ n'est pas toujours égal à 0.

"Si pour tout x et tout y de E, $\phi(x , y) = \phi(y , x)$, on dit que ϕ est une **forme bilinéaire symétrique** sur E. Si, dans les mêmes conditions, on a $\phi(x , y) = -\phi(y , x)$, on dit que ϕ est **antisymétrique**."

exemple 3

Une forme bilinéaire n'est pas nécessairement symétrique ou antisymétrique. La forme de l'exemple 1 n'est pas symétrique :

$$\phi(f , g) = f(2)g(0) + f'(1)g'(1),$$
$$\phi(g , f) = g(2)f(0) + g'(1)f'(1),$$

et, en général, $f(2)g(0) \neq g(2)f(0)$; elle n'est pas non plus antisymétrique puisque, en général :

$$f(2)g(0) + f'(1)g'(1) + g(2)f(0) + g'(1)f'(1) \neq 0.$$

exemple 4

(exercice à traiter)

Sur l'espace vectoriel R^2, la forme bilinéaire suivante est-elle symétrique, antisymétrique :

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 - y_1)(x_2 + y_2).$$

réponse

Il faut comparer $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ et $\phi((y_1, y_2), (x_1, x_2))$:

$$(x_1 - y_1)(x_2 + y_2) - (y_1 - x_1)(y_2 + x_2) = 2(x_1 - y_1)(x_2 + y_2),$$
$$(x_1 - y_1)(x_2 + y_2) + (y_1 - x_1)(y_2 + x_2) = 0,$$

donc la forme est antisymétrique.

"Soit E un espace vectoriel de dimension n, et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. Soit B une base de E, B = $(e_1, \ldots, e_n)$. On appelle **matrice associée à ϕ** la matrice symétrique A telle que : $a_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$."

exemple 5

Écrivons, dans la base canonique, la matrice associée à la forme bilinéaire :

$$f((a, b, c), (u, v, w)) = au + bv + cw + 6cu - 4cv + 6aw - 4bw.$$

On calcule $f(e_i, e_j)$, i = 1, 2, 3 et j = 1, 2, 3 :

$$f(e_1, e_1) = 1,\ f(e_1, e_2) = 0,\ f(e_1, e_3) = 6,\ f(e_2, e_1) = 0,$$
$$f(e_3, e_1) = 6,\ f(e_2, e_2) = 1,\ f(e_2, e_3) = -4,\ f(e_3, e_2) = -4,\ f(e_3, e_3) = 1.$$

La matrice est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquer comment on pouvait repérer ces coefficients dans l'expression de la forme bilinéaire. Une notation plus commode pour cela est :

$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 6x_3y_1 - 4x_3y_2 + 6x_1y_3 - 4x_2y_3.$$

exemple 6

(exercice à traiter)

Sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, on définit une forme bilinéaire par :

$$b(P, Q) = P'(1)Q'(1) + P''(0)Q(0) + P(0)Q''(0).$$

Vérifier qu'elle est symétrique et donner sa matrice dans la base canonique.

réponse

La forme est clairement symétrique. La méthode pour remplir la matrice est la même. La base canonique est formée des polynômes 1, x, x^2.

$$b(1, 1) = 0,\ b(1, x) = 0,\ b(1, x^2) = 2$$
$$b(x, x) = 1,\ b(x, x^2) = 2,\ b(x^2, x^2) = 4.$$

La matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

"Soient x et y des vecteurs de E, et X et Y les matrices-colonnes représentant x et y dans la base B. On a l'égalité : ${}^t XAY = \phi(x, y)$."

exemple 7

Dans l'exemple précédent, on déduit b(a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2c' \\ b' + 2c' \\ 2a' + 2b' + 4c' \end{pmatrix}$$
$$= 2ac' + bb' + 2cc' + 2a'c + 2b'c + 4cc'.$$

exemple 8
(exercice à traiter)

Écrire l'expression de la forme bilinéaire symétrique b sur R^3, dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

réponse

Le calcul donne l'expression :

$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$

$$x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 - x_1y_3 + x_2y_3.$$

"Soit B' une autre base de E, et P la matrice de passage de B à B'. La matrice de ϕ dans la base B' est : $A' = {}^tPAP$."

exemple 9

Rapportons R^3 à la base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

Pour la forme b de l'exemple 8, le calcul direct donne :

$$b(v_1, v_1) = 3,\ b(v_1, v_2) = -1,\ b(v_1, v_3) = 0,$$
$$b(v_2, v_2) = 3,\ b(v_2, v_3) = -2,\ b(v_3, v_3) = -1.$$

La matrice s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est égale à sa transposée (ce n'est pas toujours le cas, bien entendu). Le produit PAP donne :

$$PAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

exemple 10

(exercice à traiter)

Reprendre l'exemple 6. Rapporter l'espace à la base 1, x – 1, $(x-1)^2$, et donner l'expression de la forme bilinéaire en fonction des coefficients exprimant les polynômes dans cette base.

---

réponse

La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base, la matrice de la forme bilinéaire est donc :

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. $$

On en déduit l'expression analytique, si on note u_1, u_2, u_3 les composantes d'un polynôme U dans la nouvelle base :

$$ b(P, Q) = 2p_1q_3 + p_2q_2 - 2p_2q_3 + 2p_3q_1 - 2p_3q_2 + 4p_3q_3. $$

"Soit f une application linéaire de E dans R (on dit que f est une **forme linéaire** sur E). L'application ϕ définie par $\phi(x , y) = f(x)f(y)$ est une forme bilinéaire symétrique."

exemple 11

Mais, en général, une forme bilinéaire symétrique n'est pas de ce type.

Il suffit de vérifier par exemple que $\phi(x , x)$ n'est pas positif ou nul.

Revoir l'exemple 8 : $b((0, 0, 1), (0, 0, 1)) = -1$.

exemple 12

(exercice à traiter)

La matrice d'une forme linéaire est une matrice ligne. Comment s'écrit la matrice de ϕ en fonction de la matrice de f ? On pourra prendre un cas particulier (dimension 3).

réponse

La matrice de f dans une base choisie est $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. On peut donc écrire :

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

On déduit donc :

$$\begin{aligned} \phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= (ax_1 + bx_2 + cx_3)(ay_1 + by_2 + cy_3) \\ &= ab(x_1y_2 + x_2y_1) + ac(x_1y_3 + x_3y_1) + bc(x_3y_2 + x_2y_3) + \\ &\qquad a^2x_1y_1 + b^2x_2y_2 + c^2x_3y_3. \end{aligned}$$

La matrice est donc :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que cette matrice est le produit de ${}^tL$ avec L.

"Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. On appelle forme quadratique associée à ϕ l'application q : E$\rightarrow$ R, x $\rightarrow$ ϕ(x , x)."

exemple 13

Revenir à l'exemple 6 :

$$b(P, Q) = P'(1)Q'(1) + P''(0)Q(0) + P(0)Q''(0).$$

La forme quadratique associée est donnée par :

$$q(P) = P'(1)^2 + 2P(0)P''(0).$$

exemple 14

(exercice à traiter)

Écrire l'expression analytique de la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique de l'exemple 8.

réponse

La forme bilinéaire s'écrit :

$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$

$$x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 - x_1y_3 + x_2y_3.$$

D'où :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

"Connaissant q, on peut calculer ϕ de la manière suivante $2\phi(x , y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$."

exemple 15

Vérifions, par cette formule, si la forme suivante est bien une forme quadratique sur R^2 :

$$q((a, b)) = a^2 + b^2 + 4ab + 1.$$

On obtient :

$q((a, b) + (a', b')) = (a + a')^2 + (b + b')^2 + 4(a + a')(b + b') + 1$

$= a^2 + b^2 + 4ab + 1 + a'^2 + b'^2 + 4a'b' + 1 + 2aa' + 2bb' + 4ab' + 4a'b.$

Donc :

$$\phi((a, b), (a', b')) = 1 + 2aa' + 2bb' + 4ab' + 4a'b.$$

Cette expression est bien symétrique, mais elle n'est pas bilinéaire.

exemple 16

(exercice à traiter)

Déterminer la forme polaire de la forme suivante :

$$q((x_1, x_2)) = 6x_1x_2 - x_1^2.$$

Vérifier qu'on obtient le même résultat par la formule :

$$\frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}.$$

réponse

On écrit :

$q((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) - q((x_1, x_2)) - q((y_1, y_2))$

$$= 6(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)^2 - (6x_1x_2 - x_1^2) - (6x_1x_2 - x_1^2)$$
$$= 6(x_1y_2 + y_1x_2) - 2x_1y_1.$$

Par l'autre formule, on obtient bien le double de l'expression précédente :

$$q((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) - q((x_1, x_2) - (y_1, y_2)) = 12(x_1y_2 + y_1x_2) - 4x_1y_1.$$

"Soit (x , y) un élément de E ∞ E, on dit que x et y sont **orthogonaux** si $\phi(x , y) = 0$."

exemple 17

La forme bilinéaire de l'exemple 16 est donnée par :

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3(x_1y_2 + y_1x_2) - x_1y_1.$$

Cherchons deux vecteurs orthogonaux :

$$3(x_1y_2 + y_1x_2) - x_1y_1 = 0.$$

On voit que cette égalité est vérifiée par (0, 1) et (0, 2), ou par (1, 1) et (3, –2) …

exemple 18

(exercice à traiter)

Chercher deux polynômes non nuls orthogonaux pour la forme de l'exemple 6.

réponse

Rappelons cette forme :

$$b(P, Q) = P'(1)Q'(1) + P''(0)Q(0) + P(0)Q''(0).$$

On peut, par exemple, choisir Q tel que Q'(1) = 0, et P tel que P(0) = 0 et P''(0) = 0. Il suffit de prendre $Q(x) = (x - 1)^2$, $P(x) = x$.

"L'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur d'une partie F de E est un sous-espace vectoriel, l'**orthogonal de F**."

exemple 19

Cherchons, dans l'exemple précédent, l'orthogonal de l'ensemble des polynômes P tels que P(0) = 0. Ces polynômes sont donc de la forme :

$$bx + cx^2,$$

donc l'ensemble des polynômes P est le sous-espace vectoriel engendré par x et x^2. L'orthogonal cherché est formé des polynômes Q orthogonaux à x et x^2. Ils vérifient donc :

$$b(x, Q) = Q'(1) = 0$$

$$b(x^2, Q) = 2Q'(1) + 2Q(0) = 0.$$

L'ensemble cherché est formé des polynômes vérifiant Q(0) = Q'(1) = 0.

Ce sont les polynômes de la forme $bx + cx^2$, avec $b + 2c = 0$, donc :

$$Q(x) = c(-2x + x^2).$$

exemple 20

(exercice à traiter)

Avec la forme bilinéaire de l'exemple 16, chercher l'orthogonal de la droite d'équation $2x_1 + 3x_2 = 0$.

réponse

Rappelons la forme utilisée :

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3(x_1y_2 + y_1x_2) - x_1y_1.$$

La droite considérée est le sous-espace vectoriel engendré par (3, –2).

Il suffit de chercher tous les vecteurs orthogonaux à ce vecteur particulier.

Ils vérifient :

$$\phi((3, -2), (y_1, y_2)) = 3(3y_2 - 2y_1) - 3y_1 = 0,$$

c'est donc la droite d'équation :

$$y_2 - y_1 = 0.$$

"Soit E un espace vectoriel et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. Une base de E est dite **orthogonale** (pour ϕ) si deux vecteurs distincts quelconques de cette base sont orthogonaux. Une base est **orthonormale**, si elle est orthogonale et si de plus pour tout vecteur x de la base, $\phi(x , x) = 1$."

exemple 21

Pour la forme précédente, les vecteurs $V_1 = (3, -2)$ et $V_2 = (1, 1)$ forment une base orthogonale. De plus :

$$q((3, -2)) = 3(-6-6) - 9 = -45$$

$$q((1, 1)) = 6 - 1 = 5.$$

Cette base n'est pas orthonormale.

exemple 22

(exercice à traiter)

Chercher s'il existe une base orthonormale pour la forme :

$$\phi((a, b), (a', b')) = ab' + a'b + aa' + bb'.$$

réponse

Les vecteurs pour lesquels on a :

$$\phi((a, b), (a, b)) = 1,$$

vérifient :

$$(a + b)^2 = 1.$$

On a donc pour deux de ces vecteurs :

$$\phi((a, b), (a', b')) = (a + b)(a' + b') = \pm 1.$$

En particulier ces vecteurs ne peuvent être orthogonaux.

Il n'existe donc pas de base orthonormale pour cette forme bilinéaire symétrique.

"Le couple (r, s) est indépendant du choix de la base orthogonale (**loi d'inertie**). On appelle ce couple la **signature** de la forme quadratique (ou de la forme bilinéaire)."

exemple 23

La forme quadratique suivante :

$$q((x_1, x_2)) = -x_2^2 + 6x_1x_2 - x_1^2$$

peut s'écrire de plusieurs manières comme combinaison de carrés indépendants. Ainsi :

$$6x_1x_2 - x_1^2 = -(x_1 - 3x_2)^2 + 8x_2^2,$$

$$6x_1x_2 - x_1^2 = -2(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

La signature est (1, 1) : un "carré positif", un "carré négatif".

exemple 24

(exercice à traiter)

On observe pour la forme quadratique de l'exemple 16 deux décompositions :

$$6x_1x_2 - x_1^2 = -(x_1 - 3x_2)^2 + 9x_2^2,$$

$$6x_1x_2 - x_1^2 = -(2x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2.$$

Est-ce une contradiction avec la loi d'inertie ?

réponse

Non, bien sûr. Les trois formes linéaires des carrés de la seconde décomposition ne sont pas indépendantes :

$$(2x_1 - x_2) + (x_1 + x_2) = 3(x_1).$$

"Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. On appelle **noyau de ϕ** le sous-espace vectoriel orthogonal de E : $Ker(\phi) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \phi(x, y) = 0\}$."

exemple 25

Dans le cas de l'exemple 16, cherchons le noyau :

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3(x_1y_2 + y_1x_2) - x_1y_1 = 0.$$

Il suffit, en raison de la linéarité, d'écrire que cette égalité est vraie pour une base de l'espace vectoriel :

$$\phi((x_1, x_2), (1, 0)) = 3x_2 - x_1 = 0$$

$$\phi((x_1, x_2), (0, 1)) = 3x_1 = 0$$

donc le noyau est formé du seul vecteur (0, 0).

---

exemple 26

(exercice à traiter)

Chercher le noyau de la forme bilinéaire de l'exemple 6.

---

réponse

Rappelons l'expression de cette forme :

$$b(P, Q) = P'(1)Q'(1) + P''(0)Q(0) + P(0)Q''(0).$$

On procède comme dans l'exemple précédent : pour qu'un polynôme P soit orthogonal à tout polynôme, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal aux polynômes d'une base. On écrit donc :

$$b(P, 1) = P''(0) = 0$$

$$b(P, X) = P'(1) = 0$$

$$b(P, X^2) = 2P'(1) + 2P(0) = 0.$$

On obtient donc les conditions suivantes sur P :

$$P(0) = P'(1) = P''(0) = 0.$$

C'est donc un polynôme de la forme $bX + cX^2$ ($P(0) = 0$), avec :

$$b + 2c = 0,$$

$$2c = 0.$$

Donc P est le polynôme 0, on trouve donc Ker(b) = {0}.

"Si Ker(ϕ) = {0}, on dit que ϕ est **non dégénérée**."

---

exemple 27

Dans les deux exemples précédents, la forme bilinéaire est non dégénérée.

exemple 28
(exercice à traiter)

Examiner si la forme de l'exemple 22 est non dégénérée.

réponse

Cette forme s'écrit :

$$\phi((a, b), (a', b')) = ab' + a'b + aa' + bb'.$$

On observe que :

$$\phi((a, b), (a', b')) = (a + b)(a' + b').$$

On voit donc qu'un vecteur pour lequel $a + b = 0$ est orthogonal à tout vecteur de R^2. La forme est donc dégénérée.

"On dit qu'un élément de E est **isotrope** relativement à ϕ (ou à q) si on a $q(x) = 0$."

exemple 29

Ci-dessus, les vecteurs (a, b) avec $a + b = 0$ sont isotropes.

exemple 30
(exercice à traiter)

Quels sont les vecteurs isotropes de la forme quadratique de l'exemple 23 ?

réponse

La forme est la suivante :

$$q((x_1, x_2)) = - x_2^2 + 6x_1x_2 - x_1^2$$

On l'a écrite comme combinaison de carrés :

$$6x_1x_2 - x_1^2 = - (x_1 - 3x_2)^2 + 8x_2^2,$$

donc un vecteur isotrope vérifie :

$$(x_1 - 3x_2)^2 = 8x_2^2,$$

d'où les équations de deux droites :

$$x_1 - 3x_2 = 2\sqrt{2}x_2$$

$$x_1 - 3x_2 = -2\sqrt{2}x_2.$$

$$x_1 - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)x_2 = 0$$

$$x_1 - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x_2 = 0.$$

On obtient bien un cône de dimension 2.

"Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et ϕ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, si ϕ est non dégénérée sur F, alors le sous-espace orthogonal de F est un supplémentaire de F."

exemple 31

Voir l'exemple 20. Pour la forme considérée, l'orthogonal de la droite d'équation :

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

est la droite d'équation :

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Ce sont bien des sous-espaces supplémentaires de R^2.

exemple 32

(exercice à traiter)

Dans le cas de l'exemple 19, l'orthogonal de l'ensemble des polynômes :

$$bx + cx^2,$$

est le sous-espace des polynômes :

$$Q(x) = a(-2x + x^2).$$

Est-ce contradictoire avec ce théorème ?

\# réponse

Rappelons la forme :

$$b(P, Q) = P'(1)Q'(1) + P''(0)Q(0) + P(0)Q''(0).$$

Sa restriction au sous-espace des polynômes vérifiant P(0) = 0 n'est pas non dégénérée puisque un polynôme de cet espace ($-2x + x^2$) est orthogonal à tous les autres. Le théorème ne s'applique donc pas.

"On dit que u est un endomorphisme **orthogonal** (pour ϕ) si pour tout x et tout y de E, on a $\phi(u(x), u(y)) = \phi(x, y)$."

exemple 33

Pour la forme bilinéaire :

$$\phi((a, b), (a', b')) = ab' + a'b + aa' + bb',$$

tout endomorphisme de R^2 qui laisse invariante la somme des composantes d'un vecteur est un endomorphisme orthogonal, par exemple :

$$u((a, b)) = (a - 2b, 3b)$$

exemple 34

(exercice à traiter)

Chercher un endomorphisme u orthogonal pour la forme de l'exemple 16.

réponse

La forme quadratique était :

$$q((x_1, x_2)) = 6x_1x_2 - x_1^2.$$

Il faut et il suffit qu'elle soit invariante par la transformation u puisque la forme bilinéaire se calcule à l'aide de q, et réciproquement.

Cherchons un endomorphisme de la forme :

$$u((x_1, x_2)) = (ax_1, bx_2 + cx_1).$$

Il suffit que a, b, c vérifient :

$$ab = 1, 6ac - a^2 = -1.$$

Par exemple, on pourra prendre :

$$a = 2, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}.$$

Soit E un espace vectoriel réel, et q une forme quadratique sur E. Si $q(x) \geq 0$, pour tout x de E, on dit que q (ou sa forme polaire) est **positive**.

exemple 35

La forme quadratique précédente n'est pas positive $q((1, -1)) = -7$. Elle n'est pas non plus négative : $q((1, 1)) = 5$.

exemple 36

(exercice à traiter)

En vous inspirant de l'exemple 23, voir si la forme quadratique :

$$q((x_1, x_2)) = -x_2^2 + x_1x_2 - x_1^2$$

est positive ou négative.

\# réponse

L'exemple 23 suggère d'écrire q comme combinaison de carrés :

$$-x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = -\left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{3x_2^2}{4}.$$

On voit donc que cette forme est toujours négative ou nulle.

"Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée positive sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Il existe une base orthonormale pour ϕ."

exemple 37

Sur R^2, la forme bilinéaire suivante est symétrique, non dégénérée et positive :

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2(x_1y_2 + x_2y_1) + x_1y_1 + 6x_2y_2.$$

En effet la forme quadratique associée est :

$$q((x_1, x_2)) = 4x_1x_2 + x_1^2 + 6x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2,$$

elle est donc positive, et un vecteur isotrope vérifie :

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

c'est donc le vecteur nul.

Le vecteur (1, 0) est de norme 1. Cherchons un vecteur orthogonal :

$$\phi((1, 0), (y_1, y_2)) = 2y_2 + y_1 = 0,$$

donc les vecteurs de la forme (– 2a, a) sont orthogonaux au premier. Cherchons parmi eux un vecteur de norme 1 :

$$q((-2a, a)) = 2a^2 = 1,$$

soit par exemple $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

---

exemple 38

(exercice à traiter)

Donner une autre base orthonormale de R^2 pour la forme quadratique précédente (ne contenant pas de vecteur colinéaire à (1, 0)).

\# réponse

On peut procéder de manière analogue :

$$q((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2 = 1,$$

est vérifié par un vecteur (0, a), pourvu que $6a^2 = 1$, soit par exemple :

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

L'orthogonal de la droite engendrée par ce vecteur est donné par :

$$\phi((0, 1), (y_1, y_2)) = 2y_1 + 6y_2 = 0,$$

c'est donc la droite des vecteurs de la forme (– 3b, b).

La norme d'un tel vecteur est :

$$q((-3b, b)) = (-3b + 2b)^2 + 2b^2 = 3b^2,$$

elle vaut donc 1 pour $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$, par exemple, d'où une autre base orthonormale.

2-2 Espaces vectoriels euclidiens

"On appelle **espace vectoriel euclidien** un couple (E, q) formé d'un espace vectoriel de dimension finie, E, et d'une forme quadratique non dégénérée positive q."

exemple 39

La forme quadratique de l'exemple 37 est non dégénérée et positive, donc elle fait de R^2 un espace euclidien.

exemple 40

(exercice à traiter)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus 2, et q la forme quadratique définie par :

$$q(P) = \int_{-1}^{1} P(x)^2\, dx.$$

Vérifier qu'elle fait de E un espace euclidien.

réponse

Il faut s'assurer que q est positive, et n'a pas de vecteur isotrope.

Or cela résulte des propriétés de l'intégrale : l'intégrale d'une fonction positive est positive, et si l'intégrale d'une fonction continue positive ou nulle est nulle, alors la fonction est nulle.

"Un espace euclidien a une **base orthonormale**."

exemple 41

On a déjà trouvé une base orthonormale dans le cas de l'exemple 37.

exemple 42
(exercice à traiter)

Chercher a et b pour que la base suivante soit une base orthogonale pour l'espace euclidien de l'exemple 40, puis déduire une base orthonormale :

$$1,\ x,\ a + bx^2.$$

réponse

Calculons les produits scalaires :

$$< 1, x >= \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

$$< x, a + bx^2 >= \int_{-1}^{1} \left(ax + bx^3\right) dx = 0$$

$$< 1, a + bx^2 >= \int_{-1}^{1} \left(a + bx^2\right) dx = 2a + \frac{2b}{3}.$$

Le troisième produit scalaire est nul par exemple si a = –1, b = 3.
La base suivante est donc orthogonale :

$$1,\ x,\ -1 + 3x^2$$

il suffit de calculer la norme de chacun.
Les calculs sont les suivants :

$$< 1, 1 >= \int_{-1}^{1} 1 dx = 2$$

$$< x, x >= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$< -1 + 3x^2, -1 + 3x^2 >= \int_{-1}^{1} \left(-1 + 3x^2\right)^2 dx = \frac{8}{5}.$$

On obtient, par division, une base orthonormale :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x, \left(-1 + 3x^2\right)\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right).$$

"Le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt** permet de calculer une base orthonormale à partir d'une base donnée d'un espace vectoriel euclidien."

exemple 43

Dans le cas précédent, ce procédé conduit à la même base.

exemple 44

(exercice à traiter)

Reprendre l'exemple 37, et appliquer ce procédé à la base canonique :

$$(1, 0), (0, 1).$$

réponse

Le vecteur (1, 0) est de norme 1. On cherche un second vecteur de la forme $\lambda(1, 0) + (0, 1)$, orthogonal à (1, 0) :

$$\phi((1, 0), (\lambda, 1)) = 2 \infty 1 + \lambda = 0$$

$$\lambda = -2.$$

Le vecteur (–2, 1) est de norme :

$$q((-2, 1)) = -8 + 4 + 6 = 2,$$

et une base orthonormale est donc :

$$(1,0),\left(-\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

C'est d'ailleurs la base trouvée précédemment.

"Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou –1."

exemple 45

La matrice suivante est orthogonale :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est 1.

exemple 46

(exercice à traiter)

Chercher k pour que la matrice A soit orthogonale, et calculer son déterminant :

$$A = k\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

réponse

Quelle que soit la valeur de k, les vecteurs-colonnes sont orthogonaux deux à deux. Le calcul des carrés des normes donne pour les trois vecteurs-colonnes le résultat suivant :

$$k^2(1+2+2\sqrt{2}+2+1+2-2\sqrt{2}) = 8k^2$$

$$k^2(2+4+2) = 8k^2$$

$$k^2(1+2-2\sqrt{2}+2+1+2+2\sqrt{2}) = 8k^2$$

Ces vecteurs sont donc unitaires pour seulement deux valeurs de k :

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}}, k = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

Calcul du déterminant : on obtient bien 1 ou –1 selon le signe de k.

"Les valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale valent 1 ou –1."

exemple 47

Le polynôme caractéristique de la matrice précédente, pour $k = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, est :

$$t^3 - \left(\sqrt{2}+1\right)t^2 + \left(\sqrt{2}+1\right)t - 1.$$

La racine t = 1 est évidente, la factorisation par (t – 1) s'écrit :

$$(t-1)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right).$$

Le facteur du second degré n'a pas de racine réelle.

---

exemple 48

(exercice à traiter)

Chercher les valeurs propres réelles de la matrice de l'exemple 45.

---

réponse

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1-t & -t & 0 \\ 1-t & 1 & -t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)\left(t^2+t+1\right).$$

Il y a donc une seule racine réelle, qui vaut 1.

"Soit S une matrice symétrique d'ordre n. 1) Les valeurs propres de S sont réelles. 2) Des vecteurs propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. 3) Il existe une base orthonormée de R^n dans laquelle S est diagonale."

---

exemple 49

Étude des éléments propres de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 17 & -1 & 4 \\ -1 & 17 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$t^3 - 36t^2 + 324t.$$

Il a une racine évidente, t = 0, et une racine double, t = 18.

Les calculs usuels montrent que (1, 1, –4) est un vecteur propre pour la valeur propre 0, et, par exemple (4, 0, 1) un vecteur propre pour la valeur propre 18. Le produit scalaire de ces vecteurs est bien 0. Ils sont orthogonaux. Le sous-espace propre relatif à 18 est bien de dimension 2 (donc la matrice est diagonalisable), et une base est (2, 2, 1), (–1, 1, 0).

C'est une base orthogonale de ce sous-espace.

On obtient bien une base orthogonale formée de vecteurs propres :

$$(1, 1, -4), (2, 2, 1), (-1, 1, 0).$$

On peut en tirer une base orthonormale en multipliant chaque vecteur par une constante appropriée.

---

exemple 50

(exercice à traiter)

Vérifier de même sur l'exemple suivant :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

réponse

On obtient le polynôme caractéristique :

$$t^3 - t^2 - 6t,$$

qui a trois racines distinctes :

$$0, 3, -2.$$

Ces valeurs propres correspondent aux vecteurs propres suivants, respectivement :

$$(1, 1, -2), (1, 1, 1), (-1, 1, 0).$$

On vérifie bien qu'il s'agit d'une base orthogonale de R^3, qu'il suffit de normer.

"Toute forme quadratique q peut s'écrire de la manière suivante, après un changement de base orthonormale $q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1(x_1)^2 + \ldots + \lambda_n(x_n)^2$, avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de la matrice de q."

exemple 51

Dans l'exemple précédent, le changement de base obtenu donne comme matrice représentant la forme quadratique q, qui a C comme matrice dans la base canonique, la matrice diagonale de diagonale (0, 3, –2). Si X, Y, Z désignent les coordonnées dans la nouvelle base orthonormale, on a donc :

$$q((X, Y, Z)) = 3Y^2 - 2Z^2.$$

exemple 52

(exercice à traiter)

Donner l'expression de la forme quadratique dont la matrice est B, après le changement de base obtenu dans l'exemple 49.

réponse

Comme précédemment, si X, Y, Z sont les coordonnées dans cette nouvelle base orthonormale, l'expression de la forme quadratique est :

$$18Y^2 + 18Z^2.$$

"Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On appelle **projection orthogonale** sur F l'application qui associe à tout vecteur de E sa composante sur F dans la décomposition en somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$."

exemple 53

Dans R^3, muni du produit scalaire canonique, cherchons la projection orthogonale sur le plan :

$$F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

L'orthogonal de F est une droite, et le vecteur (1, 1, 1) est un vecteur de base de cette droite.

Un vecteur quelconque (a, b, c) s'écrit :

$$(a,b,c)=\frac{a+b+c}{3}(1,1,1)+\left(\frac{2a-b-c}{3},\frac{2b-a-c}{3},\frac{2c-a-b}{3}\right),$$

le premier vecteur est orthogonal à F, et le second vecteur est un vecteur du plan F.

La projection orthogonale sur F est donc donnée par :

$$(a,b,c)\mapsto\left(\frac{2a-b-c}{3},\frac{2b-a-c}{3},\frac{2c-a-b}{3}\right).$$

Sa matrice, dans la base canonique est :

$$\mathrm{Pr}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

---

exemple 54

(exercice à traiter)

Écrire la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur (1, 1, 1).

\# réponse

Par définition, cette droite étant le supplémentaire orthogonal de F, la projection est Id – Pr :

$$I-\mathrm{Pr}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

"Le vecteur $p_F(x)$ est le vecteur de F "le plus proche" de x : si z est un vecteur de F, on a l'inégalité :

$$\|x-z\|^2\geq\|x-p_F(x)\|^2."$$

exemple 55

Le vecteur x = (1, 0, 0) a pour projection dans F le vecteur :

$$p_F(x) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right).$$

Pour un vecteur z = (b + c, – b, – c) quelconque de F, on a :

$$\|x - z\|^2 = (1 - b - c)^2 + b^2 + c^2,$$

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \frac{1}{3},$$

$$\|z - p_F(x)\|^2 = \left(\frac{2}{3} - b - c\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - b\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - c\right)^2$$

et on vérifie que :

$$\|x - z\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|z - p_F(x)\|^2.$$

exemple 56

(exercice à traiter)

Trouver le point de la droite D engendrée par U = (1, 1, –1) le plus proche du point a = (1, 1, 1) (pour la norme canonique).

réponse

On cherche le projeté orthogonal sur cette droite.

Ce vecteur b vérifie :

$$\langle b , U\rangle = \langle a , U\rangle,$$

$$\text{il existe } \lambda \text{ tel que } b = \lambda U.$$

On déduit donc λ par :

$$\lambda \langle U , U\rangle = \langle a , U\rangle,$$

$$\lambda(1 + 1 + 1) = (1 + 1 - 1),$$

$$\lambda = \frac{1}{3}.$$

2-3 Géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

"On dit que les bases B et B' ont la **même orientation** si la matrice de passage a pour déterminant 1."

exemple 57

La permutation de deux vecteurs dans une base orthonormale change l'orientation de la base. En effet si la base (u, v, w) est donnée, la matrice de passage à la base (v, u, w) est évidemment :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est bien égal à –1.

exemple 58

(exercice à traiter)

Que se passe-t-il si on remplace (u, v, w) par (v, w, u) ou (w, u, v) ?

réponse

La matrice de passage de la première permutation circulaire est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est 1. Une permutation circulaire ne change pas l'orientation. Comme on passe de la seconde base à la troisième par une nouvelle permutation circulaire, l'orientation ne change toujours pas.

"Si F est un plan de R^3, ou une droite de R^2, on peut orienter F à partir d'une orientation de E, en choisissant un vecteur unitaire orthogonal à F."

exemple 59

Supposons l'orientation de R^3 fixée par la base canonique. Soit F le plan d'équation :

$$x + y + z = 0.$$

Le vecteur $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est orthogonal à F. Il définit une orientation du plan. Ainsi, la base de F suivante :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

est directe car la base formée avec $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est directe :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 1.$$

exemple 60

(exercice à traiter)

Dans R^2, choisir l'orientation de la base canonique. Orienter ensuite la droite F d'équation y + 2x = 0 en choisissant un vecteur orthogonal.

réponse

On peut choisir par exemple :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

Soit :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right),$$

une base de F. Est-elle directe ou indirecte ? On calcule le déterminant formé de la base de F suivie du vecteur orthogonal :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = 1.$$

L'orientation de F est directe pour ces choix.

Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle **produit mixte** de (u, v, w) le nombre [u, v, w] égal au déterminant des trois vecteurs dans une base orthonormée directe de E.

exemple 61

Le produit mixte de trois vecteurs formant une base orthonormée directe est donc 1. S'il s'agit de trois vecteurs orthogonaux deux à deux, mais non nécessairement de norme 1, on voit donc que la valeur absolue du produit mixte est le produit des normes des trois vecteurs, c'est-à-dire le volume du parallélépipède rectangle qu'ils définissent.

exemple 62

(exercice à traiter)

Calculer le produit mixte des deux familles de trois vecteurs suivantes, et interpréter les résultats :

$$V1 = (1,0,1), V2 = (1,0,-1), V3 = (1,1,1)$$

$$W1 = (1,0,1), W2 = (1,0,-1), W3 = (0,1,0).$$

réponse

Pour la première famille :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

et pour la seconde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Interprétation.

On voit que le vecteur V3 et le vecteur W3 diffèrent d'un vecteur du plan engendré par V1 (= W1) et V2 (= W2). Cette égalité est une conséquence directe des propriétés élémentaires des déterminants (combinaisons de colonnes). Par ailleurs, géométriquement, W3 représente la hauteur du parallélépipède relative à la face définie par W1 et W2, face qui est un rectangle. Le second produit mixte est (selon l'observation de l'exemple précédent) le volume du parallélépipède. Conclusion : dans ce cas encore, le produit mixte permet de calculer le volume d'un parallélépipède.

"Les vecteurs sont liés si et seulement si leur produit mixte est nul."

exemple 63

Les vecteurs (1, 1, –1), (2, 1, 0), (0, –1, 2) sont-ils indépendants ?

Leur produit mixte est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ils sont donc liés.

C'est une méthode déjà vue lors de l'étude des déterminants en général.

exemple 64
(exercice à traiter)

Utiliser ce résultat pour écrire l'équation du plan défini par les vecteurs :

V = (1, 1, –1), W = (2, 1, 0).

réponse

Soit X = (x, y, z) un vecteur. Il appartient au plan défini par V et W si et seulement si le produit mixte [V, W, X] est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2y + 2z - x - z) = 0.$$

D'où une équation :

2y – x + z = 0.

"Soient u et v des vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle **produit vectoriel** de u et v le vecteur w qui vérifie, pour tout vecteur x, [u, v, x] = <w , x>."

exemple 65

Ci-dessus (exemple 64), le produit vectoriel de V et W est le vecteur :

$$U = (1, -2, -1).$$

exemple 66
(exercice à traiter)

Écrire le produit vectoriel de (1, 1, 1) et (1, 2, 3).

réponse

Ses composantes sont les coefficients (cofacteurs) de x, y, et z respectivement dans le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix}.$$

On trouve donc :

$$(1, -2, 1).$$

On vérifie que ce vecteur est orthogonal aux deux autres.

"Les propriétés suivantes sont à connaître pour les calculs :

$$u \wedge v = -v \wedge u,$$

$$< u \wedge v, w > = < v \wedge w, u > = < w \wedge u, v >,$$

$u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont liés,

$u \wedge v$ est orthogonal à u et v."

exemple 67

L'égalité :

$$< u \wedge v, w > = < v \wedge w, u > = < w \wedge u, v >,$$

traduit la propriété d'invariance par permutation circulaire du produit mixte ou du déterminant.

exemple 68

(exercice à traiter)

Donner un vecteur orthogonal au plan défini par les vecteurs :

U = (1, 1, 1) et V = (1, 2, 3).

réponse

On prend le produit vectoriel de U et V (calculé dans l'exemple 66) :

$$(1, -2, 1).$$

"La norme du produit vectoriel est donnée par l'égalité : $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2 - < u,v >^2$."

exemple 69

Vérifions cette égalité sur l'exemple 68 :

$$\|u\|^2 = 3, \|v\|^2 = 14, < u,v >^2 = 36, \|u \wedge v\|^2 = 6$$

$$\|u\|^2 . \|v\|^2 - < u,v >^2 = 42 - 36 = 6.$$

exemple 70

(exercice à traiter)

Quelle est la norme du produit vectoriel de deux vecteurs orthogonaux ?

réponse

D'après la formule, c'est le produit des normes des deux vecteurs.

"Les coordonnées du produit vectoriel se calculent à partir de coordonnées de u et v dans une base orthonormée par : u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3),

$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

exemple 71

Écrivons avec cette formule le produit vectoriel de (1, 1, 1) et (1, 2, 3).

$$u \wedge v = (3 - 2, 1 - 3, 2 - 1) = (1, -2, 1).$$

C'est bien le résultat déjà trouvé. Les formules indiquées sont, bien entendu, celles qui calculent les cofacteurs de l'exemple 66.

exemple 72

(exercice à traiter)

Soit u = (1, 1, 1). Peut-on trouver v tel que :

$$u \wedge v = (1, 0, -1).$$

réponse

Il est nécessaire que le vecteur du second membre soit orthogonal à u, ce qui est bien le cas. Les coordonnées de v doivent vérifier :

$$(v_3 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_1) = (1, 0, -1).$$

On trouve donc :

$$v_1 = v_3,\ v_2 = v_3 - 1.$$

Il y a une infinité de solutions : {(0, –1, 0) + m u, m R}.

"Le produit vectoriel n'est pas associatif :

$$(u \wedge v) \wedge w = < u, w > v - < v, w > u,$$"

$$u \wedge (v \wedge w) = < u, w > v - < u, v > w.$$

exemple 73

Ainsi, on voit que, si u = v, la première formule donne 0, et :

$$u \wedge (u \wedge w) = < u, w > u - < u, u > w,$$

ce qui donne un vecteur du plan engendré par u et w, orthogonal à u.

exemple 74

(exercice à traiter)

Donner un cas où les deux doubles produits vectoriels sont égaux (sans être nuls).

réponse

La différence s'écrit :

$$\begin{aligned} &(u \wedge v) \wedge w - u \wedge (v \wedge w) \\ &= < u, w > v - < v, w > u - < u, w > v + < u, v > w \\ &= < u, v > w - < v, w > u. \end{aligned}$$

Elle s'annule dans le cas où u = w, puisque le produit scalaire est commutatif :

$$u \wedge (v \wedge u) = < u, u > v - < u, v > u.$$

Il y a deux types de matrices orthogonales 2x2. Celles de dét rminant 1 sont de la forme : $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, et celles de déterminant –1 sont de la forme : $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$.

exemple 75

La matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Son déterminant est –1. Elle est bien de la forme prévue, avec :

$$t = \frac{\pi}{3}.$$

exemple 76

(exercice à traiter)

Donner une valeur de t correspondant à la matrice de déterminant 1 obtenue à partir de la précédente en permutant les colonnes.

\# réponse

La matrice est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut prendre $t = -\dfrac{\pi}{6}$.

Toute rotation est un produit de réflexions.

exemple 77

La rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réflexion d'axe la droite engendrée par (1, 0) a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le produit de ces deux matrices est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est bien une matrice de réflexion, par rapport à la droite engendrée par le vecteur (1, 1).

exemple 78

(exercice à traiter)

Plus généralement, une rotation peut s'écrire comme produit de réflexions d'une infinité de manières : étant donnée une rotation R d'angle t, et une réflexion S, trouver une réflexion S' telle que R = S'o S.

réponse

Sachant que S o S = I, il suffit de poser S' = R o S.

Le calcul suivant permet de déterminer la réflexion S'. La droite invariante par S' fait un angle avec la droite invariante par S moitié de l'angle de rotation.

En effet :

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(t') & \sin(t') \\ \sin(t') & -\cos(t') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t') & \cos(t)\sin(t') + \sin(t)\cos(t') \\ \cos(t)\sin(t') + \sin(t)\cos(t') & -\cos(t)\cos(t') + \sin(t)\sin(t') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(t+t') & \sin(t+t') \\ \sin(t+t') & -\cos(t+t') \end{pmatrix}.$$

Si une matrice orthogonale 3x3 a un sous-espace invariant de dimension 2, alors c'est la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à ce plan invariant. Cette matrice est diagonalisable sur R, et semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est –1.

exemple 79

La matrice A est orthogonale :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)(t-1)(t+1).$$

La valeur propre 1 est de multiplicité 2. Le sous-espace propre correspondant (sous-espace invariant par A) est le plan d'équation x = y, défini par les vecteurs propres (calcul facile) :

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), V = (0,0,1).$$

Le sous-espace propre relatif à la valeur propre –1 est la droite définie par le vecteur $W = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Dans la base (U, V, W), la réflexion définie par A a pour matrice la matrice annoncée dans l'énoncé.

---

exemple 80

(exercice à traiter)

Écrire la matrice de la réflexion dont le plan invariant est le plan F d'équation x + y + z = 0.

\# réponse

Une base orthonormale de F est :

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), V = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right).$$

Le vecteur W est orthogonal à F et de norme 1 :

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Dans la base orthogonale (U, V, W), la réflexion a pour matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice dans la base canonique s'obtient par changement de base.

Le calcul donne :

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

"Si une matrice orthogonale a un sous-espace invariant de dimension 1, alors c'est une rotation autour de cette droite. Son déterminant est 1, et sa trace 1 + 2cos(t)."

exemple 83

Cherchons la matrice d'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe d'équations x = y = z.

Il y a deux possibilités selon l'orientation choisie sur l'axe.

Choisissons d'orienter l'axe par :

$$w=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Une base orthonormale directe (u, v, w) correspondant à l'énoncé est complétée par les vecteurs u, v, donnés par (Cf. exemple 80) :

$$u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), v=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right).$$

Dans la base (u, v, w), la matrice de la rotation est :

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par changement de base, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, ce résultat était prévisible géométriquement puisque la rotation permute les vecteurs de la base canonique.

---

exemple 84

(exercice à traiter)

Vérifier que la matrice suivante est une matrice de rotation, et donner son axe et son angle :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

\# réponse

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1-t & \frac{1}{2}-t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -t & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)(t^2+1).$$

Il y a donc une seule valeur propre réelle, qui est égale à 1, et sa multiplicité est 1. Le sous-espace invariant est une droite. Choisissons pour base de cette droite le vecteur :

$$w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Soit t l'angle de la rotation, il vérifie :

$$1 + 2\cos(t) = tr(M) = 1,$$
$$\cos(t) = 0.$$

Le plan orthogonal à w a pour équation x + y = 0.
Soit u un vecteur de ce plan :

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

L'image de u par la rotation est le vecteur v.
Le calcul donne :

$$M.U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit v = (0, 0, 1). L'image de v est –u.

On observe que la base (v, u, w) est orthonormale directe. La matrice de la rotation dans cette base est :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que sin(t) = –1.

L'angle de la rotation autour de l'axe (1, 1, 0) est donc $-\dfrac{\pi}{2}$.

"Si une matrice orthogonale n'a pas de vecteur invariant non nul, alors elle est le produit d'une matrice de réflexion et d'une matrice de rotation. Son déterminant est –1."

exemple 85

Étudions la transformation orthogonale T dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement qu'elle n'a pas de vecteur non nul invariant.

Comme il y a au moins une valeur propre réelle, –1 est valeur propre.

Le sous-espace propre correspondant est de dimension 1, engendré par :

$$u = \left(-1, \sqrt{3} - 2, 1\right)$$

Soit S la réflexion par rapport au plan orthogonal à ce vecteur.

Le vecteur u est invariant pour la transformation T o S. Cette transformation orthogonale a pour déterminant 1, c'est une rotation.

exemple 86
(exercice à traiter)

Examiner de la même façon la matrice de la symétrie S par rapport à l'origine :

$$-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

réponse

Soit T la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par les vecteurs :

(1, 0, 0), et (0, 1, 0).

La matrice de T est notée A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La transformation S o T a pour matrice :

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de rotation autour de l'axe (0, 0, 1), d'angle π.

On appelle **trièdre** (dans R3) la figure formée par trois demi-droites de même origine, non coplanaires.

exemple 87

On connaît bien sûr le trièdre trirectangle direct auquel on rapporte habituellement l'espace. Il correspond à la base canonique de R^3.

exemple 88

(exercice à traiter)

Soit Oxyz un trièdre, et S la sphère de centre O et de rayon 1. Soient A, B, C les points d'intersection de S avec Ox, Oy, Oz. Mettre en relation les faces du trièdre avec les côtés du triangle sphérique, ainsi que les angles dièdres avec les angles des tangentes aux sommets du triangle sphérique.

réponse

Les côtés du triangle sphérique sont des arcs de grands cercles (c'est-à-dire de cercles de rayon 1) sur S. La longueur de chaque côté est donc égale à la mesure en radian de chaque face. Les tangentes étant perpendiculaires aux rayons, elles définissent en chaque sommet un plan perpendiculaire à l'arête définie par ce sommet. L'angle des tangentes est donc égal à l'angle dièdre correspondant.

1) Dans un trièdre, chaque face est inférieure à la somme des deux autres. 2) Dans un trièdre, chaque face est supérieure ou égale à la valeur absolue de la différence des deux autres. 3) La somme des faces d'un trièdre est inférieure à 2π.

exemple 89

Les deux premières affirmations démontrent les inégalités triangulaires dans un triangle sphérique : tout côté est compris entre la somme et la différence des deux autres côtés.

exemple 90

(exercice à traiter)

Comment interpréter, sur le triangle sphérique, la troisième affirmation ?

réponse

Elle indique que le périmètre est inférieur à 2π.

Le trièdre supplémentaire du trièdre Oxyz est le trièdre Ox'y'z' défini de la manière suivante : Ox' est perpendiculaire au plan Oyz, du même côté que Ox, et de même pour les autres arêtes.

exemple 91

On voit en effet que l'angle de Ox' avec Ox est aigu, en effet :

$$\langle v \wedge w, u \rangle = [u, v, w] > 0.$$

Or ce nombre est le cosinus de l'angle de u' et u.

exemple 92

(exercice à traiter)

Un trièdre peut-il être son propre supplémentaire ?

réponse

On doit avoir :

$$u = v \wedge w,$$
$$v = w \wedge u,$$
$$w = u \wedge v.$$

C'est donc le cas si le trièdre est orthogonal (ou trirectangle) direct.

La somme de la mesure du dièdre d'arête Ox' dans Ox'y'z' et de la mesure de la face (Oy, Oz) dans Oxyz vaut π.

exemple 93

C'est bien ce que l'on constate pour un trièdre trirectangle direct.

exemple 94

(exercice à traiter)

Soit T le trièdre défini par les demi-droites portées par les vecteurs :

$$u = (1, 0, 0),\ v = (1, 1, 0),\ w = (0, 0, 1).$$

Déterminer son trièdre supplémentaire et vérifier la relation.

---

réponse

On voit que Oz' = Oz, Ox' est définie par (1, –1, 0) et Oy' par (0, 1, 0).

L'angle dièdre de Oxyz, d'arête Oz vaut $\frac{\pi}{4}$, et l'angle de Ox' et Oy' est bien $\frac{3\pi}{4}$.

Dans un trièdre Oxyz, notons a (resp. b, c) la mesure du dièdre d'arête Ox (resp. Oy, Oz). On a les relations suivantes : $b + c < a + \pi$, $c + a < b + \pi$, $a + b < c + \pi$, $a + b + c > \pi$.

---

exemple 95

Dans le triangle sphérique, la dernière relation s'énonce :

"la somme des angles du triangle est strictement supérieure à π"

---

exemple 96

(exercice à traiter)

Vérifier ces relations dans le trièdre de l'exemple 94.

---

réponse

Les angles dièdres sont ici :

$$a = \frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{2},\ c = \frac{\pi}{4}.$$

Les relations sont bien vérifiées.

3 Pour Comprendre et Utiliser

3-1 Énoncés des exercices

Savoir reconnaître une forme bilinéaire, une forme quadratique. Passer d'une forme à une autre. Décomposer une forme quadratique en somme de carrés indépendants. Déterminer une base orthogonale.

exercice 1

Soit $E = R^n$, et $f : R^n \to R$ une application linéaire (forme linéaire).

Soit ϕ la forme bilinéaire associée : $\phi(x , y) = f(x)f(y)$.

1) Rappeler pourquoi ϕ est une forme bilinéaire symétrique.

Est-elle positive ?

Quel est l'ensemble des vecteurs isotropes ?

2) Écrire la matrice de ϕ dans une base de E donnée, en fonction de celle de f. Quel est le noyau de ϕ ? Quel est son rang ?.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs x et y soient orthogonaux. Quel est l'orthogonal d'un sous-espace engendré par un vecteur donné a ?

exercice 2

Soient (a, b) un couple de réels. On lui associe la forme quadratique sur R^4 définie par :

$$q_{a,b}(x, y, z, t) = a(xt - yz) + b(x + t)^2.$$

1) Soit M(x, y, z, t) la matrice carrée d'ordre 2 associée à (x, y, z, t) :

$$M(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Exprimer $q_{a,b}(x, y, z, t)$ en fonction de la matrice M. Exprimer de la même manière la forme polaire de $q_{a,b}$.

2) Écrire la matrice de cette forme bilinéaire dans la base canonique, et déterminer son noyau.

3) Montrer que $q_{a,b}(M)$ s'écrit comme combinaison linéaire de :

$$\mathrm{tr}(M^2) \text{ et } \mathrm{tr}(M)^2.$$

Écrire la forme polaire de q à partir de cette expression et en déduire l'égalité :

$$\det(M + M') - \det(M) - \det(M') = \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(M') - \mathrm{tr}(MM').$$

---

exercice 3

1) Décomposer, par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes en somme de carrés indépendants :

$$5a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 2ac,$$

$$-c^2 + ab - bc - ac,$$

$$ab - ac,$$

$$3a^2 + 3b^2 + 2c^2 + 2ab - 4bc.$$

2) Préciser la signature de chacune, et dire si elle est positive, non dégénérée (sinon, donner une base de son noyau), sans vecteur isotrope non nul (sinon donner un vecteur isotrope non nul).

Chercher dans chaque cas une base orthogonale pour la forme considérée.

---

exercice 4

On munit R^n du produit scalaire canonique.

Soit M une matrice réelle carrée d'ordre n, inversible.

Montrer, en appliquant au système des vecteurs colonnes de M le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, que la matrice M peut s'écrire sous la forme :

$$M = QT,$$

où Q est une matrice orthogonale d'ordre n, et T une matrice triangulaire supérieure d'ordre n. Montrer que T est inversible.

Utiliser la structure d'espace euclidien : supplémentaire orthogonal, projection orthogonale, plus courte distance.

---

exercice 5

On définit une forme bilinéaire sur l'espace des matrices carrées $M_n(R)$ par

$$\phi(M, N) = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

1) Démontrer que c'est un produit scalaire, et donner une base orthonormale .

2) Déterminer le supplémentaire orthogonal du sous-espace des matrices symétriques, et montrer que pour toute matrice M il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que :

$$M = S + A,\ \mathrm{tr}(SA) = 0.$$

3) Déterminer le supplémentaire orthogonal du sous-espace vectoriel des matrices diagonales .

4) Déterminer le supplémentaire orthogonal du sous-espace des matrices scalaires , et expliciter les projections orthogonales sur ce sous-espace et sur son supplémentaire.

---

exercice 6

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur un intervalle fermé donné [a , b], a < b. On définit une application :

$$\phi : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée. E est-il un espace euclidien ?

On se place dans le cas particulier où a = –1, b = 1.

1) On considère le sous-espace F_n de E formé des polynômes de degré au plus n, et du polynôme 0.

La base canonique de F_n est-elle orthogonale, orthonormale ?

2) Dans le cas particulier où n = 2, déterminer une base orthonormale.

3) On suppose toujours n = 2.

Soit P un polynôme non nul. Déterminer le supplémentaire orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par P.

---

exercice 7

Soit n un entier strictement positif, E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n et du polynôme 0, E_{n-1} le sous-espace des polynômes de degré au plus n – 1.

On considère l'ensemble E des fonctions f vérifiant :

il existe $P \in E_n$ et $Q \in E_{n-1}$, $f(x) = P(\cos(x)) + \sin(x)Q(\cos(x))$.

Cet ensemble est celui des polynômes trigonométriques de degré au plus n.

1) Démontrer que E est de dimension finie, et que $\dim(E) \leq 2n + 1$.

2) On définit sur E une forme bilinéaire (voir exercice 5) :

$$(f,g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Montrer que E, muni de cette forme, est un espace euclidien.

3) Démontrer que les fonctions suivantes appartiennent à E et sont indépendantes :

$$c_k : x \rightarrow \cos(kx),\ k = 0, .. n,$$

$$s_k : x \rightarrow \sin(kx),\ k = 1, .. n.$$

En déduire une base orthonormale de E. Quelle est la dimension de E ?

4) Dans l'espace préhilbertien réel $C([0\ ,\ 2\pi], R)$ des fonctions continues sur $[0\ ,\ 2\pi]$, muni du produit scalaire défini ci-dessus, chercher la projection orthogonale q de la fonction $p : x \rightarrow x^2$, sur E.

Quelle est la distance de p à E ?

exercice 8

Soit E l'espace vectoriel des fonctions combinaisons linéaires des fonctions suivantes (on vérifiera qu'elles sont indépendantes) :

$$t : x \to \cos(x)$$
$$u : x \to \sin(x)$$
$$v : x \to x\cos(x)$$
$$w : x \to x\sin(x).$$

On munit cet espace du produit scalaire défini à l'exercice 5 dans le cas où $a = -\pi$, $b = \pi$, ce qui en fait un espace euclidien .

1) Écrire la matrice du produit scalaire dans la base (t, u, v, w).

2) Déterminer une base orthonormale de E.

3) Vérifier que l'application D de dérivation est un endomorphisme de E. Quelle est sa matrice dans la base (t, u, v, w) ? et dans la base orthonormale définie à la question précédente ?

Cette application est-elle auto-adjointe ? Sinon déterminer dans la base orthonormale choisie la matrice de son adjointe T.

exercice 9

Matrice de Gram.

Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, $X = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E, et $F = \mathrm{vect}(X)$.

La matrice de Gram de cette famille est la matrice dont le terme (i, j) est le produit scalaire $<x_i , x_j>$. On la note Gr(X).

1) Montrer que X est libre si et seulement si Gr(X) est inversible.

Retrouver de cette manière qu'une famille orthogonale ne comprenant pas 0 est libre.

2) Si X est libre, montrer que $\det(Gr(X)) > 0$.

3) On suppose X libre. Soit V un vecteur de E.

Expliquer comment on peut déterminer la projection orthogonale de V sur F à l'aide de Gr(X).

4) Exemple : E est l'espace vectoriel euclidien formé des fonctions combinaisons linéaires de polynômes de degré au plus 2 et de la fonction S :

$$S : t \rightarrow \sin(\pi t)$$

muni du produit scalaire donné par l'intégrale sur le segment d'extrémités –1 et 1.

On suppose que F est engendré par $(1, t, t^2)$. Déterminer la matrice de Gram de la famille $(1, t, t^2)$, et calculer selon la méthode du 3- la projection de la fonction S sur F.

---

exercice 10

Résolution approchée d'un système linéaire au sens des moindres carrés.

Soit A une matrice de type (m, n), avec m > n. Soit $b \in R^m$. On munit cet espace du produit scalaire euclidien canonique, et on note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Le système d'équations linéaires associé à A, AX = b n'a pas toujours une solution.

Une solution approchée (au sens des moindres carrés) est un vecteur x de R^n tel que $\|Ax - b\|$ soit minimal.

1) Soit F le sous-espace vectoriel de R^m engendré par les vecteurs-colonnes de A. Démontrer que x est une solution approchée du système si et seulement si Ax est la projection de b sur F.

2) Démontrer que x est solution du système de n équations à n inconnues :

$$({}^tA.A).x = {}^tA.b.$$

3) On suppose A de rang n. Démontrer que ${}^tA.A$ est une matrice carrée inversible, et que x est donné par :

$$x = ({}^tA.A)^{-1}.({}^tA).b.$$

4) **Un exemple**. Trouver la meilleure solution approchée au sens des moindres carrés de :

$$u + v = 2$$
$$u - v = 0$$
$$u - 2v = 1.$$

5) On cherche la droite approchant le mieux, au sens des moindres carrés, la répartition des données suivantes :

$$(1, 1), (0, 0), (3, 2), (4, 5).$$

Formuler ce problème comme un cas particulier de la méthode développée ci-dessus, puis le résoudre.

---

exercice 11

Projection orthogonale.

Soit $E = \mathbb{R}^m$, et $F = \mathrm{vect}(V_1, \ldots, V_p)$ un sous-espace vectoriel de E. On note A la matrice à m lignes et p colonnes dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs V_i.

1) On suppose F de dimension p. Montrer que ${}^tA.A$ est inversible.

Soit P la matrice :

$$P = A.({}^tA.A)^{-1}.{}^tA.$$

Montrer que P est symétrique , et que P.P = P. Vérifier que P est la matrice de la projection sur F (dans la base canonique).

2) Quelle méthode pouvez-vous proposer pour écrire la matrice de la projection sur F dans le cas général ?

3) Écrire par cette méthode la matrice de projection sur F dans le cas suivant :

$$V_1 = (1, 0, 1, 0)$$
$$V_2 = (-1, 1, 1, 0)$$
$$V_3 = (0, 1, 1, 0)$$
$$V_4 = (0, 0, 1, 0).$$

4) On suppose la famille $(V_1, \ldots, V_p)$ orthonormale. Que peut-on dire de P dans ce cas ?

Utiliser les isométries de R^3, le produit vectoriel, le produit mixte.

---

exercice 12

Trièdre supplémentaire.

1) Vérifier, par un calcul de produit vectoriel, que le trièdre supplémentaire du trièdre supplémentaire du trièdre direct défini par la base formée de vecteurs unitaires (u, v, w) est égal à ce trièdre.

2) Démontrer que les angles dièdres et les angles des faces opposées de deux trièdres supplémentaires sont des angles supplémentaires (leur somme vaut π) .

3) Soit un trièdre (u, v, w) direct dont les faces mesurent ([,] désigne l'angle entre 0 et π) :

$$\gamma = [u, v],\ \alpha = [v, w],\ \beta = [w, u].$$

On note a l'angle dièdre de ce trièdre, d'arête u.

Démontrer :

$$\cos(a) = \frac{\cos(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}.$$

4) Soit Oxyz un trièdre. On suppose que le dièdre d'arête Ox est droit, et que les faces xOy et xOz valent $\frac{\pi}{4}$. Calculer les autres éléments de ce trièdre, et ceux de son trièdre supplémentaire.

---

exercice 13

Réseau de dimension 3.

Un réseau $R_{u,v,w}$ de dimension 3 engendré par trois vecteurs indépendants de R^3, soient u, v, w, est l'ensemble :

$$Zu + Zv + Zw$$

des points à coordonnées entières dans la base (u, v, w).

1) Soit g une rotation qui conserve $R_{u,v,w}$, c'est-à-dire telle que :

$$g(R_{u,v,w}) = R_{u,v,w}.$$

Montrer que l'angle de cette rotation appartient à l'ensemble :

$$\left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

2) On suppose que l'angle de g n'est pas égal à 0.

Montrer que l'axe D de g contient au moins un élément de $R_{u,v,w}$ distinct de 0 (On dit que D est une rangée du réseau).

3) On suppose l'angle de g différent de 0 et de π

Montrer que le supplémentaire orthogonal P de D admet une base formée de deux éléments de $R_{u,v,w}$ (On dit que P est un plan réticulaire).

---

exercice 14

Produit vectoriel et matrices.

1) Soit U une matrice antisymétrique non nulle d'ordre 3, où l'on suppose que $p^2 + q^2 + r^2 = 1$:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur u tel que pour tout vecteur x, on ait la relation :

$$Ux = u \wedge x.$$

Que peut-on dire de u ?

2) Soit u un vecteur unitaire.

Montrer que l'application linéaire :

$$x \mapsto u \wedge x$$

est la composée des applications suivantes :

- projection sur le supplémentaire orthogonal de vect(u),
- rotation d'angle π/2, d'axe u.

exercice 15

Matrices de rotations en dimension 3 et matrices antisymétriques.

1) Soit U une matrice antisymétrique non nulle d'ordre 3, où l'on suppose que $p^2 + q^2 + r^2 = 1$:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{pmatrix}.$$

1-1) Déterminer le polynôme caractéristique de U et en déduire l'expression de U^3 en fonction de U, puis U^n.

1-2) Exprimer la matrice suivante en fonction de U et u :

$$V = e^U.$$

Démontrer que V est une matrice de rotation, dont on donnera un vecteur unitaire de l'axe et le cosinus de l'angle.

2) Soit u = (p, q, r) un vecteur unitaire et θ un réel. On note R la rotation d'axe u, et d'angle θ.

2-1) Soit x un vecteur orthogonal à u. Montrer :

$$R(x) = x\cos(\theta) + (u \wedge x)\sin(\theta).$$

2-2) Pour un vecteur x quelconque, montrer :

$$R(x) = x\cos(\theta) + (u \wedge x)\sin(\theta) + (1 - \cos(\theta))\langle u, x\rangle u.$$

3) Soit V la matrice, dans la base canonique, d'une rotation différente de l'application identique.

3-1) La matrice V peut-elle être symétrique ?

3-2) On suppose V non symétrique. Montrer que la matrice :

$$U = \frac{1}{2}\left(V - {}^tV\right)$$

est antisymétrique et qu'elle s'exprime simplement en fonction de l'angle et de l'axe de la rotation.

exercice 16

Matrice de rotation et angles d'Euler.

On se place dans l'espace euclidien R^3, muni de sa forme quadratique canonique.

Soient (u, v, w) et (u', v', w') des bases orthonormées ayant la même orientation, et R la rotation définie par R(u) = u', R(v) = v', R(w) = w'.

1) Soit u'' un vecteur unitaire de la droite intersection des plans définis par (u, v) d'une part et (u', v') d'autre part. Montrer qu'il existe une rotation R' d'axe w, telle que R'(u) = u''. On note ϕ l'angle de cette rotation. Écrire la matrice M_1 de R' dans la base (u, v, w).

2) Soit v'' = R'(v). Montrer, de même, qu'il existe une rotation R'' d'axe u'' telle que R''(w) = w'. On note θ l'angle de cette rotation, et on pose R''(v'') = v'''.

Écrire la matrice M_2 de R'' dans la base (u'', v'', w).

3) Montrer qu'il existe une rotation R''' d'axe w' telle que R'''(u'') = u', et R'''(v''') = v'. On note ω l'angle de cette rotation. Écrire la matrice M_3 de R''' dans la base (u'', v''', w').

4) En déduire l'expression de la matrice de R dans la base (u, v, w), en fonction des angles ϕ, θ, ω (angles d'Euler).

3-2 Corrigés des exercices

exercice 1-C

1) Il est clair que ϕ est symétrique, puisque le produit est commutatif :

$$f(x)f(y) = f(y)f(x).$$

Pour x = y, on obtient :

$$\phi(x, x) = (f(x))^2,$$

donc ϕ est bien une forme positive.

Un vecteur isotrope vérifie :

$$\phi(x, x) = 0,$$

les vecteurs isotropes sont donc les vecteurs du noyau de f.

2) Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, une base de E. La matrice de ϕ dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1)^2 & f(e_1)f(e_2) & \cdots & f(e_1)f(e_n) \\ f(e_1)f(e_2) & f(e_2)^2 & & \\ & & \cdots & \\ f(e_1)f(e_n) & & & f(e_n)^2 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, et en supposant R rapporté à sa base canonique, la matrice de f s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}$$

On a donc l'égalité :

$$A = {}^tL.L.$$

Le noyau de ϕ est formé des vecteurs x tels que $\phi(x, y) = 0$ pour tout y, ce sont donc les vecteurs du noyau de f.

Si f = 0, le rang est 0, sinon le rang est 1, puisque dans ce cas l'image de f est R, et donc :

$$\dim(\ker(\phi)) = \dim(\ker(f)) = n - 1.$$

3) Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si :

$$f(x)f(y) = 0.$$

Écartons le cas où f = 0, dans lequel tout vecteur x est orthogonal à tout vecteur y.

Supposons $f \neq 0$. Le produit f(x)f(y) est nul si et seulement si f(x) = 0 ou f(y) = 0. L'un des deux vecteurs est donc un vecteur du noyau de f (ou de ϕ, ce qui revient au même).

L'orthogonal de la droite Ra est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à a, donc deux cas se présentent :

⁂ a n'appartient pas au noyau. Dans ce cas, l'orthogonal est le noyau de f.

⁂ a appartient au noyau de f. Dans ce cas, l'orthogonal est E.

---

exercice 2-C

1) On voit que la forme quadratique s'exprime à l'aide du déterminant et de la trace de M = M(x, y, z, t) :

$$q_{a,b}(x, y, z, t) = a.\det(M) + b(\mathrm{tr}(M))^2.$$

La forme polaire de $q_{a,b}$ s'écrit:

$$M = M(x, y, z, t),\ M' = M(x', y', z', t'),$$

$$\phi_{a,b}(M, M') = \frac{q_{a,b}(M + M') - q_{a,b}(M) - q_{a,b}(M')}{2}$$

$$= \frac{a[\det(M + M') - \det(M) - \det(M')] + 2b\,tr(M)tr(M')}{2}.$$

2) Pour écrire la matrice de $\phi_{a,b}$, on écrit :

$$q_{a,b}(x, y, z, t) = bx^2 + bt^2 - ayz + (2b + a)xt,$$

d'où la matrice, notée A :

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & b+\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-a}{2} & 0 & 0 \\ b+\frac{a}{2} & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Le noyau est formé des éléments vérifiant les équations :

$$\begin{cases} bx + \left(b+\frac{a}{2}\right)t = 0 \\ \frac{-a}{2}z = 0 \\ \frac{-a}{2}y = 0 \\ \left(b+\frac{a}{2}\right)x + bt = 0 \end{cases}$$

donc, **si a ≠ 0**, on obtient y = z = 0, et un système en x, t dont le déterminant est :

$$b^2 - ab - \frac{a^2}{4}.$$

Il s'annule dans deux cas :

$$b = \frac{1+\sqrt{2}}{2}a,\ b = \frac{1-\sqrt{2}}{2}a.$$

Dans ce cas, les vecteurs du noyau sont les vecteurs colinéaires à :

$$\left(-\left(1+\frac{a}{2b}\right),\ 0,\ 0,\ 1\right).$$

Dans les autres cas, le déterminant ne s'annule pas et le noyau est réduit au vecteur nul.

Si a = 0, y et z sont quelconques, x = – t, sauf si b = 0, donc le noyau est de dimension 3, engendré par les vecteurs :

(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, – 1).

Si a et b sont nuls, le noyau est l'espace tout entier.

3) En effet, le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit :

$$M^2 - tr(M)M + det(M)I_2 = 0,$$

$$tr(M^2 - tr(M)M) + 2det(M) = 0$$

donc le déterminant s'exprime de la manière suivante :

$$\det(M) = \frac{tr(M)^2 - tr(M^2)}{2},$$

d'où :

$$a\det(M) + btr(M)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)tr(M)^2 - \frac{a}{2}tr(M^2).$$

On écrit la forme polaire à partir de cette expression :

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)tr(M+M')^2 - \frac{a}{2}tr((M+M')^2) =$$

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)tr(M)^2 - \frac{a}{2}tr(M^2) + \left(\frac{a}{2}+b\right)tr(M')^2 - \frac{a}{2}tr(M'^2)$$

$$+2\left(\frac{a}{2}+b\right)tr(M)tr(M') - atr(MM')$$

donc, après réduction de l'expression :

$$\frac{a}{2}tr(M)tr(M') - \frac{a}{2}tr(MM') = \frac{a\left[\det(M+M') - \det(M) - \det(M')\right]}{2}.$$

exercice 3-C

1) $5a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 2ac$.

La suite des calculs est :

$$5a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 2ac =$$

$$5a^2 + 2a(2b+c) + 2b^2 + 2c^2 + 4bc =$$

$$5\left(a + \frac{2b+c}{5}\right)^2 - \frac{(2b+c)^2}{5} + 2b^2 + 2c^2 + 4bc =$$

$$5\left(a + \frac{2b+c}{5}\right)^2 - \frac{(2b+c)^2}{5} + 2(b+c)^2.$$

La signature est donc (2, 1). La forme n'est donc pas de signe constant.

Posons :

$$x = a + \frac{2b+c}{5},\ y = 2b+c,\ z = b+c$$

changement de coordonnées qui correspond au changement de base suivant :

pour V1, x = 1, y = z = 0,

$$\begin{cases} x = a + \dfrac{2b+c}{5} = 1, \\ y = 2b + c = 0, \\ z = b + c = 0 \end{cases}$$

soit V1 = (1, 0, 0),

pour V2, x = z = 0, y = 1,

$$\begin{cases} x = a + \dfrac{2b+c}{5} = 0, \\ y = 2b + c = 1, \\ z = b + c = 0 \end{cases}$$

soit V2 = (–1/5, 1, –1)

pour V3, x = y = 0, z = 1,

$$\begin{cases} x = a + \dfrac{2b + c}{5} = 0, \\ y = 2b + c = 0, \\ z = b + c = 1 \end{cases}$$

soit V3 = (0, –1, 2).

Dans cette base, la forme quadratique s'écrit :

$$5x^2 - y^2/5 + 2z^2.$$

Il est clair qu'il existe des vecteurs isotropes non nuls, comme (1, 5, 0).

Pour chercher les vecteurs du noyau, on écrit la matrice de la forme quadratique dans la base V1, V2, V3 :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que le noyau est donc réduit au vecteur nul.

La base V1, V2, V3 est orthogonale par construction.

2) – c^2 + ab – bc – ac.

La suite des calculs est :

$$-c^2+ab-bc-ac=-\big(c^2+c(a+b)\big)+ab$$
$$=-\left(c+\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+ab$$
$$=-\left(c+\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\big(a^2+8ab\big)+\frac{b^2}{4}$$
$$=-\left(c+\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\big((a+4b)^2-16b^2\big)+\frac{b^2}{4}$$
$$=-\left(c+\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(a+4b)^2-\frac{15b^2}{4}.$$

La signature est (1, 2) et la forme n'est pas de signe constant.

On fait le changement de coordonnées :

$$x=a+4b,\ y=c+\frac{a+b}{2},\ z=b.$$

La nouvelle base est :

U = (1, 0, – 1/2), V = (0, 0, 1), W = (– 4, 1, 3/2).

Dans cette base, la forme s'écrit $x^2 - y^2 - z^2$.

Il y a des vecteurs isotropes non nuls, comme (1, 1, 0), et la forme est non dégénérée.

3) ab – ac.

La suite des calculs :

$$ab-ac=a(b-c)$$
$$=\frac{(a+b-c)^2-(a-b+c)^2}{4}.$$

La signature est (1, 1). Le signe n'est pas fixe.

Posons :

$$x = a + b - c,\ y = a - b + c,\ z = c.$$

Ceci correspond au changement de base :

$$U = (1/2, 1/2, 0),\ V = (1/2, -1/2, 0),\ W = (0, 1, 1).$$

Dans cette base la forme bilinéaire s'écrit :

$$\frac{x^2 - y^2}{4}.$$

Il y a des vecteurs isotropes non nuls, comme (1, 1, 0).

Le noyau est le sous-espace vectoriel des vecteurs de la forme (0, 0, z), c'est donc la droite de base (0, 0, 1).

4) $3a^2 + 3b^2 + 2c^2 + 2ab - 4bc$.

La suite des calculs :

$$3a^2 + 3b^2 + 2c^2 + 2ab - 4bc =$$

$$3\left(a^2 + 2\frac{ab}{3}\right) + 3b^2 + 2c^2 - 4bc =$$

$$3\left(a + \frac{b}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(b^2 - \frac{3}{2}bc\right) + 2c^2 =$$

$$3\left(a + \frac{b}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(b - \frac{3}{4}c\right)^2 + \frac{1}{2}c^2.$$

La signature est (3, 0). La forme est positive.

Le changement de variable :

$$x = a + \frac{b}{3},\ y = b - \frac{3}{4}c,\ z = c$$

permet d'écrire la forme de la manière suivante :

$$3x^2 + \frac{8}{3}y^2 + \frac{1}{2}z^2.$$

Il est clair qu'il n'existe pas de vecteur isotrope non nul. Quant au noyau, il est réduit à 0, la forme est non dégénérée positive.

La base suivante, obtenue à partir du changement de coordonnées, est orthogonale :

$$V1 = (1, 0, 0),\ V2 = (-1/3, 1, 0),\ V3 = (-1/4, 3/4, 1).$$

---

exercice 4-C

Rappelons la méthode :

Soient $V_1, \ldots V_n$, les vecteurs colonnes de M.

On pose $W_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$, puis W_2 se calcule en posant :

$$W'_2 = \alpha W_1 + V_2,$$

et $<W'_2, W_1> = 0$, soit :

$$\alpha = -\frac{< W_1, V_2 >}{< W_1, W_1 >}$$

et enfin :

$$W_2 = \frac{W'_2}{\|W'_2\|}.$$

On poursuit de manière analogue.

Il en résulte que pour tout i = 1, …, n,

$$W_i \in \mathrm{vect}(V_1, V_2, \ldots, V_i),$$

$$W_i \in \mathrm{vect}(V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}).$$

Il existe donc des réels $t_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, avec $t_{j,j} \neq 0$ pour tout j, tels que :

$$W_j = t_{1,j}\, V_1 + \ldots + t_{j,j}\, V_j.$$

Notons T' la matrice carrée nxn telle que $t'_{i,j} = t_{i,j}$, si $i \leq j$, et 0 sinon. C'est une matrice triangulaire supérieure

Les égalités précédentes prouvent que la matrice MT' a pour vecteurs colonnes les vecteurs de la base orthonormée $(W_1, \ldots, W_n)$.

C'est donc une matrice orthogonale, que l'on note Q :

$$MT' = Q.$$

Le déterminant de T' est le produit $t_{1,1} \dots t_{n,n}$. Il est donc différent de 0.

Si on note T l'inverse de T', on a bien l'égalité cherchée :

$$M = QT.$$

---

exercice 5-C

1) Il est clair que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.

La forme quadratique associée est :

$$q(M) = \mathrm{tr}({}^t MM).$$

Si $M = (m_{i,j})$, le terme d'indice (k,k) de ${}^t MM$ est donné par :

$$m_{1,k}^2 + m_{2,k}^2 + \dots m_{n,k}^2.$$

La trace de ${}^t MM$ est donc un nombre positif ou nul.

On voit que $q(M) = 0$ si et seulement si pour tout i et tout k, $m_{i,k} = 0$. Il en résulte que q n'admet pas de vecteur isotrope non nul. Comme elle est positive, elle est donc non dégénérée, c'est bien un produit scalaire.

Soit $E_{i,j}$ la matrice élémentaire pour laquelle tous les termes sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Le calcul précédent montre que $q(E_{i,j}) = 1$.

Par ailleurs, on a l'égalité :

$$E_{i,j}\, E_{r,s} = 0, \text{ si } j \neq r$$

$$E_{i,j}\, E_{j,s} = E_{i,s}, \text{ donc}$$

$$\mathrm{tr}(E_{i,j}\, E_{j,s}) = 0 \text{ si } i \neq s, 1 \text{ sinon.}$$

En remarquant que ${}^t E_{i,j} = E_{j,i}$, on conclut que la famille des matrices élémentaires est une base orthonormale pour ce produit scalaire.

2) Soit M un élément de l'orthogonal du sous-espace des matrices symétriques. Pour toute matrice symétrique S, on a :

$$\mathrm{tr}(SM) = 0.$$

Choisissons d'abord S diagonale, avec un seul terme non nul dans la diagonale, $S = E_{i,i}$: $e_{i,i} = 1$, $e_{j,k} = 0$ si $(j, k) \neq (i, i)$

Soit $N = E_{i,i}M$:

$$n_{k,k} = e_{k,1}m_{1,k} + \ldots + e_{k,k}m_{k,k} + \ldots + e_{k,n}m_{n,k}$$

$$n_{k,k} = 0 \text{ si } k \neq i$$

$$n_{i,i} = m_{i,i},$$

$$\phi(E_{i,i}, M) = m_{i,i} = 0.$$

Tous les termes de la diagonale de M sont donc nuls.

Choisissons maintenant $S = T_{j,k}$ pour laquelle :

$$t_{j,k} = t_{k,j} = 1$$

$$t_{r,s} = 0 \text{ si } (r, s) \neq (j, k) \text{ et } (r, s) \neq (k, j).$$

Les termes de la diagonale de $N = T_{j,k}M$ sont donnés par :

$$n_{r,r} = t_{r,1}m_{1,r} + \ldots + t_{r,s}m_{s,r} + \ldots + t_{r,n}m_{n,r}.$$

Si $r \neq k$ et $r \neq j$, ce terme est nul.

Si $r = k$, $n_{k,k} = m_{j,k}$, et si $r = j$, $n_{j,j} = m_{k,j}$.

On a donc :

$$\phi(T_{j,k}, M) = m_{j,k} + m_{k,j}.$$

Une matrice appartient donc à l'orthogonal du sous-espace des matrices symétriques si et seulement si :

$$\forall\, i,\ m_{i,i} = 0$$

$$\forall\, j,\ \forall\, k,\ j \neq k,\ m_{j,k} + m_{k,j} = 0.$$

Ce sous-espace orthogonal est donc le sous-espace des matrices antisymétriques.

La décomposition proposée est la décomposition usuelle d'une matrice en somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique. Ici, elle correspond à la décomposition en somme directe de l'espace des matrices.

3) Soit M une matrice orthogonale à toutes les matrices diagonales. Soit D une matrice diagonale, dont les termes de la diagonale sont notés d_i, i = 1…n. Le produit ${}^tD.M$ (qui est égal à D.N) est noté N :

$$n_{i,i} = d_i.m_{i,i}$$

donc $\phi(D, M) = d_1.m_{1,1} + \ldots + d_n.m_{n,n}$.

Pour que cette expression soit nulle quels que soient les réels d_i, il faut et il suffit que $m_{i,i} = 0$ pour tout i. Les matrices orthogonales au sous-espace des matrices diagonales sont celles dont les termes de la diagonale sont tous nuls.

4) Le calcul précédent, dans le cas où D est une matrice scalaire a.I, donne la condition suivante :

$$\phi(a.I, M) = a(m_{1,1} + \ldots + m_{n,n}) = 0.$$

Comme cette condition doit être vérifiée pour tout a, on voit que le sous-espace orthogonal au sous-espace des matrices scalaires est le sous-espace des matrices dont la trace est nulle.

Le sous-espace des matrices scalaires est de dimension 1, et la matrice identité en est une base. La composante d'une matrice M quelconque sur ce sous-espace se calcule par le produit scalaire, elle vaut :

$$\frac{\phi(I, M)}{\phi(I, I)} I = \frac{tr(M)}{n} I.$$

L'autre composante s'obtient par différence, c'est :

$$M - \frac{tr(M)}{n} I.$$

---

exercice 6-C

La linéarité de l'intégrale montre que cette application est bilinéaire. Par ailleurs, il est clair qu'elle est symétrique. Si f = g, il s'agit d'intégrer un carré, c'est-à-dire une fonction positive ou nulle. Comme a < b, on sait que l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.

Supposons $\phi(f, f) = 0$. Cela signifie que l'intégrale de la fonction positive ou nulle f^2 est nulle. Comme cette fonction est continue, elle est nulle.

L'espace E n'est toutefois pas un espace euclidien, puisqu'il n'est pas de dimension finie.

1) La base canonique de F_n est $u_0 = 1$, $u_1 : x \to x$, … $u_n : x \to x^n$.

Supposons $p \neq q$, p et q étant des entiers entre 0 et n.

$$\int_{-1}^{1} x^p x^q dx = \frac{1}{p+q+1}\left[x^{p+q+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{p+q+1}}{p+q+1}.$$

Cette intégrale est nulle si et seulement si p + q + 1 est pair.

En particulier, on voit que la base canonique n'est pas orthogonale, par exemple $\phi(x, x^3) \neq 0$. Les vecteurs de base ne sont d'ailleurs pas normés, puisque si p = q, on trouve :

$$\phi(x^p, x^p) = \frac{2}{2p+1}.$$

2) Selon le procédé de Schmidt, on détermine une base orthogonale, qu'il suffit ensuite de normer.

Partant de $v_0 = 1$, on sait que $v_1 = x$ est orthogonal à v_0.

Cherchons $v_2 = x^2 + bx + c$, orthogonal à v_0 et v_1 :

$$\int_{-1}^{1}(x^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}+2c = 0,$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+bx+c)x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+b\frac{x^3}{3}+c\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2\frac{b}{3} = 0.$$

On obtient donc b = 0, $c = -\frac{1}{3}$. On déduit :

$$v_2 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Pour normer ces vecteurs, on divise chacun d'eux par leur norme :

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2, \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{45}.$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, w_1 = x\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, w_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

3) Posons :

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Un polynôme $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ est orthogonal à P si et seulement si :

$$\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx = 0.$$

Le calcul donne :

$$\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(a\alpha x^4 + (b\alpha + a\beta)x^3 + (c\alpha + b\beta + a\gamma)x^2 + (c\beta + b\gamma)x + c\gamma\right) dx =$$

$$\frac{2a\alpha}{5} + \frac{2(c\alpha + b\beta + a\gamma)}{3} + 2c\gamma =$$

$$\left(\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}\right)\alpha + \frac{2b}{3}\beta + \left(\frac{2a}{3} + 2c\right)\gamma.$$

Le plan orthogonal à ce vecteur a donc pour équation :

$$(3a + 5c)\alpha + 5b\beta + (5a + 15c)\gamma = 0.$$

exercice 7-C

1) La famille formée des fonctions :

$$1, \cos(x), \ldots, \cos^n(x), \sin(x), \sin(x)\cos(x), \ldots, \sin(x)\cos^{n-1}(x)$$

est une famille génératrice de E. Cet espace est donc de dimension finie. Cette famille génératrice ayant 2n + 1 éléments, la dimension de E est au plus égale à 2n + 1.

2) On a vu dans l'exercice précédent que cette forme est bilinéaire symétrique. Elle est également positive, et non dégénérée car l'argument utilisant la continuité s'applique ici aussi. Comme E est de dimension finie, c'est bien un espace euclidien.

3) Procédons par récurrence. Il est clair que c_0, c_1, s_1 sont des éléments du sous-espace de l'espace E formé des polynômes trigonométriques de degré au plus 1. Supposons que pour $k < p < n$ les fonctions c_k et s_k appartiennent au sous-espace des polynômes trigonométriques de degré au plus p – 1. On a l'égalité :

$$\cos(px) = \cos((p-1)x)\cos(x) - \sin((p-1)x)\sin(x),$$

et par récurrence, cos((p – 1)x) et sin((p – 1)x) sont des polynômes trigonométriques de degré au plus p – 1. Il en résulte que la fonction cos((p – 1)x)cos(x) est un polynôme trigonométrique de degré au plus p, quant à sin((p – 1)x)sin(x), en utilisant l'égalité $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, on voit que c'est encore un polynôme trigonométrique de degré au plus p.

On raisonne de même pour sin(px).

Montrons que les fonctions c_k et s_k sont indépendantes. Il suffit de montrer que c'est une famille orthogonale, puisqu'aucune de ces fonctions n'est nulle.

Calculons (c_k, s_j), avec $k \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(jx)dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\sin(jx)\right]_0^{2\pi} - \frac{j}{k}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\cos(jx)dx$$

$$= -\frac{j}{k}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\cos(jx)\right]_0^{2\pi} + \frac{j^2}{k^2}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(jx)dx.$$

Pour j ≠ k, cela entraîne (c_k, s_j) = 0.
Si j = k, on calcule différemment :

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(kx)dx = \left[\frac{\sin^2(kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si k = 0, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \sin(jx)dx = \left[-\frac{\cos(jx)}{j}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Pour (c_k, c_j) et (s_k, s_j) (k ≠ j), la méthode est la même.
On peut en conclure que la dimension de E est 2n + 1.

Cherchons si cette base orthogonale est normée :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(jx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2jx)}{2}\,dx = \pi.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(jx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2jx)}{2}\,dx = \pi,$$

si j ≠ 0, et :

$$\int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi,$$

si j = 0.
On déduit une base orthonormale :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}c_k \ (1 \le k \le n),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}s_k \ (1 \le k \le n).$$

4) Notons :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} b_k s_k,$$

la projection orthogonale de la fonction "carré" sur E.

On calcule les coefficients par les formules usuelles en base orthonormale, en notant (f, g) le produit scalaire de f et g :

$$a_k = \frac{(x^2, \cos(kx))}{(\cos(kx), \cos(kx))},$$

$$b_k = \frac{(x^2, \sin(kx))}{(\sin(kx), \sin(kx))}.$$

Le dénominateur vaut π ou 2π. Calculons le numérateur :

$$\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^3}{3},$$

De même pour les fonctions sinus :

D'où la projection cherchée :

$$\frac{4\pi}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2} \cos(kx) - \sum_{k=1}^{n} \frac{4\pi}{k} \sin(kx).$$

Le carré de la distance de p à E, pour la norme associée au produit scalaire, est égal à :

$$(p - q, p - q) = (p, p) - (q, q).$$

Les calculs précédents donnent :

$$(q,q) = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{k^2}\right)^2 \pi + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4\pi}{k}\right)^2 \pi.$$

---

exercice 8-C

Soit :

$$at + bu + cv + dw = 0,$$

une combinaison linéaire de ces fonctions (a, b, c, d) sont des réels.

Pour x = 0, on trouve a = 0. Pour x = π, on trouve c = 0 :

$$bu + dw = 0.$$

Dérivons :

$$bt + du + dv = 0.$$

Pour x = 0, il vient b = 0, on conclut donc d = 0. La famille est bien libre.

La matrice est :

$$M = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \pi & -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & \frac{2\pi^3 + 3\pi}{6} & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & 0 & 0 & \frac{2\pi^3 - 3\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

2) Nous utilisons la méthode d'orthogonalisation de Schmidt.

Cherchons α pour que αsin(x) + xcos(x) soit orthogonal à sin(x) :

$$\alpha\pi - \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Le troisième vecteur de base est donc :

$$x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

De même, cherchons β pour que βcos(x) + xsin(x) soit orthogonal à cos(x) :

$$\beta\pi - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Le quatrième vecteur est donc :

$$x\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

NB : les autres orthogonalités résultent des premiers calculs.

Il suffit maintenant de diviser chaque vecteur par sa norme.

D'où une base orthonormale :

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}},\frac{x\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{4}}},\frac{x\sin(x)+\frac{1}{2}\cos(x)}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}-\frac{3\pi}{4}}}.$$

3) La dérivation est bien une application linéaire, de plus les dérivées de cos(x), sin(x), xcos(x) et xsin(x) sont clairement des éléments de E :

$$D(\cos(x)) = -\sin(x),\ D(\sin(x)) = \cos(x)$$
$$D(x\cos(x)) = \cos(x) - x\sin(x)$$
$$D(x\sin(x)) = \sin(x) + x\cos(x),$$

donc la dérivation est bien un endomorphisme de E.

Dans la base (t, u, v, w), les calculs précédents montrent que la matrice de l'endomorphisme D est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base orthonormale, la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}-\frac{3\pi}{4}}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{4}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas symétrique, on voit que l'endomorphisme de dérivation n'est pas auto-adjoint.

L'adjoint T de la dérivation a pour matrice dans la base orthonormale la transposée de la matrice précédente :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\sqrt{\dfrac{\pi^3}{3}-\dfrac{3\pi}{4}}}{\sqrt{\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi}{4}}} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi}{4}}}{\sqrt{\dfrac{\pi^3}{3}-\dfrac{3\pi}{4}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

---

exercice 9-C

1) Soit $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ un p-uple de réels, et $y = a_1x_1 + \dots + a_px_p$. Montrons que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$y = 0,$$

$$Gr(X)\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet la i-ème ligne du produit matriciel ci-dessus s'écrit :

$$\langle x_i, x_1\rangle a_1 + \dots + \langle x_i, x_p\rangle a_p = \langle x_i, y\rangle.$$

Donc si $y = 0$, le produit de matrice est la matrice-colonne nulle, et réciproquement si ce produit est nul, alors y est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de F, donc à F, et comme y appartient à F, il en résulte que y est isotrope donc nul.

On voit maintenant que X est libre si et seulement si :

$$y = 0 \text{ entraîne } a_1 = \dots = a_p = 0,$$

et de même Gr(X) est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul c'est-à-dire si et seulement si $Gr(X)\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ implique :

$$a_1 = \dots = a_p = 0.$$

Pour une famille orthogonale Gr(X) est une matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont non nuls. Son déterminant n'est donc pas nul donc Gr(X) est inversible.

2) La matrice Gr(X) est la matrice du produit scalaire dans la base X de F. Dans une base orthonormale, ce produit scalaire a pour matrice la matrice identité, d'ordre p. Si P est la matrice de passage, on a l'égalité :

$$Gr(X) = {}^tP.I.P,$$

donc :

$$\det(Gr(X)) = \det(P)^2.$$

3) Notons W la projection orthogonale de V sur F. On a l'égalité :

$$V = W + (V - W), \text{ et}$$

$$W \quad F, V - W \perp F.$$

Il existe donc des réels $a_1, \dots, a_p$ tels que :

$$W = a_1x_1 + \dots + a_px_p,$$

$$\text{et pour tout i, } V - W \perp x_i.$$

On déduit les égalités, qui permettent de calculer W :

$$<V , x_i > = a_1<x_1 , x_i > + \dots + a_p<x_p , x_i >.$$

On écrit donc, à l'aide de Gr(X) :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_p \end{pmatrix} = Gr(X)^{-1} \begin{pmatrix} < V, x_1 > \\ . \\ . \\ < V, x_p > \end{pmatrix}.$$

4) On calcule la matrice de Gram et son inverse. Ocalcule les produits scalaires de la fonction S avec les vecteurs de la famille (1, t, t^2).

D'où la projection de S sur F :

$$\text{pr(S)} : t \mapsto \frac{3}{\pi} t.$$

---

exercice 10-C

1) Soit y un vecteur quelconque, et x un vecteur tel que Ax soit la projection orthogonale de b sur F. On écrit, d'après le théorème de Pythagore :

$$<Ay - b, Ay - b> = <Ay - Ax, Ay - Ax> + <Ax - b, Ax - b>.$$

On voit donc que $<Ax - b, Ax - b> \leq <Ay - b, Ay - b>$.

La distance est bien minimale si Ay = Ax.

2) Pour tout y, on a donc :

$$<Ax - b, Ay> = 0,$$

soit :

$$<{}^tAAx - {}^tAb, y> = 0$$

$${}^tAAx - {}^tAb = 0$$

$${}^tAAx = {}^tAb.$$

3) Dans tous les cas, la matrice ${}^tAA$, produit d'une matrice (n, m) par une matrice (m, n) est une matrice carrée (n, n). Cherchons x tel que ${}^tAAx = 0$. D'après la question précédente, un tel x a la propriété de minimiser ||Ax|| (ici, b = 0). Ce vecteur vérifie donc Ax = 0.

Or l'hypothèse sur le rang de la matrice A signifie que l'image de l'application linéaire associée à A dans la base canonique est un sous-espace de dimension n.

On connaît la relation :

$$n = rg(A) - \dim(\ker(A)).$$

Il en résulte que le noyau de l'application linéaire définie par A est de dimension 0 :

$$\text{si } Ax = 0, \text{ alors } x = 0.$$

En conclusion :

$$\text{si } {}^tAAx = 0, \text{ alors } x = 0.$$

Le même théorème du rang montre que ${}^tAA$ est une matrice carrée (n, n) de rang n, elle est donc inversible.

Le résultat de la question 2) montre alors que si x est solution approchée de l'équation :

$$Ax = b$$

au sens des moindres carrés, alors :

$$x = ({}^tA.A)^{-1}.({}^tA).b.$$

4) La matrice A est, dans ce cas particulier :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Elle est clairement de rang 2, donc cet exemple se place dans le cas de la question 3.

Le calcul de $({}^tA.A)^{-1}$ est le suivant :

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, $$

$$ \left({}^tAA\right)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. $$

Le calcul de ${}^tA.b$:

$$ {}^tAb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, $$

d'où la valeur de la solution approchée :

$$ \left({}^tAA\right)^{-1}\left({}^tAb\right) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}. $$

5) Exprimons que la droite d'équation :

$$ y = ax + b $$

passe par chacun de ces points. On obtient un système de 4 équations à deux inconnues, que l'on résout, de manière approchée, selon la méthode de la question 3.

Les équations sont les suivantes :

$$ 1 = a + b $$

$$ 0 = b $$

$$ 2 = 3a + b $$

$$ 5 = 4a + b. $$

exercice 11-C

1) Voir l'exercice précédent, question 3)

Si $P = A.({}^tA.A)^{-1}.{}^tA$, alors ${}^tP = A.{}^t({}^tA.A)^{-1}.{}^tA$. De plus ${}^tA.A$ est symétrique, ainsi que son inverse, donc ${}^tP = P$, P est bien symétrique.

Formons P.P :

$$P.P = A.({}^tA.A)^{-1}.\mathbf{{}^tA.A.({}^tA.A)^{-1}}.{}^tA = A.({}^tA.A)^{-1}.{}^tA = P,$$

en simplifiant le facteur noté en gras ci-dessus.

L'application linéaire dont la matrice est P dans la base canonique est donc une projection.

D'après l'expression de P, on voit bien que pour tout x, Px est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A, donc c'est un élément du sous-espace vectoriel F.

Soient x et y des vecteurs quelconques de E, on a, pour le produit scalaire canonique :

$$\langle Px, y - Py\rangle = \langle x, Py - PPy\rangle = 0.$$

On voit que P est la projection orthogonale sur son image.

Or, la matrice A étant de rang p, sa transposée aussi, donc ${}^tA$ est surjective sur R^p, de même $({}^tA.A)^{-1}$, et enfin A est surjective sur F (on a utilisé abusivement le mot surjective pour des matrices en voulant dire par là que les applications linéaires qu'elles définissent dans les bases canoniques le sont). La composée de ces matrices, qui est P est également surjective sur F, donc P est bien la matrice de la projection orthogonale sur F.

2) Si $(V_1, \ldots, V_p)$ est une famille génératrice de F, dans le cas général, on commence par en extraire une base avant d'appliquer la méthode précédente.

3) On doit d'abord chercher si la famille :

$$V_1 = (1, 0, 1, 0)$$
$$V_2 = (-1, 1, 1, 0)$$
$$V_3 = (0, 1, 1, 0)$$
$$V_4 = (0, 0, 1, 0)$$

est libre. Il est clair que ce n'est pas le cas, puisque $V_1 + V_2 = V_3 + V_4$.
Par contre la famille V_2, V_3, V_4 est libre, c'est une base du sous-espace :

$$F = \mathrm{vect}(V_1, V_2, V_3, V_4).$$

Formons la matrice P à partir de cette base :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$${}^tA.A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) D'une façon générale, le produit ${}^tA.A$ a pour coefficients les produits scalaires des vecteurs de la famille des vecteurs colonnes (puisqu'on utilise le produit scalaire canonique et la base canonique de E). Avec la définition de l'exercice 8, c'est la matrice de Gram de la famille des vecteurs colonnes. Si cette famille est orthonormale, ${}^tA.A$ est la matrice identité, d'ordre p, donc :

$$P = A.{}^tA.$$

---

exercice 12-C

1) Posons :

$$u' = v \wedge w,\ v' = w \wedge u,\ w' = u \wedge v,$$
$$u'' = v' \wedge w',\ v'' = w' \wedge u',\ w'' = u' \wedge v',$$

d'où :

$$\begin{aligned} u'' &= (w \wedge u) \wedge (u \wedge v)u. \\ &= < w, u \wedge v > u - < u, u \wedge v > v, \\ &= [u, v, w]u. \end{aligned}$$

Or [u , v, w] = 1, et u'' = u.

On procède de même pour les autres vecteurs.

2) Il s'agit, par exemple, de montrer que l'angle des vecteurs v et w est supplémentaire de l'angle dièdre d'arête u' dans le trièdre u', v', w'.

L'angle dièdre d'arête u' s'obtient en coupant les demi-plans définis par les couples (u', v') et (u', w') par le plan perpendiculaire à u', et en mesurant l'angle des demi-droites ainsi définies. Soient s et t les vecteurs unitaires définissant ces demi-droites.

Or, d'après la première question, le plan défini par s et t est également défini par v et w, qui sont tous deux orthogonaux à u'. De plus, v est orthogonal au plan (u', w') et w au plan (u', v'), donc on a les relations, [x, y] désignant l'angle (entre 0 et π) des vecteurs x et y :

$$[v,t]=[s,w]=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}[v,w]+[s,t] &= [v,t]+[t,w]+[s,t]\\ &= [v,t]+[s,w]\\ &= \pi.\end{aligned}$$

3) Avec les notations précédentes :

$$\cos(a) = -\cos([v', w']).$$

On calcule le produit scalaire :

$$< v' , w' >= \|v'\|\|w'\|\cos([v',w']).$$

Les longueurs des vecteurs sont :

$$\|v'\| = \|w \wedge u\| = \sin(\beta)$$

$$\|w'\| = \|u \wedge v\| = \sin(\gamma).$$

Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
&< v', w' > = < w \wedge u, u \wedge v > \\
&= < (w \wedge u) \wedge u, v > \\
&= < - < u, u > w + < w, u > u, v > \\
&= - < w, v > + < w, u > < u, v > \\
&= -\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma).
\end{aligned}
$$

D'où la formule demandée.

4) Avec les notations précédentes, on écrit :

$$a = \frac{\pi}{2}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

On déduit :

$$0 = \frac{\cos(\alpha) - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

D'où :

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Les angles dièdres sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
\cos(b) &= \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}
$$

enfin b = c.

Pour le trièdre supplémentaire, on utilise 2) :

$$a' = \pi - \alpha = \frac{2\pi}{3},$$
$$b' = \pi - \beta = \frac{3\pi}{4} = c',$$
$$\alpha' = \pi - a = \frac{\pi}{2},$$
$$\beta' = \gamma'.$$

---

exercice 13-C

1) D'après l'hypothèse, les images de u, v, w, par g sont des éléments du réseau. La matrice de g dans la base (u, v, w) est donc une matrice à coefficients entiers relatifs. On sait qu'il existe une base de R^3 dans laquelle la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

et en particulier que la trace de la matrice (qui est invariante par changement de base) vaut :

$$1 + 2\cos(t),$$

t étant l'angle de rotation.

Cette expression est donc un entier relatif. Compte tenu des valeurs d'un cosinus, on voit que les valeurs possibles pour 1 + 2cos(t) sont :

$$-1, 0, 1, 2, 3$$

soit pour cos(t) :

$$-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1.$$

Les valeurs correspondantes pour t sont :

$$0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}.$$

2) Dans ce cas t prend l'une des valeurs suivantes :

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}.$$

Désignons l'un de ces angles par $\frac{2\pi}{n}$, n = 3, 4, 6. On voit que $g^n = Id$.

Soit x un élément de $R_{u,v,w}$ distinct de 0, non orthogonal à D.

Les vecteurs :

$$x, g(x), g^2(x), \ldots, g^{n-1}(x)$$

sont des éléments de $R_{u,v,w}$, donc leur somme aussi :

$$y = x + g(x) + \ldots + g^{n-1}(x).$$

Il est clair que ce vecteur est invariant par g :

$$g(x + g(x) + \ldots + g^{n-1}(x)) = g(x) + g^2(x) + \ldots + g^n(x) = y.$$

Montrons que y n'est pas égal à 0. En effet, si s est un vecteur invariant de g, le produit scalaire $<x, s>$ n'est pas nul, puisque s est un vecteur de D.

Il en résulte :

$$<g(x), s> = <x, g(s)> = <x, s>,$$

et plus généralement :

$$<g^k(x), s> = <x, s> \text{ pour tout } k.$$

On en déduit :

$$<y, s> = n <x, s> \neq 0$$

et en particulier $y \neq 0$. C'est bien un vecteur de $R_{u,v,w}$ appartenant à D.

3) Avec les notations précédentes, on vérifie que z = nx – y est un élément de $R_{u,v,w}$ appartenant à P :

$$<s, nx - y> = n<s, x> - <s, y> = 0.$$

Ce résultat reste vrai pour tout transformé de z par une puissance de g, puisque P est stable par g. Or si n > 2, z et g(z) sont indépendants. Ces deux vecteurs forment donc une base de P, appartenant au réseau $R_{u,v,w}$.

exercice 14-C

1) Soit u = (a, b, c), x = (d, e, f). L'expression du produit vectoriel est :

$$u \wedge x = (bf - ce, cd - af, ae - bd),$$

d'où par identification la matrice de l'application linéaire $x \mapsto u \wedge x$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que c'est bien une matrice antisymétrique. Avec les notations de l'énoncé, on peut écrire :

$$u = (-r, q, -p).$$

Le vecteur u de l'énoncé est donc un vecteur unitaire.

2) Choisissons une base orthonormée directe de l'espace, formée de u et d'une base orthonormée (v, w) du supplémentaire orthogonal de vect(u).

Les composantes de u dans une telle base sont :

$$(1, 0, 0),$$

donc d'après la question 1), la matrice associée à l'application linéaire $x \mapsto u \wedge x$ dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la projection sur le plan (v, w) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la rotation d'angle π/2 d'axe u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

exercice 15-C

1-1) On peut écrire, d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$U^3 = -U.$$

On déduit :

$$U^4 = -U^2$$
$$U^5 = -U^3 = U$$

et on vérifie par récurrence :

$$U^{2n+1} = [-1]^n U$$
$$U^{2n} = [-1]^{n-1} U^2.$$

1-2) La matrice V est définie par le développement en série :

$$V = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} U^n.$$

Le développement ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} U^{2n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} U^{2n+1} \\ &= I_3 - U^2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} + U \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\ &= I_3 + [1 - \cos(1)] U^2 + U \sin(1). \end{aligned}$$

La transposée de V est :

$$^{t}V = e^{^{t}U} = e^{-U} = V^{-1}.$$

La matrice V est bien une matrice orthogonale. De plus :

$$\det(V) = e^{\mathrm{tr}(U)} = e^0 = 1.$$

Il s'agit bien d'une rotation.

Pour déterminer l'angle de rotation, on calcule la trace de V :

$$^{t}V = e^{^{t}U} = e^{-U} = V^{-1}.tr(V) = tr\Big(I_3 + (1-\cos(1))U^2 + U\sin(1)\Big)$$

$$= 3 + (1-\cos(1))tr\big(U^2\big)$$

$$= 3 - 2(1-\cos(1))$$

$$= 1 + 2\cos(1).$$

Le cosinus de l'angle de la rotation est donc égal à cos(1).

Soit x un vecteur quelconque :

$$Vx = x + (1-\cos(1))u \wedge (u \wedge x) + \sin(1) u \wedge x.$$

On voit immédiatement que :

$$Vu = u.$$

Le vecteur u est donc un vecteur de l'axe de la rotation.

2-1) Si x = 0, c'est évident.

Sinon, soit a la norme de x, et x' le vecteur unitaire vérifiant x = a x'.

Le vecteur :

$$x\cos(\theta) + (u \wedge x)\sin(\theta)$$

est le vecteur du plan orthogonal à u, dont les composantes sur la base orthonormée (x', $(u \wedge x')$) sont :

$$a\cos(\theta),\ a\sin(\theta).$$

C'est donc bien l'image de x par la rotation d'angle θ autour de l'origine du plan.

2-2) Dans le cas général, le vecteur x se décompose sur l'axe u et son supplémentaire orthogonal :

$$x = \langle u,x\rangle u + (x - \langle u,x\rangle u).$$

Par la rotation R, la première composante est invariante. La seconde composante est orthogonale à u donc le résultat précèdent s'applique :

$$\begin{aligned} R(x) &= \langle u, x\rangle u - R\big(x - \langle u, x\rangle u\big) \\ &= \langle u, x\rangle u + \big(x - \langle u, x\rangle u\big)\cos(\theta) + u \wedge \big(x - \langle u, x\rangle u\big)\sin(\theta), \\ &= x\cos(\theta) + (1 - \cos(\theta))\langle u, x\rangle u + (u \wedge x)\sin(\theta), \end{aligned}$$

puisque $(u \wedge u) = 0$.

3-1) Une matrice orthogonale V vérifie :

$${}^tV = V^{-1},$$

et si elle est symétrique, on a :

$${}^tV = V,$$

donc :

$$V = V^{-1},$$

ou encore :

$$V^2 = I_3.$$

Une matrice de rotation est symétrique si et seulement si l'angle de rotation est égal à 0 ou π.

2-2) Pour toute matrice carrée A, la matrice :

$$\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$$

est clairement antisymétrique.

La matrice $U = \frac{1}{2}\left(V - {}^tV\right)$ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans une base adaptée à la rotation de matrice V, on sait que celle-ci s'écrit :

$$V' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc, dans cette base :

$$\frac{1}{2}\left(V' - {}^tV'\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\sin(\theta) \neq 0$.

On voit sur cette forme que l'axe de la rotation est le noyau de la matrice antisymétrique (troisième colonne). D'après 1-1, (–r, q, –p) engendre ce noyau. De plus, on a vu que le polynôme caractéristique d'une matrice antisymétrique est, avec ces notations :

$$-X(X^2 + p^2 + q^2 + r^2),$$

ou encore, puisqu'il est invariant par changement de base :

$$-X(X^2 + \sin^2(\theta)),$$

donc on peut exprimer la matrice antisymétrique $U = \frac{1}{2}\left(V - {}^tV\right)$ de la manière suivante :

$$U = \frac{1}{2}\left(V - {}^tV\right) = \sin(\theta)\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

(a, b, c) désignant un vecteur unitaire orientant l'axe de la rotation, et θ étant l'angle de rotation autour de cet axe.

---

exercice 16-C

1) Les vecteurs u et u'' étant tous deux des vecteurs unitaires situés dans le plan (u, v) orthogonal à w, la rotation R' existe bien.

La matrice M_1 s'écrit :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Les vecteurs w et w' sont tous deux orthogonaux à u'', qui appartient à l'intersection du plan (u, v) orthogonal à w et du plan (u', v') orthogonal à w'. La rotation R'' existe bien. La matrice M_2 est la suivante :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

3) Enfin, on note que u'' et u' sont tous deux orthogonaux à w'.

De plus v' est orthogonal à w' et on a la suite d'égalités :

$$\langle v, w\rangle = 0$$
$$\langle R'(v), R'(w)\rangle = 0$$
$$\langle R'(v), w\rangle = 0$$
$$\langle v'', w\rangle = 0$$
$$\langle R''(v''), R''(w)\rangle = 0$$
$$\langle v''', w'\rangle = 0.$$

Il reste à vérifier que la rotation R''' d'axe w' qui transforme u'' en u' transforme également v''' en v'.

Or, on a les égalités :

$$v' = w' \wedge u' = R'''\,(w' \wedge u''),$$
$$w' \wedge u'' = R''(w \wedge u'') = R''(v'') = v''',$$

donc :

$$v' = R'''(v''').$$

La matrice demandée est :

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) L'application composée R''' o R'' o R' transforme u en u', v en v' et w en w', c'est donc l'application R.

Pour écrire la matrice de R, il faut écrire les matrices de chacune des racines dans la base (u, v, w). Pour M_1, c'est le cas.

La matrice M_2 est écrite dans la base (u'', v'', w). La matrice de passage de (u'', v'', w) à (u, v, w) est M_1^{-1}. Donc dans la base (u, v, w), la matrice M_2 s'écrit de la manière suivante :

$$M'_2 = M_1M_2M_1^{-1}.$$

La composée R'' o R' a donc pour matrice dans la base (u, v, w) :

$$M'_2M_1 = M_1M_2.$$

La matrice M_3 est écrite dans la base (u'', v''', w'). La matrice de passage de (u'', v''', w') à (u'', v'', w) est M_2^{-1}, et pour (u, v, w) la matrice de passage est donc $M_2^{-1}M_1^{-1}$. Donc dans la base (u, v, w), la matrice M_3 s'écrit de la manière suivante :

$$M''_3 = M_1M_2M_3M_2^{-1}M_1^{-1}.$$

La composée R''' o R'' o R' a donc pour matrice dans la base (u, v, w) :

$$M''_3\, M'_2M_1 = M_1M_2M_3,$$

c'est donc la matrice M de R dans cette base :

$$M=\begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0\\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'expression suivante de M en fonction des angles d'Euler :

$$M=\begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0\\ \cos(\theta)\sin(\omega) & \cos(\theta)\cos(\omega) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta)\sin(\omega) & \sin(\theta)\cos(\omega) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\omega)-\sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\omega) & -\cos(\phi)\sin(\omega)-\sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\omega) & \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\phi)\cos(\omega)+\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\omega) & -\sin(\phi)\sin(\omega)+\cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\omega) & -\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\omega) & \sin(\theta)\cos(\omega) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$