Capitolul 2

Cuadrice

Definiţia 2.1. *Se numeşte* ***cuadrică*** *o suprafaţă în spaţiu definită în reperul cartezian ortonormat* $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ *printr-o ecuaţie algebrică de gradul al doilea de forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, j \geq i$, *iar coeficienţii termenilor de gradul al doilea* $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ *nu sunt toţi nuli.*

Aşadar o cuadrică este o mulţime de puncte în spaţiu ale căror coordonate (x, y, z) verifică o ecuaţie de gradul al doilea de forma celei de mai sus.

- cuadricele se mai numesc şi *suprafeţe algebrice de ordinul al doilea*
- exemple de cuadrice: sferă, elipsoid, hiperboloizi, paraboloizi

2.1 Cuadrice pe ecuaţii reduse

2.1.1 Sfera

Definiţia 2.2. *Fie un punct fixat* $C(a, b, c)$ *şi* $R > 0$ *un număr real fixat.* ***Sfera*** *de centru* C *şi rază* R *este locul geometric al punctelor* $M(x, y, z)$ *care satisfac egalitatea*

$$\|\overrightarrow{CM}\| = R. \tag{2.1}$$

Avem $\overrightarrow{CM} = (x - a)\overrightarrow{i} + (y - b)\overrightarrow{j} + (z - c)\overrightarrow{k}$, deci (2.1) se rescrie

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R$$

sau echivalent

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{2.2}$$

care se numeşte **ecuaţia carteziană implicită** a sferei de centru $C(a,b,c)$ şi rază R.

Efectuând calculele în ecuaţia (2.2) obţinem:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0, \tag{2.3}$$

unde $d=a^2+b^2+c^2-R^2$. Se pune problema dacă orice ecuaţie de forma (2.3) reprezintă ecuaţia unei sfere. Cum (2.3) este echivalentă cu

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d,$$

distingem următoarele cazuri:

1. dacă $a^2+b^2+c^2-d>0$ atunci mulţimea punctelor care satisfac (2.3) reprezintă sfera cu centrul $C(a,b,c)$ şi rază $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$;

2. dacă $a^2+b^2+c^2-d=0$ atunci mulţimea punctelor care satisfac (2.3) se reduce la punctul de coordonate (a,b,c);

3. dacă $a^2+b^2+c^2-d<0$ atunci mulţimea punctelor care satisfac (2.3) este mulţimea vidă.

Ecuaţia (2.3) în care $a^2+b^2+c^2-d>0$ se numeşte **ecuaţia generală a sferei**.

Fie $M(x,y,z)$ un punct din spaţiu şi $M'(x,y,0)$ proiecţia lui M pe planul xOy. Introducem notaţiile:

- $\rho=\|\overrightarrow{OM}\|$ - distanţa de la M la origine
- $\theta\in[0,\pi]$ - unghiul dintre Oz şi $\overrightarrow{OM}$
- $\varphi\in[0,2\pi)$ - unghiul dintre Ox şi $\overrightarrow{OM'}$

Numerele reale ρ,θ,φ se numesc **coordonatele sferice** ale lui M.
Relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele sferice ale punctului M sunt:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}, \quad \rho\geq 0,\ \ \theta\in[0,\pi],\ \ \varphi\in[0,2\pi).$$

Considerând coordonatele sferice ale punctelor din sistemul de coordonate cu centrul în $C(a,b,c)$ şi axele paralele cu cele iniţiale, obţinem **ecuaţiile parametrice** ale sferei cu centrul în C şi rază R:

$$\begin{cases} x = a + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + R\cos\theta \end{cases}, \ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi).$$

Considerăm un plan (p) şi notăm cu d distanţa de la C la acest plan. Avem următoarele situaţii posibile:

- $d > R \Rightarrow$ intersecţia dintre plan şi sferă este vidă, deci planul este *exterior* sferei;
- $d = R \Rightarrow$ intersecţia dintre plan şi sferă este un punct, deci planul este *tangent* la sferă;
- $d < R \Rightarrow$ intersecţia dintre plan şi sferă este un cerc, deci planul este *secant* la sferă.

2.1.2 Elipsoidul

Definiţia 2.3. *Se numeşte **elipsoid** o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

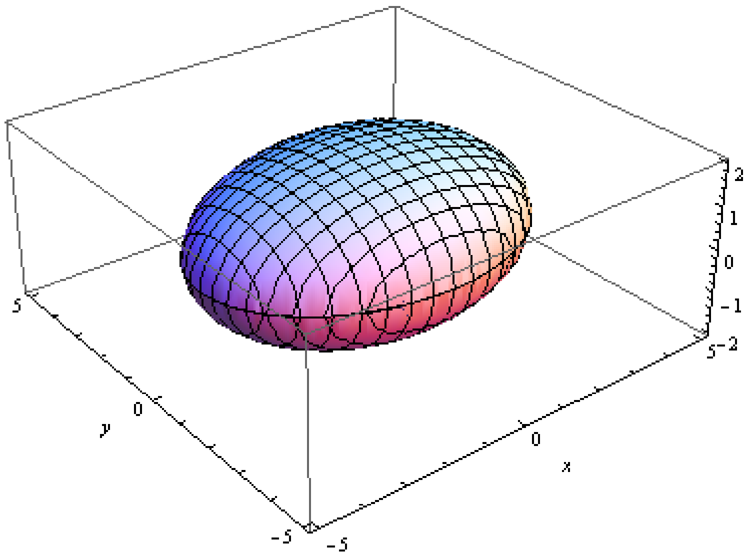
unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct pe elipsoid. Atunci:

- punctele de coordonate $(x_0, y_0, -z_0)$, $(x_0, -y_0, z_0)$, $(-x_0, y_0, z_0)$ aparţin elipsoidului, deci planele xOy, xOz, yOz sunt *plane de simetrie* ale elipsoidului;
- punctele de coordonate $(x_0, -y_0, -z_0)$, $(-x_0, y_0, -z_0)$, $(-x_0, -y_0, z_0)$ aparţin elipsoidului, deci axele Ox, Oy, Oz sunt *axe de simetrie* ale elipsoidului;
- punctul de coordonate $(-x_0, -y_0, -z_0)$ aparţine elipsoidului, deci O este *centru de simetrie* al elipsoidului.

Intersecţiile elipsoidului de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $xOz(y=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $yOz(x=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $Ox(y=z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-1=0 \Rightarrow A(a,0,0), A'(-a,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x=z=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow B(0,b,0), B'(0,-b,0)$
- intersecţia cu $Oz(x=y=0)$: $\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow C(0,0,c), C'(0,0,-c)$



Numerele a,b,c se numesc semiaxele elipsoidului. Dacă $a=b=c$, elipsoidul este o sferă. Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului sunt:

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0,\pi],\ \ \varphi \in [0,2\pi).$$

2.1.3 Hiperboloidul cu o pânză

Definiţia 2.4. *Se numeşte* ***hiperboloid cu o pânză*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

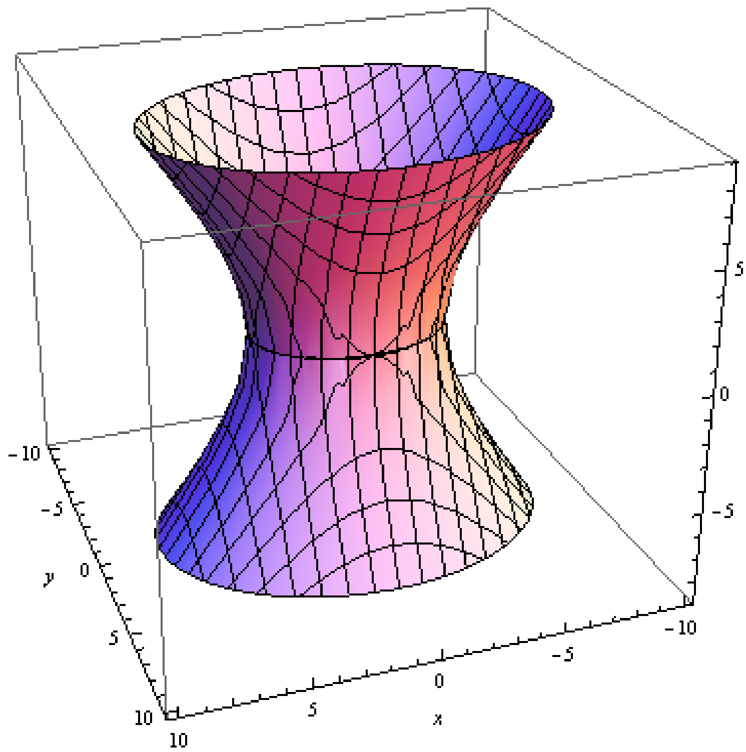
unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Ca şi în cazul elipsoidului, avem:

- planele de coordonate sunt plane de simetrie
- axele de coordonate sunt axe de simetrie
- originea este centru de simetrie

Tot hiperboloizi cu o pânză sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$



Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

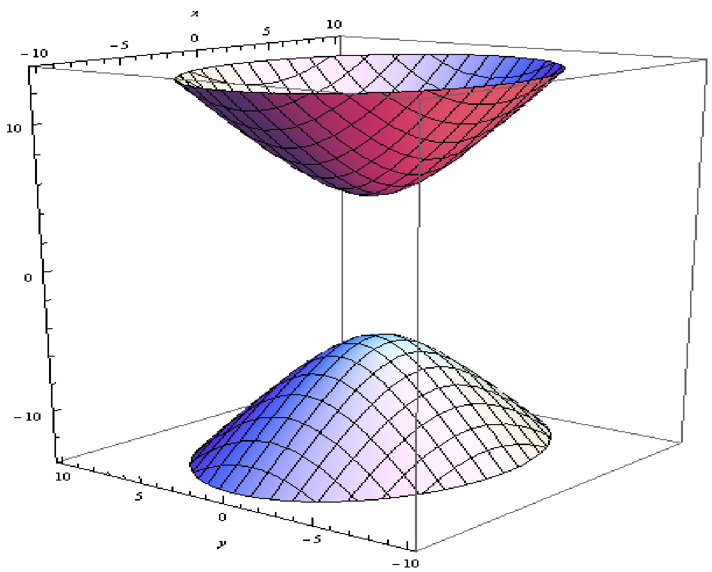
- intersecţia cu $xOy(z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $xOz(y=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $yOz(x=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $Ox(y=z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-1=0 \Rightarrow A(a,0,0), A'(-a,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x=z=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow B(0,b,0), B'(0,-b,0)$
- intersecţia cu $Oz(x=y=0)$: $-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z=z_0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z_0^2}{c^2}+1=0 \Rightarrow$ elipsă

2.1.4 Hiperboloidul cu două pânze

Definiţia 2.5. *Se numeşte **hiperboloid cu două pânze** o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$

unde $a>0, b>0, c>0$.



Ca şi în cazurile anterioare, avem:

- planele de coordonate sunt plane de simetrie
- axele de coordonate sunt axe de simetrie
- originea este centru de simetrie

Tot hiperboloizi cu două pânze sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $-\frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ elipsă sau punct sau $\varnothing$

2.1.5 Conul

Definiţia 2.6. *Se numeşte* ***con*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

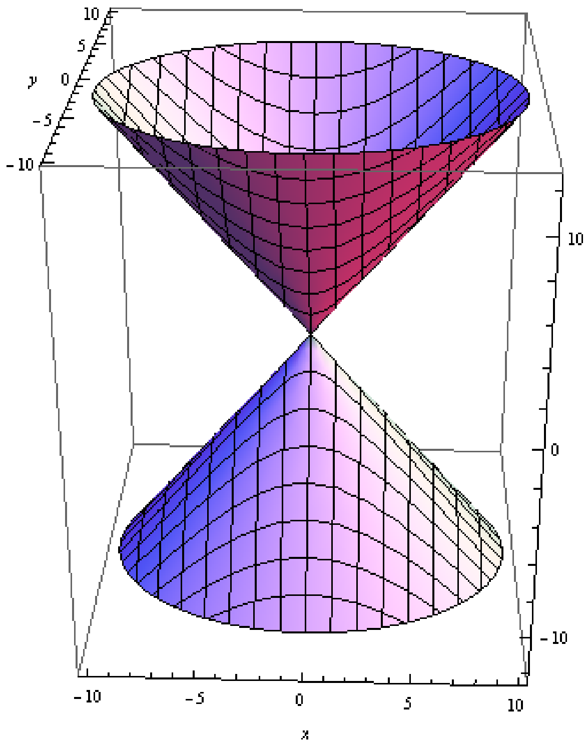
unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Ca şi în cazurile anterioare, avem:

- planele de coordonate sunt plane de simetrie
- axele de coordonate sunt axe de simetrie
- originea este centru de simetrie

Tot conuri sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Intersecţiile conului de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0, 0, 0)$
- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ două drepte
- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ două drepte

- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $-\frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ elipsă

2.1.6 Paraboloidul eliptic

Definiţia 2.7. *Se numeşte* ***paraboloid eliptic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

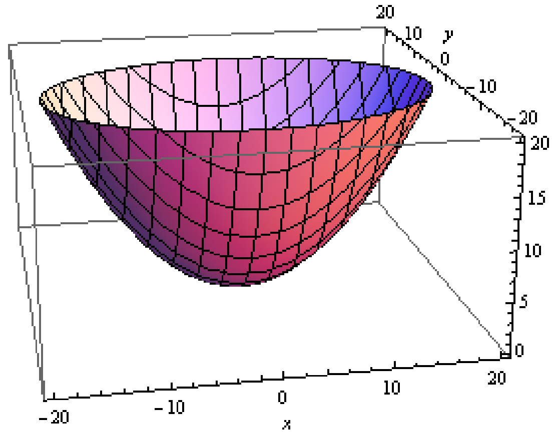
unde $a > 0, b > 0$.

Avem:

- planele xOz şi yOz sunt plane de simetrie
- axa Oz este axă de simetrie

Tot paraboloizi eliptici sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2y \text{ sau } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x.$$



Intersecţiile paraboloidului eliptic de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă
- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă
- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $2z = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z_0 \Rightarrow$ elipsă (pentru $z_0 > 0$)

2.1.7 Paraboloidul hiperbolic

Definiţia 2.8. *Se numeşte* ***paraboloid hiperbolic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

unde $a > 0, b > 0$.

Avem:

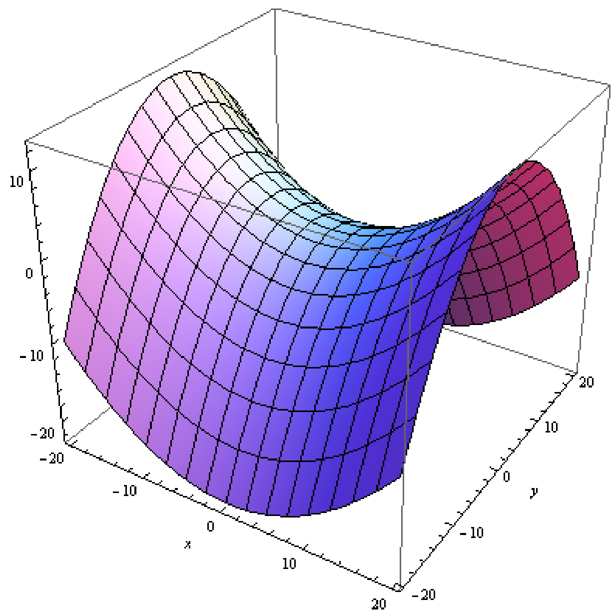
- planele xOz şi yOz sunt plane de simetrie
- axa Oz este axă de simetrie

Tot paraboloizi eliptici sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y \text{ sau } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x.$$

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z=0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ două drepte
- intersecţia cu $xOz(y=0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă
- intersecţia cu $yOz(x=0)$: $-\frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă
- intersecţia cu $Ox(y=z=0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x=z=0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oz(x=y=0)$: $2z = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z=z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z_0 \Rightarrow$ hiperbolă



2.1.8 Cilindri

Definiţia 2.9. *1. Se numeşte **cilindru eliptic** o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

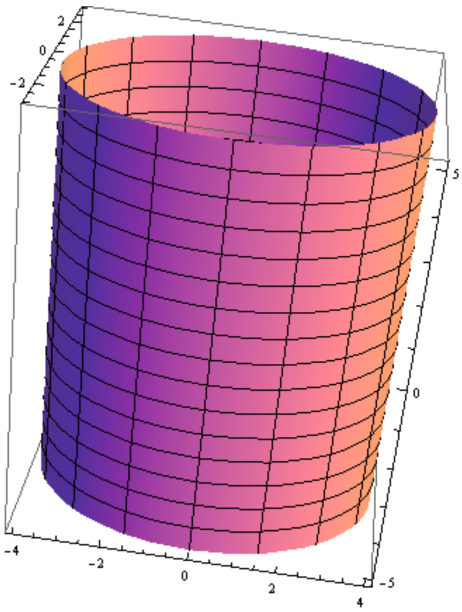
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ unde } a > 0, b > 0.$$

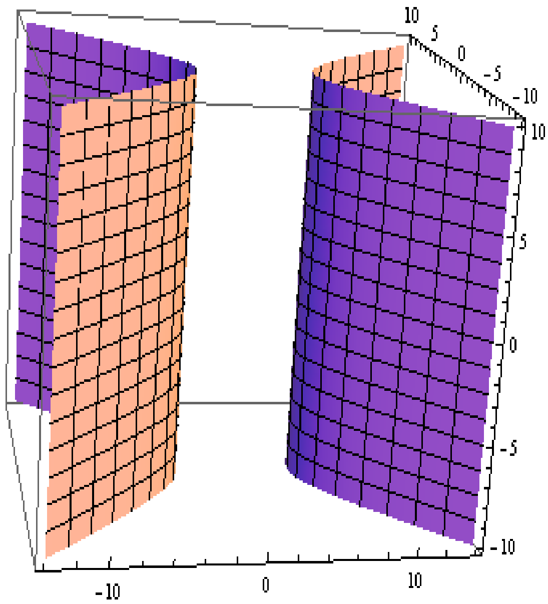
2. *Se numeşte **cilindru hiperbolic** o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

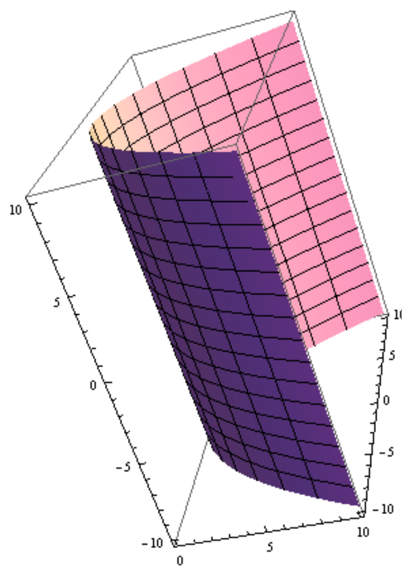
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \ \ \textit{unde } a > 0, b > 0.$$

3. *Se numeşte **cilindru parabolic** o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$y^2 = 2px, \ \ \textit{unde } p \in \mathbb{R}.$$







2.1.9 Generatoare rectilinii

Conul şi cilindrii sunt suprafeţe *riglate*, adică pot fi scrise ca reuniunea unei familii de drepte. În afară de acestea, hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic sunt de asemenea suprafeţe riglate.

Ecuaţia hiperboloidului cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se poate rescrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{2.4}$$

Considerăm familia de drepte $d_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$ unde α şi β nu sunt simultan nuli. Reuniunea acestei familii de drepte este chiar hiperboloidul cu o pânză anterior.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in d_{\alpha,\beta}$, deci $\begin{cases} \alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \end{cases}$.

- dacă $\alpha\beta \neq 0$, atunci înmulţind ecuaţiile anterioare şi împărţind prin $\alpha\beta$ obţinem $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0$ deci M_0 este pe hiperboloid;
- dacă $\alpha = 0, \beta \neq 0 \Rightarrow 1 + \frac{y_0}{b} = 0$, $\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = 0$, aşadar în (2.4) ambii membri sunt nuli, deci M_0 verifică ecuaţia hiperboloidului;
- dacă $\alpha \neq 0, \beta = 0 \Rightarrow 1 - \frac{y_0}{b} = 0$, $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$, aşadar în (2.4) ambii membri sunt nuli, deci M_0 verifică ecuaţia hiperboloidului;

Aşadar orice dreaptă din familia $d_{\alpha,\beta}$ este inclusă în hiperboloid.

Reciproc, se poate arăta că petru orice punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe hiperboloid există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{cases} \alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \end{cases}$ aşadar $M_0 \in d_{\alpha,\beta}$.

Dreptele din familia $d_{\alpha,\beta}$ se numesc **generatoare rectilinii** ale hiperboloidului cu o pânză.

O altă familie de generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ este

$$d_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}.$$

În mod analog găsim pentru paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ următoarele familii de generatoare rectilinii:

$$d_{\alpha,\beta}:\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\beta z\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\alpha\end{cases}\quad \text{şi } d_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\lambda z\end{cases}.$$

2.2 Reducerea cuadricelor la forma canonică

Fie cuadrica definită prin ecuaţia generală

$$\underbrace{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}}_{f(x,y,z)}=0,$$

Ca şi în cazul conicelor, pentru orice cuadrică se poate determina un reper cartezian ortogonal convenabil în raport cu care ecuaţia cuadricei are forma cea mai simplă, numită **formă canonică** sau **redusă**. La această formă se poate ajunge printr-o translaţie şi o rotaţie adecvată a reperului iniţial $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Un punct C se numeşte *centru de simetrie* al cuadricei dacă simetricul oricărui punct M al cuadricei în raport cu C aparţine de asemenea cuadricei.

Elipsoidul, hiperboloizii şi conul sunt *cuadrice cu centru*, iar paraboloizii sunt *cuadrice fără centru*.

Căutăm o translaţie a sistemului $Oxyz$ astfel încât originea noului sistem de coordonate $C(x_0,y_0,z_0)$ să fie centru de simetrie al cuadricei. Relaţiile dintre coordonatele x,y,z din reperul iniţial $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ şi coordonatele x',y',z' din sistemul translatat $\{C;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sunt:

$$\begin{cases}x=x_0+x'\\ y=y_0+y'\\ z=z_0+z'\end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială a cuadricei obţinem

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z'+2a_{23}y'z'+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0,$$

unde $\begin{cases} a'_{14} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} \\ a'_{24} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} \\ a'_{34} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} \end{cases}$, iar $a'_{44} = f(x_0, y_0, z_0)$.

Pentru ca $C(x_0, y_0, z_0)$ să fie centru de simetrie, trebuie ca ecuaţia în noile coordonate să nu conţină termeni de gradul 1, aşadar $a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = 0$, deci (x_0, y_0, z_0) sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases}.$$

Dacă $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, sistemul anterior are soluţie unică, iar ecuaţia cuadricei este

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, atunci cuadrica este în formă canonică.

Dacă cel puţin unul din coeficienţii a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, atunci efectuăm o rotaţie a reperului cartezian, folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii. Considerăm forma pătratică $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x', y', z') = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'$$

Se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

precum şi vectorii proprii ortonormaţi corespunzători $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$.

În reperul cartezian $\{C; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, cuadrica are ecuaţia canonică

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

iar relaţiile dintre coordonatele x', y', z' şi X, Y, Z sunt

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = S_{BB'} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

unde $S_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza $B = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ la baza $B' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$.

Dacă $\delta = 0$, atunci cuadrica este fără centru. În acest caz se efectuează mai întâi o rotaţie folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii, urmată de o translaţie adecvată.

2.2.1 Exemple

1. Reducerea la forma canonică a cuadricei de ecuaţie

$$5x^2 + 7y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 6y + 4z + 1 = 0.$$

- $a_{11} = a_{33} = 5, a_{22} = 7, a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1, a_{14} = 0, a_{24} = -3, a_{34} = 2, a_{44} = 1$
- $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$
- centrul de simetrie: $\begin{cases} 5x_0 + y_0 + z_0 = 0 \\ x_0 + 7y_0 + z_0 - 3 = 0 \\ x_0 + y_0 + 5z_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- translaţia $\begin{cases} x = 0 + x' \\ y = \frac{1}{2} + y' \\ z = -\frac{1}{2} + z' \end{cases}$
- $5x'^2 + 7y'^2 + 5z'^2 + 2x'y' + 2x'z' + 2y'z' - \frac{3}{2} = 0$
- valorile proprii $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 7-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 8$
- vectorii proprii $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -1), \overrightarrow{v_2} = (1, -1, 1), \overrightarrow{v_3} = (1, 2, 1)$
- rotaţia $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- ecuaţia canonică

$$4X^2 + 5Y^2 + 8Z^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{3}{10}} + \frac{Z^2}{\frac{3}{16}} - 1 = 0$$

deci cuadrica este un elipsoid.

2. Reducerea la forma canonică a cuadricei de ecuaţie

$$2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0.$$

- $a_{11} = a_{33} = 0, a_{22} = 2, a_{12} = 2, a_{13} = -4, a_{23} = -2,\ a_{14} = 3, a_{24} = a_{34} = 0, a_{44} = -5$
- $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$
- valorile proprii $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -4$
- vectorii proprii $\overrightarrow{v_1} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{v_2} = (1, 1, -1), \overrightarrow{v_3} = (1, 0, 1)$
- rotaţia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$
- $6y'^2 - 4z'^2 - \sqrt{6}x' + 2\sqrt{3}y' + 3\sqrt{2}z' - 5 = 0$
- $6\left(y' + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 4\left(z' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \sqrt{6}\left(x' + \frac{35}{8\sqrt{6}}\right) = 0$
- translaţia $\begin{cases} X = x' + \dfrac{35}{8\sqrt{6}} \\ Y = y' + \dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ Z = z' - \dfrac{3\sqrt{2}}{8} \end{cases}$
- ecuaţia canonică

$$6Y^2 - 4Z^2 - \sqrt{6}X = 0$$

deci cuadrica este un paraboloid hiperbolic.

2.3 Generări de suprafeţe

Prin ecuaţia unei suprafeţe în spaţiu se înţelege o ecuaţie în 3 variabile de forma

$$F(x, y, z) = 0, \text{ unde } F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

ecuaţie care este satisfăcută de coordonatele tuturor punctelor de pe suprafaţă în raport cu un reper fixat, dar nu este satisfăcută de coordonatele nici unui alt punct din afara suprafeţei.

Orice curbă în spaţiu poate fi privită ca intersecţia a două suprafeţe care conţin acea curbă şi care nu mai au alte puncte comune. Aşadar o curbă în spaţiu poate fi definită prin două ecuaţii de forma

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Exemple: o dreaptă este intersecţia dintre două plane , un cerc este intersecţia dintre o sferă şi un plan, etc.

2.3.1 Suprafeţe cilindrice

Definiţia 2.10. *Fie* $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k} \neq 0$ *şi o curbă* $(C) : \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$. *Se numeşte* ***suprafaţă cilindrică*** *o suprafaţă generată prin mişcarea unei drepte de direcţie* $\overrightarrow{v}$, *numită* ***generatoare****, care se sprijină pe curba* C, *numită* ***curbă directoare*** *a suprafeţei.*

Ecuaţiile unei drepte oarecare de direcţie $\overrightarrow{v}$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

pot fi rescrise sub forma de intersecţie de plane

$$d_{\lambda,\mu} : \begin{cases} nx - lz = \lambda \\ ny - mz = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Suprafaţa cilindrică este generată de acele drepte din familia $d_{\lambda,\mu}$ care se sprijină pe curba C (deci intersectează această curbă). Aşadar căutăm acele valori ale lui λ şi μ pentru care sistemul

$$\begin{cases} nx - lz = \lambda \\ ny - mz = \mu \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

este compatibil. Eliminând x, y, z din acest sistem, obţinem o relaţie între λ şi μ

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0 \tag{2.7}$$

numită *condiţie de compatibilitate.* Suprafaţa cilindrică este formată din toate dreptele $d_{\lambda,\mu}$ corespunzătoare valorilor lui λ şi μ care satisfac condiţia de compatibilitate (2.7), aşadar coordonatele punctelor acestei suprafeţe satisfac ecuaţia

$$\Phi(nx - lz, ny - mz) = 0$$

Exemplu: Să se găsească ecuaţia cilindrului având curba directoare de ecuaţii $\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ iar generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei.

- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \Rightarrow$ generatoarele $\begin{cases} x - z = \lambda \\ y - z = \mu \end{cases}$

- sistemul $\begin{cases} x - z = \lambda \\ y - z = \mu \\ x^2 - y^2 = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ este compatibil

- condiţia de compatibilitate $(2\lambda - \mu)^2 - (2\mu - \lambda)^2 + 3(\mu + \lambda) = 0$

- ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$$

2.3.2 Suprafeţe conice

Definiţia 2.11. *Fie $V(x_0, y_0, z_0)$ şi o curbă (C) : $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$. Se numeşte **suprafaţă conică** o suprafaţă generată prin mişcarea unei drepte, numită **generatoare** , care trece prin punctul fix V şi se sprijină pe curba C, numită **curbă directoare** a suprafeţei.*

Ecuaţiile unei drepte oarecare care trece prin V

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

pot fi rescrise sub forma

$$d_{\lambda,\mu} : \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{1}, \ \lambda = \frac{l}{n}, \mu = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Suprafaţa conică este generată de acele drepte din familia $d_{\lambda,\mu}$ care se sprijină pe curba C (deci intersectează această curbă). Aşadar căutăm acele valori ale lui λ şi μ pentru care sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\lambda} = \dfrac{y-y_0}{\mu} = \dfrac{z-z_0}{1} \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

este compatibil. Eliminând x, y, z din acest sistem, obţinem o relaţie între λ şi μ

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0 \tag{2.10}$$

numită *condiţie de compatibilitate*. Suprafaţa conică este formată din toate dreptele $d_{\lambda,\mu}$ corespunzătoare valorilor lui λ şi μ care satisfac condiţia de compatibilitate (2.13), aşadar coordonatele punctelor acestei suprafeţe satisfac ecuaţia

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$$

Exemplu: Să se găsească ecuaţia conului cu vârful în origine şi curba directoare de ecuaţii $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

- generatoarele $\dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{y}{\mu} = \dfrac{z}{1}$
- sistemul $\begin{cases} \dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{y}{\mu} = \dfrac{z}{1} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ este compatibil
- condiţia de compatibilitate $\lambda^2 + \mu^2 = 1$
- ecuaţia suprafeţei conice

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

2.3.3 Suprafeţe de rotaţie

Definiţia 2.12. *Fie o curbă* $(C) : \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$. *Se numeşte* ***suprafaţă de rotaţie*** *o suprafaţă generată prin rotirea curbei C în jurul unei drepte d, numită* ***axă de rotaţie****.*

Presupunem că axa de rotaţie are ecuaţiile

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Prin rotirea în jurul lui d, fiecare punct de pe curba C va descrie un cerc (numit *cerc generator*) care se află într-un plan perpendicular pe d şi are centrul pe d. Un astfel de cerc poate fi scris ca intersecţia dintre o sferă cu centrul pe d şi un plan perpendicular pe d:

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \end{cases} \tag{2.11}$$

Suprafaţa de rotaţie este generată de acele cercuri din familia $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ care se sprijină pe curba C (deci intersectează această curbă). Aşadar căutăm acele valori ale lui λ şi μ pentru care sistemul

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \\ F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

este compatibil. Eliminând x, y, z din acest sistem, obţinem o relaţie între λ şi μ

$$\Phi(\lambda^2, \mu) = 0 \tag{2.13}$$

numită *condiţie de compatibilitate*. Suprafaţa de rotaţie este formată din toate cercurile $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ corespunzătoare valorilor lui λ şi μ care satisfac condiţia de compatibilitate (2.13), aşadar coordonatele punctelor acestei suprafeţe satisfac ecuaţia

$$\Phi\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, lx + my + nz\right) = 0.$$

<u>Exemplu:</u> Să se găsească ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea dreptei de ecuaţii $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ în jurul dreptei de ecuaţii $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

- cercurile generatoare $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \end{cases}$

- sistemul $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \\ x + z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ este compatibil

- condiţia de compatibilitate $2\mu^2 - \lambda^2 + 4 = 0$

- ecuaţia suprafeţei de rotaţie

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 - z^2 = 4$$

2.4 Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia sferei în următoarele cazuri:

   (a) $C(1,-2,2),\ R=3$

   (b) $C=O,\ R=\sqrt{2}$

   (c) $C=O$ şi trece prin punctul $A(3,-1,2)$

   (d) $C(2,-1,3)$ şi trece prin punctul $B(-2,0,1)$

   (e) Punctele $A(1,2,-1)$ şi $B(3,4,5)$ sunt extremităţile unui diametru

   (f) $C(1,2,3)$ şi este tangentă planului $6x+7y-6z+31=0$

   (g) Sfera trece prin $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,5,0)$, $C(0,0,3)$
   R: $a=1, b=\frac{5}{2}, c=\frac{3}{2}$

2. Să se determine centrul şi raza sferelor:

   (a) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$

   (b) $x^2+y^2+z^2-8x-4y+2z+17=0$

   (c) $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-11=0$

   (d) $x^2+y^2+z^2-x+3y-4z+1=0$

   (e) $2(x^2+y^2+z^2)+4x-y+2z-5=0$

3. Fie sfera de ecuaţie

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0$$

   şi planul $(p):\ 2x-2y-z+9=0$.

   (a) Să se afle centrul şi raza sferei

   (b) Să se arate că $S\cap p\neq\varnothing$

   (c) Să se afle centrul şi raza cercului de intersecţie a sferei S cu planul p

   R: $C(3,-2,1), R=10, C_1(-1,2,3), r=8$
   Aceleaşi cerinţe pentru:

   (a) $(S):\ x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+1=0,\ (p):\ x+2y-z-3=0$

   (b) $(S):\ (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2-36=0,\ (p):\ 3x+y-z-9=0$

4. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la sfera

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+8=0$$

   în punctele de intersecţie ale sferei cu dreapta

$$(d):\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

   R: $S\cap d=\{M_1(1,0,1), M_2(3,-2,5)\}$

5. Fie elipsoidul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1=0$. Să se afle:

   (a) curbele de intersecţie ale elipsoidului cu planele de coordonate

   (b) intersecţiile elipsoidului cu axele de coordonate

   (c) ecuaţiile parametrice ale elipsoidului dat

6. Să se afle poziţia dreptei d faţă de elipsoidul

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}-1=0$$

   unde $(d): \frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$.

7. Să se scrie ecuaţia planului tangent la elipsoidul $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1=0$ în punctul $M_0(1,0,0)$. Să se reprezinte grafic elipsoidul dat.

8. Fie elipsoidul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}-1=0$ şi dreapta $(d): \ x=y=z$. Să se scrie ecuaţia planului tangent la elipsoid în punctele de intersecţie ale elipsoidului cu dreapta d.

9. Fie hiperboloidul cu o pânză $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}-1=0$.

   (a) să se reprezinte grafic

   (b) să se afle punctele de intersecţie cu dreapta $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$

   (c) să se scrie ecuaţiile planelor tangente la hiperboloid în punctele $A(1,2,3)$, $B(2,2,6)$

10. Fie hiperboloidul cu două pânze $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}+1=0$.

    (a) să se reprezinte grafic

    (b) să se afle punctele de intersecţie cu dreapta $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-6}{3}$

    (c) să se scrie ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul $M(2,4,-9)$

11. Fie conul $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$.

    (a) să se afle intersecţiile cu planele de coordonate şi cu axele de coordonate

    (b) să se afle intersecţiile conului cu planele $z=3$ şi $z=-3$

    (c) să se reprezinte grafic

12. Fie suprafeţele $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ şi $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$.

    (a) să se reprezinte grafic cele două suprafeţe

(b) să se afle punctele de intersecţie cu dreapta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$

13. Fie suprafaţa $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 9z$ şi dreapta $x = y = z$. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la suprafaţa dată în punctele de intersecţie ale suprafeţei cu dreapta.

14. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale suprafeţei S care trec prin punctul M în următoarele cazuri:

    (a) $S:\ x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ M(1,1,1)$

    (b) $S:\ 16x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 144 = 0,\ M(6,2,8)$

    (c) $S:\ 4x^2 + 9y^2 - 36z^2 - 36 = 0,\ M(6,-2,2)$

    (d) $S:\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} - 1 = 0,\ M(3,2,\sqrt{5})$

    (e) $S:\ 4x^2 - 9y^2 = 36z,\ M(3,0,1)$

    (f) $S:\ 4x^2 - z^2 = y,\ M(1,3,-1)$

    (g) $S:\ 4y^2 - z^2 = 2x,\ M(6,2,2)$

15. Să se recunoască următoarele cuadrice:

    (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4 = 0$

    (b) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$

    (c) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$

    (d) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 0$

    (e) $x^2 - 2y - 3z^2 = 0$

    (f) $x^2 - 2y + 3z^2 = 0$

    (g) $x^2 - 2y = 0$

    (h) $x^2 - 2y^2 - 4 = 0$

    (i) $x^2 + 3z^2 - 4 = 0$