Aplicații liniare

Definiție: Fie V, W două $\mathbb{K}$-spații vectoriale și $f: V \to W$ o funcție. f se numește <u>aplicație liniară</u> sau morfism de spații vectoriale dacă $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

- $\operatorname{Im} f = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ a.î. } f(v) = w \}$
- $\ker f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \}$

Dacă, în plus, f este bijectivă $\Rightarrow$ f este izomorfism de spații vectoriale.

- $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$
- $\operatorname{Im} f \simeq W \Leftrightarrow f$ surjectivă
- $\ker f = \{0_V\} \Leftrightarrow f$ injectivă.

Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară și $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază a lui V. M_f^B este matricea care, pe coloana i, are $f(v_i)$ și se numește matricea aplicației f în baza B.

<u>Teorema rang-defect</u>

Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară. Atunci $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Alte noțiuni:

- Un <u>morfism</u> (o aplicație liniară) <u>$f: V \to V$</u> se numește <u>endomorfism</u>.
- Un <u>endomorfism bijectiv</u> $f: V \to V$ se numește <u>automorfism</u>.

Exemple:

Pentru aplicațiile liniare de mai jos, determinați matricea aplicației în baza specificată, $\ker f$, $\operatorname{Im} f$, $\dim \ker f$, $\dim \operatorname{Im} f$, o bază în $\ker f$ și o bază în $\operatorname{Im} f$. Verificați dacă aplicația este injectivă, respectiv surjectivă.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (y+2z, 3x-z, x-y)$, $B = \{(1,-1,0), (0,-1,1), (0,0,3)\}$

Matricea:

$f(1,-1,0) = (-1+2\cdot 0, 3\cdot 1 - 0, 1+1) = (-1, 3, 2)$

$f(0,-1,1) = (-\cancel{2}+2, 0-1, 0+1) = (1, -1, +1)$

$f(0,0,3) = (6, -3, 0)$

$$M_f^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0) \}$

$$\begin{cases} y+2z=0 \\ 3x-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=0 \\ 3x-z=0 \\ x=y \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Notând $x=\alpha$, se obține sistemul: $\begin{cases} \alpha+2z=0 \\ 3\alpha - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2z=0 \\ 6\alpha-2z=0 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} 7\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\alpha + 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$y = \alpha = 0$

Deci $x=y=z=0 \Rightarrow \ker f = \{(0,0,0)\}$ $\to$ f injectivă; $\dim \ker f = 0$; bază: $0_{\mathbb{R}^3}$

f surjectivă $\Leftarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 0 = 3$ (teorema rang-defect)

$\operatorname{Im} f \simeq \mathbb{R}^3$; o bază pentru $\operatorname{Im} f$: $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\Rightarrow f$ bijectivă (f automorfism)

Exerciții:

1) Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3, -3x_1 - 7x_2 - 4x_3)$.

a) Arătați că f este o aplicație liniară.
b) $\mathrm{Ker} f = ?$
c) $\mathrm{Im} f = ?$
d) $[f]_{R_0, R_0} = ?$, unde R_0 este reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

Sol:

a) f liniară $\Leftrightarrow$ $f(x) + f(y) = f(x+y)$ și $\alpha f(x) = f(\alpha x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$.

$f(x) + f(y) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2y_1 + 5y_2 + 3y_3,$
$-3x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 3y_1 - 7y_2 - 4y_3) =$

$= (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3, 2(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3),$
$-3(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3)) = f(x+y)$, unde

$x = (x_1, x_2, x_3)$ și $y = (y_1, y_2, y_3)$

$\alpha f(x) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3, 2\alpha x_1 + 5\alpha x_2 + 3\alpha x_3, -3\alpha x_1 - 7\alpha x_2 - 4\alpha x_3) =$
$= f(\alpha x)$.

Deci f - lin.

d) $A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\mathrm{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 / AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \end{vmatrix} \overset{L_1 + = L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mathrm{Rang}\, A = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow x_3 = \alpha$ necunoscută secundară $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_3 & |\cdot(-2) \\ 2x_1 + 5x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 = 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 = -3x_3 \end{cases} \oplus$$

$$x_2 = -x_3 \Rightarrow x_1 = -x_3 - 2x_2 = x_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(x_3, -x_3, x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,-1,1)\}\rangle$

c) Extindem reperul lui Ker f la un reper în $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 = \text{maxim}, \text{ deci } \operatorname{Im} f = \langle\{f(0,0,1), f(1,0,0)\}\rangle =$$

Ker f Im f

$$= \langle\{(1,3,-4),(1,2,-3)\}\rangle$$

2) Fie $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P'$.

a) Arătați că f e o aplicație liniară și ~~...~~ determinați matricea $A = [f]_{R_0, R_0'}$

R_0: $\mathbb{R}_3[X]$, R_0': $\mathbb{R}_2[X]$

b) Găsiți dim Ker f și dim Im f.

Sol:

a) $P \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ și $P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$

Cum $\mathbb{R}_3[X] \simeq \mathbb{R}^4$ și $\mathbb{R}_2[X] \simeq \mathbb{R}^3$, putem defini funcția $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

~~$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, 2x_2, x_3)$~~

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, 2x_3, 3x_4)$. Atunci $A = [f]_{R_0, R_0'} = [g]_{B_0, B_0'} =$

B_0: $\mathbb{R}^4$, B_0': $\mathbb{R}^3$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \text{ și } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ 3x_4 \end{pmatrix}, \text{ de unde avem că } f \text{ e aplicație liniară.}$$

$\operatorname{Ker} g = \{ X \in \mathbb{R}^4 / AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rang} A = 4 - \operatorname{rang} A$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$

Din teorema dimensiunii, $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$

3) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (3x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$ o aplicație liniară.

a) Studiați injectivitatea lui f.

b) Determinați $\operatorname{Im} f$.

Sol:

a) f injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0_{\mathbb{R}^3}$. Avem sistemul:

$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$, Avem soluție unică nulă, deci f e inj.

b) $A = [f]_{R_0, R_0'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rang} A = 2$ $\left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \neq 0 \right)$, deci

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

$\operatorname{Im} f = \langle \{ (3, 2, -1), (-2, -1, 1) \} \rangle$

Scanned with CamScanner