Model examen seria 15

I). Enunțați

1) Teorema lui Lagrange

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b), atunci $\exists$ un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

2) Formula lui Taylor cu rest Lagrange

Fie I un interval nedegenerat, un punct $a\in I$ și $n\in\mathbb{N}$. Dacă f este derivabilă de $n+1$ ori pe I, atunci $\forall x\in I$, $x\neq a$, $\exists c$ între a și x astfel încât

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Definiți

a) distanța

Fie $A\neq\emptyset$. O funcție $d:A\times A\to\mathbb{R}$ se numește distanță pe A dacă $d(x,y)\geq 0,\ \forall x,y\in A$; $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y,\ \forall x,y\in A$; $d(x,y)=d(y,x),\ \forall x,y\in A$; $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z),\ \forall x,y,z\in A$.

b) integrala Darboux superioară

Fie $\mathcal{D}([a,b])$ mulțimea diviziunilor intervalului $[a,b]$,

$M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ și $S(d)=\sum\limits_{i=1}^{p} M_i(x_i-x_{i-1})$, unde $d=a=x_0<x_1<\dots<x_p=b$.

Numărul $\overline{\int_a^b}=\inf\limits_{d\in\mathcal{D}([a,b])} S(d)$ se numește integrala Darboux superioară a funcției f pe intervalul $[a,b]$.

II. 1) Studiați convergența seriei $\sum\limits_{n\geq 1} x^n \cdot \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{(n+10)!}$, $x>0, a>0$.

Fie $x_n = x^n \cdot \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{(n+10)!}$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}\cdot a(a+1)\dots(a+n)(a+n+1)}{(n+11)!} \cdot \frac{(n+10)!}{x^n \cdot a(a+1)\dots(a+n)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} x \cdot \frac{n+a+1}{n+11} = x.$

Conform criteriului raportului avem că: - pentru $x>1$, seria e divergentă
- pentru $x<1$, seria e convergentă
- pentru $x=1$, criteriul nu decide

Pentru $x=1$, $x_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{(n+10)!}$

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{n+11}{a+n+1}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(10-a)}{n+a+1} = 10-a.$

Conform criteriului Raabe-Duhamel avem că: ~~pent~~

- pentru $a<9$, seria e convergentă
- pentru $a>9$, seria e divergentă
- pentru $a=9$, criteriul nu decide

Pentru $a=9$ $x_n = \frac{9\cdot 10 \cdot \dots \cdot (n+9)}{(n+10)!} = \frac{\frac{(n+9)!}{8!}}{(n+10)!} = \frac{1}{8!(n+10)}$.

Dar $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{8!(n+10)}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată.

Concluzie pentru toate cazurile .... îmi e foarte multă lene :)

2. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^7 n^3}{x^{10}+n^{10}}$.

Studiem convergența simplă:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^7n^3}{x^{10}+n^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}\cdot x^7\cdot n^{-7}}{n^{10}(x^7\cdot n^{-10}+1)}=0.$$

Deci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Studiem convergența uniformă:

Trebuie să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)$.

Calculăm $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)$.

$$f_n'(x)=\frac{7x^6n^3(x^{10}+n^{10})-x^7\cdot n^3(10x^9)}{(x^{10}+n^{10})^2}=\frac{7x^{16}n^3+7x^6n^{13}-10x^{16}n^3}{(x^{10}+n^{10})^2}=$$

$$=\frac{x^6n^3(-3x^{10}+7n^{10})}{(x^{10}+n^{10})^2}=0 \iff 7n^{10}-3x^{10}=0 \iff x=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{10}}\cdot n$$

$$f_n\left(n\cdot\sqrt[10]{\frac{7}{3}}\right)=\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{10}}\cdot n^{13}}{\frac{7}{3}\cdot n^{10}+n^{10}}=\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{10}}\cdot n^3$$

x	$-\infty$	$\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{10}}\cdot n$	∞
$f_n'(x)$	$+ + + + + + +$	0	$- - - - - - -$
$f_n(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{10}}\cdot n^3$	$\searrow$

Deci $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)=\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{10}}\cdot n^3$. Așadar $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{10}}\cdot n^3=\infty$ și

$f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

3. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)= xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ deschisă și f continuă.

$\frac{\partial f}{\partial x}=y-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x-\frac{1}{y^2}$ continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $\Rightarrow$ f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-\frac{1}{x^2}=0\\ x-\frac{1}{y^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{x^2}\\ x-\frac{1}{y^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\{x-x^4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1-x^3)=0\Leftrightarrow x(1-x)(1+x+x^2)=0\Rightarrow x\in\{0,1\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,y)=(1,1)$ singurul punct critic

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$

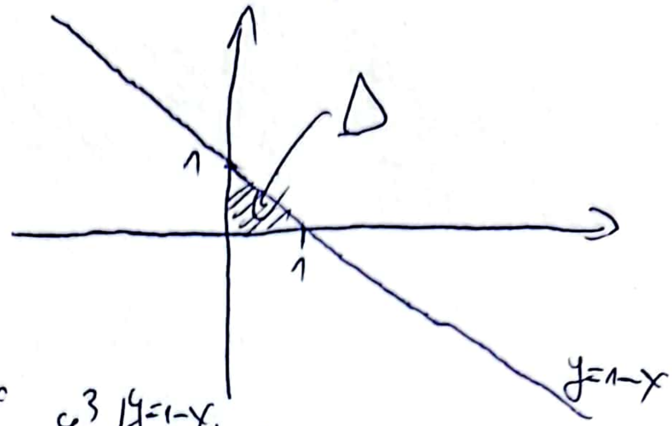
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}$ continue, deci f e de clasă C^2.

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{x^3} & 1\\ 1 & \frac{2}{y^3}\end{pmatrix};\ H_f(1,1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

~~$\Delta_1=\left|\frac{2}{x^3}\right|=\frac{2}{x^3}$~~

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1&=|2|=2>0\\ \Delta_2&=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow (1,1) \text{ punct de minim local}$$

4. Calculați $\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.



Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$ continuă

$A\in J(\mathbb{R}^2)$.

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^2\cdot y\Big|_{y=0}^{y=1-x} + \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1-x}\right)dx =$$

$$=\int_0^1 \left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx = \int_0^1 \left(x^2-x^3+\frac{1-x+x^2-x^3}{3}\right)dx =$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x}{3}\Big|_0^1-\frac{x^2}{6}\Big|_0^1+\frac{x^3}{9}\Big|_0^1-\frac{x^4}{12}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=$$

$$=\frac{5}{18}.$$