Tutoriat 5

Diagonalizare

Def. Se numește <u>valoare proprie</u>, o rădăcină din $\mathbb{K}$ a polinomului caracteristic $P_A(X) = (-1)^n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Def. Se numește <u>vector propriu</u> un vector $x \in V \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ valoare proprie a.î. $f(x) = \lambda x$, $f \in End(V)$

~~Teorema de diagonalizare a unei matrice~~

Def. V_λ se numește subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V_\lambda = \{x \in V / f(x) = \lambda x\}$.

<u>Teorema de diagonalizare a unei matrice</u>

Fie $f \in End(V)$. $\exists$ un reper $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V a.î. $[f]_{R,R} = A$ este diagonală $\Leftrightarrow$ 1) toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt în $\mathbb{K}$

2) suma multiplicităților rădăcinilor ~~este~~ $= \dim V =$ dimensiunea matricei

3) dimensiunile subspațiilor proprii sunt egale cu multiplicitățile valorilor proprii corespunzătoare

Matricea diagonală este $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k & 0 \dots & \\ 0 & \dots & & & \lambda_k \end{pmatrix}$ (valorile proprii puse pe diagonală)

m ori

Notație: $Spec(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spectrul lui f (mulțimea valorilor proprii)

Prop. Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte formează un SLI.

<u>Obs</u> $R = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{C} R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$

$f \in End(V)$ $A = [f]_{R,R}$ $A' = [f]_{R',R'}$, $A' = C^{-1} A C$.

C este formată din vectorii proprii puși pe coloane

Dacă R' este reuniunea vectorilor ce generează subspațiile proprii, atunci A' este diagonală și $A'^n = C^{-1} A^n C \Leftrightarrow A^n = C A'^n C^{-1}$!

<u>Obs.</u> Dacă $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $A'^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

<u>Ex1:</u> ~~$\mathbb{R}^2$ $A, 4$~~

Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, x_2 + x_3, 2x_3)$.

Determinați un reper R în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R} = A$ = diagonală.

Sol:

$A' = [f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P_{A'}(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, m_{\lambda_1} = 2 \\ \lambda_2 = 2, m_{\lambda_2} = 1 \end{cases}$

$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = \lambda_1 x\} = \{x \in \mathbb{R}^3 / A'X = \lambda_1 X\} = \{x \in \mathbb{R}^3 / (A' - \lambda_1 I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,

$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 3 - \text{rang } M = 3 - 1 = 2 = m_{\lambda_1}$

Rezolvând sistemul obținem $V_{\lambda_1} = \{(x_1, x_2, 0) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle\{(1,0,0), (0,1,0)\}\rangle = R_1$

Analog, $\dim V_{\lambda_2} = 1$, $V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = \lambda_2 x = 2x\} = \langle\{(0,1,1)\}\rangle = R_2$

$R = R_1 \cup R_2$ reper în $\mathbb{R}^3 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$

$R = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$.

$A = [f]_{R,R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matricea diagonală

Obs. Dacă vrem să calculăm A'^n, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, notăm cu

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (pentru a nu confunda cu notația inversă din formulă)

și $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și avem că $A'^n = C D^n C^{-1}$.

Calculând prin calcule C^{-1}, obținem $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci

$$A'^n = C D^n C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = A'^n.$$

Ex2: Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$. Dacă $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ sunt valorile proprii și $v_1 = (-3,2,1)$, $v_2 = (-2,1,0)$, $v_3 = (-6,3,1)$ sunt vectorii proprii corespunzători, atunci care este matricea $[f]_{R_0,R_0}$?

Avem vectorii proprii deci matricea de trecere $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

iar matricea diagonală $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $[f]_{R_0,R_0} = A = C A' C^{-1}$.

După calcul ce este lăsat ca exercițiu pentru cititor, $A = [f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,

$f(x) = (-3x_1 + 4x_2 - 7x_3, 3x_1 - 2x_2 + 8x_3, 2x_1 + 7x_3)$