Geometrie analitică euclidiană în spațiu

Def. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se numește produsul scalar dintre vectorii x și y numărul $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots x_n y_n \in \mathbb{R}$, unde $x = (x_1, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, \dots, y_n)$

Obs. $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \sphericalangle(x, y)$

Def. Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$. Se numește produsul vectorial dintre vectorii x și y

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

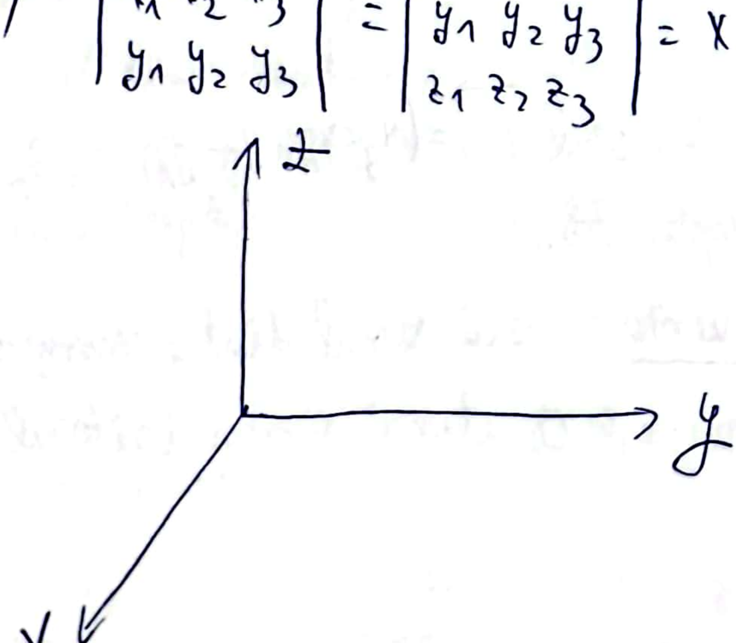
Obs. Produsul vectorial este un vector perpendicular pe ceilalți doi.

Obs. $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \sphericalangle(x, y)$.

Def. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Se numește produsul mixt al vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ și $z = (z_1, z_2, z_3)$ numărul

$$z \wedge x \wedge y = z \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x \wedge y \wedge z \in \mathbb{R}$$

Sistemul de axe în $\mathbb{R}^3$:



Distanța dintre două puncte

Fie $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$. Atunci $AB = \|\overrightarrow{AB}\| =$
$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$, unde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ este norma vectorului $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ecuația dreptei

a) prin două puncte

Fie $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$. Atunci ecuația dreptei $\mathcal{D}$ este:

$$\mathcal{D}: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = t(x_B - x_A) + x_A \\ y = t(y_B - y_A) + y_A \quad (*) \\ z = t(z_B - z_A) + z_A \end{cases}$$

Sistemul $(*)$ este format din ecuațiile parametrice ale dreptei $\mathcal{D}$.

Obs. Dacă $P \in \mathcal{D}$, atunci $P = \left(t(x_B - x_A) + x_A, t(y_B - y_A) + y_A, t(z_B - z_A) + z_A\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Obs. Vectorul $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ se numește vectorul director al dreptei AB.

Convenție: Dacă unul dintre numitorii fracțiilor de la ecuația dreptei este 0, atunci și numărătorul este 0.

b) prin punct și vector:

Fie $A(x_A, y_A, z_A)$ și $V=(V_1, V_2, V_3)$. Atunci ecuația dreptei D este:

$$D: \frac{x-x_A}{V_1}=\frac{y-y_A}{V_2}=\frac{z-z_A}{V_3}$$

Intersecția a două drepte:

Fie $D_1: \frac{x-x_A}{u_1}=\frac{y-y_A}{u_2}=\frac{z-z_A}{u_3}=t$ și

$D_2: \frac{x-x_B}{V_1}=\frac{y-y_B}{V_2}=\frac{z-z_B}{V_3}=s$. Avem sistemul:

$$\begin{cases} x=tu_1+x_A=sV_1+x_B \\ y=tu_2+y_A=sV_2+y_B \\ z=tu_3+z_A=sV_3+z_B \end{cases}$$ și găsim valorile lui t și s.

Obs. x, y și z sunt coordonatele punctului de intersecție.

Obs. Dacă vrem să intersectăm n drepte, procedăm în același mod, rezolvând sistemul format din ecuațiile parametrice a tuturor dreptelor și determinând valorile rapoartelor (similar cum am găsit pe t și s la cazul cu 2 drepte).

Poziția relativă a două drepte

Fie dreptele AB și CD, unde:

$$AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \text{ și } CD: \frac{x-x_C}{x_D-x_C}=\frac{y-y_C}{y_D-y_C}=\frac{z-z_C}{z_D-z_C}. \quad (3)$$

a) AB și CD sunt necoplanare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AC} \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_D - x_C & y_D - y_C & z_D - z_C \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obs. Dacă determinantul este 0, atunci dreptele sunt coplanare.

b) $AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \dfrac{x_D - x_C}{x_B - x_A} = \dfrac{y_D - y_C}{y_B - y_A} = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

c) $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) + (z_B - z_A)(z_D - z_C) = 0.$

<u>Unghiul a două drepte:</u>

$$\sphericalangle(AB, CD) = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \in [0, \pi] \text{ și } \cos\sphericalangle(AB, CD) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|}.$$

<u>Distanța dintre două drepte:</u>

$$dist(AB, CD) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD})|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\|}.$$

<u>Distanța de la un punct la o dreaptă:</u>

$$dist(A, BC) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}.$$

Ecuația planului

a) <u>Ecuația generală a planului</u>: $ax+by+cz+d=0$.

b) <u>Ecuația prin 3 puncte</u>:

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A & x_C-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A & y_C-y_A \\ z-z_A & z_B-z_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Obs.</u> A, B și C <u>nu</u> trebuie să fie coliniare!

c) <u>Ecuația prin punct și doi vectori</u>:

Fie $A(x_A, y_A, z_A) \in \pi$ și $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \pi$. Atunci:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_A & u_1 & v_1 \\ y-y_A & u_2 & v_2 \\ z-z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Obs.</u> Vectorii u și v <u>nu</u> trebuie să fie paraleli!

<u>Def.</u> Numim <u>normala</u> la planul $\pi: ax+by+cz+d=0$ vectorul $N_\pi = (a, b, c)$.

<u>Obs.</u> Normala la plan este întotdeauna <u>perpendiculară pe plan</u>.

<u>Obs.</u> Dacă avem doi vectori $u, v \in \pi$, atunci $N_\pi = u \times v$.

d) <u>Ecuația prin punct și normală</u>:

Fie $A(x_A, y_A, z_A)$ și $N_\pi = (n_1, n_2, n_3)$. Atunci:

$$\pi: (x-x_A)n_1 + (y-y_A)n_2 + (z-z_A)n_3 = 0.$$

Fie două plane π_1 și π_2. Atunci:

1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow N_{\pi_1} \perp N_{\pi_2} \Leftrightarrow N_{\pi_1} \cdot N_{\pi_2} = 0$.

2) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow N_{\pi_1} \parallel N_{\pi_2}$

3) $\cos \sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{N_{\pi_1} \cdot N_{\pi_2}}{\|N_{\pi_1}\| \cdot \|N_{\pi_2}\|}$.

<u>Obs.</u> Pentru a găsi intersecția a două sau mai multe plane, rezolvăm sistemul de ecuații format din ecuațiile generale ale planelor.

Fie D o dreaptă și π un plan. Atunci:

1) $D \parallel \pi \Leftrightarrow V_D \perp N_\pi$, unde V_D este vectorul director al lui D.

2) $D \perp \pi \Leftrightarrow V_D \parallel N_\pi$.

3) $\sin \sphericalangle(D, \pi) = \dfrac{|V_D \cdot N_\pi|}{\|V_D\| \cdot \|N_\pi\|}$.

<u>Obs.</u> Pentru a găsi intersecția dintre o dreaptă

$D: \dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2} = \dfrac{z-z_0}{u_3} = t$ și un plan

$\pi: ax+by+cz+d=0$,

înlocuim în ecuația planului coordonatele punctului de intersecție $P(tu_1+x_0, tu_2+y_0, tu_3+z_0)$ și determinăm valoarea lui t.

Distanța de la un punct la un plan :

Fie $A(x_A, y_A, z_A)$ și $\pi: ax+by+cz+d=0$. Atunci

$$dist(A,\pi)=\frac{|a x_A+b y_A+c\cdot z_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Arii și volume :

1) Aria unui triunghi $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|.$

2) Volumul unui tetraedru $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot|\Delta|$, unde

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1\\ x_B & y_B & z_B & 1\\ x_C & y_C & z_C & 1\\ x_D & y_D & z_D & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_A-x_D & y_A-y_D & z_A-z_D\\ x_B-x_D & y_B-y_D & z_B-z_D\\ x_C-x_D & y_C-y_D & z_C-z_D\end{vmatrix}$$

Obs. ~~Dacă $\Delta=0$, atc~~

$\Delta=0 \Leftrightarrow A,B,C,D$ coplanare.

Obs. Ecuațiile dreptelor se pot generaliza în $\mathbb{R}^n$, la fel și ecuațiile planelor astfel:

$A(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $V=(v_1,v_2,\dots,v_n) \Rightarrow D: \frac{x_1-a_1}{v_1}=\dots=\frac{x_n-a_n}{v_n}=t \Leftrightarrow x_i-a_i=tv_i, \forall i=\overline{1,n}$

~~Cum dreapta~~

Planul este un subspațiu de dimensiune 2 în $\mathbb{R}^n$. Fie $A\in\pi$ și doi vectori $\{u,v\}$ ce formează sistem liniar independent. Atunci

$\pi: x_i-a_i=tu_i+sv_i, \forall i=\overline{1,n}$

Observații:

1) Fie M - mijlocul lui $[AB]$. Atunci $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$, $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

2) Fie G - centrul de greutate al ΔABC. Atunci $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$, $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

3) Fie $M \in [AB]$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = k \in \mathbb{R}$. Atunci $x_M = \frac{x_A + k x_B}{k+1}$, $y_M = \frac{y_A + k y_B}{k+1}$, $z_M = \frac{z_A + k z_B}{k+1}$.

4) $ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow$ $x_A + x_C = x_B + x_D$, $y_A + y_C = y_B + y_D$, $z_A + z_C = z_B + z_D$.

Formulele ~~1,2,3,4~~ au loc pentru puncte în $\mathbb{R}^n$, doar că în loc de x, y și z avem x_i, $i = \overline{1,n}$.

Aplicații:

1) Fie planul $\pi: x+y+z=1$, punctul $M(1,2,-1)$ și dreapta

$$\mathcal{D}: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

a) Să se scrie ecuația dreptei $\mathcal{D}'$ astfel încât $M \in \mathcal{D}'$ și $\mathcal{D}' \perp \pi$.

b) Să se scrie ecuația planului π' astfel încât $M \in \pi'$ și $\pi' \perp \mathcal{D}$

c) Să se scrie ecuația planului π'' astfel încât $M \in \pi''$ și $\mathcal{D} \subseteq \pi''$.

d) Găsiți proiecția lui M pe $\mathcal{D}$.

e) Găsiți proiecția lui M pe π.

Soluție:

a) $\mathcal{D}' \perp \pi \Leftrightarrow V_{\mathcal{D}'} \parallel N_{\pi}$.

Avem $\pi: x+y+z-1=0$, deci $N_{\pi}=(1,1,1)$, de unde $V_{\mathcal{D}'}=(1,1,1)$.

Avem și $M \in \mathcal{D}'$, deci scriem ecuația prin punct și vector:

$$\mathcal{D}': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

b) $\mathcal{D} \perp \pi' \Leftrightarrow V_{\mathcal{D}} \parallel N_{\pi'}$. Dar $V_{\mathcal{D}}=(2,-1,3)$, deci $N_{\pi'}=(2,-1,3)$.

Avem și $M \in \pi'$, deci scriem ecuația prin punct și normală:

$$\pi': (x-1)\cdot 2+(y-2)\cdot(-1)+(z-3)\cdot 3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi': 2x-2-y+2+3z-9=0 \Leftrightarrow \pi': 2x-y+3z-9=0.$$

c) Deoarece $\mathcal{D} \subseteq \pi''$, orice punct de pe dreapta $\mathcal{D}$ aparține planului π''.

Scriem ecuațiile parametrice ale dreptei $\mathcal{D}: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} = t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+1 \\ z=3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru $t=0$, obținem punctul $A(1,1,0)$, iar pentru $t=1$, obținem punctul $B(3,0,3)$. Așadar, ecuația planului π'' este

$$\pi'': \begin{vmatrix} x-x_M & x_A-x_M & x_B-x_M \\ y-y_M & y_A-y_M & y_B-y_M \\ z-z_M & z_A-z_M & z_B-z_M \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi'': \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \pi'': -4(x-1)+2(y-2)+2(z+1)+2(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi'': -4x+4+2y-4+2z+2+2x-2=0 \Leftrightarrow \pi'': -2x+2y+2z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+y+z=0$

d) Din ecuațiile parametrice a lui $\mathcal{D}$ avem că dacă $P\in\mathcal{D}$, atunci $P(2t+1,-t+1,3t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Avem $MP\perp\mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\cdot V_{\mathcal{D}}=0 \Leftrightarrow (2t,-t-1,3t+1)\cdot(2,-1,3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4t+t+1+9t+4=0 \Leftrightarrow 14t+5=0 \Leftrightarrow t=-\frac{5}{14}$.

Deci $pr_{\mathcal{D}}M=P\left(\frac{2}{7},\frac{9}{14},-\frac{15}{14}\right)$.

e) Fie $Q=pr_{\pi}M$. Avem $MQ\perp\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}\parallel N_{\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=(1,1,1)$ și

$MQ: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \\ z=t-1 \end{cases}, t\in\mathbb{R} \Rightarrow Q(t+1,t+2,t-1)$.

Dar $Q\in\pi$, deci $t+1+t+2+t-1=1 \Leftrightarrow 3t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$. Deci

$pr_{\pi}M=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$. $\square$

2) Fie dreptele $\mathcal{D}_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ și $\mathcal{D}_2: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) Arătați că $\mathcal{D}_1$ și $\mathcal{D}_2$ sunt necoplanare. Aflați ecuația perpendicularei comune.

b) Dați un exemplu de dreaptă $\mathcal{D}_3$, coplanară cu $\mathcal{D}_1$.

<u>Soluție:</u>

a) Avem că $V_{\mathcal{D}_1} = (1,2,-1)$ și $V_{\mathcal{D}_2} = (0,1,0)$ și $A(1,2,0) \in \mathcal{D}_1$ și $B(0,0,0) \in \mathcal{D}_2$. Calculăm

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$ Deci $\mathcal{D}_1$ și $\mathcal{D}_2$ necoplanare.

Fie $P_1 \in \mathcal{D}_1$ și $P_2 \in \mathcal{D}_2$. Din ecuațiile parametrice

$$\mathcal{D}_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+2, \ t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = s, \ s \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$ avem $P_1(t+1, 2t+2, -t)$ și $P_2(0, s, 0)$, deci $\overrightarrow{P_1P_2} = (-t-1, s-2t-2, t)$.

Avem $\begin{cases} P_1P_2 \perp \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \cdot V_{\mathcal{D}_1} = 0 \Leftrightarrow -t-1+2(s-2t-2)-t = 0 \Leftrightarrow \\ P_1P_2 \perp \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \cdot V_{\mathcal{D}_2} = 0 \Leftrightarrow s-2t-2 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6t + 2s = 5 \\ s - 2t = 2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2s - 4t = 4 \end{cases} \ominus \Leftrightarrow -2t = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = 2 + 2t = 2 - 1 = 1.$

Deci $P_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ și $P_2(0,1,0)$. Așadar

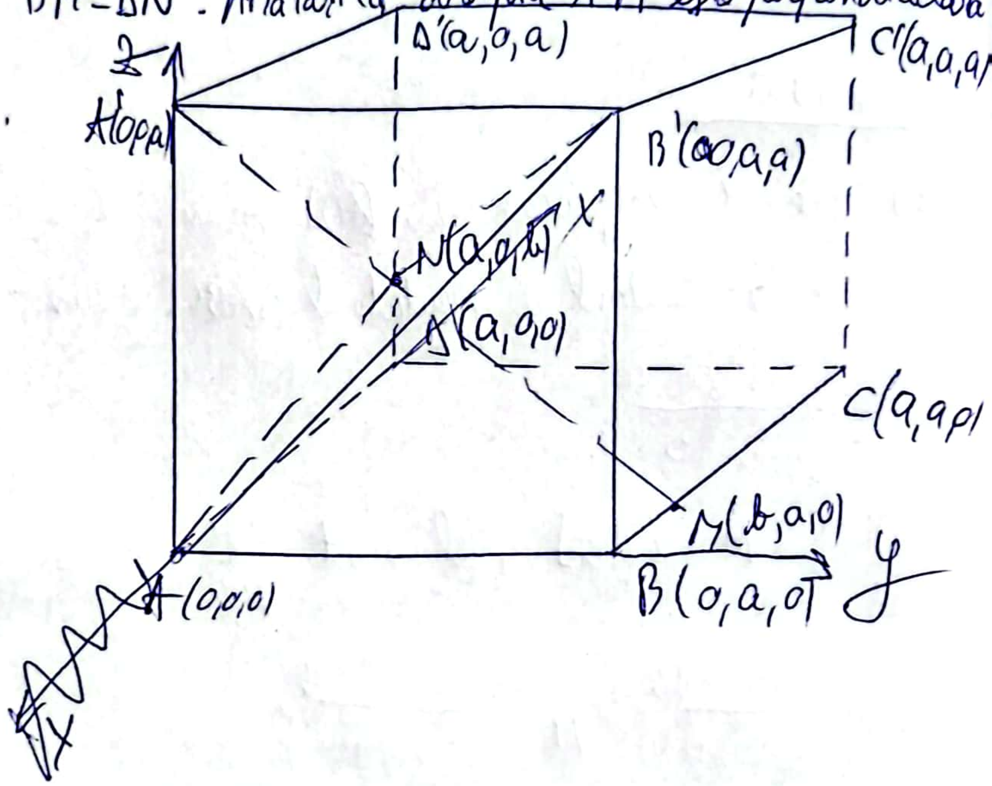
$$P_1P_2: \frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}.$$

(1d

b) Avem $A(1,2,0) \in \mathcal{D}_1$, deci orice dreaptă care trece prin A va fi coplanară cu $\mathcal{D}_1$. De exemplu dreapta AB, cu $B(0,0,0)$, de ecuație

$$AB: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{0} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t+1 \\ y = -2t+2 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

3) Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Pe segmentele $[BC]$ și $[DD']$ luăm punctele M, respectiv N, astfel încât $BM = DN$. Arătați că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.



Soluție:

Am ales centrul sistemului de axe în A. Atunci coordonatele punctelor vor fi: $A(0,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(a,a,0)$, $D(a,0,0)$, $A'(0,0,a)$, $B'(0,a,a)$, $C'(a,a,a)$, $D'(a,0,a)$, unde a = latura cubului.

Fie $b = BM = DN$. Atunci avem $M(b,a,0)$ și $N(a,0,b)$.

Scriem ecuația lui $A'M$: $\frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{z-a}{-a}$, deci $\overrightarrow{A'M} = (b, a, -a)$.

Scriem ecuația planului $(AB'N)$: $\begin{vmatrix} x & 0 & a \\ y & a & 0 \\ z & a & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow abx + a^2y - a^2z = 0$, deci normala este $N_{(AB'N)} = (ab, a^2, -a^2)$.

$A'M \perp (AB'N) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M} \parallel N_{(AB'N)} \Leftrightarrow (b, a, -a) = \alpha(ab, a^2, -a^2), \alpha \in \mathbb{R}$.

Observăm că $\alpha = a$, deci $A'M \perp (AB'N)$ $\square$