Model examen seria 14

1. a) Determinați mulțimea de convergență pentru seria de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{75^n\cdot(75+\sqrt{1})(75+\sqrt{2})\dots(75+\sqrt{n})}\cdot(x+1)^n.$$

Fie $x_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{75^n\cdot(75+\sqrt{1})\dots(75+\sqrt{n})}\cdot(x+1)^n$, $y = \dfrac{x+1}{75} \Leftrightarrow x = 75y-1$,

$$y_n = \frac{\sqrt{n!}}{(75+\sqrt{1})\dots(75+\sqrt{n})}\cdot y^n, \quad a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(75+\sqrt{1})\dots(75+\sqrt{n})}.$$

Calculăm raza de convergență $R\in\mathbb{R}$ pentru $\sum_n y_n$.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(75+\sqrt{1})\dots(75+\sqrt{n})(75+\sqrt{n+1})}}{\frac{\sqrt{n!}}{(75+\sqrt{1})\dots(75+\sqrt{n}}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{75+\sqrt{n+1}}} = 1.$$

Fie A mulțimea de convergență a seriei $\sum_n y_n$. Avem că $(-1,1)\subseteq A\subseteq[-1,1]$. Studiem acum convergența seriei $\sum_n y_n$ pentru $y\in\{-1,1\}$.

Avem că $|y_n| = a_n$. Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{75+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{75n}{\sqrt{n+1}} = +\infty$. Conform criteriului Raabe-Duhamel, avem că $\sum_n a_n$ e convergentă.

Pentru $y=1$, avem că $y_n=a_n$, deci $\sum_n y_n$ e convergentă, așadar $1\in A$.

Pentru $y=-1$, avem că $|y_n|=a_n$, deci $\sum_n y_n$ e absolut convergentă, deci și convergentă, așadar $-1\in A$.

Deci $A=[-1,1]$. Fie B mulțimea de convergență a seriei $\sum_n x_n$.

Avem că $-1\le y\le 1 \,|\cdot 75 \Leftrightarrow -75\le 75y\le 75 \,|-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -76\le 75y-1=x\le 74$. Deci $B=[-76,74]$.

b) Studiați convergența simplă și uniformă pentru șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $f_n:[1,29]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{[nx^{56}]}{n}$.

Studiem convergența simplă a șirului $(f_n)_{n\ge1}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{[nx^{56}]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{56}-\{nx^{56}\}}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nx^{56}}{n}-\frac{\{nx^{56}\}}{n}\right)=x^{56}-\lim_{n\to\infty}\frac{\{nx^{56}\}}{n}.$$

Dar $0\le\{nx^{56}\}<1 \,|:n \Leftrightarrow 0\le\dfrac{\{nx^{56}\}}{n}<\dfrac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$. Conform criteriului cleștelui, avem că $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\{nx^{56}\}}{n}=0$, deci

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x^{56}$. Așadar $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:[1,29]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{56}$.

Studiem acum convergența uniformă a lui $(f_n)_{n\ge1}$.

Cum ~~deci~~ $f_n:[1,29]\to\mathbb{R}$ și $[1,29]$ e o mulțime compactă (e închisă și mărginită), ~~deci~~ conform teoremei lui Polya avem că $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

2. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Studiați continuitatea funcției f

ii) Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$

iii) Studiați diferențiabilitatea funcției f

i) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}} \right| \qquad \left.\begin{aligned} & x^4 \leq x^4+y^{10} \\ & \Rightarrow x^2 \leq \sqrt{x^4+y^{10}} \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}} \leq 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}} \right| \leq |y^2| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2\sqrt{x^4+y^{10}} - x^2y^2 \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+y^{10}}}}{x^4+y^{10}}$$

$$= \frac{2xy^2(x^4+y^{10}) - 2x^5y^2}{(x^4+y^{10})\sqrt{x^4+y^{10}}}$$

$$= \frac{2x^5y^2 + 2xy^{12} - 2x^5y^2}{(x^4+y^{10})\sqrt{x^4+y^{10}}}$$

$$= \frac{2xy^{12}}{(x^4+y^{10})\sqrt{x^4+y^{10}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^2\sqrt{x^4+y^{10}} - x^2y^2 \cdot \frac{10y^9}{2\sqrt{x^4+y^{10}}}}{x^4+y^{10}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^6y - 3x^2y^{11}}{x^4+y^{10}\sqrt{x^4+y^{10}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(e_1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(e_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ deschisă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif în $(0,0)$ atunci $df(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(0,0)(u,v) =$

$$= {}^t\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \left.\begin{aligned} & x^2 \leq \sqrt{x^4+y^{10}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}} \leq 1 \\ & y \leq \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

Criteriul cleștelui

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y| \quad \Big| \lim_{(x,y)\to(0,0)}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}\sqrt{x^2+y^2}} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^{10}}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Deci funcția f este diferențiabilă

3. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde

$f(x,y) = 4x^2 + 3xy + 8y^2$

Determinați punctele de extrem global ale funcției $f|\bar{B}((0,0),1)$, unde

$$\bar{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

Notăm $(0,0) = 0$. $\bar{B}(0,1) = B[0,1]$ compactă și f cont $\Big|\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ mărginită și atinge marginile pe $B[0,1]$

Căutăm punctele de extrem local ale lui $f|B[0,1]$ situate în interior, adică

$$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$$

Notăm $h = f|B(0,1)$, $B(0,1)$ deschisă și f cont

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 8x + 3y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 16y + 3x$$

, cont pe $B(0,1)$ deschisă $\Rightarrow$ $\Rightarrow h$ diferențiabilă

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 3y = 0 & \big| \cdot 3 \\ 16y + 3x = 0 & \big| \cdot 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x + 9y = 0 \\ 128y + 24x = 0 \end{cases} \Big| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 119y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Deci singurul punct de extrem local restricționat la $B(0,1)$ este $(0,0)$

Acum căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|B[0,1]$ situate în $Fr(B[0,1]) =$ $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Fie $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = x^2+y^2-1$ și

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$, cont $\Rightarrow g$ este de clasă C^1.

rang$(2x \quad 2y) = 1$ $(\forall)\, x, y \in A$

Fie $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \lambda g(x) =$

$$= 4x^2 + 3xy + 8y^2 + \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 3y + 2\lambda x = 0 \\ 16y + 3x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(4+\lambda) + 3y = 0 \\ 2y(8+\lambda) + 3x = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Avem soluțiile

$$\begin{cases} \lambda = -4 \Rightarrow (x,y) \in \{(1,0),(-1,0)\} \\ \lambda = -8 \Rightarrow (x,y) \in \{(0,1),(0,-1)\} \end{cases}$$

Calculăm f în $(0,0)$, $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$

$f(0,0) = 0$

$f(1,0) = 4$

$f(-1,0) = 4$

$f(0,1) = 8$

$f(0,-1) = 8$

Punctul de minim global al lui f este $(0,0)$ și valoarea minimă a lui f este 0

Punctele de maxim global ale lui f sunt $(0,1)$, $(0,-1)$ și valoarea maximă a lui f este 8.

4. Determinați $\iint_A x\,dx\,dy$ unde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2-3,\ x \leq 9+y,\ x \leq 9-y\}$$

Calculăm punctele de intersecție ale lui $\begin{cases} x \geq y^2-3 \\ \text{și} \\ x \leq 9+y \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} x &= y^2-3 \\ x &= 9+y \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow y^2 - y - 12 = 0$

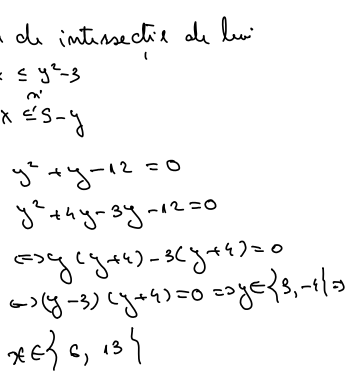
$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y(y-4) + 3(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow (y+3)(y-4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \{-3, +4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{6, 13\}$



Calculăm punctele de intersecție ale lui

$$\begin{cases} x \leq y^2-3 \\ \text{și} \\ x \leq 9-y \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= y^2-3 \\ x &= 9-y \end{aligned}\right| \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$y^2 + 4y - 3y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y(y+4) - 3(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow (y-3)(y+4) = 0 \Rightarrow y \in \{3, -4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{6, 13\}$

$A = A_1 \cup A_2$ unde $\begin{cases} A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-3,0],\ y^2-3 \leq x \leq 9+y\} \\ A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,3],\ y^2-3 \leq x \leq 9-y\} \end{cases}$

Fie $\alpha_1, \beta_1 : [-3,0] \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \alpha_1(x) = y^2-3 \\ \beta_1(x) = 9+y \end{cases}$

α_1, β_1 cont

$A_1 \in J(\mathbb{R}^2)$ și A_1 compact

Fie $\alpha_2, \beta_2 : [0,3] \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \alpha_2(x) = y^2-3 \\ \beta_2(x) = 9-y \end{cases}$

α_2, β_2 cont

$A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ A_2 compact

$A_1 \cup A_2 = A \in J(\mathbb{R}^2)$ și comp

$\mu(A_1 \cap A_2) = 0$

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

f cont

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{0}\int_{y^2-3}^{y+9} x\,dx\,dy$$

$$= \int_{-3}^{0} \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2-3}^{y+9} dy =$$

$$= \int_{-3}^{0} \frac{1}{2}\left((y+9)^2 - (y^2-3)^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{0} (y^2 + 18y + 81 - y^4 + 6y^2 - 9)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{0} (-y^4 + 7y^2 + 9y + 36)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{y^5}{5}\Big|_{-3}^{0} + \frac{7y^3}{3}\Big|_{-3}^{0} + \frac{9y^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + 36y\Big|_{-3}^{0}\right) = \ldots = \frac{747}{10}$$

Dacă am greșit la calcul scuze :)

$$\iint_{A_2} f(x,y)\,dx = \int_0^3\int_{y^2-3}^{9-y} x\,dx\,dy = \ldots$$

$= \frac{747}{10}$, se face ca cea din urmă

$$\iint_A x\,dx\,dy = \frac{747}{5}$$