S/III

(1) $\sum_{i=1}^{k}(1+i)x_i + \sum_{i=1}^{4-k} i\,x_{i+k} = 0,\ \forall k=\overline{1,3}$

Să se rez sistemul.

(2) $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = 4^{i-1},\ \forall i=\overline{1,4}$, unde $a_{ij} = j^{i-1},\ \forall i,j=\overline{1,4}$

(3) $\begin{cases} x + y + mz - t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 3x - y - z - t = 0 \\ mx - 2y \quad\quad - 2t = 0 \end{cases}$

m = ? ai sist are și sol nenule.

(4) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 4t = -1 \\ 2x + y + 3z + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z \quad\quad = -3 \end{cases}$

Să se rez, utilizând metoda eliminarii Gauss-Jordan.

(5) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculati det A, utilizând Th. Laplace pentru p=2 l_2, l_3 fixate, resp c_1, c_2 fixate

⑤ $\begin{cases} x+\alpha y+z=1 \\ \alpha x-y+z=1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ Să se rez. Discuție după $\alpha \in \mathbb{R}$

⑥ $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ x+\alpha^2 z=0. \end{cases}$ Să se arate că sist are sol unică nulă $(0,0,0)$

⑦ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \end{cases}$ Să se rez pt $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq b$

⑧ Fie ΔABC cu a,b,c lg. laturilor

$$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a. \end{cases}$$

Să se arate că pt $\forall \Delta ABC$ sist are sol unică (x_0,y_0,z_0) și aceasta verifică $x_0,y_0,z_0\in(-1,1)$

⑨ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$ Să se rez pt $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte

⑩ $\begin{cases} x+2y=m+1 \\ 2x-3y=m-1 \\ mx+y=3 \end{cases}$ $m=?$ ai sist este incompatibil

Spații vectoriale. SLI/SG/Baze

Ex. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $S = \{u = (1,2,3), v = (2,3,1), w = (a+3, a+1, a+2)\}$
$a \in \mathbb{R}$

$a = ?$ ai a) S e SLI

b) S e SLD.

Ex. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $\quad S''' = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,0), u_3 = (1,2,3), u_4 = (1,0,1)\}$

a) $S' = \{u_1, u_2\}$. Este SG? Este SLI?

b) $S'' = \{u_1, u_2, u_3\}$ —"— —"—

c) $S''' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ —"— —"—

Ex $V = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y+z \\ y & 0 & 0 \\ u & z & 0 \end{pmatrix} \middle| \; y, z, u \in \mathbb{R} \right\}$

a) $V \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ssv

b) $\left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

bază în V.

Ex $\quad \langle U \rangle = \langle W \rangle \subset \mathbb{R}^3$

$U = \{u_1 = (1,5,3), u_2 = (2,0,6)\}$; $W = \{w_1 = (-1,7,-3),$
$w_2 = (4,5,12)\}$

Ex $\mathbb{R}_2[X]$.

a) $v_1 = 2X^2 - 3X$, $v_2 = X+1$, $v_3 = -X^2 + 4$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ bază.

b) $v_1' = X+3$, $v_2' = X^2 - 2X$, $v_3' = \alpha X^2 - 6$

$\alpha = ?$ ai $\{v_1', v_2', v_3'\}$ SLI / SLD

Ex $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\}$

$\alpha = ?$ aî $\{E_1, .., E_4\}$ SLI

Ex $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (2,-1,3)$, $v_3 = (1,3,5)$, $v_4 = (3,1,7)$

Nr. max. de vect LI din $S = \{v_1, .., v_4\}$

Ex verificați dc. $P = 2x^2+3x$, $Q = x+1$ aparțin lui $\langle V \rangle$

$V = \{x^3+2x-1,\ 2x^2+1,\ x^3-x\}$.

Ex $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1+x_2-x_3 = 0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3 = 0 \\ 6x_1+x_2-x_3 = 0 \end{cases} \}$

a) dim W

b) Precizați o bază.

Ex. Fie p prim, $n \in \mathbb{N}$

$V_n = \{ f \in \mathbb{Z}_p[x] \mid \text{grad} f \leq n \}$, $V' = \{f' \mid f \in V\}$

V_n este $\mathbb{Z}_p$-sp vect, $V' \subset V_n$ subsp.

Ex $(\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}, +, \cdot)$

a) $\{1, \sin x, \cos x\}$ SLI

b) $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$ SLI

c) $\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$ SLI