Model examen seria 13

1. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}\cdot\frac{1}{n+1}$.

Fie $x_n = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}\cdot\frac{1}{n+1}$.

Calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}\cdot\frac{1}{n+1}}{\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)(4n+5)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)(4n+6)}\cdot\frac{1}{n+2}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{(4n+6)(n+2)}{(4n+5)(n+1)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{4n^2+14n+12}{4n^2+9n+5}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{5n+7}{4n^2+9n+5} = \frac{5}{4} > 1.$$ Conform criteriului lui Raabe-Duhamel, rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}-y$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

$\mathbb{R}^2$ deschisă.

Determinăm punctele critice ale lui f. f continuă.

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2+xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2}-1$ cont pe $\mathbb{R}^2$ deschisă.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy=0 \Leftrightarrow x(x+y)=0.\\ \frac{x^2}{2}-1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\Rightarrow y=-\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\Rightarrow y=\sqrt{2}\end{cases}$$

Deci punctele critice sunt $(x,y) \in \{(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x+y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x$$ (din Lema lui Schwartz derivatele parțiale fiind continue)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continue.

Observăm că f e de clasă C^2.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \sqrt{2} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ nu e punct de extrem local

$$Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -\sqrt{2} < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ nu e punct de extrem local.

3. Să se demonstreze inegalitatea

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.

Avem că

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$ (seria Taylor pentru $\frac{1}{1+x}$, $x \in (-1, 1]$).

Integrând această relație obținem

$$\ln(1+x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ \forall x \in (0,\infty)$$

Conform formulei lui Taylor cu rest Lagrange, avem că

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$, unde $R_3(x)$ este restul Lagrange,

$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \cdot x^4$, unde $c \in (0, \cancel{x})$. Vrem să găsim $\operatorname{sgn} R_3(x)$.

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} < 0 \ \left((1+x)^4 > 0\right)$. Deci $R_3(x) < 0$, de unde

$\ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

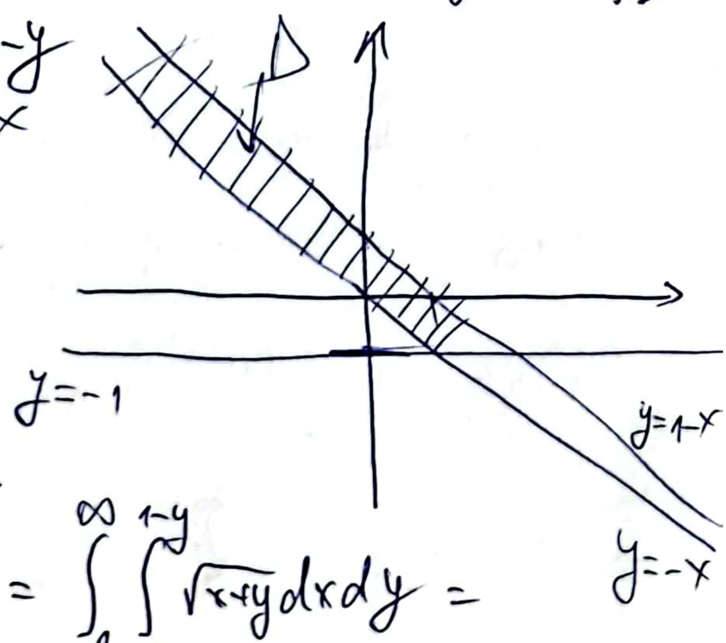
4. a) $\iint_\Delta \sqrt{x+y}\,dx\,dy$, unde $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x+y \leq 1, y \geq -1\}$.

$0 \leq x+y \leq 1 \Leftrightarrow -y \leq x \leq 1-y$

$\Leftrightarrow -x \leq y \leq 1-x$

$\cancel{x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1}$

$\cancel{x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x \geq -1 \Leftrightarrow}$



$f: \Delta \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{x+y}$ continuă.

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta \sqrt{x+y}\,dx\,dy = \int_{-1}^{\infty} \int_{-y}^{1-y} \sqrt{x+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{\infty} \left. \frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_{x=-y}^{x=1-y} dy = \int_{-1}^{\infty} \frac{2}{3}\,dy = \left. \frac{2y}{3} \right|_{-1}^{\infty} = \infty.$$

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ derivabilă cu prop că $\exists \lim\limits_{x\to\infty}(3f(x)+xf'(x))=l\in\mathbb{R}$.

Să se demonstreze că $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{l}{3}$.

f derivabilă $\Rightarrow$ f continuă $\Rightarrow$ f admite primitive.

Fie $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f și $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ~~o prim~~

~~Avem că~~

o funcție astfel încât $g'(x)=3f(x)+xf'(x)$.

Calculăm $\int(3f(x)+xf'(x))dx = 3F(x)+\int xf'(x)dx =$

$=3F(x)+xf(x)-\int f(x)dx = 3F(x)+xf(x)-F(x)=$

$=2F(x)+xf(x)+C$.

Alegem $C=0$ și $g(x)=2F(x)+xf(x)$.

Din ipoteză știm că $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)=l$, deci din teorema lui L'Hospital deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)=l$ (cazul $\frac{\infty}{\infty}$).

Astfel, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2F(x)+xf(x)}{x}=2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}+\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$

$\stackrel{L'H}{=} 3\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$. Așadar, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{l}{3}$.