



UNIVERSITATEA DIN
BUCUREȘTI
— VIRTUTE ET SAPIENTIA —

Statistică și Metode de Cercetare Cantitativă în Psihologie și Științe Cognitive

Inferenta Statistica

George Gunnesch-Luca

26.03.2024

Introducere în Infernța Statistică

- Definiția Infernței Statistice
- Importanța Infernței Statistice în Cercetare

II. Concepte de Probabilitate

- Definiția Probabilității
- Tipuri de Probabilitate: Subiectivă, Empirică și Teoretică
- Reguli de Bază ale Probabilității: Regula Adității și Regula Multiplicării
- Distribuții de Probabilitate: Discrete și Continue
- Distribuții Comune de Probabilitate: Normală, Binomială și Poisson

III. Inferență Inferențială

- Ipoteze
- Logica Testării Ipotezelor
- Testarea Ipotezelor în Eșantioane
- Distribuții de Test
 - Introducere în Distribuțiile de Probabilitate
 - Derivarea Distribuțiilor de Test (de exemplu, distribuția t, distribuția F)
- Erori în Testarea Semnificației
- Puterea Testului (Power)
- Alternative la Testarea Semnificației
 - Inferența Bayesiană
 - Estimare
- Intervalele de Încredere
- Mărimi ale Efectului

IV. Inferența Bayesiană vs Inferența Frequentistă

- Introducere în Inferența Bayesiană
- Diferențe între Inferența Bayesiană și Inferența Frequentistă
- Interpretarea Probabilității
- Cuantificarea Incertitudinii
- Includerea Cunoștințelor și Credințelor Anterioare
- Punctele Forte și Limitările Ambelor Abordări

Ideea de Bază

Ce este Inferența Statistică?

- Procesul de a trage concluzii despre o populație bazându-se pe datele din eșantion
- Implică realizarea de inferențe despre parametri necunoscuți ai populației pe baza statisticilor eșantionului

Importanța Inferenței Statistice în Cercetare

- Ne permite să facem generalizări despre populații pe baza eșantioanelor
- Ne ajută să tragem concluzii și să luăm decizii bazate pe date
- Oferă o modalitate sistematică de a testa ipoteze și teorii
- Poate ajuta la identificarea tiparelor și relațiilor din date

Obiectivele Infernței Statistice:

În statistica inferențială, încercăm să inferăm ceva despre o populație din datele provenite dintr-un eșantion prelevat din aceasta. Dar ce anume încercăm să inferăm?

- Estimarea parametrilor

De exemplu, parametrii unei distribuții normale sunt media și abaterea sa standard. Media determină valoarea în jurul căreia este centrată "curba în formă de clopot" și abaterea standard determină lățimea acesteia. Așadar, dacă știți că datele au o distribuție normală, estimarea parametrilor ar însemna să încercați să aflați valorile reale ale mediei și abaterii standard.

- Predicția datelor

De exemplu, după ce măsurați înălțimile femeilor dintr-un eșantion, puteți estima media și abaterea standard a distribuției pentru toate femeile adulte. Apoi, puteți utiliza aceste valori pentru a prezice probabilitatea ca o femeie aleasă la întâmplare să aibă o înălțime într-un anumit interval de valori.

- Compararea modelelor (avansat)

Probabilitate

“Probabilitatea este cel mai important concept în știința modernă, mai ales pentru că nimeni nu are cea mai mică idee despre ce înseamnă.”

Betrand Russel

Probabilitate

- Probabilitatea este o măsură a șanseii ca un eveniment să aibă loc
- Este un număr între 0 și 1, unde 0 indică imposibilitatea și 1 indică certitudinea
- Probabilitatea poate fi exprimată ca fracție, zecimală sau procent

Probabilitate

Măsurarea incertitudinii necesită atribuirea unei probabilități evenimentelor. Totuși, acest lucru devine dificil, deoarece oamenii nu au fost de acord asupra definiției probabilității de-a lungul timpului...

- Viziunea clasică
- Viziunea frequentistă
- Viziunea bayesiană

Interpretarea Probabilității

Viziunea frequentistă

- Probabilitatea este proporția de apariții ale unui eveniment într-un număr infinit de repetări ale unui experiment
- Exemplu: Dacă un statistician frequentist este întrebat să estimeze probabilitatea ca o monedă să aterizeze cu fața în sus, ar putea spune "În încercări repetate, ne așteptăm ca proporția de apariții a feței să convergă către probabilitatea reală de a ateriza cu fața în sus"

Viziunea bayesiană

- Probabilitatea exprimă credința sau incertitudinea cu privire la parametru și poate fi actualizată cu date noi
- Exemplu: Dacă un statistician bayesian este întrebat să estimeze probabilitatea ca o monedă să aterizeze cu fața în sus, ar putea spune "Sunt 90% încrezător că probabilitatea reală de a ateriza cu fața în sus este între 0.4 și 0.6"

Reguli de Bază ale Probabilității

Regula Adității

- Regula adității este folosită pentru a calcula probabilitatea unirii a două evenimente: $P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ și } B)$
- $P(A \text{ și } B)$ este probabilitatea intersecției evenimentelor A și B

Regula Multiplicării

- Regula multiplicării este folosită pentru a calcula probabilitatea apariției comune a două evenimente: $P(A \text{ și } B) = P(A) * P(B|A)$
- $P(B|A)$ este probabilitatea condiționată a evenimentului B dat că evenimentul A a avut loc

Probabilitate Condiționată

Definiție

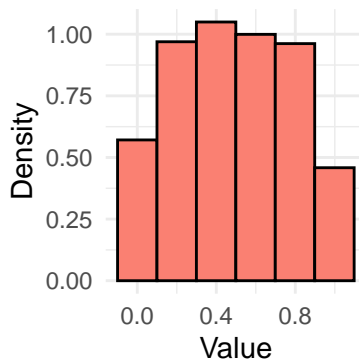
- Probabilitatea condiționată este probabilitatea unui eveniment dat că un alt eveniment a avut loc
- Este notată ca $P(A|B)$, probabilitatea evenimentului A dat că evenimentul B a avut loc
- Este piatra de temelie a statisticii inferențiale: metodele frequentiste sau bayesiene utilizează toate probabilități condiționate.

Distribuții de Probabilitate

Distribuțiile de probabilitate sunt importante deoarece ne permit să calculăm probabilitățile diferitelor rezultate într-un proces aleatoriu și să facem predicții despre observațiile viitoare pe baza datelor anterioare. De asemenea, oferă o modalitate de a modela și analiza fenomene complexe într-un mod cantitativ și sistematic.

Distribuția uniformă

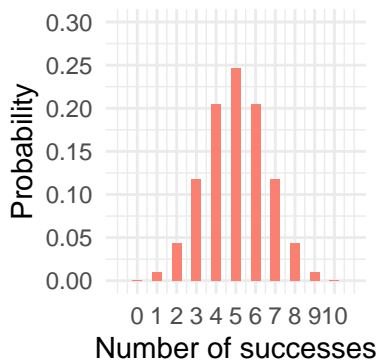
O distribuție uniformă atribuie o probabilitate egală tuturor rezultatelor dintr-un interval dat. De exemplu, probabilitatea de a arunca orice număr pe o zară echitabilă cu șase fețe este $1/6$, care este aceeași pentru toate rezultatele posibile.



Distribuția Binomială

O distribuție binomială de probabilitate este o distribuție de probabilitate discretă care descrie numărul de succese într-un număr fix de încercări independente, unde fiecare încercare are doar două rezultate posibile (de exemplu, succes sau eșec).

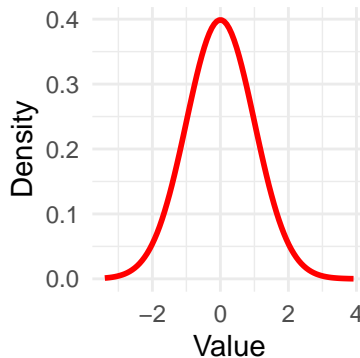
- Distribuția este definită de doi parametri, n : numărul de încercări și p : probabilitatea de succes în fiecare încercare.



Distribuția Normală

O distribuție normală (numită și distribuție Gaussiană) este o distribuție de probabilitate continuă care descrie multe fenomene naturale, cum ar fi înălțimile oamenilor sau greutatea obiectelor.

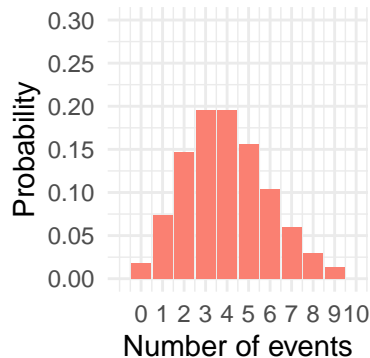
- Media este notată cu μ și abaterea standard este notată cu σ .



Distribuția de tip Poisson

O distribuție Poisson modelează probabilitatea apariției unui anumit număr de evenimente rare într-un interval fix de timp sau spațiu.

- Are un singur parametru: λ (numărul mediu de evenimente care apar într-un interval fix de timp sau spațiu)



Distribuții de Probabilitate

Există multe altele, dar acestea sunt cele mai utilizate.

De exemplu: Chi-pătrat, Distribuția F, Logistică, Log-normală, Pareto, Cauchy, Hipergeometrică, Distribuția binomială negativă.

Nu vă intimidați de numărul mare. Multe dintre ele sunt *exotice* sau sunt *cazuri speciale* ale celor prezentate mai sus.

Inferență Inferențială

- Scopul Testării Ipotezelor
- Logica Testării Ipotezelor
- Exemplu
- Erori în Testarea Semnificației
- Puterea Testului (Power)
- Alternative la Testarea Semnificației
 - Inferența Bayesiană
 - Estimare
- Intervalele de Încredere
- Mărimea Efectului

Scopul Testării Ipotezelor

Când trebuie să faci un test de ipoteză?

- A dovedi ceva: Evaluarea dovezilor în favoarea sau împotriva unei afirmații
- Luarea deciziilor pe baza datelor
- Generalizarea rezultatelor dintr-un eșantion la o populație

Scop: Folosirea caracteristicilor eșantionului pentru a testa afirmația despre populație.

Testele de ipoteză pot doar să determine cu o probabilitate de eroare dacă H_0 este respins (niciodată acceptat).

Aplicații ale Testării Ipotezelor

- **Studii clinice:** *“Pacienții care primesc Medicamentul A vor experimenta o reducere a severității simptomelor cu 30% comparativ cu cei care primesc placebo.”*
- **Controlul calității:** *“Implementarea unui nou proces de inspecție va reduce numărul de produse defecte cu 20%.”*
- **Științe sociale:** *“Copiii care participă la programe după școală vor avea performanțe academice îmbunătățite comparativ cu cei care nu participă.”*
- **Marketing:** *“Introducerea unui nou program de recompense pentru loialitate va crește rata de retenție a clienților cu 10%.”*
- **Finanțe:** *“Investiția într-un portofoliu diversificat de acțiuni și obligațiuni va genera randamente mai mari pe o perioadă de 5 ani comparativ cu investiția exclusiv în obligațiuni guvernamentale.”*

Componente Cheie în Testarea Ipotezelor

- 1 Ipoteza nulă (H_0)
- 2 Ipoteza alternativă (H_1)
- 3 Statistică de test
- 4 Nivel de semnificație (α)
- 5 Valoare p
- 6 Regulă de decizie

Tipuri de Testare a Ipotezelor

- Teste parametrice (de exemplu, t-test, Z-test, ANOVA)
Testele parametrice sunt cele care fac presupuneri despre parametrii distribuției populației din care este extras eșantionul.
- Teste neparametrice (de exemplu, testul rangurilor Wilcoxon, testul Mann-Whitney U)
Testele neparametrice sunt “fără distribuție” și, ca atare, pot fi utilizate pentru variabile non-Normale.
- Analiză de regresie
- Testul chi-pătrat
- Altele

Testarea Ipotezelor

Formularea Ipotezelor Nule și Alternative

Ipoteza Nulă (H_0)

- O afirmație că nu există niciun efect, relație sau diferență
- Reprezintă status quo-ul sau o condiție de bază (adevărată implicit)
- Trebuie să fie testabilă și falsificabilă

Ipoteza Alternativă (H_1)

- O afirmație care contrazice ipoteza nulă (dar nu sunt formulate astfel)
- Reprezintă un efect, relație sau diferență
- Afirmația testată

Testarea Ipotezelor

Teste Unilaterală vs. Bilaterală

- Test unilateral: Ipoteză direcțională (de exemplu, $H1: \mu_1 > \mu_2$)
- Test bilateral: Ipoteză non-direcțională (de exemplu, $H1: \mu_1 \neq \mu_2$)

Exemplu: Formularea Ipotezelor

- Întrebarea de cercetare: Există o diferență de înălțime între două grupuri?
- $H0$: Nu există nicio diferență de înălțime între grupul A și grupul B.
- $H1$: Există o diferență de înălțime între grupul A și grupul B.

Pașii în Testarea Ipotezelor

Pasul 1: Formularea Ipotezelor Nule și Alternative

- Formulează atât H_0 (implicit) cât și H_1 pe baza întrebării de cercetare
- Asigură-te că ipotezele sunt testabile și falsificabile

Pasul 2: Alege Statistică de Test Adecvată

Selectează testul adecvat pe baza întrebării de cercetare, tipului de date și presupunerilor -
Exemple: t-test, Z-test, ANOVA, testul chi-pătrat

Pașii în Testarea Ipotezelor

Pasul 3: Determinarea Nivelului de Semnificație (α)

- Stabilește pragul pentru respingerea ipotezei nule
- Alegeri comune: $\alpha = 0.05, 0.01$, sau 0.10

Pasul 4: Calculează Statistică de Test și P-Valoare

- Calculează statistica de test folosind datele din eșantion
- Calculează valoarea p (p) bazată pe statistica de test și distribuția eșantionului

Pașii în Testarea Ipotezelor

Pasul 5: Compară P-Valoarea cu Nivelul de Semnificație și Ia o Decizie

- Dacă $p \leq \alpha$: Respinge ipoteza nulă (dovezile susțin H_1)
- Dacă $p > \alpha$: Nu respinge ipoteza nulă (dovezi insuficiente pentru H_1)

Exemplu: Procesul de Testare a Ipotezelor

- 1 Întrebarea de cercetare: Există o diferență de înălțime între cele două grupuri?
- 2 $H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (testul t pentru două eșantioane)
- 3 $\alpha = 0.05$
- 4 $t = -2.34$, $p = 0.023$
- 5 $p(0.023) \leq \alpha(0.05)$: Respinge H_0 , dovezile susțin H_1

Tipuri de Erori și Puterea Testului

Eroare de Tip I

- Apare când respingem ipoteza nulă când aceasta este adevărată
- Cunoscută și ca “fals pozitiv” sau “alarmă falsă”
- Probabilitatea unei erori de tip I este notată cu alpha (α)

Eroare de Tip II (beta)

- Apare când nu respingem ipoteza nulă când aceasta este falsă
- Cunoscută și ca “fals negativ” sau “ratată”
- Probabilitatea unei erori de tip II este notată cu beta (β)

Tipuri de Erori și Puterea Testului

Puterea unui Test ($1 - \beta$)

- Probabilitatea de a respinge corect ipoteza nulă când aceasta este falsă
- Cunoscută și ca “sensibilitate” sau “rată de adevărate pozitive”
- Puterea = $1 - \beta$

Factori care Afectează Puterea

- 1 Dimensiunea eșantionului (eșantioane mai mari cresc puterea)
- 2 Mărimea efectului (efectele mai mari sunt mai ușor de detectat)
- 3 Nivelul de semnificație (α) (un α mai mare crește puterea)
- 4 Variabilitatea datelor (variabilitatea mai mică crește puterea)

Echilibrarea Erorilor de Tip I și Tip II

- Cercetătorii trebuie să ia în considerare consecințele fiecărui tip de eroare
- Adesea, se dorește o rată mai mică a erorii de Tip I (α), dar aceasta crește riscul unei erori de Tip II (β)
- Creșterea dimensiunii eșantionului poate ajuta la echilibrarea riscului de erori de Tip I și Tip II

Nivelul de Semnificație și Valoarea P

Nivelul de Semnificație (alpha)

- Pragul pentru respingerea ipotezei nule
- Probabilitatea de a comite o eroare de Tip I
- Alegeri comune: $\alpha = 0.05, 0.01$ sau 0.10

Valoarea P

- Probabilitatea de a observa statistica de test sau un rezultat mai extrem, presupunând că ipoteza nulă este adevărată
- O măsură a dovezilor împotriva ipotezei nule
- Valorile P mai mici indică dovezi mai puternice împotriva H_0

Nivelul de Semnificație și Valoarea P

Relația Între Valoarea P și Nivelul de Semnificație

- Dacă valoarea $P > \alpha$: Nu se respinge ipoteza nulă (dovezi insuficiente pentru H_1)

Importanța Mărimii Efectului, Alternative

- Valoarea P singură nu oferă informații despre mărimea efectului
- Mărimea efectului completează valoarea P prin cuantificarea mărimii efectului observat
- Exemple: d al lui Cohen, r al lui Pearson, raportul șanselor
- Declarația unui rezultat semnificativ este nespecifică.
- Presupunerea H_1 : r diferit de 0. Care este coeficientul de corelație?
- Sau: Clasa 7a citește semnificativ mai bine în medie decât 8c - cu cât mai bine?

Importanța Mărimii Efectului, Alternative

Probleme:

Semnificația depinde de dimensiunea eșantionului și de mărimea efectului (în eșantioane mari, totul devine semnificativ)

- Este un efect semnificativ relevant?
- Ce să facem cu probabilitatea erorii ne semnificative de $p = .051$?

Alternative:

- Intervalele de încredere împotriva gândirii “alb-negru”
- Mărimi ale efectului pentru a reprezenta semnificația practică.

Intervalele de Încredere

- Un parametru dintr-un eșantion este o estimare punctuală.
- Deși reprezintă cea mai bună estimare, nu este identic cu valoarea reală din populație.
- Intervalul de încredere ca o încercare de a restrânge valoarea reală.
- Pe baza eșantionului, se determină un interval care ar putea conține valoarea reală.
- Dacă se trag multe eșantioane și se determină intervalul de încredere, valoarea reală a parametrului este așteptată să fie în intervalele de încredere calculate.
- Intervalul în care se află valoarea reală care ar fi putut produce parametrii găsiți în eșantion.
- Un interval de încredere (CI) este un interval de valori care este probabil să conțină valoarea unui parametru necunoscut al populației.

Intervalele de Încredere

Ipoteza nulă este testată prin stabilirea unui interval de încredere. Dacă valoarea postulate în H_0 se află în intervalul de încredere al valorii empirice a eșantionului, atunci valoarea nu diferă semnificativ de valoarea presupusă sub H_0 (cu nivelul de semnificație α , la $C = 1 - \alpha$). De exemplu, cu o diferență de medii: Dacă intervalul de încredere include 0, atunci diferența nu este semnificativ diferită de 0.

Intervalul de încredere oferă informații suplimentare. Determinarea intervalului depășește decizia de “semnificativ” vs. “nesemnificativ”. Intervalul de încredere oferă informații despre precizia estimării.

Semnificație Statistică vs Semnificație Practică

- Eșantioanele mari induc semnificație statistică
- Semnificația statistică se referă la probabilitatea de a obține un rezultat întâmplător. Dacă un rezultat este semnificativ din punct de vedere statistic, înseamnă că este puțin probabil să fi apărut doar din întâmplare.
- Semnificația practică, pe de altă parte, se referă la importanța sau impactul real al unui rezultat în lumea reală. Faptul că un rezultat este semnificativ din punct de vedere statistic nu înseamnă că este și semnificativ practic.

Adevărat sau fals?

- H_0 și H_1 sunt ambele adevărate
- Acceptarea H_0 dovedește că este adevărata
- Un rezultat semnificativ garantează că H_1 este adevărata
- Valorile p reprezintă probabilitatea ca H_0 să fie adevărata

Inferența Bayesiană

Inferența bayesiană este o abordare statistică a raționamentului care implică actualizarea probabilităților pe baza unor noi dovezi. Cu alte cuvinte, este o modalitate de a ne actualiza credințele despre lume pe baza a ceea ce observăm.

Teorema lui Bayes

La baza inferenței bayesiene se află teorema lui Bayes, care descrie probabilitatea unei ipoteze date pe baza unor dovezi observate. Aceasta afirmă că:

$$P(H|E) = P(E|H) * P(H)/P(E)$$

Unde:

- $P(H | E)$ este probabilitatea ipotezei H dată dovezile E. (*posterioră*)
- $P(E | H)$ este probabilitatea de a observa dovezile E dată ipoteza H. (*verosimilitate*)
- $P(H)$ este probabilitatea *prior* a ipotezei H.
- $P(E)$ este probabilitatea de a observa dovezile E.

Distribuții Anterioare și Posterioare

- În inferența bayesiană, de obicei ne reprezentăm credințele despre o ipoteză folosind distribuții de probabilitate.
- **Distribuția prioră reprezintă credințele noastre inițiale despre ipoteză înainte de a observa orice dovezi, în timp ce distribuția posterioară reprezintă credințele noastre actualizate după ce am observat unele dovezi.**
- Teorema lui Bayes ne permite să ne actualizăm credințele anterioare despre lume cu noi dovezi. Mai exact, putem calcula probabilitatea posterioară a unei ipoteze dată unele dovezi prin înmulțirea probabilității priore cu verosimilitatea dovezilor date ipoteza și normalizând cu probabilitatea dovezilor.