Cartes de champ électrique

1 Champ électrique créé par n charges ponctuelles

À un point $M(x,\, y)$ du plan on associe son vecteur position $\vec{r} = (x,\, y)$. On suppose n charges électriques q_i ponctuelles placées aux points $M_i(x_i, y_i)$ de vecteurs positions $\vec{r_i} = (x_i, y_i)$. Le champ créé par ces charges au point M s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{E_i}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_{M_iM}}{M_iM^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_iM}}{M_iM^3}$$

Où $\vec{u}_{M_iM}$ désigne le vecteur unitaire qui a la même direction et le même sens que le vecteur $\overrightarrow{M_iM}$. Un tel vecteur peut s'écrire $\vec{u}_{M_iM} = \frac{\overrightarrow{M_iM}}{M_iM}$. Si de plus on choisit un système d'unités tel que $4\pi\varepsilon_0 = 1$, on a :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \frac{\overrightarrow{M_iM}}{M_iM^3}$$

La relation de Chasles $\overrightarrow{M_iM} = \overrightarrow{M_iO} + \overrightarrow{OM} = \vec{r} - \vec{r_i}$ nous permet d'exprimer le champ au point M en fonction des positions $\vec{r_i}$ des charges, des charges q_i et de la position $\vec{r}$ de M :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{\|\vec{r} - \vec{r_i}\|^3}$$

2 Lignes de champ

Par définition, une ligne de champ est tangente au champ en chacun de ses points, autrement dit un petit vecteur déplacement $d\vec{r}$ le long de la ligne de champ peut s'écrire $d\vec{r} = k\vec{E}$. Si on choisit $k = dt$ comme paramètre (ce qui revient à considérer les lignes de champ comme des *trajectoires* pour lesquelles le champ $\vec{E}$ joue le rôle de la vitesse), alors on a :

$$\frac{d\,\vec{r}}{dt} = \vec{E}(\vec{r})$$

On reconnaît un problème de Cauchy sous forme vectorielle, qui peut se résoudre numériquement par les méthodes usuelles de résolution des ODE, y compris la méthode d'Euler.

3 Tracé des lignes

On stocke les données comme suit : un point M est un `tuple` (x, y) de `float`. Une charge est un `tuple` (q, M) constitué d'un `float` et d'un point. Une distribution de charges ponctuelles est une liste de charges.

Question 1. *Écrire une fonction* `d(M1, M2)` *qui retourne la distance euclidienne entre les points* `M1` *et* `M2`*.*

Question 2. *Écrire une fonction* `E(M, charges)` *qui retourne les coordonnées du champ $\vec{E}$ créé au point* `M` *par les charges de la liste* `charges`*.*

Question 3. *Écrire une fonction booléenne* `ok(M, charges, xmax, ymax, dmin)` *qui renvoie* `True` *sauf si le point $M(x, y)$ est tel que $x \notin [-3x_{\max}, 3x_{\max}]$ ou $y \notin [-3y_{\max}, 3y_{\max}]$ ou si la distance entre M et une des charges de la distribution* `charges` *est inférieure à* `dmin`*.*

Question 4. *Écrire une fonction* `ligne(M0, charges, xmax, ymax, dt, dmin)` *qui retourne les points de la ligne de champ : deux listes* `X` *(abscisses) et* `Y`*(ordonnées), calculées par la méthode d'Euler. Le point* `M0` *est le point de départ de la ligne (CI de la méthode). On arrête le calcul quand le dernier point M est tel que* `ok(M, charges, xmax, ymax, dmin)` *renvoie False.*

Question 5. *Écrire une fonction* `voisinage(M, R, n)` *qui renvoie une liste d'abscisses X et une liste d'ordonnées Y correspondant à* `n` *points espacés régulièrement en une couronne autour du point* `M` *(*`R` *est le rayon de la couronne). Cette fonction servira ensuite pour tracer autant de lignes de champ partant du point* `M` *que deux points définis par la fonction voisinage.*

Question 6. *Écrire une fonction* `lignes(charges, n, xmax, ymax, dt, dmin, epsilon)` *qui trace les lignes de champ électrique :*

- `charges` *: liste de charges (q, M) sources du champ électrique*
- `n` *: nombre de lignes de champ qui partent de chaque charge*
- `xmax`, `ymax` *: limites de l'affichag*
- `dt` *: pas de "temps" pour le calcul des lignes*
- `dmin` *: distance minimale d'approche des charges pour éviter la divergence du champ*
- `epsilon` *: permet de créer les points du voisinage légèrement au-delà de dmin*

Méthode : on fait partir les lignes de champ à partir de couronnes circulaires de points calculés autour des charges. Pour un résultat esthétiquement plus satisfaisant, on peut raffiner en ne faisant partir des lignes de champ que des charges dont le signe est majoritaire dans la population de charges (ex : si on a deux charges positives et une charge négative, on ne fera partir que des lignes des charges positives).

Vérification avec par exemple :

`charges = [(-1, (3, 1)), (-2, (1, 3)), (3, (1, 1.1)), (1, (4, 4))]`

L'appel de `lignes(charges, n=20, xmax=5, ymax=5, dt=0.01, dmin=0.3)` *devrait provoquer un affichage similaire à celui ci-dessous :*

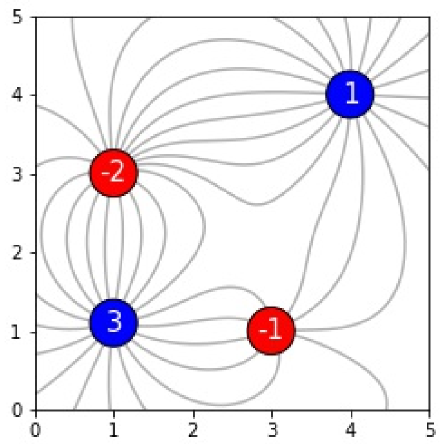

Figure 1. *Un exemple de tracé*

Remarque. *On peut tracer des cercles avec* `matplotlib` *par l'instruction :*

```
ax.add_artist(plt.Circle((x, y), R))
```

Un autre exemple avec deux charges de même signe mais de valeurs absolues différentes :

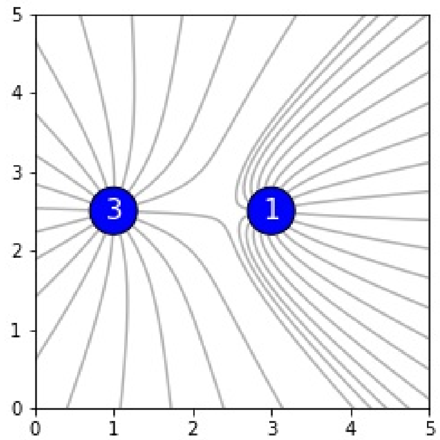

Figure 2. *Deux charges de même signe*

On peut également visualiser le principe d'un petit condensateur :

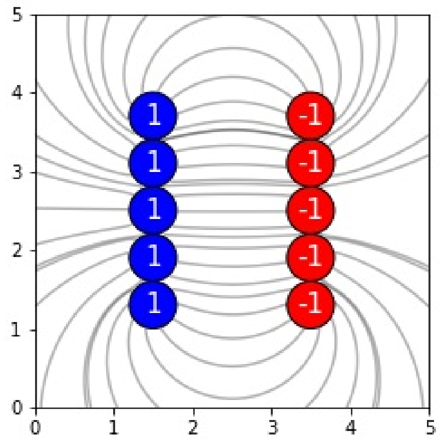

Figure 3. *Un condensateur*