Forme biliniare. Forme pătratice
Spații vectoriale euclidiene

Def. Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$. Aplicația $g: V\times V \to \mathbb{K}$ se numește <u>formă biliniară</u> $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ g este liniară în fiecare argument, i.e: $g(\alpha x+\beta y, z)=\alpha g(x,z)+\beta g(y,z)$
$g(x,\alpha y+\beta z)=\alpha g(x,y)+\beta g(x,z)$,
$\forall x,y,z\in V$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

Def. g se numește formă <u>simetrică</u> $\Leftrightarrow g(x,y)=g(y,x)$
g se numește formă <u>antisimetrică</u> $\Leftrightarrow g(x,y)=-g(y,x)$

Def. Aplicația $Q: V\to\mathbb{K}$ se numește <u>formă pătratică</u> $\Leftrightarrow \exists$ o formă biliniară și simetrică g astfel încât $Q(x)=g(x,x)$, $\forall x\in V$. g s.n. <u>forma polară</u> a lui Q.

Def. Fie $Q: V\to\mathbb{R}$ formă pătratică. Q se numește <u>pozitiv definită</u> $\Leftrightarrow$ $Q(x)>0$, $\forall x\neq 0_V$; $Q(x)=0 \Leftrightarrow x=0_V$

Obs. Dacă g este forma polară asociată formei pătratice Q ~~și g~~, atunci Q poz def $\Leftrightarrow g$ poz def.

<u>Matricea asociată unei forme biliniare:</u>

Fie $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V. Atunci matricea este $G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$,
$g_{ij}=g(e_i,e_j)$, $\forall i,j=\overline{1,n}$.

În plus, $g(x,y)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j$ și $Q(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ii}x_i^2+2\sum\limits_{i<j} g_{ij}x_ix_j$

Def. Fie $Q: V\to\mathbb{K}$ formă pătratică. Atunci $\exists$ un reper $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ în V a.î. $Q(x)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\dots+a_rx_r^2$. Această scriere se numește <u>formă canonică</u>.

Obs. Q pozitiv definită $\Leftrightarrow$ signatura $(n,0) \Leftrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, unde

signatura = (numărul de „+" din forma canonică, numărul de „−" din forma canonică)

Ex: signatura $=(a,b) \Rightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_a^2 - x_1'^2 - \dots - x_b'^2$.

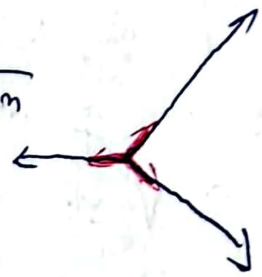
Def O formă biliniară simetrică $g: V \times V \to \mathbb{R}$ se numește <u>produs scalar</u> $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ g e pozitiv definită

Def. Fie V un spațiu vectorial real. Dacă $\exists\, g: V \times V \to \mathbb{R}$ produs scalar, atunci (V,g) s.n <u>spațiu vectorial euclidian real</u> (s v e r)

Def. Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în (V,g) s v e r.

1) R s.n <u>reper ortogonal</u> $\Leftrightarrow g(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}$
(cu albastru pe desen)



2) R s.n <u>reper ortonormat</u> $\Leftrightarrow g(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ (cu roșu pe desen)
(funcția Kronecker)

Ex: $x = (x_1, \dots, x_n)$
$y = (y_1, \dots, y_n)$

Produsul scalar canonic: $g(x,y) = \langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Def. Numărul $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ s.n <u>norma vectorului</u>. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

<u>Teorema Jacobi</u>: Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală, $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V a.î. $G = (g_{ij})$ verifică $\Delta_1 = g_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det G$ sunt nenule.
Atunci $\exists$ un reper în V a.î. $Q = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2$.
Dacă $\Delta_i > 0\ \forall i = \overline{1,n}$, atunci Q este pozitiv definită.

!!! Obs. !!!

Dacă (unii dintre) determinanții din metoda Jacobi sunt nuli, nu ne panicăm (ba da) și formăm pătrate perfecte. (s.n. metoda Gauss)

2) Fie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

a) Scrieți G = matricea asociată în raport cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

b) Găsiți $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma polară asociată lui Q

c) Să se aducă Q la o formă canonică. Este Q pozitiv definită?

Sol:

a) $Q(x) = \sum_{i=1}^{3} g_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} \cdot x_i x_j$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b) $g(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$ (o formulă, dar puteți să vă dați seama de ea pe loc dacă vă străduiți puțin)

$g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} \cdot x_i y_j$

$g(x,y) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_3 +$
$+ \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_2 + x_3y_3$

c) Metoda I: Jacobi

$\Delta_1 = |1| = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$

$\Delta_3 = \det G = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$

Deci $\exists$ un reper a.î. $Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2 = x_1'^2 + \frac{4}{3} x_2'^2 + \frac{3}{2} x_3'^2 \Rightarrow$ (8)

$\Rightarrow$ pozitiv definită

Algoritmul Gram-Schmidt:

Fie (V, g) svm, $\dim V = n$ și ~~Fie~~ $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ reper arbitrar. Atunci $\exists R' = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortogonal a.î. $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle f_1, \dots, f_n \rangle = V$ și

$$\begin{cases} e_1 = f_1 \\ e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 \\ \dots\dots\dots \\ e_n = f_n - \dfrac{\langle f_n, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \dots - \dfrac{\langle f_n, e_{n-1} \rangle}{\langle e_{n-1}, e_{n-1} \rangle} \cdot e_{n-1}. \end{cases}$$

($\langle x_1, x_2 \rangle$ e produsul scalar dintre x_1 și x_2).

Dacă $R'' = \{e_1'', \dots, e_n''\}$ reper ortonormat, atunci

$$e_i'' = \frac{e_i}{\|e_i\|}.$$

Obs. A găsi un reper ortonormat $\Leftrightarrow$ a găsi un produs scalar.

Aplicații:

1) Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară și $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu reperul canonic. Este $(\mathbb{R}^3, g_0)$ svem?

Observăm că $G = G^t$, deci g este formă biliniară simetrică.

Fie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{3} g_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Pentru a stabili dacă Q este pozitiv definită, aplicăm metoda Jacobi:

$$\Delta_1 = 3;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 12 - 4 = -10.$$

Deci $\exists$ un reper a.î. $Q(x) = \dfrac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3^2 = \dfrac{1}{3} x_1^2 + \dfrac{3}{2} x_2^2 - \dfrac{1}{5} x_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ signatura $(2,1) \Rightarrow$ nu e poz def $\Rightarrow$ nu e produs scalar $\Rightarrow$ nu e svem

Scanned with CamScanner

Metoda II: Gauss

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x_2^2\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{4}x_3^2\right) - \frac{1}{2}x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 =$$
$$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{3}{4}x_3^2\right) =$$
$$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2.$$

Fie schimbarea de reper $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2$

Metoda III: metoda valorilor proprii: $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$
(sau diagonalizarea formei pătratice)

$$\det(G - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}(1-\lambda) - \frac{1}{4}(1-\lambda) - \frac{1}{4}(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3\lambda}{4} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 + \frac{3\lambda}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{3\lambda}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 9\lambda + 2}{4} = 0 \Leftrightarrow -4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 10\lambda^2 - 5\lambda - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda^2(2\lambda-1) + 5\lambda(2\lambda-1) - 2(2\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(2\lambda-1)(2\lambda^2 - 5\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)(2\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2};\ \lambda_3 = 2 \Rightarrow Q(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2$$