$\boxed{\text{SEM I}}$ - GA

Listă ex

① a) Calculați $\det A = \Delta$ pt $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

b) $\Delta = 0 \iff a+b+c=0$ sau $a=b=c$

② Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Calculați $\det(A) = V(a,b,c)$

③ Fie $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ba & ca \\ ba & 1+b^2 & cb \\ ca & bc & 1+c^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Calculați $\det(A^*)$

④ Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3m+4 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$

a) Determinați m a.î. $A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$

b) Pt $m=0$, calculați A^{-1}. Precizați mai multe metode

⑤ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Dacă $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ a.î. $A^k = O_2$, at $A^2 = O_2$.

⑥ Fie $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(X) = \det X$

Precizați dacă f este inj, resp. surjectivă

Scanat cu CamScanner

(7) Fie $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $f(X) = X^n$

Să se arate că f nu e inj și nu e surj, $\forall n \geq 2$

(8) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Dacă $A^2 = O_n$, at $I_n - A$, $I_n + A$ sunt inversabile

b) Dacă $A^3 = O_n$, at $I_n - A$, $I_n + A$ —"—

(9) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $a_{ij} = \min\{i,j\}_{1 \leq i,j \leq n}$

Să se arate că $\Delta_n = \det A = 1$

(10) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$rg A = ?$ Discuție

(11) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

$a, b = ?$ ai $rg A = 2$

(12) Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A^{2023} - 2023A - I_3 = O_3$

a) $rg A = ?$

b) $rg(2023A + I_3) = ?$

(13) $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6$

Ex. $\begin{vmatrix} \hat{2}a+b & \hat{2}c+a & \hat{2}b+c \\ a+\hat{2}b & b+\hat{2}c & c+\hat{2}a \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$ $\mathbb{Z}_3$

Ex Rez. ec.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0, \quad a_1, .., a_n \text{ dist. 2 câte 2.}$$

Ex. $A^T = -A$, $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A = 0$.

Ex. Să se det. toți det. Vandermonde $V(a_1, a_2, a_3)$, cu elem din $\mathbb{Z}_3$, care sunt nenuli.

Ind. $V(a_1, a_2, a_3) = \underset{u}{\underbrace{(a_3 - a_2)}}\underset{v}{\underbrace{(a_3 - a_1)}}\underset{v-u}{\underbrace{(a_2 - a_1)}} \neq \hat{0}$

$u = \hat{1}$, $v = \hat{2}$ sau $\hat{u} = 2$, $v = \hat{1}$

$a_3 = \hat{1} + a_2$; $a_2 = \hat{1} + a_1$; $a_3 = \hat{2} + a_2$, $a_2 = \hat{2} + \hat{a_1}$

Generalizare. $V(a_1, .., a_p) \neq 0$ în $\mathbb{Z}_p$, p = prim ($p!$ det. nenuli)

Ex Precizați dacă matricele sunt inversabile și în caz afirmativ, aflați inversa

a) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$, b) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$

c) $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$

Ex $A = \begin{pmatrix} s & -t & -u & -v \\ t & s & -v & u \\ u & v & s & -t \\ v & -u & t & s \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$A \neq O_4 \Leftrightarrow A$ inversabilă

Ind AA^T