(I)

1. Fie $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$ și $U = \langle \{(-1,0,3),(1,2,1),(-1,2,7)\} \rangle$ ssp. vect

a) Precizați dim $U$.

b) Dați un exemplu de ssp vect $V$ a.î. $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$

c) Fie $p \in End(\mathbb{R}^3)$ proiecție pe $U$. Aflați $p(1,2,0)$

2. Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$ și $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $R_0$ = reperul canonic

a) Determinați $f(x)$

b) Aflați $a \in \mathbb{R}$ a.î. $f$ injectivă

c) Pentru $a = -\frac{1}{2}$ precizați dim Im $f$.

d) Pentru $a = 0$ determinați valorile proprii. Se poate diagonaliza $f$?

3. Fie $f \in End(\mathbb{R}_3[X])$, $A = [f]_{R_0,R_0}$ și $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+1)$ polinomul caracteristic.

a) Dacă $f$ este diagonalizabil, aflați dim Ker $f$

b) Calculați Tr $A$, det$(A)$

---

(II)

1. Fie $(\mathbb{R}_2[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$ și $U = \langle \{1+X+X^2, X+3X^2, -3-2X\} \rangle$ ssp vect

a) Precizați dim $U$

b) Determinați un subspațiu complementar $V$ (i.e $\mathbb{R}_2[X] = U \oplus V$)

c) Fie $s \in End(\mathbb{R}_2[X])$ simetrie față de $V$. Aflați $s(1+X)$

2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (-ax_1 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3, -x_1 - 3x_3)$, $a \in \mathbb{R}$

a) Aflați $A = [f]_{R_0,R_0}$, $R_0$ = reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ a.î. $f$ surjectivă

c) Pentru $a = -\frac{1}{3}$ precizați un reper în Im $f$.

d) Pentru $a = 1$ aflați valorile proprii. Se poate diagonaliza $f$?

3. Fie $f \in End(\mathbb{R}^2)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ valorile proprii și $u_1 = (1,2)$, $u_2 = (0,1)$ vectorii proprii corespunzători

a) Aflați $A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A = [f]_{R_0,R_0}$

b) Calculați det $A$, Tr$(A)$.