

Домашна работа №2

по „Диференциални уравнения и приложения“

Специалност „Софтуерно инженерство“, летен семестър на

2019/2020 уч. година

Име: Теодора Ивайлова Иванова

Факултетен номер: 62250 **Група:** 1 **Дата:** 24.04.2020г.

Условие:

Задача СИ20-ДР2-22.

а) Намерете фундаментална система от решения (ФСР) на уравнението

$$2y''' + 2y'' - 3y' = 0.$$

б) Пресметнете детерминантата на Вронски за функциите от ФСР и напишете общото решение на уравнението.

в) Напишете MATLAB код, който решава символно задачата на Коши за това уравнение с начални условия $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -4$, $y''(-1) = 0$ и начертайте графиката на полученото решение в подходящ интервал.

Разработка:

а) Аналитично решение:

Задача СИ20-8Р2-22

а) ФСР на уравнението:

$$2y''' + 2y'' - 3y' = 0 \rightarrow \text{ОДУ от трети ред}$$

1. Характеристичният полином на уравнението

$$\text{е: } P(\lambda) = 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda$$

2. Решаваме $P(\lambda) = 0$:

$$2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\lambda(2\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \vee 2\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 6 = 7$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$$

3. $\lambda_1 = 0$ е прост корен на $P(\lambda) \Rightarrow$ на $\lambda_1 = 0$ съответства ф-ята: $e^{\lambda_1 x} = e^{0 \cdot x} = e^0 = 1$

$\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$ е прост корен на $P(\lambda) \Rightarrow$

на $\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$ съответства ф-ята: $e^{\lambda_2 x} = e^{\frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \cdot x}$

$\lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$ е прост корен на $P(\lambda) \Rightarrow$

на $\lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$ съответства ф-ята: $e^{\lambda_3 x} = e^{\frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \cdot x}$

= 1 =

$$\Rightarrow 1, e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} \text{ и } e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \text{ са ЛНЗ}$$

$$\Rightarrow \text{Ф.С.Р.} : \{ 1, e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x}, e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= 1 \\ y_2(x) &= e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} \\ y_3(x) &= e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{функциите} \\ \text{от Ф.С.Р. - то} \\ \text{за ОДЧ-то} \\ \text{от трети ред} \end{array}$$

2. Детерминантата на Вронски има вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} & e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \\ 0 & \frac{(-1+\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} & \frac{(-1-\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \\ 0 & \frac{(4-\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} & \frac{(4+\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \end{vmatrix}$$

$$W(x) = 1 \cdot \frac{(-1+\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} \cdot \frac{(4+\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} -$$

$$- 1 \cdot \frac{(-1-\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x} \cdot \frac{(4-\sqrt{7})}{2} e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} =$$

$$= 2 =$$

$$= \frac{(-1+\sqrt{7})}{2} \cdot \frac{(4+\sqrt{7})}{2} e^{\frac{(-1+\sqrt{7}-1-\sqrt{7})x}{2}} -$$

$$- \frac{(-1-\sqrt{7})}{2} \cdot \frac{(4-\sqrt{7})}{2} e^{\frac{(-1-\sqrt{7}-1+\sqrt{7})x}{2}} =$$

$$= \frac{-4-\sqrt{7}+4\sqrt{7}+7}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{-4+\sqrt{7}-4\sqrt{7}+7}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{3+3\sqrt{7}}{4} e^{-x} - \frac{3-3\sqrt{7}}{4} e^{-x} =$$

$$= \frac{\cancel{3}+3\sqrt{7}-\cancel{3}+3\sqrt{7}}{4} \cdot e^{-x} = \frac{6\sqrt{7}}{4} e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{3\sqrt{7}}{2} e^{-x} \rightarrow \text{детерминанта на Вронски за ОДЧ от трети ред}$$

3. Общото решение на уравнението е:

$$y(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-\frac{1+\sqrt{7}}{2}x} + C_3 \cdot e^{-\frac{1-\sqrt{7}}{2}x},$$

където C_1 , C_2 и C_3 са произволни константи

= 3

6) Matlab код:

```
function solveThirdOrderODE

% Solve Third-Order ODE with initial conditions via equivalent to it system
% of 3 ODEs of first order
[y1, y2, y3] = dsolve('Dy1=y2',...
    'Dy2=y3',...
    'Dy3=(3/2)*y2-y3',...
    'y1(-1)=0',...
    'y2(-1)=-4',...
    'y3(-1)=0');

% Specify the appropriate range where the graphic of the ODE to be
% presented
t = -1 : 0.01 : 2.5;

% Display axes grid lines
hold on
grid on
grid minor

% Set title for the output and names for the x-axis and y-axis
title('Graphic of Third-Order ODE', 'Color', 'r');
xlabel ('x','Color', 'r');
ylabel ('y(x)','Color', 'r');

% Show the graphic of the Third-Order ODE
plot(t, eval(y1), '--r');

end
```

в) Резултат от изпълнението на кода:

