Part 1 of 3

(A1) Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicație liniară care în baza canonică are matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificați dacă vectorul $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ este în $\text{Ker}(f)$ și $\text{Im}(f)$

(b) Este w de la punctul (a) un vector propriu pentru f?

(c) Aflați vectorii și valorile proprii ale matricei A.

(d) Diagonalizați matricea A, dacă este posibil

Part 2 of 3

(A2) În $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorii

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 29 \\ -13 \end{pmatrix}$$

și subspațiile vectoriale $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ și $V = \langle v_4, v_5 \rangle$

Determinați bazele și dimensiunea pentru subspațiile: $U, V, U+V$ și $U \cap V$

(G1) Fie conica: $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$

Arătați că definește o parabolă și determinați focarul acesteia

Part 3 of 3

I Fie în E^2 triunghiul ΔABC : $A=(2,0)$, $B=(0,2)$ și $C=(2,2)$

Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfisme a.î. $\mathcal{M}_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix}$

și $\mathcal{M}_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & \sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & -\cos \pi/6 \end{pmatrix}$ unde $B_0 = \{ l_2 = (0,1), l_1 = (1,0) \}$

este bază canonică în E^2

Fie $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ și $A'' = g(A)$, $B'' = g(B)$, $C'' = g(C)$

1) Repr. grafic ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$ într-un sist cartezian

2) Arătați că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \equiv \Delta A''B''C''$

3) Det $h = g \circ f$ și repr f, g, h în coordonate și matricial

4) Arătați că $g \circ f \in Aut(E_0^2)$

5) Repr f ca o comp de simetrii față de drepte

II Se consideră în E_0^3 cuadrica algebrică:

$$Q(x^1, x^2, x^3) = \frac{(x^1)^2}{4} + \frac{(x^2)^2}{9} + \frac{(x^3)^2}{25} - 1$$

1) Calculați invariații ortogonali ai acestei cuadrice și det acest centru

2) arătați că această cuadrică are centru unic și det acest centru

3) Cum se numește cuadrica? Desen

II' Se consideră în $(E^3, \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ vectorii

$u = (2,5,4)$, $v = (0,2,2)$, $w = (2,0,2)$

Calculați

1) $\langle u, v \rangle$ și $u \times v$

2) $\langle u \times v, w \rangle$

3) $\| u \times v \|$

4) $\cos(\widehat{u, v})$