Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2019/20

Тема № СИ20-П-22

23.06.2020

София

Изготвил:........Теодора Ивайлова Иванова..........

Ф. No. …...62250……

Група ...1...

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семестър, уч. год. 2019/20

Име......Теодора Ивайлова Иванова......,
Ф.No..62250.., група ...1...

Тема СИ20-П-22. Движението на струна се моделира със следната задача

$$
\left|
\begin{array}{l}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; t > 0, \; 0 < x < 10, \\[2ex]
u|_{t=0} = \begin{cases} -5(x-\pi)^2(x-2\pi)^2, & x \in [\pi, 2\pi] \\ 0, & x \in [0,\pi) \cup (2\pi, 10], \end{cases} \\
u_t|_{t=0} = 0, \;\; 0 \le x \le 10, \\[2ex]
u|_{x=0} = 0, \;\; u_x|_{x=10} = 0, \;\; t \ge 0.
\end{array}
\right.
$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и намерете нейните собствени стойности и собствени функции. Решете полученото уравнение за функциите $T_k(t)$. Напишете как се пресмятат коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 35-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да начертаете с MATLAB:

- в един прозорец положението на стураната в моментите $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 5$, при $a = 0,6$.

- в друг прозорец положението на струната в същите моменти, когато $a = 2$. Означете коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на задачата

2.1. Теоретична част

Тема СИ20-П-22. Движението на струна се моделира със следната задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 . u_{xx}, \quad t>0, \quad 0 < x < \boxed{10} = L \qquad (1) \\[2ex] u|_{t=0} = \begin{cases} \boxed{-5(x-\pi)^2(x-2\pi)^2} = \varphi(x), & x \in [\pi; 2\pi] \\ 0 = \varphi(x), & x \in [0;\pi) \cup (2\pi; 10] \end{cases} \\[2ex] u_t|_{t=0} = \boxed{0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le 10 \\[2ex] \underbrace{u|_{x=0} = 0}_{\text{закрепен ляв край на струната}}, \quad \underbrace{u_x|_{x=10} = 0}_{\text{свободен десен край на струната}}, \quad t \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

- Търсим решение по метода на Фурие в следния вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

- Заместваме в (1) и получаваме:

$$X(x).T''(t) = a^2 . X''(x) T(t), \text{ за}$$
$$(x,t) \in G := \{(x,t) : 0 < x < 10,\ t > 0\}$$

- В точките от G, в които $X(x).T(t) \neq 0$, получаваме: (фиксираме отношението да бъде непроменливо)

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \text{ където } \lambda = \text{константа}$$

= 1 =

• Така получаваме следните ОДУ от втори ред:

$X''(x) + \lambda . X(x) = 0$

$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

• От граничните условия получаваме:

$u(0,t) = X(0) . T(t) = 0$ за $t \geq 0$ и

$u_x(10,t) = X'(10) T(t) = 0$ за $t \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$ и $\boxed{X'(10) = 0}$

• По този начин достигаме до следната задача на Щурм-Лиувил за функциите $X_n(x)$:

$$\left| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda . X(x) = 0, \quad 0 < x < 10 \\ X(0) = 0, \quad X'(10) = 0 \end{array} \right.$$

• Търсим ненулеви решения на задачата на Щурм-Лиувил! уравнението $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ има следния характеристичен полином:

$\boxed{P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda}$

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha^2 = -\lambda}$

· Разглеждаме следните 3 случая в зависимост от стойностите на λ:

1) $\lambda < 0$, то корените на $P(\alpha) = 0$ са:

$\alpha_1 = -\sqrt{-\lambda}$ и $\alpha_2 = \sqrt{-\lambda}$

ФСР: $\{e^{-\sqrt{-\lambda}x}; e^{\sqrt{-\lambda}x}\}$

Общото решение на уравнението е:

$X(x) = c_1 . e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$, където c_1 и c_2 са произволни константи

От началните условия получаваме:

$X(0) = c_1 . e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c_2 = -c_1}$

$X'(10) = -\sqrt{-\lambda}.c_1 e^{-10\sqrt{-\lambda}} + \sqrt{-\lambda}.c_2 e^{10\sqrt{-\lambda}} = 0$

$\Rightarrow X'(10) = \sqrt{-\lambda}(-c_1 e^{-10\sqrt{-\lambda}} - c_1 e^{10\sqrt{-\lambda}}) = 0$

$\Rightarrow X'(10) = -c_1 . \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{>0} . (\underbrace{e^{-10\sqrt{-\lambda}} + e^{10\sqrt{-\lambda}}}_{>0}) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{c_1 = 0}} \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}$

$\Rightarrow$ за $X(x)$ получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$

$\Rightarrow$ При $\lambda < 0$: $\left.\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{X(x) \equiv 0}_{\text{тривиално решение}}$

2) $\lambda = 0$, то корените на $P(\alpha) = 0$ са:

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \rightarrow$ двоен корен

$\Rightarrow$ ФСР: $\{1, x\}$

Общото решение на уравнението е:

$X(x) = C_1 + C_2 . x$, където C_1 и C_2 са произволни константи

От началните условия получаваме:

$X(0) = C_1 + C_2 . 0 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$X'(10) = C_1 + C_2 = 0$

$\Rightarrow X'(10) = 0 + C_2 = 0$

$\Rightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$\Rightarrow$ За $X(x)$ получаваме тривиалното решение: $X(x) \equiv 0$

$\Rightarrow$ При $\lambda = 0$ получаваме:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right\} \underbrace{X(x) \equiv 0}_{\text{тривиално решение}}$$

3) $\lambda > 0$, то корените на $P(\alpha) = 0$ са:

$\alpha_1 = -i\sqrt{\lambda}$ и $\alpha_2 = i\sqrt{\lambda}$ - комплексни корени

ФСР: $\{\cos(\sqrt{\lambda}x); \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$

Общото решение на уравнението е:

$X(x) = c_1 . \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 . \sin(\sqrt{\lambda}x)$,

където c_1 и c_2 са произволни константи

От началните условия получаваме:

$X(0) = c_1 . \underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{c_2 . \underbrace{\sin 0}_{0}}_{0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$X'(10) = -c_1 . \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 . \sqrt{\lambda} . \cos(10\sqrt{\lambda}) = 0$

$\Rightarrow c_2 \sqrt{\lambda} \cos(10\sqrt{\lambda}) = 0$

3.1) $\cos(10\sqrt{\lambda}) \neq 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \underline{X(x) \equiv 0}$ тривиално решение

3.2) $\cos(10\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow 10\sqrt{\lambda} = \frac{2k+1}{2}\pi$, където $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2k+1}{20} . \pi$, където $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow \underline{\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{20}\pi\right)^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \rightarrow$ собствени стойности на задачата на Щурм-Лиувил

Тогава задачата на Щурм-Лиувил има има нетривиално решение, което има вида: $C_k X_k(x)$, където $\underline{C_k}$ е произволна константа, а $X_k(x)$ има следния вид:

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right), k=0,1,2,3,\ldots \rightarrow$$

собствени функции на задачата на Щурм-Лиувил

=> За функциите $X_k(x)$, за които получихме задачата на Щурм-Лиувил, намерихме следните собствени стойности и собствени функции:

$$\lambda_k := \left(\frac{2k+1}{20}\pi\right)^2, k=0,1,2,3,\ldots \quad \boxed{\text{собствени стойности}}$$

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right), k=0,1,2,3,\ldots \quad \boxed{\text{собствени функции}}$$

- Решаваме полученото уравнение за функциите $T_k(t)$:

<u>уравнението</u> е: $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$,
<u>като</u> <u>считаме</u>: $\boxed{\lambda = \lambda_k = \left(\frac{2k+1}{20}\pi\right)^2}$

- Характеристичният полином на уравнението е:

$$Q(\alpha) = \alpha^2 + \lambda_k a^2 = \alpha^2 + \left(\frac{2k+1}{20}\pi\right)^2 \cdot a^2$$

Корените на характеристичния полином са:

$$Q(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \left(\frac{2k+1}{20}\pi\right)^2 a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\left(\frac{2k+1}{20}\pi\right)^2 a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{(2k+1)\pi . a}{20} i, \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\text{ФСР}: \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{20} t\right); \sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{20} t\right) \right\}$$

Общото решение на уравнението е:

$$T_k(t) := A_k . \cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{20} t\right) + B_k . \sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{20} t\right),$$

където $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, а

A_k и B_k - произволни константи

$\Rightarrow$ По този начин получихме функциите:

$$U_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) . T_k(t),$$ които удовлетворяват уравнението и граничните условия в изходната задача

От началните условия в задачата получаваме, че константите A_k и B_k се пресмятат по следния начин:

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\, X_k(x)\,dx, \quad k=0,1,2,3,\dots$$

$$A_k = \frac{2}{10}\int_0^{10} \varphi(x).\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right)dx,$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x)\, X_k(x)\,dx, \quad k=0,1,2,3,\dots$$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^{10} \psi(x).\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right)dx,$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Окончателно получаваме:

$$U_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right).\left(A_k.\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{20}t\right)+B_k.\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{20}t\right)\right)$$

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)X_k(x)dx = \frac{2}{20}\int_0 \varphi(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right)dx,$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x)X_k(x)dx = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^{10}\psi(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{20}x\right)dx,$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.2.MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

2.2.1. Движението на струната в моментите:

t1 = 0

t2 = 2

t3 = 5

при a = 0.6

```
function task22
% The case where a = 0.6
clf
clc

% Define the variables given in the task
L = 10;
a = 0.6;
x = 0:L / 100:L;
t(1) = 0;
t(2) = 2;
t(3) = 5;

% Plot the movement of the string in the given moments
% t(1) = 0
% t(2) = 2
% t(3) = 5
for i = 1 : length(t)
    % Plot the graphics in the moment t(0) = 0
    subplot(3, 1, 1)
    plot(x, fourier(x, t(1)), 'r', 'LineWidth', 2)
    title('t = 0', 'Color', 'r')
    % Constraints for y: -11*pi and 11*pi are chosen
    % in order to get better view of the graphics
    axis([0 L -11*pi 11*pi])
    grid on
    grid minor

    % Plot the graphics in the moment t(1) = 2
    subplot(3, 1, 2)
    plot(x, fourier(x, t(2)), 'b', 'LineWidth', 2)
    title('t = 2', 'Color', 'b')
    axis([0 L -11*pi 11*pi])
    grid on
    grid minor

    % Plot the graphics in the moment t(2) = 5
    subplot(3, 1, 3)
    plot(x, fourier(x, t(3)), 'm', 'LineWidth', 2)
    title('t = 5', 'Color', 'm')
    axis([0 L -11*pi 11*pi])
    grid on
    grid minor

    M(i) = getframe;
```

```matlab
end
movie(M, 3);

% Define Fourier function
function y = fourier(x, t)
    y = 0;
    for k = 1:35 % 35th partial sum
        % Define Xk
        Xk = sin(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
        % Define Ak
        Ak = (2/L)*trapz(x, phi(x).*Xk);
        % Define Bk
        Bk = (4/(2*k+1)*pi*a)*trapz(x, psi(x).*Xk);
        % Define Tk
        Tk = Ak*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L)) + Bk*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L));
        y = y + Xk.*Tk;
    end
end

% Define function phi(x)
function y = phi(x)
    for j = 1:length(x)
        if pi <= x(j) && x(j) <= 2*pi
            y(j) = -5*((x(j)-pi)^2)*((x(j)-2*pi)^2);
        elseif (0 <= x(j) && x(j) < pi) || (2*pi < x(j) && x(j) <= L)
            y(j) = 0;
        end
    end
end

% Define function psi(x)
function y = psi(x)
    y = 0;
end

end
```

2.2.2. Движението на струната в моментите:

t1 = 0

t2 = 2

t3 = 5

при a = 2

```
function task22
% The case where a = 2
clf
clc

% Define the variables given in the task
L = 10;
a = 2;
x = 0:L / 100:L;
t(1) = 0;
t(2) = 2;
t(3) = 5;

% Plot the movement of the string in the given moments
% t(1) = 0
% t(2) = 2
% t(3) = 5
for i = 1 : length(t)
    % Plot the graphics in the moment t(0) = 0
    subplot(3, 1, 1)
    plot(x, fourier(x, t(1)), 'r', 'LineWidth', 2)
    title('t = 0', 'Color', 'r')
    % Constraints for y: -11*pi and 11*pi are chosen
    % in order to get better view of the graphics
    axis([0 L -11*pi 11*pi])
    grid on
    grid minor

    % Plot the graphics in the moment t(1) = 2
    subplot(3, 1, 2)
    plot(x, fourier(x, t(2)), 'b', 'LineWidth', 2)
    title('t = 2', 'Color', 'b')
    axis([0 L -11*pi 11*pi])
    grid on
    grid minor

    % Plot the graphics in the moment t(2) = 5
    subplot(3, 1, 3)
    plot(x, fourier(x, t(3)), 'm', 'LineWidth', 2)
    title('t = 5', 'Color', 'm')
    axis([0 L -11*pi 11*pi])
    grid on
    grid minor

    M(i) = getframe;
end
movie(M, 3);
```

```matlab
% Define Fourier function
function y = fourier(x, t)
    y = 0;
    for k = 1:35 % 35th partial sum
        % Define Xk
        Xk = sin(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
        % Define Ak
        Ak = (2/L)*trapz(x, phi(x).*Xk);
        % Define Bk
        Bk = (4/(2*k+1)*pi*a)*trapz(x, psi(x).*Xk);
        % Define Tk
        Tk = Ak*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L)) + Bk*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L));
        y = y + Xk.*Tk;
    end
end

% Define function phi(x)
function y = phi(x)
    for j = 1:length(x)
        if pi <= x(j) && x(j) <= 2*pi
            y(j) = -5*((x(j)-pi)^2)*((x(j)-2*pi)^2);
        elseif (0 <= x(j) && x(j) < pi) || (2*pi < x(j) && x(j) <= L)
            y(j) = 0;
        end
    end
end

% Define function psi(x)
function y = psi(x)
    y = 0;
end

end
```

3. Графики

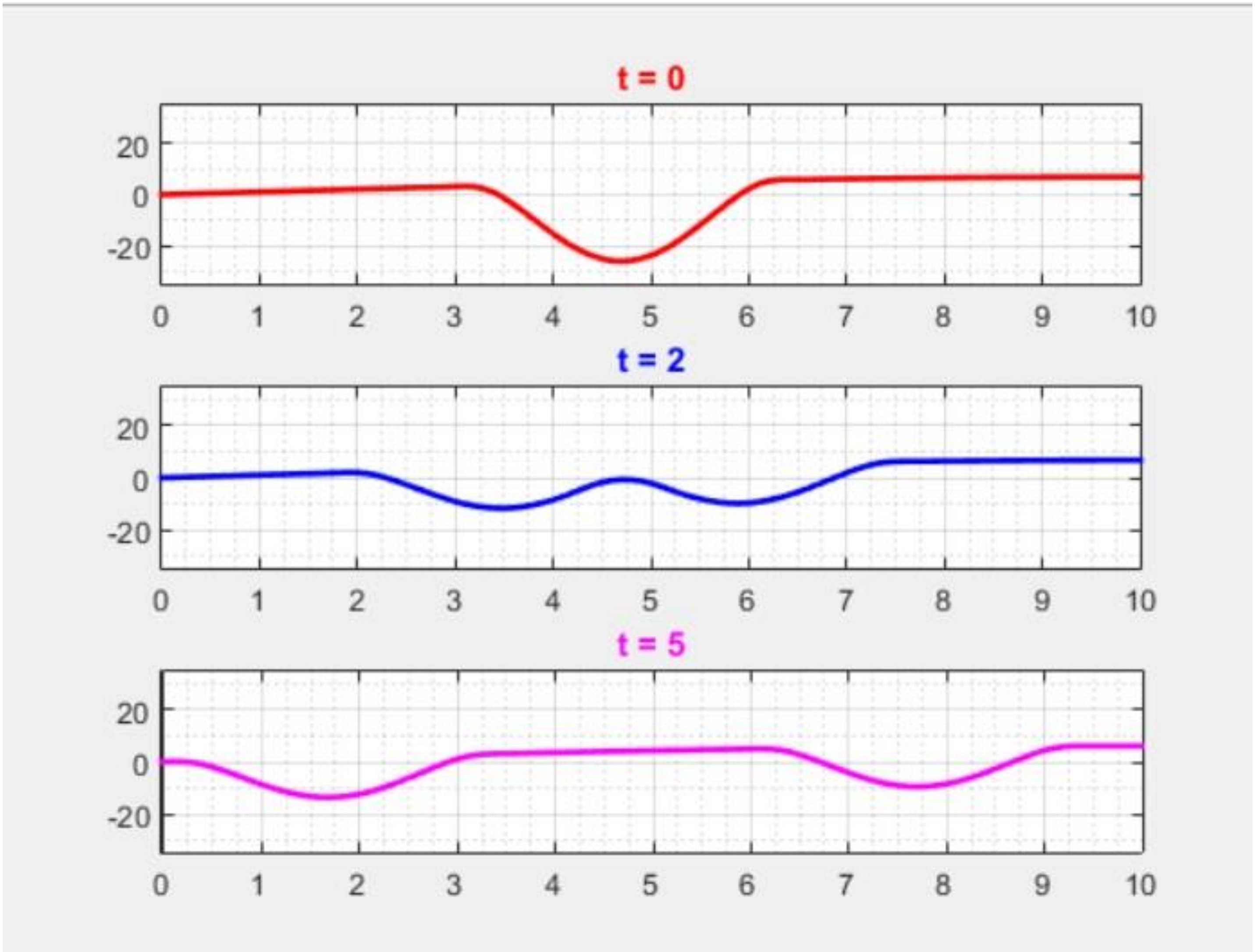
3.1. Графики в моментите:

t = 0

t = 2

t = 5

при a = 0.6



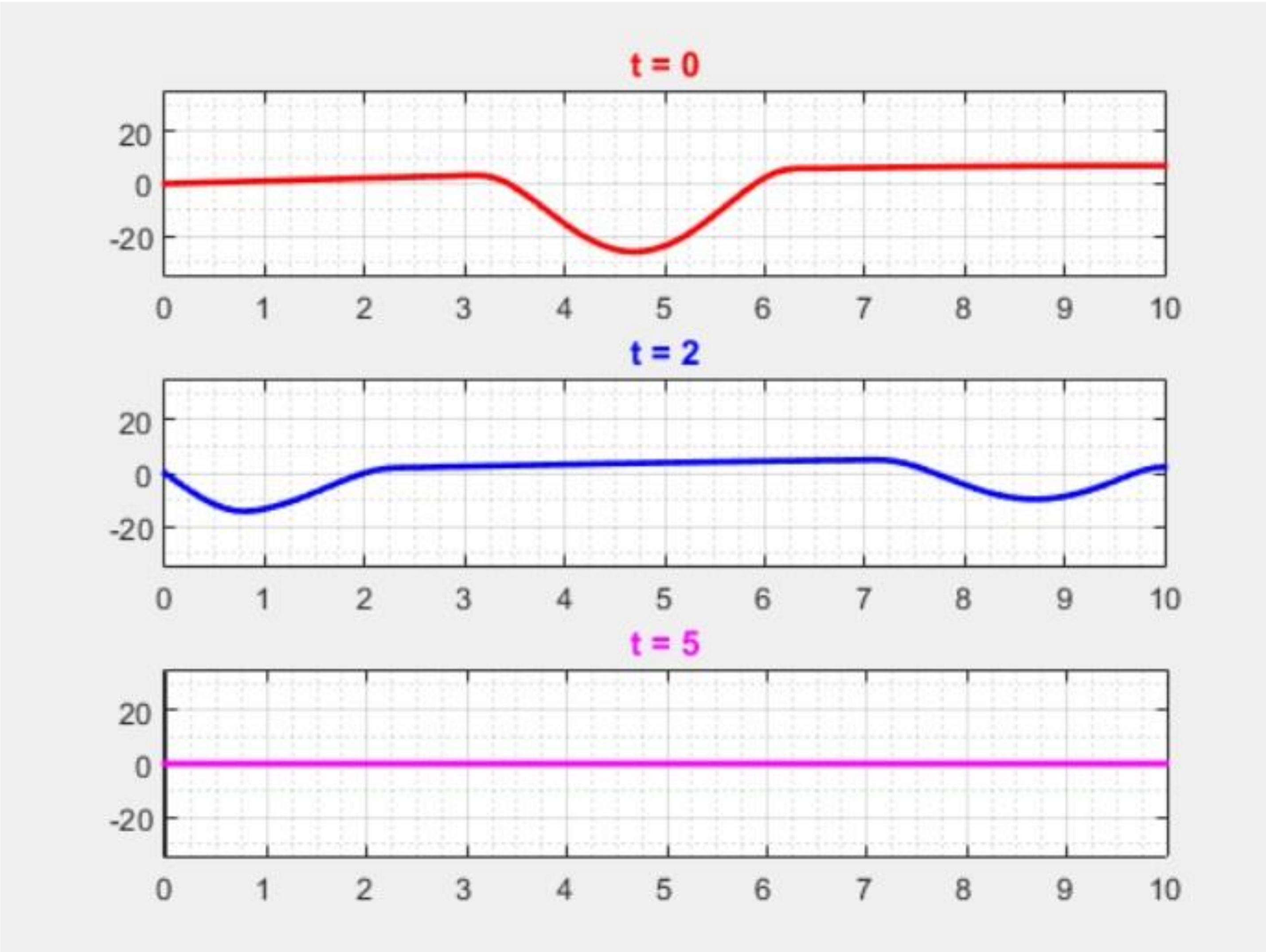
3.2. Графики в моментите

t = 0

t = 2

t = 5

при a = 2



4. Коментари към получените Matlab резултати

4.1. Коментари към движението на струната в моментите:

$t = 0$
$t = 2$
$t = 5$

при $a = 0.6$

В момента **t = 0** при движението на струната се образува една вълна, чието направление е надолу. Максималното отклонение от равновесното положение се достига при **x** между 4 и 5. Вълната е абсолютно идентична с вълната, образувала се в момента **t = 0** при **a = 2**.

В момента **t = 2** при движението на струната се образуват три вълни (две с направление надолу и една между тях с направление нагоре), чиито амплитуди са по-малки от амплитудата на вълната, образувала се в момента **t = 0**.

В момента **t = 5** се образуват две вълни, чието направление е надолу.

4.2. Коментари към движението на струната в моментите:

t = 0
t = 2
t = 5

при a = 2

В момента **t = 0** при движението на струната се образува една вълна, чието направление е вертикално надолу. Вълната е абсолютно идентична с вълната, образувала се в момента **t = 0** при **a = 0.6**.

В момента **t = 2** при движението на струната се образуват две вълни, чиито амплитуди са по-малки от тази, образувала се в момента **t = 0**.

В момента **t = 5** се не се образуват никакви вълни. Струната остава неподвижна.