

Seminarul 3

1. Un patron deține 3 magazine, m_1 , m_2 , m_3 , care au 50, 75, respectiv 100, de angajați, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3 , știind că acesta este bărbat?

R: $P(\text{"angajatul ales lucrează la } m_3" | \text{"angajatul ales este bărbat"}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roșii și 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roșu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculați probabilitatea ca suma punctelor obținute în urma aruncărilor să fie 10.

R: Fie A : "zarul ales este albastru", R : "zarul ales este roșu" și S : "suma punctelor obținute în urma aruncărilor este 10". Formula probabilității totale implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca $N=3$, știind că:

a) numerele obținute în urma celor N aruncări sunt diferite?

b) numerele obținute în urma celor N aruncări sunt egale?

R: Fie D : "numerele obținute în urma celor N aruncări sunt diferite" și E : "numerele obținute în urma celor N aruncări sunt egale". În continuare, considerăm $P(D|N=1) = 0$, $P(E|N=1) = 1$. Formula lui

Bayes implică: a) $P(N=3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^6 P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum_{i=2}^6 \frac{A_i^i}{6^{i+1}}}$; b) $P(N=3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^6 P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum_{i=1}^6 \frac{1}{6^i}}$.

4. O urnă conține o bilă cu cifra 1, două bile cu cifra 2, trei bile cu cifra 3 și patru bile cu cifra 4. Se extrag aleator fără repunerea bilei patru bile pentru a forma un cod X cu 4 cifre. Calculați probabilitățile evenimentelor $X = 1234$ și $X = 4321$.

R: Fie $X = \overline{X_1 X_2 X_3 X_4}$. Aplicăm formula înmulțirii probabilităților:

$$\begin{aligned} P(X = 1234) &= P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_3 = 3|X_1 = 1, X_2 = 2)P(X_4 = 4|X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{210}. \\ P(X = 4321) &= P(X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 1) \\ &= P(X_1 = 4)P(X_2 = 3|X_1 = 4)P(X_3 = 2|X_1 = 4, X_2 = 3)P(X_4 = 1|X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 2) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}. \end{aligned}$$

• **Modelul binomial:** În cadrul unui experiment pot să apară evenimentele A (*succes*) sau \bar{A} (*insucces*). Un succes are loc cu $P(A) = p$, un insucces are loc cu $P(\bar{A}) = 1 - p$. Probabilitatea de a obține k succese în n repetări independente ale experimentului este

$$b(k; n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

▷ Acest model corespunde distribuției binomiale.

5. Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcțională dacă cel puțin 11 sunt operaționale. 4 componente independente sunt instalate într-un calculator. Calculați probabilitățile evenimentelor:

A: “O componentă este funcțională.”

B: “Exact două componente sunt funcționale în calculator.”

C: “Cel puțin o componentă este funcțională în calculator.”

R: Folosim modelul binomial: $p = P(A) = C_{12}^{11}(0.94)^{11}0.06 + (0.94)^{12}$; $P(B) = C_4^2 p^2(1-p)^2$; $P(C) = \sum_{k=1}^4 C_4^k p^k(1-p)^{4-k} = 1 - (1-p)^4$.

• **Modelul urnei cu r culori și bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \dots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obține } k_i \text{ bile cu culoarea } i, i = \overline{1, r}, \\ &\quad \text{din } n \text{ extrageri cu returnarea bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i = probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i , $i = \overline{1, r}$.

▷ Cazul $r = 2$ corespunde distribuției binomiale.

6. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obțină cuvântul *abracadabra*?

R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!} \frac{1}{26^{11}}$.

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori și bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ și fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n_1$ și $n - k \leq n_2$; considerând o urnă, care are inițial n_1 bile albe și n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k; n) &= \text{probabilitatea de a obține } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri fără returnarea bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde distribuției hipergeometrice.

7. Dintr-un pachet standard de 52 de cărți de joc se extrag aleator fără returnare 13 cărți (*bridge hand*). Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: “Nu se extrage nicio treflă.”

b) B: “Se extrag 5 inimi.”

c) C: “Se extrage cel mult un as.”

R: $P(A) = \frac{C_{39}^{13} \cdot C_{13}^0}{C_{52}^{13}}$; $P(B) = \frac{C_{13}^5 \cdot C_{39}^8}{C_{52}^{13}}$;

$P(C) = P(\text{“nu s-a extras niciun as”}) + P(\text{“s-a extras exact un as”}) = \frac{C_{48}^{13} \cdot C_4^0}{C_{52}^{13}} + \frac{C_{48}^{12} \cdot C_4^1}{C_{52}^{13}}$.

• **Modelul urnei cu r culori și bilă nereturnată:** fie n_i = numărul inițial de bile cu culoarea i din

urnă, $i = \overline{1, r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1, \dots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obține } k_i \text{ bile cu culoarea } i, i = \overline{1, r}, \\ &\text{din } n = k_1 + \dots + k_r \text{ extrageri fără returnarea bilei extrase,} \\ &\text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1 + \dots + n_r}^n}. \end{aligned}$$

▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuției hipergeometrice**.

Observație: Extragerea fără returnare (engl. *sampling without replacement*) este folosită în **metoda validării încrucișate** (engl. *k-fold cross validation*): În cazul validării încrucișate eșantionul original de date este împărțit aleatoriu în k sub-eșantioane de dimensiuni egale. Din cele k sub-eșantioane, un singur sub-eșantion este folosit ca date de validare pentru testarea modelului, iar celelalte $k - 1$ sub-eșantioane sunt utilizate ca date de antrenament. Procesul de validare încrucișată se repetă de k ori, fiecare dintre cele k sub-eșantioane fiind utilizat exact o dată ca date de validare.

8. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni și 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician și 1 fizician?

R: $\frac{C_4^2 C_3^1 C_5^1}{C_{12}^4}$.

9. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: “exact două numere sunt pare.”

b) B: “1 apare de două ori, 3 apare o dată și 6 apare de două ori.”

c) C: “exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4”.

R: a) $C_5^2 \frac{1}{2^5}$; b) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{6^5}$; c) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{2^2} \frac{1}{6} \frac{1}{6^2}$.

10. Se generează aleator un cod C alegând, cu returnare, 6 caractere din lista de caractere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, x , y , z . Calculați probabilitățile:

a) $P(C = 01234z) = \frac{1}{9^6}$.

b) $P(\text{“exact 4 caractere din } C \text{ sunt cifre impare”}) = C_6^4 \frac{3^4}{9^4} \frac{6^2}{9^2}$.

c) $P(\text{“} C \text{ are cel mult 4 cifre”}) = 1 - C_6^5 \frac{6^5}{9^5} \frac{3}{9} - C_6^6 \frac{6^6}{9^6}$.

d) $P(\text{“} C \text{ nu are litere alăturate și nu are cifre alăturate”}) = 2 \cdot \frac{6^3}{9^3} \frac{3^3}{9^3} (clclcl, lclclc)$

Exemple: 5z4x0y, x0y1x2 etc.

e) $P(\text{“} C \text{ nu are litere, știind că exact 4 caractere din } C \text{ sunt cifre impare”}) = \frac{C_6^4 \frac{3^4}{6^4} \frac{3^2}{6^2}}{C_6^4 \frac{3^4}{9^4} \frac{6^2}{9^2}}$.

11. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 orașe diferite, câte N din fiecare oraș ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: “exact 4 persoane din cele alese sunt din același oraș”.

b) B: “3 persoane din cele alese sunt din același oraș, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraș”.

c) C: “3 persoane din cele alese sunt din același oraș, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraș diferit de al celorlalte persoane alese”.

R: a) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^4 C_N^1 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; b) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^3 C_N^2 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; c) $\frac{A_4^3}{2} \cdot \frac{C_N^3 C_N^1 C_N^1 C_N^0}{C_{4N}^5}$.

12. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?

b) ziua următoare să fie ploioasă, știind că persoana ajunge la timp la serviciu?

R: Fie I : “persoana întârzie la serviciu într-o zi” și S : “ziua e senină”. a) Formula probabilității totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,82$; b) Formula lui Bayes implică

$$P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,82} = \frac{32}{41}.$$