Capitolul 9

CONICE ŞI CUADRICE

9.1 Conice pe ecuaţii reduse

9.1.1 Cercul

Definiţia 9.1 *Fie un plan* (π) *şi un reper ortonormat* $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. **Cercul** *este locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că sunt egal depărtate, de un punct fix. Punctul fix,* $M_0(x_0, y_0)$ *se numeşte* **centrul cercului** *iar distanţa de la punctele cercului la punctul fix* R *se numeşte* **raza** *cercului.*

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al cercului. Dacă $\overline{r}$ şi $\overline{r}_0$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M respectiv C, atunci

$$\|\overline{r} - \overline{r}_0\| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{9.1}$$

Dacă centrul cercului este în origine, atunci ecuaţia cercului va fi $x^2 + y^2 = R^2$.

Teorema 9.1 *O ecuaţie de forma*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \text{ cu } a^2 + b^2 - c > 0 \tag{9.2}$$

reprezintă un cerc cu centrul în punctul $(-a, -b)$ *şi de rază* $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Demonstraţie. Putem scrie $(x+a)^2 + (y+b)^2 + c - a^2 - b^2 = 0$,deci cu $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, $R^2 = a^2 + b^2 - c > 0$ obţinem (9.1).■

Ecuaţia (9.2) se numeşte **ecuaţia generală a cercului**. În ecuaţia generală a cercului intervin trei parametrii a, b, c, deci un cerc este determinat de trei condiţii.

Teorema 9.2 *Ecuaţia cercului care trece prin trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ este*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9.3}$$

Demonstraţie. Dacă punctele $M_i(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ se găsesc pe cerc, atunci coordonatele acestor puncte verifică ecuaţia cercului. Considerăm un punct $M(x, y)$ oarecare de pe cerc. Obţinem astfel un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute a, b, c

$$\begin{cases} x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \\ x_1^2+y_1^2+2ax_1+2by_1+c=0 \\ x_2^2+y_2^2+2ax_2+2by_2+c=0 \\ x_3^2+y_3^2+2ax_3+2by_3+c=0 \end{cases}.$$

Condiţia de compatibilitate a sistemului este ca determinantul caracteristic să fie nul, adică (9.3). Se observă că numărul

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

este coeficientul lui $x^2 + y^2$, deci pentru ca (9.3) să reprezinte ecuaţia unui cerc trebuie ca $A \neq 0$, ceea ce reprezintă condiţia ca cele trei puncte să nu fie coliniare.■

Deducerea ecuaţiei tangentei la cerc într-un punct al său, $M_1(x_1, y_1)$.

Dacă $P(x, y)$ este un punct oarecare de pe tangentă, atunci vectorul $\overrightarrow{CM_1} = (x_1 - x_0)\overrightarrow{i} + (y_1 - y_0)\overrightarrow{j}$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_1P} = (x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j}$, adică

$\langle \overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{M_1P} \rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_0)[(x - x_0) + (x_0 - x_1)] + (y_1 - y_0)[(y - y_0) + (y_0 - y_1)] = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) - [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = R^2. \tag{9.4}$$

Ecuaţia (9.4) se numeşte **ecuaţia tangentei la cerc dusă printr-un punct al cercului obţinută prin dedublare.**

Ecuaţiile parametrice ale cercului:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dacă cercul are centrul în origine obţinem parametrizarea:

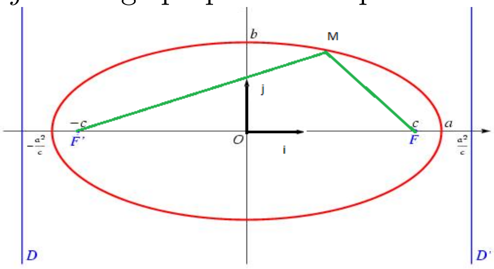
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

9.1.2 Elipsa

Definiţia 9.2 Elipsa *este locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că suma distanţelor la două puncte fixe, F şi F' (numite focare), este constantă şi egală cu $2a, a \in \mathbb{R}_+$.*

Deducerea ecuaţiei elipsei.

Pentru a deduce ecuaţia elipsei alegem un reper preferenţial: originea O a reperului se consideră în mijlocul segmentului FF', versorul $\overrightarrow{i}$ este versorul vectorului $\overrightarrow{OF}$ iar versorul $\overrightarrow{j}$ se alege perpendicular pe $\overrightarrow{i}$ în O.



Din felul în care am ales reperul $\mathcal{R}$ deducem că $\overrightarrow{OF} = c\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{OF'} = -c'\overrightarrow{i}$, unde $c > 0$. Deci $F(c,0), F'(c',0)$ şi dacă $M(x,y)$ este un punct al locului geometric, atunci

$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a, a > 0$ fixat.

Rezultă $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Ridicând la pătrat şi efectuând simplificările obţinem:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + xc. \tag{9.5}$$

Pentru $x > -\frac{a^2}{c}$ ridicăm din nou la pătrat şi efectuând simplificările obţinem:

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2-c^2) = 0.$

Notăm $c^2 = a^2 - b^2$, dacă $a > b$, sau $c^2 = b^2 - a^2$, dacă $b > a$ şi obţinem

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{9.6}$$

Ecuaţia (9.6) reprezintă **ecuaţia elipsei de semiaxe a şi b.**

Din (9.5) obţinem $\frac{c}{a}x + a = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Notăm $e = \frac{c}{a}$. e se numeşte **excentricitatea** elipsei şi obţinem

$$e(x+\frac{a}{e}) = \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{9.7}$$

Observăm că $e < 1$, în cazul elipsei ($a > c$ deoarece $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| > \left\|\overrightarrow{FF'}\right\|$).

$x + \frac{a}{e}$ reprezintă distanţa de la punctul $M(x,y)$ la dreapta de ecuaţie $x = -\frac{a}{e}$, numită **directoarea** elipsei. **Elipsa are două drepte directoare** de ecuaţii $x = -\frac{a}{e}$ şi $x = \frac{a}{e}$ iar punctele elipsei se găsesc între aceste drepte, $x \geq -a > -\frac{a}{e}$ şi $x \leq a < \frac{a}{e}(\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} > a)$.

Relaţia (9.7) ne arată că **raportul distanţelor de la M la F' şi la dreapta directoare de ecuaţie $x = -\frac{a}{e}$ este constantă şi egală cu excentricitatea elipsei care este subunitară.**

Observaţia 9.1 Axa Ox intersectează elipsa în punctele $(-a, 0)$ şi $(a, 0)$ numite vârfurile elipsei. Axa Oy intersectează elipsa tot în vârfuri, $(0, b), (0, -b)$. Axele Ox şi Oy sunt axe de simetrie pentru elipsă. Punctul $(0, 0)$ numit centrul elipsei este centru de simetrie.

Tangenta la elipsă

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{9.8}$$

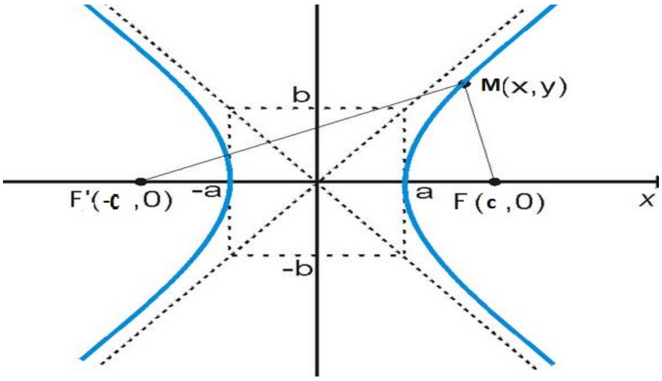
Ecuaţia (9.8) a tangentei la elipsă dusă printr-un punct (x_0, y_0) de pe elipsă se obţine prin dedublare.

Reprezentarea paramertică a elipsei:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

9.1.3 Hiperbola

Definiţia 9.3 Hiperbola *este locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că diferenţa distanţelor la două puncte fixe, F şi F' (numite* **focare***), este constantă şi egală cu* $2a, a \in \mathbb{R}_+$.



Deducerea ecuaţiei hiperbolei.

$\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF}\right\| = 2a$, $a > 0$ fixat, dacă $\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| > \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ sau $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a$, dacă $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| > \left\|\overrightarrow{MF'}\right\|$.

Rezultă două ecuaţii cărora le corespund cele două ramuri ale hiperbolei,
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ şi $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$.
Prin calcul şi dacă notăm $c^2 = a^2 + b^2$ şi obţinem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{9.9}$$

Ecuaţia (9.9) reprezintă **ecuaţia hiperbolei de semiaxe** a **şi** b.

Din (**??**) obţinem $-\frac{c}{a}x - a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Notăm $e = \frac{c}{a}$, numită **excentricitatea hiperbolei.** Observăm că $e > 1$, în cazul hiperbolei ($a < c$ deoarece $\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF}\right\| < \left\|\overrightarrow{FF'}\right\|$).

$x + \frac{a}{e}$ reprezintă distanţa de la punctul $M(x, y)$ la dreapta de ecuaţie $x = -\frac{a}{e}$, numită **directoarea hiperbolei. Hiperbola are două drepte directoare** de ecuaţii $x = -\frac{a}{e}$ şi $x = \frac{a}{e}$ iar punctele hiperbolei se găsesc în exteriorul acestor drepte, $x \leq -a < -\frac{a}{e}$ şi $x \geq a > \frac{a}{e}(\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} < a)$.

Relaţia (**??**) ne arată că **raportul distanţelor de la M la F' şi la dreapta directoare de ecuaţie $x = -\frac{a}{e}$ este constantă şi egală cu excentricitatea hiperbolei.**

Din ecuaţia (9.9) a hiperbolei obţinem: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ sau $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Rezultă că dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$ sunt asimptote. Într-adevăr, $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a}x\right) = 0$. Dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$ se numesc **asimptotele hiperbolei.**

Tangenta la hiperbolă

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{9.10}$$

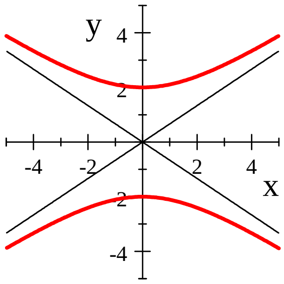
Ecuaţia (9.10) a tangentei la hiperbolă dusă printr-un punct (x_0, y_0) de pe hiperbolă se obţine prin dedublare.

Observaţia 9.2 Axa Ox intersectează hiperbola în punctele $(-a, 0)$ şi $(a, 0)$ numite vârfurile hiperbolei. Axa Ox se numeşte axă transversă. Axa Oy nu intersectează hiperbola. Axele Ox şi Oy sunt axe de simetrie pentru hiperbolă. Punctul $(0, 0)$ numit centrul hiperbolei este centru de simetrie.

Observaţia 9.3 Hiperbola

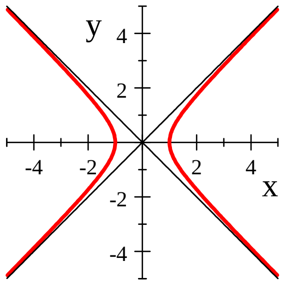
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{9.11}$$

este numită şi **hiperbola conjugată** hiperbolei (9.9). Are aceleaşi asimptote, aceleaşi axe. Exemplu de hiperbolă conjugată: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} + 1 = 0$



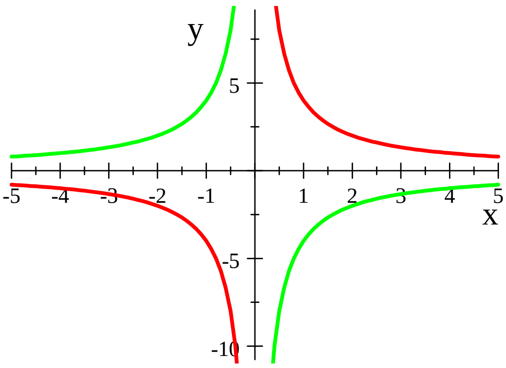
Dacă $a = b$, **hiperbola se numeşte echilateră** şi are ecuaţia $x^2 - y^2 = a^2$. Asimptotele sale sunt bisectoarele axelor, $x = y$ şi $x = -y$.

Exemplu de hiperbolă echilateră: $x^2 - y^2 = 1$



Tot hiperbolă echilateră este $xy = \pm a^2$. În acest caz asimptotele hiperbolei sunt axele de coordonate.

Exemple: $xy = 2^2$ *(roşu) şi respectiv* $xy = -2^2$*(verde).*



$\frac{4}{x}$

Reprezentarea paramertică a hiperbolei:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \end{cases}, \varphi \in \mathbb{R}.$$

9.1.4 Parabola

Definiţia 9.4 **Parabola** *este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, F, numit numit* **focar**, *şi o dreaptă dată, numită dreaptă* **directoare**.

Deducerea ecuaţiei parabolei.

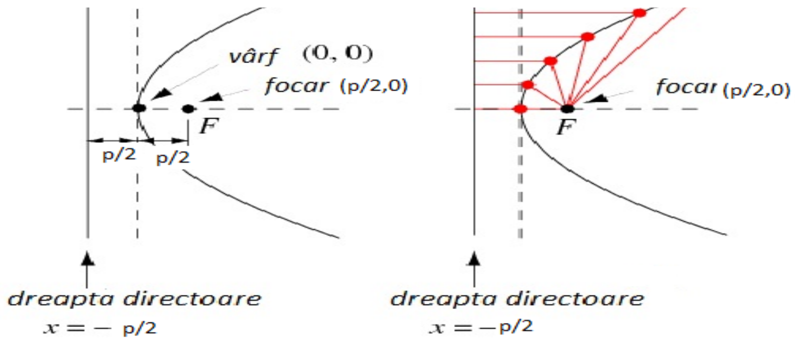


Figura 9.1:

Pentru a deduce ecuaţia parabolei alegem un reper preferenţial: originea O a reperului se alege în vârful parabolei, versorul $\overrightarrow{i}$ este versorul vectorului $\overrightarrow{OF}$ iar versorul $\overrightarrow{j}$ se alege perpendicular pe $\overrightarrow{i}$ în O.

Din felul în care am ales reperul $\mathcal{R}$ deducem că $\overrightarrow{OF} = \frac{p}{2}\overrightarrow{i}$ şi dreapta directoare de ecuaţie $x = -\frac{p}{2}$. Trebuie să avem $x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 2px. \tag{9.12}$$

Tangenta la parabolă

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{9.13}$$

Ecuaţia (9.13) a tangentei la parabolă dusă printr-un punct (x_0, y_0) de pe parabolă se obţine prin dedublare.

Observaţia 9.4 Excentricitatea parabolei este $e = 1$.

Razele care pornesc din focar sunt reflectate de parabolă într-un fascicul paralel cu axa Ox a parabolei. Această proprietate este folosită la construcţia farurilor.

O reprezentare parametrică a parabolei este $y = t, x = t^2/(2p)$.

9.2 Conice pe ecuaţii generale

Facultativ

Fie reperul $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ într-un plan (π).

Definiţia 9.5 Conica *este locul georetric* (Γ) *al punctelor* M *din planul* (π) *ale căror coordonate* (x, y)*, în raport cu reperul ortonormat* $\mathcal{R}$*, satisfac ecuaţia:*

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma) : f(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \\
&\textit{unde } a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \{0, 1, 2\}.
\end{aligned}
\tag{9.14}
$$

Matriceal, ecuaţia conicei se scrie:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

Utilizând rotaţia şi translaţia realizăm o schimbare de reper de la reperul $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la un reper adecvat orientat pozitiv, numit reper canonic, faţă de care conica (9.14) să aibă cea mai simplă formă posibilă, numită forma canonică.

9.2.1 Algoritmul de aducere la forma canonică a unei conice.

Pasul I. Se realizează **rotaţia** sistemului de axe, $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, astfel:

Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Calculăm ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{9.15}$$

Corespunzător valorilor proprii λ_1 şi λ_2 avem vectorii proprii $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Fie $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u_1}\|}\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u_2}\|}\overrightarrow{u_2}$ versorii vectorilor proprii. $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dau direcţiile noilor axe Ox' şi respectiv Oy'.

Dacă $\overrightarrow{e_1} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{e_2} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}$ atunci matricea de rotaţie

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

trebuie să indeplinească condiţia ca $\det \mathbf{R} = 1$ (avem în vedere posibilitatea înlocuirii unuia din versori prin opusul său sau renumerotarea acestora) pentru a fi la fel orientată cu baza canonică.

Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ecuaţia conicei după rotaţie devine

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0$

Pasul II.

Efectuăm **translaţia reperului,** $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \rightarrow \mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ conica va fi o conică cu centru.

Restrângem pătratele şi efectuăm o translaţie

$$\lambda_1\left(x'^2+2\frac{a_{10}^{'}}{\lambda_1}x'+(\frac{a_{10}^{'}}{\lambda_1})^2\right)+\lambda_2\left(y'^2+2\frac{a_{20}'}{\lambda_2}y'+(\frac{a_{20}'}{\lambda_2})^2\right)+a_{00}'-\frac{(a_{10}^{'})^2}{\lambda_1}-\frac{(a_{20}')^2}{\lambda_2}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a_{10}^{'}}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)^2+a_{00}'-\frac{(a_{10}^{'})^2}{\lambda_1}-\frac{(a_{20}')^2}{\lambda_2}=0$$

Notăm

$$\begin{cases} X=x'+\dfrac{a_{10}^{'}}{\lambda_1}\\ Y=y'+\dfrac{a_{20}'}{\lambda_2}\end{cases}$$

şi obţinem: $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+a_{00}'-\dfrac{(a_{10}^{'})^2}{\lambda_1}-\dfrac{(a_{20}')^2}{\lambda_2}=0$ care reprezintă forma canonică a conicei. Centrul conicei va fi

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{a_{10}^{'}}{\lambda_1}\\ y'=-\dfrac{a_{20}'}{\lambda_2}\end{cases}$$

în reperul $\mathcal{R}'=(O,\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$. Coordonatele centrului conicei raportate la reperul iniţial,

$$\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{a_{10}^{'}}{\lambda_1}\\ -\dfrac{a_{20}'}{\lambda_2}\end{pmatrix}$$

reprezintă originea reperului $\mathcal{R}''=(C,\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'})$, $C(x_0,y_0)$

Discuţia tipului conicei

λ_1	λ_2	$a_{00}'-\dfrac{(a_{10}^{'})^2}{\lambda_1}-\dfrac{(a_{20}')^2}{\lambda_2}$	Tipul conicei
+	+	+	elipsă imaginară
+	+	-	elipsă reală
+	-		hiperbolă
+	+		hiperbolă
+	+	0	un punct
+	-	0	două drepte concurente
-	+		două drepte concurente

Desenăm graficul conicei în noul sistem de axe. (exemplele 9.1,9.2). Algoritmul se opreşte.

Pasul III Dacă $\lambda_1\lambda_2=0$. În acest caz o valoare proprie este nulă deoarece.(ambele valori proprii nu pot fi nule). Presupunem că $\lambda_2\neq 0$.

Vom obţine $\lambda_2(y')^2+2a_{10}^{'}x'+2a_{20}'y'+a_{00}^{'}=0$. Restrângem pătratele şi efectuăm o translaţie

$$\lambda_2\left(y'^2+2\frac{a_{20}'}{\lambda_2}y'+\left(\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)^2\right)=\frac{(a_{20}')^2}{\lambda_2}-a_{00}^{'}-2a_{10}^{'}x'\Leftrightarrow$$

$$\lambda_2\left(y'+\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)^2=-2a_{10}^{'}\left(x'+\frac{a_{00}^{'}-\frac{a_{20}'}{\lambda_2}}{a_{10}^{'}}\right)$$

Notăm

$$\begin{cases} Y = y' + \dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \\ X = x' + \dfrac{a'_{00} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a'_{10}} \end{cases}$$

iar forma canonică va fi:

$$\lambda_2 Y^2 = -2a'_{10}X \Leftrightarrow Y^2 = -\frac{2a'_{10}}{\lambda_2}X.$$

Dacă $a'_{10} = 0$ conica se reduce la două drepte confundate. Dacă $a'_{10} \neq 0$ conica este o parabolă.

Vîrful parabolei va fi şi originea noului reper. Coordonatele originii în sistemul rotit vor fi: $y' = -\dfrac{a'_{20}}{\lambda_2}, x' = -\dfrac{a'_{00} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a'_{10}}$. În sistemul iniţial coordonatele originii se obţin aplicînd rotaţia:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \\ -\dfrac{a'_{00} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a'_{10}} \end{pmatrix}.$$

Se desenează parabola. Algoritmul se opreşte.

(Exemplul 9.3)

Observaţia 9.5 Conicele nedegenerate sunt elipsa (cercul este un caz particular de elipsă), hiperbola şi parabola. Conicele degenerate sunt punctul, două drepte paralele şi două drepte secante.

9.2.2 Exemple

Exemplul 9.1 *Să se aducă la forma canonică conica*

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

şi să se reprezinte grafic.

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0$$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right).$$

Matricea de rotaţie este:

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{R} = 1$.

Transformarea coordonatelor este dată de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} -$$

$$-2 \begin{pmatrix} 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 9 = 0$$

$$(x')^2 + 9(y')^2 - 18y'\sqrt{2} + 9 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 + 9\left[(y')^2 - 2y'\sqrt{2} + 2\right] - 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x')^2 + 9(y' - \sqrt{2})^2 - 9 = 0$$

Conica este o elipsă. Notăm

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Forma canonică este $X^2 + 9Y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{9} + Y^2 - 1 = 0$.

Originea reperului în care conica are forma canonică este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trasarea graficului:

-**rotaţia sistemului de axe**: reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ trece în reperul $\mathcal{R}' = (O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Sensul axelor (Ox', Oy') este dat de vectorii $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

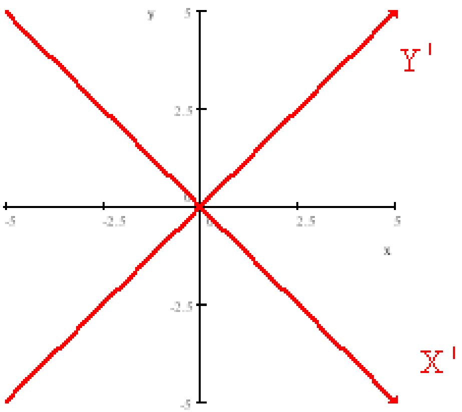
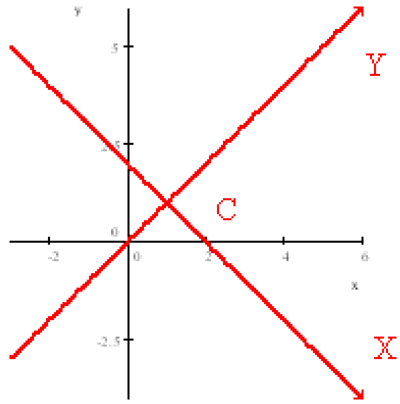


Figura 8.7.

-**translaţia sistemului de axe**: reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ trece în reperul $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ unde $C(1, 1)$



în acest ultim reper trasăm **graficul** elipsei:

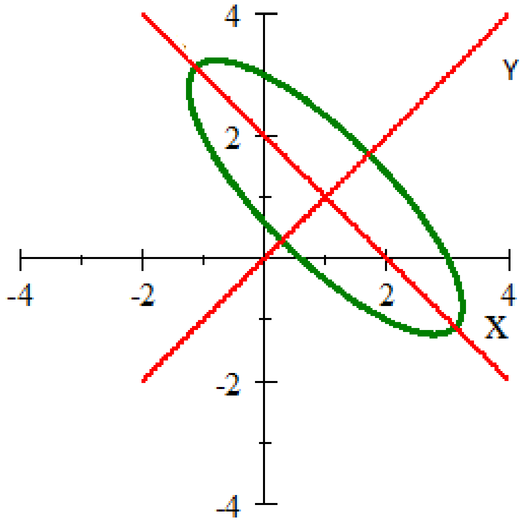


Fig. 8.8

Exemplul 9.2 *Să se aducă la forma canonică conica*

$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$

şi să se traseze graficul.

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4.$

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele:

$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right)$

$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{R} = 1$.

Transformarea coordonatelor este dată de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(y')^2 - (x')^2 + \tfrac{6}{5}x'\sqrt{5} + \tfrac{8}{5}y'\sqrt{5} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\left((y')^2 + \tfrac{2}{5}y'\sqrt{5} + \tfrac{1}{5}\right) - \left((x')^2 - \tfrac{6}{5}x'\sqrt{5} + \tfrac{9}{5}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\left(y' + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(x' + \tfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0.$$

Conica este o hiperbolă. Notăm

$$\begin{cases} X = x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ Y = y' + \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Forma canonică este $4Y^2 - X^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{X^2}{2} + 2Y^2 - 1 = 0.$

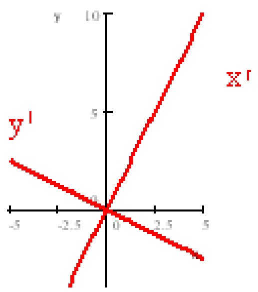
Originea reperului în care conica are forma canonică este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

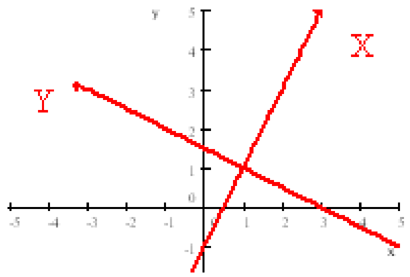
Trasarea graficului:

-rotaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ trece în reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Sensul axelor (Ox', Oy') este dat de vectorii $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right)$ şi $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

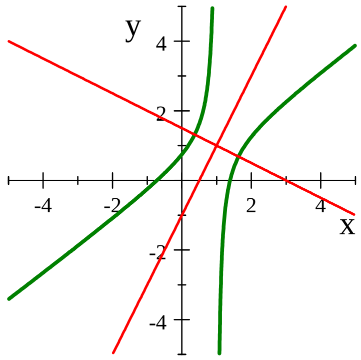
$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



-translaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ trece în reperul $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.unde $C(1,1)$



în acest ultim reper trasăm **graficul**:



Exemplul 9.3 *Să se aducă la forma canonică şi să se deseneze conica:*

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$.

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele: pentru $\lambda_1 = 0$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$

pentru $\lambda_2 = 5$

$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 1x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}\right)$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{R} = -1$

Pentru ca $\det \mathbf{R} = 1$ schimbăm sensul vectorului $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right)$, deci matricea de rotaţie va fi

$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Transformarea coordonatelor este dată de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5(y')^2 - 2x'\sqrt{5} + 2y'\sqrt{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow 5\left((y')^2 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y' + \tfrac{1}{5}\right) - 2x'\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\left(y' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2x'\sqrt{5} = 0.$$

Notăm

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Forma canonică este $Y^2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}X = 0$

Vârful parabolei va fi în punctul $C(0, -1/\sqrt{5})$, coordonatele punctului fiind în sistemul rotit. În sistemul iniţial coordonatele vârfului parabolei vor fi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

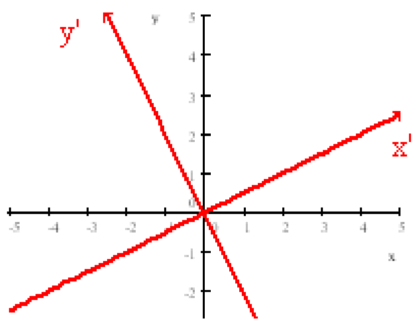
$C(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5})$

Trasarea graficului:

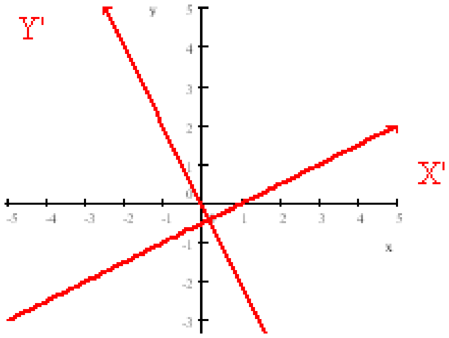
-rotaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ trece în reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Sensul axelor (Ox', Oy') este dat de vectorii $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}\right)$.

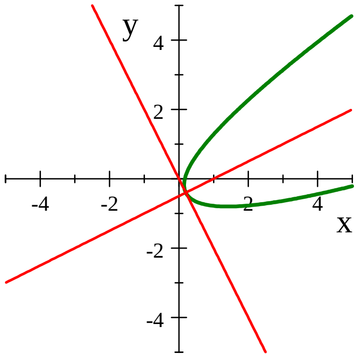
$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



-translaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ trece în reperul $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, unde C va fi vârful parabolei.



în acest ultim reper trasăm **graficul** parabolei:



Exemplul 9.4 *Să se aducă la forma canonică şi să se deseneze conica:*
$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele: pentru $\lambda_1 = 0$
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$

pentru $\lambda_2 = 5$
$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{R} = 1$

Transformarea coordonatelor este dată de
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 3 = 0,$$

$2y'^2 + 2y'\sqrt{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y'^2 + 2y'\sqrt{2} + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

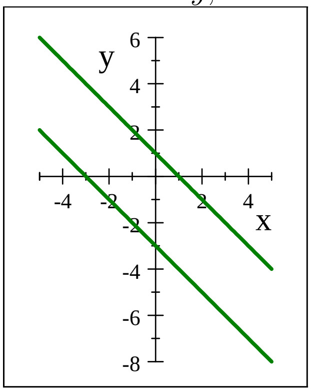
$\left(y'\sqrt{2}+1\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(y'\sqrt{2}-1\right)\left(y'\sqrt{2}+3\right) = 0 \Rightarrow$conica reprezintă două drepte paralele

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\sqrt{2} - \frac{1}{2}y\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$y'\sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2})\sqrt{2} - 2 = 0 \Rightarrow x + y - 1$

$y'\sqrt{2} + 3 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2})\sqrt{2} + 3 = 0 \Rightarrow x + y + 3 = 0$

$x = -3 - y, x = 1 - y$



9.3 CUADRICE PE ECUAŢII REDUSE

Numim **cuadrice nedegenerate** suprafeţele: sfera, elipsoidul, hiperboloidul cu o pânză, hiperboloidul cu două pânze, paraboloidul eliptic şi paraboloidul hiperbolic. Deoarece ele admit într-un reper ortonormat reprezentări analitice pe ecuaţii algebrice de gradul doi, ele sunt suprafeţe algebrice de ordinul al doilea.

9.3.1 Sfera

Fie reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ şi punctele $M_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$. Reamintim formula distanţei dintre două puncte:

$\text{dist}(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

Definiţia 9.6 *Locul geometric al punctelor din spaţiu $M(x, y, z)$ cu proprietatea că distanţa lor la un punct fix $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este constantă se numeste* **sferă (suprafaţă sferică)***.*

Dacă $\overline{r}$ respectiv $\overline{r}_0$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M şi M_0, atunci

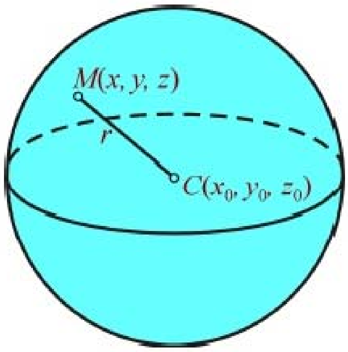
$$\|\overline{r} - \overline{r}_0\| = R. \tag{9.16}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte **centrul** *sferei, iar r este* **raza** *sferei.*

Teorema 9.3 *Punctul $M(x, y, z)$ aparţine sferei de centru $C(x_0, y_0, z_0)$ şi rază R dacă şi numai dacă*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{9.17}$$

Demonstraţie. $M \in$sferei$\Leftrightarrow \|M_0M\| = R \Leftrightarrow \|\overline{r} - \overline{r}_0\| = R \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$♦



Observaţia 9.6 Ecuaţia (9.16) se numeşte **ecuaţia vectorială a sferei**. Ecuaţia (9.17) se numeşte **ecuaţia carteziană implicită a sferei.**

Ecuaţia sferei este un polinom de grad doi în x, y, z, termenul de grad doi fiind $x^2+y^2+z^2$. Aceasta ne sugerează să cercetăm ecuaţia

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

şi să stabilim în ce caz ea reprezintă ecuaţia unei sfere. Această ecuaţie se mai poate scrie de forma

$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$

De aici observăm că dacă

a) $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ecuaţia reprezintă o sferă de centru $(-a, -b, -c)$ şi rază $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

b) $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ ecuaţia reprezintă un punct de coordonate $(-a, -b, -c)$;

c) $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ ecuaţia reprezintă o sferă imaginară.

Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ reprezintă **ecuaţia carteziană generală a sferei.**

Ecuaţia sferei cu centru în origine şi de rază R este

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

Observaţia 9.7 Sfera este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă. Punctele de pe suprafaţa sferică sun în interiorul unui pătrat deoarece din ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ rezultă că $(x - x_0)^2 \leq R^2 \Rightarrow x_0 - R \leq x \leq x_0 + R$. Analog şi pentru y şi z.

Ecuaţiile parametrice ale sferei cu centru în $M_0(x_0, y_0, z_0)$**:**

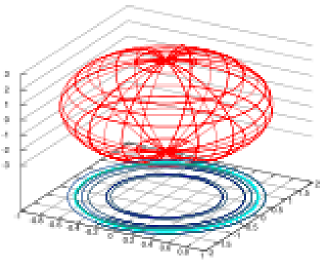
$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi\sin\psi \\ y = y_0 + R\sin\varphi\sin\psi \\ z = z_0 + R\cos\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

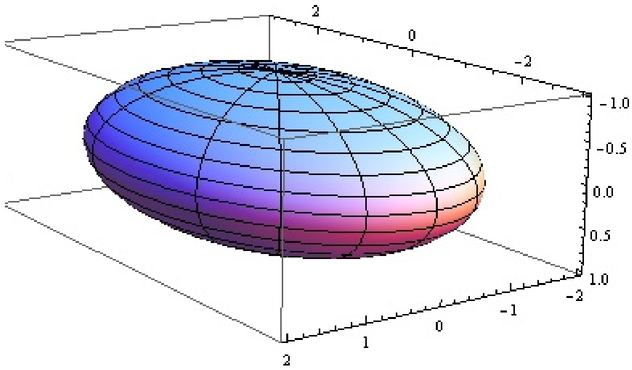
9.3.2 Elipsoidul

Definiţia 9.7 *Locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c\in\mathbb{R}_+, \tag{9.18}$$

se numeşte **elipsoid.**





Studiem forma acestei suprefeţe plecând de la ecuaţia (9.18). Deoarece coordonatele x,y,z apar în ecuaţia (9.18) la pătrat, rezultă că dacă punctul $M(x,y,z)$ aparţine elipsoidului, atunci şi punctele $M_1(-x,y,z), M_2(x,-y,z), M_3(x,y,-z)$ aparţin elipsoidului. Dar aceste puncte sunt simetricele punctului M faţă de planele de coordonate. Deci planele de coordonate (xOy, yOz, xOz) sunt plane de simetrie ale suprafeţei. Analog şi punctele $M_4(-x,-y,z), M_5(-x,y,-z), M_6(x,-y,-z)$, simetricele faţă de axele de coordonate ale punctului M, aparţin elipsoidului, deci acesta admite trei axe de simetrie. Punctul $M_7(-x,-y,-z)$, simetricul faţă de origine a punctului$M$, se află pe suprafaţă, deci elipsoidul admite un centru de simetrie.

În concluzie elipsoidul admite

-trei plane de simetrie,

-trei axe de simetrie şi

-un centru de simetrie.

Punctele în care axele de coordonate intersectează suprafaţa se numesc **vârfurile** elipsoidului şi ele sunt: $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$, $C(0,0,c)$, $C'(0,0,c)$. Numerele a,b,c se numesc **semiaxele** elipsoidului.

Pentru a ne da seama de forma acestei suprafeţe, o intersectăm cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu planele de coordonate.

Intersecţiile elipsoidului cu planele de coordonate sunt elipse şi anume:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}, \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}, \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}.$$

Intersectând elipsoidul cu plane paralele cu xOy obţinem elipse:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z^2}{c^2}\\ z=k\end{cases} \text{ pentru } k\in[-c,c].$$

Analog cu plane paralele cu xOz, yOz,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}.$$

Teorema 9.4 *Elipsoidul este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă.*

Demonstraţie. Din ecuaţia elipsoidului rezultă
$\frac{x^2}{a^2} \le 1, \frac{y^2}{b^2} \le 1, \frac{z^2}{c^2} \le 1 \Leftrightarrow -a \le x \le a, -b \le y \le b, -c \le z \le c \Rightarrow$
toate punctele elipsoidului sunt cuprinse în interiorul unui paralelipiped cu laturi de lungimi finite.♦

Ecuaţia **planului tangent la elipsoid printr-un punct al elipsoidului** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe elipsoidul de ecuaţie (9.18). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

O **reprezentare parametrică** a elipsoidului se obţine de forma:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\psi \\ y = b\sin\varphi\sin\psi \\ z = c\cos\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Suprafaţa reprezentată prin ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, a, b, c > 0$$

se numeşte **elipsoid imaginar**.

9.3.3 Hiperboloidul cu o pânză

Definiţia 9.8 *Locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

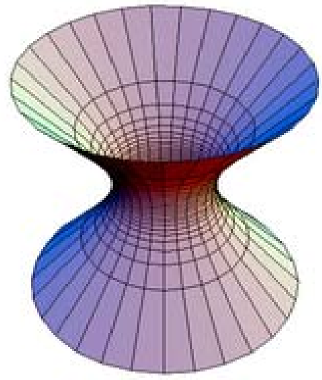
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, b, c \in \mathbb{R}_+, \tag{9.19}$$

se numeşte **hiperboloid cu o pânză.** *Numerele a, b, c se numesc* **semiaxele hiperboloidului**.

Observaţia 9.8 Tot hiperboloizi cu o pânză reprezintă ecuaţiile:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$



Hiperboloidul cu o pânză are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul. Are patru vârfuri, $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$. Intersecţiile cu planele $x=0$ şi $y=0$ sunt hiperbole, $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$ iar cu planul $z=0$ intersecţia este o elipsă $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Intersecţiile cu plane paralele cu xOy, $z=k$, sunt elipse reale, oricare ar fi $k\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}.$$

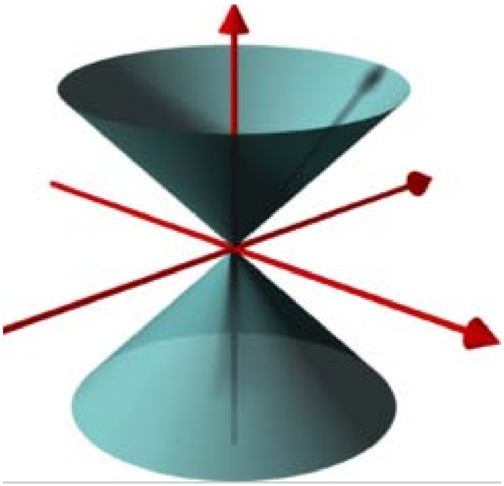
Intersecţiile cu plane paralele cu planele xOz şi respectiv yOz sunt hiperbole,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}, \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}.$$

Rezultă că hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă nemărginită .

Dacă $a=b$ elipsele de intersecţie ale suprafeţei cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri.

Cuadrica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ se numeşte **conul asimptotic** al hiperboloidului cu o pânză.



Ecuaţia **planului tangent la hiperboloidul cu o pânză printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe hiperboloidului cu o pânză de ecuaţie (9.19). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

O reprezentare parametrică a hiperboloidului cu o pânză este:

$$\begin{cases} x = a\dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi} \\ y = b\dfrac{\sin\varphi}{\cos\psi} \\ z = c\operatorname{tg}\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

O a doua reprezentare parametrică a hiperboloidului cu o pânză se obţine, ţinînd seama că $1 + \operatorname{sh}^2\psi = \operatorname{ch}^2\psi$, luând $z = c\operatorname{sh}\psi$. Avem:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\operatorname{ch}\psi \\ y = b\sin\varphi\operatorname{ch}\psi \\ z = c\operatorname{sh}\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \mathbb{R}.$$

9.3.4 Hiperboloidul cu două pânze

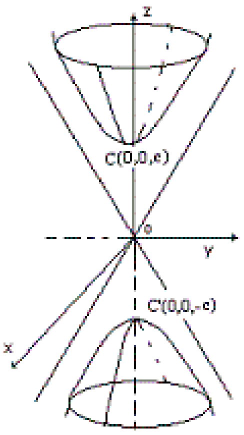
Definiţia 9.9 *Locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

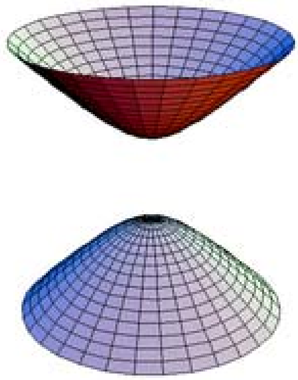
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, b, c \in \mathbb{R}_+ \tag{9.20}$$

se numeşte **hiperboloid cu două pânze.** *Numerele a, b, c se numesc* **semiaxele** *hiperboloidului.*

Observaţia 9.9 *Tot hiperboloizii cu două pânze reprezintă ecuaţiile:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$





Hiperboloidul cu două pânze are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul. Are două vârfuri $C(0,0,c), C'(0,0,c)$. Intersecţiile cu planele $x=0$ şi $y=0$ sunt hiperbole

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Intersecţiile cu plane paralele cu $yOz, x=k$, sunt elipse:

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{a^2}-1 \\ x=k \end{cases}, k\in(-\infty,a]\cup[a,\infty).$$

Intersecţiile cu plane paralele cu planele xOy şi xOz sunt hiperbole

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1+\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}.$$

Hiperboloidul cu două pânze este o mulţime nemărginită.

Cuadrica $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ se numeşte **conul asimptotic** al hiperboloidului cu două pânze.

Ecuaţia **planului tangent la hiperboloidul cu două pânze printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct de pe hiperboloidului cu două pânze de ecuaţie (9.20). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

O reprezentare parametrică a hiperboloidului cu două pânze este:

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi\operatorname{sh}\psi \\ y=b\sin\varphi\operatorname{sh}\psi \\ z=c\operatorname{ch}\psi \end{cases}, \varphi\in[0,2\pi), \psi\in\mathbb{R}_+.$$

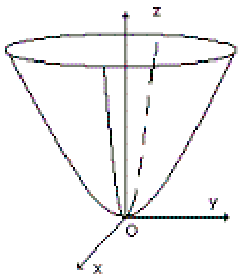
9.3.5 Paraboloidul eliptic

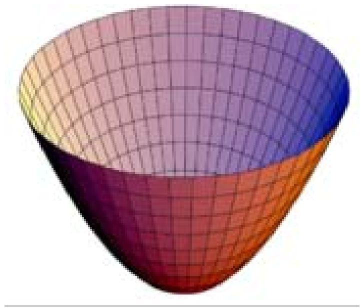
Definiţia 9.10 *Locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, a,b>0 \tag{9.21}$$

se numeşte **paraboloid eliptic.**

Observaţia 9.10 Tot paraboloizi eliptici reprezintă ecuaţiile:
$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2y.$





Planele de coordonate yOz şi xOz sunt plane de simetrie, iar axa Oz este axă de simetrie a suprafeţei. Paraboloidul eliptic nu are centru de simetrie.

Din relaţia (9.21) rezultă că $z \geq 0$, deci paraboloidul eliptic esta situat deasupra planului xOy.

Intersecţiile cu planele $z = k, k \geq 0$, sunt curbele
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = k \end{cases}$
care reprezintă pentru $k > 0$ elipse reale ale căror semiaxe cresc odată cu k. Pentru $k = 0$ obţinem $x = y = z = 0$, adică originea reperului. Punctul O este singurul vârf al suprafeţei. Intersecţiile cu celelalte plane de coordonate sunt parabole.

Intersecţiile cu plane paralele cu xOz şi yOz sunt parabole
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}, \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{x^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$

Ecuaţia planului **tangent la paraboloidul eliptic printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe paraboloidului eliptic de ecuaţie (9.21). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este
$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0.$

O **reprezentare parametrică** a paraboloidului eliptic se obţine luând $2z = v^2$:
$\begin{cases} x = a\psi \cos\varphi \\ y = b\psi \sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}\psi^2 \end{cases}, (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty).$

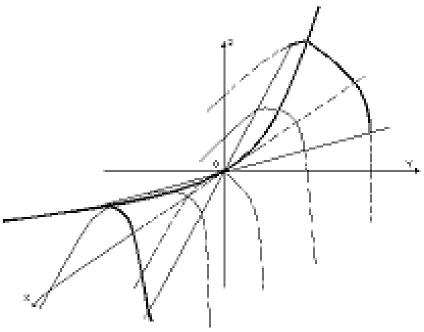
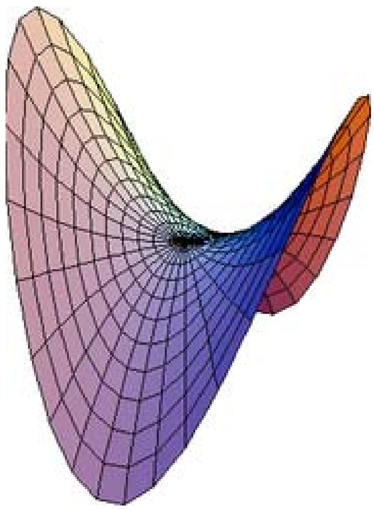
9.3.6 Paraboloidul hiperbolic

Definiţia 9.11 *Locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a, b > 0 \tag{9.22}$$

se numeşte **paraboloid hiperbolic.**

Observaţia 9.11 Tot paraboloizi hiperbolici reprezintă ecuaţiile:
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y.$

Planele de coordonate yOz şi xOz sunt plane de simetrie, iar axa Oz este axă de simetrie a suprafeţei. Paraboloidul hiperbolic nu are centru de simetrie.

Intersecţiile cu planele $z = k$ sunt curbele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = k \end{cases}$$

care reprezintă hiperbole. Pentru $k = 0$ obţinem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, adică o pereche de drepte secante prin origine. Punctul O este singurul vârf al suprafeţei. Intersecţiile suprafeţei cu plane paralele cu planul yOz sunt parabole

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z + \frac{b^2 z^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

iar intersecţiile suprafeţei cu plane paralele cu planul xOz sunt parabole

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z + \frac{a^2 z^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

Ecuaţia **planului tangent la paraboloidul hiperbolic printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe paraboloidului hiperbolic de ecuaţie (9.22). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0.$

O **reprezentare parametrică** a paraboloidului eliptic se obţine luând:

$$\begin{cases} x = a\varphi \\ y = b\psi \\ z = \dfrac{1}{2}(\varphi^2 - \psi^2) \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

9.4 Cuadrice degenerate

Numim **cuadrice degenerate** următoarele suprafeţe: suprafaţa determinată de o pereche de plane, cilindrul pătratic, conul pătratic.

9.4.1 Cilindri pătratici

Cilindrii pătratici sunt de trei tipuri:

a) **cilindrul eliptic** are ecuaţia canonică

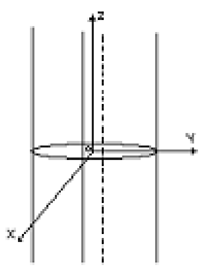
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, a, b > 0. \tag{9.23}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul $xOy, z = k$, obţinem elipsele de semiaxe a şi b, pentru orice $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}.$$

Observaţia 9.12 Tot cilindrii eliptici au ecuaţiile

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, c > 0. \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, c, b > 0.$$



b) **cilindrul hiperbolic** are ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, a, b > 0. \tag{9.24}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul $xOy, z = k$, obţinem hiperbole de semiaxe a şi b, pentru orice $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}.$$

Tot cilindrii hiperbolici sunt
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, c > 0; \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, c, b > 0.$
c) **cilindrul parabolic** are ecuaţia canonică

$$x^2 = 2py. \tag{9.25}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul xOy, $z = k$, obţinem parabolele, pentru orice $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2 = 2py \\ z = k \end{cases}.$$

Tot cilindrii parabolici sunt
$z^2 = 2py, x^2 = 2pz, y^2 = 2px, y^2 = 2pz, z^2 = 2px.$

9.4.2 Conul pătratic

Conul pătratic este suprafaţa de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a, b, c \in \mathbb{R}_+. \tag{9.26}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul xOy, $z = k$, obţinem elipsele pentru orice $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 0 \\ z = k \end{cases}.$$

Observaţia 9.13 Tot conuri pătratice reprezintă ecuaţiile
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, a, c > 0. - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, a, b, c > 0.$