# Домашна работа

## по „Диференциални уравнения и приложения“

### Специалност „Софтуерно инженерство“, летен семестър на

### 2019/2020 уч. година

**Име**: Теодора Ивайлова Иванова

**Факултетен номер**: 62250 **Група**: 1 **Дата**: 29.03.2020г.

Условие:

**Задача СИ20-ДР-22.**

а) Решете уравнението

$$y' = \frac{4}{x-3}y - \frac{(x-3)^3}{x+4}.$$

б) Напишете MATLAB код, които решава числено задачата на Коши за това уравнение с начално условие $y(1) = 1$ в подходящ интервал и изчертава графиката на намереното приближение на решението ѝ. Приложете резултата от изпълнението на кода.

Разработка:

**а) Аналитично решение:**

Задача СИ20-ДР-22

$$y' = \frac{4}{x-3}y - \frac{(x-3)^3}{x+4}$$

у-то: $y' = a(x).y + b(x)$; $a, b \in C(\alpha,\beta)$

има решение по ф-лата:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{e^{\int a(x)dx}}_{(1)} . \underbrace{\left(C + \int b(x).e^{-\int a(x)dx}dx\right)}_{(2)}}$$

Решение:

$$a(x) = \frac{4}{x-3}, \quad x \neq 3$$

$$b(x) = -\frac{(x-3)^3}{x+4}, \quad x \neq -4$$

$\Rightarrow$ ДМ: $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 3 \end{cases}$

$x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-4, 3\}$

1) Пресмятаме

$$\int a(x)dx = \int \frac{4}{x-3}dx = 4\int \frac{1}{x-3}dx-3$$

Полагаме:

$$u = x-3 \Rightarrow 4\int \frac{1}{u}du = 4\ln|u| =$$

$$= 4\ln|x-3|$$

$$\Rightarrow \int a(x)dx = 4\ln|x-3| = \ln(|x-3|)^4 =$$

$= \ln(x-3)^4$ (не изписваме константа С, защото тя се изписва само в крайното р-е)

$$\Rightarrow (1)\ e^{\int a(x)dx} = e^{\ln(x-3)^4} = \boxed{(x-3)^4 \ (1)}$$

2) Пресмятаме:

$$\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx = \int -\frac{(x-3)^3}{x+4}e^{-\ln(x-3)^4}dx =$$

$$= 1 =$$

$$= -\int \frac{(x-3)^3}{x+4} \cdot e^{\ln (x-3)^{-4}} dx = -\int \frac{(x-3)^3}{x+4} \cdot (x-3)^{-4} dx =$$

$$= -\int \frac{\cancel{(x-3)^3}}{x+4} \cdot \frac{1}{(x-3)^4} dx = -\int \frac{1}{(x+4)(x-3)} dx$$

Полагаме:

$$\boxed{u = (x+4)} \Rightarrow du = dx + 4 = dx \Rightarrow \boxed{du = dx}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{1}{(x+4)(x+4-7)} dx = -\int \frac{1}{u(u-7)} du =$$

$$= -\int \frac{1}{u^2 - 7u} du = -\int \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{u}\right) u^2} du \leftarrow \text{заместване}$$

Полагаме: заместване

пресмятаме производната

$$\boxed{v = 1 - \frac{7}{u}} \Rightarrow dv = d\, 1 - \frac{7}{u} = d\left(-\frac{7}{u}\right) =$$

$$= \left(-\frac{7}{u}\right)' du = \frac{-(-7)u'}{u^2} du = \frac{7}{u^2} du \Rightarrow$$

$$dv = \frac{7}{u^2} du \Rightarrow \boxed{du = \frac{u^2}{7} dv}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{1}{v \cdot \cancel{u^2}} \cdot \frac{\cancel{u^2}}{7} dv = -\int \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{7} dv =$$

$$= -\frac{1}{7} \int \frac{1}{v} dv = -\frac{1}{7} \ln|v| = -\frac{1}{7} \ln\left|1 - \frac{7}{u}\right| =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln\left|1-\frac{7}{x+4}\right| = -\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x+4-7}{x+4}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx = -\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(2)\ C+\left(-\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right)}$$

$$\Rightarrow y(x)=(1).(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=(x-3)^4\left(C-\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=(x-3)^4\left(C+\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|^{-\frac{1}{7}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=(x-3)^4\left(C+\ln\left|\frac{x+4}{x-3}\right|^{\frac{1}{7}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=(x-3)^4\left(C+\ln\sqrt[7]{\frac{x+4}{x-3}}\right),$$

като модулът пада защото 7 е нечетно число => корен 7-ми не се интересува от това - какво число (⊕ или ⊖) е под него

<u>Отговор на задачата:</u>

$$y(x)=(x-3)^4\left(C+\ln\sqrt[7]{\frac{x+4}{x-3}}\right), \quad x\neq -4,\ x\neq 3 \quad \text{(от ДМ)}$$

**б) Matlab код:**

```
%This is the file equation.m where the function is defined
function dy = equation(t,y)
dy = (4/(t-3))*y - (t-3)^3/(t+4);
end
```

----------------------------------------------------------------------

```
%This is the file CouchyProblem.m where the problem is solved
function CouchyProblem
%This values comes from the initial condition y(1) = 1
x0 = 1;
y0 = 1;

%Get the appropriate interval to be [x0 2]
%because the definition set for the equation
%is x != -4 and x != 3
xLeftBorder = x0;
xRightBorder = 2;
xInterval = [xLeftBorder xRightBorder];

hold on
grid on
grid minor

[t,y] = ode45(@equation,xInterval,y0);
plot(t,y,'-pm');
end
```

**в) Резултат от изпълнението на кода:**