Operații elementare pe matrici.

Forma Eșalon. Forma eșalon redusă

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$

Definim următoarele operații elementare pe matrici:

- înmulțirea unei linii, sau a unei coloane cu o constantă.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i = kL_i} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

- adunarea unei linii, sau a unei coloane cu o altă linie sau o coloană.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i = L_i - L_j} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}-a_{j1} & a_{i2}-a_{j2} & \cdots & a_{in}-a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Obs / Putem combina aceste 2 operații între ele. De exemplu: $L_i = L_i - 2L_j$. Va fi util pentru forma.

eșalon.

Forma eșalon

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$., cu $A = (a_{ij})$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$.

Spunem că A, ~~are~~ are o formă eșalon dacă se respectă următoarele proprietăți:

1. Toate rândurile nenule sunt deasupra celor pline cu "zerouri".

2. Primul element nenul (denumit și ca pivot) al fiecărui rând, este mai la dreapta față de pivotul de pe rândul anterior.

3. Orice coloană care conține un pivot are "zerouri" sub acesta.

Ex: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Forma eșalon devine formă eșalon redusă dacă:

1. Fiecare pivot este singurul element nenul din coloana sa.
2. Pivotul are valoarea 1.

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ I_n, $n \in \mathbb{N}^*$

Obsv / rang A = nr de pivoți din forma eșalon al lui A.

Aplicații

1. (Transformări liniare)

Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Determinați A^{-1}.

Rezolvare: Aplicăm Metoda lui Gauss.

Metoda lui Gauss constă în extinderea matricei A cu coloanele matricei I_n.

$$\left(A \mid I_n \right)$$

În urma transformărilor elementare, dorim să obținem $\left(I_n \mid B \right)$.

~~Ma Coloana~~ Matricea B devine defapt A^{-1}, adică $B = A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{3} L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - \frac{5}{3} L_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{2}{3} L_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = -\frac{3}{5} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Determinați forma eșalon și forma eșalon redusă.

b. Determinați rangul acestei matrici

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Determinați forma eșalon și forma eșalon redusă.

Forma eșalon:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Forma eșalon redusă:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{3}{8}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{7}{6}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{11}{6}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Determinați rangul acestei matrice.

Numărul de pivoți ai matricei în forma eșalon redusă este 3, prin urmare rang $A = 3$

Polinomul caracteristic

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Notăm $P_A(X) = \det(A - X \cdot I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-X \end{vmatrix} =$

$= (-1)^n \left(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n \right).$

$P_A(X)$ este polinomul caracteristic al matricei A, unde

σ_K = suma minorilor diagonali de ordin K, $K = \overline{1,n}$.

Exemple:

1) $n=2 \Rightarrow P_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-X \end{vmatrix} = X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2 = X^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot X + \det A.$

2) $n=3 \Rightarrow P_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-X \end{vmatrix} = (-1)^3 \left(X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 \right)$, unde

$\sigma_1 = \operatorname{Tr} A$, $\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \operatorname{Tr} A^*$, $\sigma_3 = \det A$.

Obs: Rădăcinile polinomului caracteristic se numesc valori proprii. Mulțimea lor se notează cu Spec(A).

Teorema Cayley-Hamilton:

Orice matrice pătratică cu coeficienți complecși este „rădăcină" a polinomului său caracteristic:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P_A(A) = (-1)^n \left(A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n I_n \right) = O_n.$$

Exemple:

1) $n=2 \Rightarrow A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2$

2) $n=3 \Rightarrow A^3 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A^2 + (\operatorname{Tr} A^*) A - (\det A) I_3 = O_3.$

Aplicații:

1) Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Calculați A^{-1}.

Scriem ecuația Cayley-Hamilton: $A^3-\sigma_1 A^2+\sigma_2 A-\sigma_3 I_3=O_3$, unde

$\sigma_1=\operatorname{Tr}A=1+1+1=3$

$\sigma_2=\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1+0+0=1$

$\sigma_3=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}=1=\det A\neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă.

Deci $A^3-3A^2+A-I_3=O_3 \mid \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^2-3A+I_3-A^{-1}=O_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^{-1}=A^2-3A+I_3 \underset{\text{calcul...}}{=} \begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

Altă metodă pentru A^{-1}? $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$

2) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ din ecuația $X^4=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}$

Fie $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}$. Aplicăm det și avem că $\det X^4=\det A=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det X=0$.

Din ecuația Cayley-Hamilton: $X^2-(\operatorname{Tr}X)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^2=(\operatorname{Tr}X)\cdot X \mid \cdot X \Leftrightarrow X^3=(\operatorname{Tr}X)\cdot X^2 \Leftrightarrow X^3=(\operatorname{Tr}X)^2\cdot X \mid \cdot X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^4=(\operatorname{Tr}X)^2\cdot X^2 \Leftrightarrow X^4=(\operatorname{Tr}X)^3\cdot X \mid \operatorname{Tr} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Tr}A}_{1}=(\operatorname{Tr}X)^3\cdot\operatorname{Tr}X=(\operatorname{Tr}X)^4=1 \Leftrightarrow (\operatorname{Tr}X)^4-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{Tr}X\in\{\pm1,\pm i\}$.

Deci, din $A=(\operatorname{Tr}X)^3\cdot X$, avem $X=\frac{1}{(\operatorname{Tr}X)^3}\cdot A$, de unde $X\in\{\pm A, \mp iA\}$.