Spații vectoriale

Fie $V \neq \emptyset$ și K un corp comutativ. Se definesc următoarele operații: $+ : V \times V \to V$ și $\cdot : K \times V \to V$. Dacă:

1) $(V,+)$ este grup abelian:
   - $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in V$
   - $x+y = y+x$, $\forall x,y \in V$
   - $\exists\, 0_V \in V$ a.î. $x+0_V = 0_V + x = x$, $\forall x \in V$
   - $\forall x \in V\ \exists\, (-x) \in V$ a.î. $x+(-x) = -x+x = 0_V$

2)
   - $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$, 1 fiind elementul unitate din K
   - $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x,y \in V$
   - $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha,\beta \in K$, $\forall x \in V$
   - $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x$, $\forall \alpha,\beta \in K$, $\forall x \in V$,
   - $x = x$, $\forall x \in V$

atunci V se numește <u>spațiu vectorial</u> peste K. K reprezintă corpul scalarilor, iar V, mulțimea vectorilor. „+" este adunarea vectorilor, „$\cdot$" este înmulțirea vectorilor cu scalari. V se va numi K-spațiu vectorial.

<u>Subspații vectoriale</u>

Fie V un K-spațiu vectorial și $W \subseteq V$ o submulțime nevidă. W este subspațiu vectorial al lui V, dacă W are structură de K-spațiu vectorial.

Exemple de subspații vectoriale:

Un spațiu vectorial are cel puțin două subspații, anume subspațiile improprii: 1) $\{0_V\}$ ← subspațiul nul
2) însuși spațiul V

$\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \leq n\}$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}[X]$

$W = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1 - 3x_2 = 0\}$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$

$W = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 2x_1 - 1\}$ <u>nu</u> este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$, deoarece nu conține $(0,0)$.

<u>Operații cu subspații vectoriale</u>

Fie V un K-spațiu vectorial și V_1, V_2 subspații ale acestuia.

- $V_1 + V_2 = \{x \in V \mid x = x_1 + x_2,\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}$ se numește suma subspațiilor V_1 și V_2.
- $V_1 \cap V_2$ este subspațiu în V. → Dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, atunci suma se
- $V_1 + V_2$ este subspațiu în V. ↗ numește <u>sumă directă</u> și se notează $\oplus$ ($V_1 \oplus V_2$).

<u>Observație:</u> În general, $V_1 \cup V_2 \subset V$ nu este subspațiu vectorial.

Orice vector din V se scrie în mod unic ca suma dintre un vector din V_1 și unul din V_2 dacă și numai dacă suma este directă.

$\text{Span}(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in K, x_i \in S, i = \overline{1,n}\}$ mulțime combinațiilor liniare de vectori din S, cu coeficienți din K.

$\text{Span}(S)$ se numește subspațiul generat de S, unde $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$.
O altă notație este $\langle S \rangle$.

S se numește **sistem liniar independent (SLI)** dacă $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0_V$ are loc doar dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$. În caz contrar, S este **sistem liniar dependent** (cu alte cuvinte, există $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,m}$, nu toți nuli, pentru care $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0_V$).

S se numește **sistem de generatori** pentru V dacă $\forall x \in V$ se exprimă ca o combinație liniară de vectori din S, adică $\exists \alpha_i \in K$, $i = \overline{1,m}$ a.î. $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$. Dacă sistemul de generatori cuprinde un număr finit de vectori, atunci V se numește finit generat.

Dacă S este SLI și SG $\Rightarrow$ S se numește bază.

Exemple: 1) K^n: $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, … $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$

2) $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, $B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$

3) $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \right\}$

Numărul elementelor din bază se numește **dimensiune**.

Teorema lui Grassmann

Dacă V_1 și V_2 sunt două subspații ale lui V, K-spațiu vectorial finit dimensional V, atunci $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

Exerciții:

1. Fie subspațiile $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$, $V_2 = \langle (1, -1, 2), (3, 1, 0) \rangle$.
Găsiți câte o bază și dimensiunea subspațiilor $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.
Este suma $V_1 + V_2$ directă?

Fie $x = \alpha$, $z = \beta \Rightarrow y = 2\alpha + \beta$

$V_1 = (\alpha, 2\alpha + \beta, \beta) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1)$

Deci $V_1 = \langle (1, 2, 0), (0, 1, 1) \rangle$ (SG)

SLI:

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ vectorii formează SLI

$\{(1,2,0), (0,1,1)\}$ SG + SLI $\Rightarrow \{(1,2,0), (0,1,1)\}$ bază în $V_1 \Rightarrow \dim V_1 = 2$

Pentru V_2: $\{(1,-1,2), (3,1,0)\}$ SG.
SLI: $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ vectorii formează SLI $\Big\} \Rightarrow \{(1,-1,2), (3,1,0)\}$ bază în $V_2 \Rightarrow \dim V_2 = 2$

Pentru $V_1 + V_2$, îi putem calcula dimensiunea ca fiind rangul matricei formate din vectorii din ambele baze, transpuși:

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = 3$. Baza va fi formată din $(1,2,0), (0,1,1), (1,-1,2)$, deoarece sunt liniar independenți. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O bază în $V_1 + V_2$ este $\{(1,2,0), (0,1,1), (1,-1,2)\}$.

Conform teoremei lui Grassmann, $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) \Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 4 - 3 =$

$\Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 1$

$\underbrace{(x, y, z) = \alpha(1, -1, 2) + \beta(3, 1, 0)}_{V_2}$, $\underbrace{2x - y + z = 0}_{V_1} \Rightarrow x = \alpha + 3\beta$, $y = -\alpha + \beta$, $z = 2\alpha$

Dar $2(\alpha + 3\beta) - (-\alpha + \beta) + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 3\beta + \alpha - \beta + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 5\alpha + 5\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

$x = -\beta + 3\beta = 2\beta$, $y = +\beta + \beta = +2\beta$, $z = -2\beta$

Prin urmare, $(x, y, z) = (2\beta, 2\beta, -2\beta) = \beta(2, 2, -2) \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \langle (2, 2, -2) \rangle$ (SG) $\Big\}$ bază
$\{(2, 2, -2)\}$ SLI

Schimbarea de bază

Prop. $(V,+,\cdot)_{/\mathbb{K}}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $S = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Următoarele afirmații sunt echivalente: 1) S-bază
2) S- SLi
3) S- SG

Teoremă. $\forall B_1, B_2$ baze in V, dacă $|B_1| = |B_2| = n = \dim_{\mathbb{K}} V$

Def. $\forall x \in V, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ a.î. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, unde $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază. Mulțimea $\{x_1, \dots, x_n\}$ se numește mulțimea coordonatelor lui x in raport cu reperul R.

Obs. Reper = bază ordonată

Def. Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ și $R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ repere in V. Există o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ astfel încât $e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, $\forall i = \overline{1,n}$, numită matricea de trecere de la un reper la altul.

Obs. $R \xrightarrow{A} R' \xrightarrow{A^{-1}} R$, with $R \xrightarrow{I_n} R$. **Obs.** $\forall x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$, $X = AX'$

Def. R și R' sunt repere la fel orientate $\Leftrightarrow \det A > 0$
opus orientate $\Leftrightarrow \det A < 0$

Criteriul de liniar independență:

Fie V un spațiu de $\dim = n$ și $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ sistem de vectori cu $m \le n$.

S este SLi $\Leftrightarrow$ matricea componentelor vectorilor din S are rangul maxim, adică m (vectorii puși pe coloane)

Exerciții:

1) Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ un spațiu vectorial 3-dimensional și $R=\{v_1,v_2,v_3\}$ reper în V.

Fie $R'=\{v_1'=v_1, v_2'=v_1+v_2, v_3'=v_1+v_2+v_3\}\subseteq V$.

a) Să se arate că R' este reper în V și găsiți matricea de trecere de la R la R'.

b) Dacă $v\in V$ are coordonatele (x_1,x_2,x_3) în raport cu reperul R, atunci care sunt coordonatele lui v în raport cu R'?

a) Matricea componentelor vectorilor din R' în raport cu ~~B~~ reperul R:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\ \text{rang}\,A=3=\text{maxim}\overset{\text{crit}}{\underset{Li}{\Longrightarrow}} R' \text{ este SLi și } |R'|=3,$$

deci R' reper în V și

$R\xrightarrow{A}R'$. Puteați găsi-o și cu formula aia...

b) Fie $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ și $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$ coordonatele lui V în raport cu R'.

Avem $X=AX' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'+x_2'+x_3'\\x_2'+x_3'\\x_3'\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3'=x_3$

$x_2'+x_3'=x_2 \Leftrightarrow x_2'=x_2-x_3$

$x_1'+x_2'+x_3'=x_1 \Leftrightarrow x_1'=x_1-x_3-(x_2-x_3)=x_1-x_2$

Deci (x_1-x_2, x_2-x_3, x_3) sunt coordonatele în raport cu R'.

2) Fie $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V \overset{not}{=} \left\{x\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases}2x_1+x_2=0\\ x_1+4x_3=0\end{cases}\right\}$.

a) Precizați o bază în V.

b) $V' = ?$ a.î. $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$

c) Fie $x=(1,1,2)$. Să se descompună x în raport cu $V\oplus V'$.

a) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&0\\1&0&4&0\end{array}\right)$. Fie $x_3=\alpha$ necunoscută secundară.

rang $A=2$

$x_1 = -4x_3 = -4\alpha$

$x_2 = -2x_1 = -2(-4\alpha) = 8\alpha$

$V = \{(x_1,x_2,x_3)=(-4\alpha,8\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} = \langle\{(-4,8,1)\}\rangle$

$R=\{(-4,8,1)\}$ este bază în V. $\dim_{\mathbb{R}} V = 1 = 3 - \text{rang}\, A$!!!!

b) Îl extindem pe V la un reper în $\mathbb{R}^3$:

$B = \begin{pmatrix}-4&1&0\\8&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. rang $B = 3 = \max \Rightarrow R\cup\{e_1,e_2\}$ reper în $\mathbb{R}^3$,

$V' = \langle\{e_1,e_2\}\rangle$

vectori random aleși de noi, cu condiția

c) $x=(1,1,2) = a(-4,8,1)+b(1,0,0)+c(0,1,0) = (-4a+b,\, 8a+c,\, a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}-4a+b=1\\ 8a+c=1\\ a=2\end{cases} \Rightarrow b=9,\ c=-15$. Deci coordonatele lui x sunt $\{2,9,-15\}$.