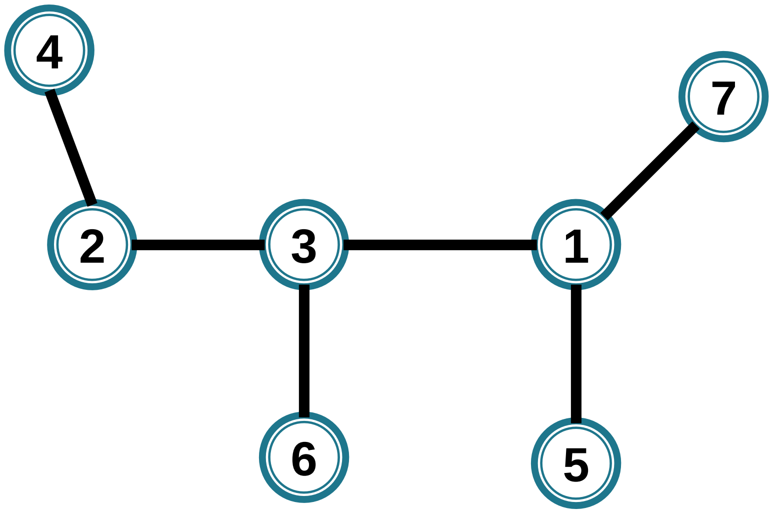
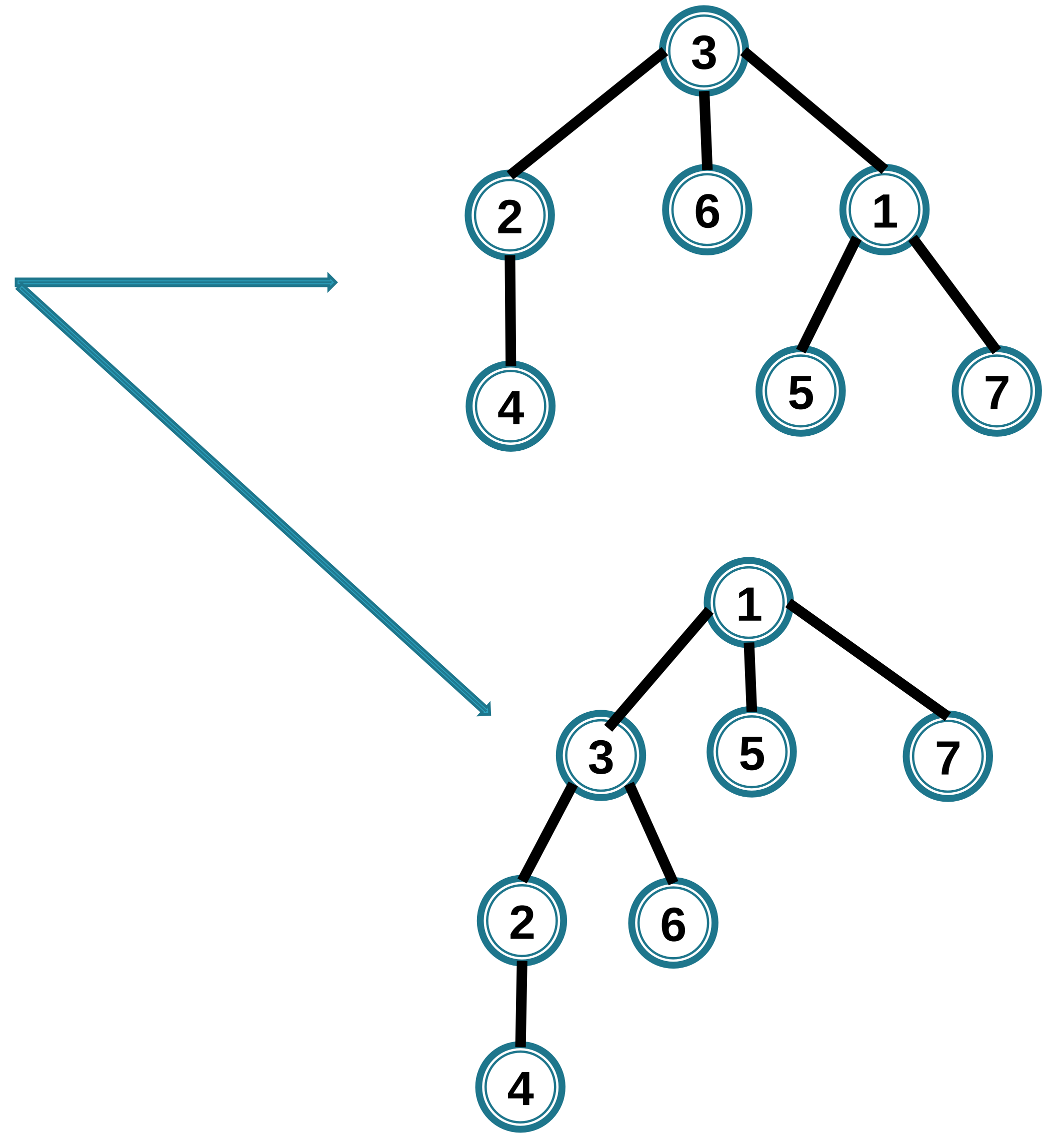
Arbori



Arbore = conex + aciclic



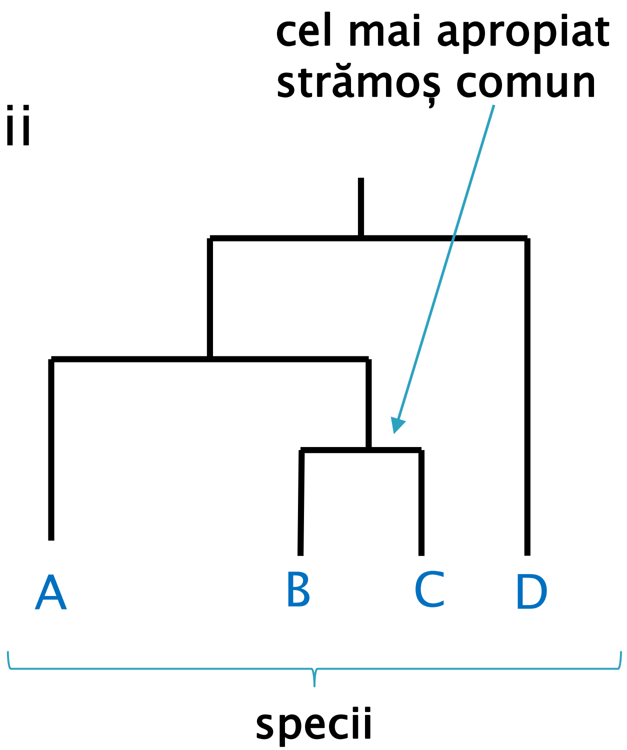
Arbore cu rădăcină

Arbori

- **Arbore** = graf neorientat **conex** și **aciclic**

Arbori

- **Arbore** = graf neorientat **conex** și **aciclic**
  - **Arbori filogenetici** – ilustrează evoluții
  - **Arbori de dependențe, de joc**
  - **Probleme de rutare**
  - **Arbori aleatorii**
  - **Arbori economici (cu costul minim)**
  - **Structuri de date…**



Arbori

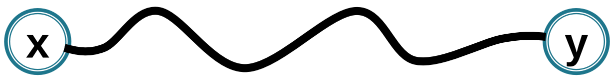
Leme

1. Orice arbore T cu $n>1$ are cel puțin două vârfuri terminale (= de grad 1)

Arbori

Leme

1. Orice arbore T cu n>1 are cel puțin două vârfuri terminale (de grad 1)

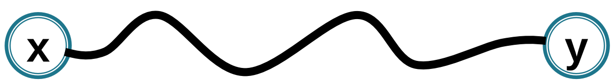


Fie P un **lanț elementar maxim** în T

Arbori

Leme

1. Orice arbore T cu n>1 are cel puțin două vârfuri terminale (de grad 1)



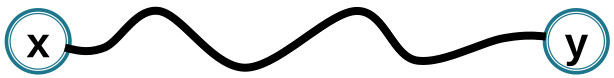
Fie P un **lanț elementar maxim** în T

Extremitățile lui P sunt vârfuri terminale, altfel:

Arbori

Leme

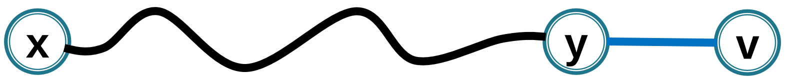
1. Orice arbore T cu n>1 are cel puțin două vârfuri terminale (de grad 1)



Fie P un **lanț elementar maxim** în T

Extremitățile lui P sunt vârfuri terminale, altfel:

- putem extinde lanțul cu o muchie

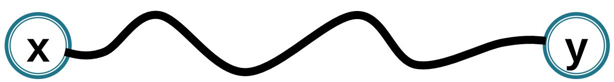


sau

Arbori

Leme

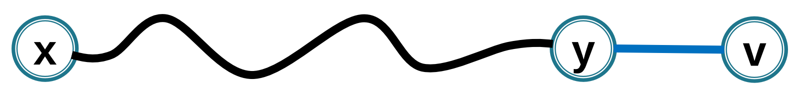
1. Orice arbore T cu $n>1$ are cel puțin două vârfuri terminale (de grad 1)



Fie P un **lanț elementar maxim** în T

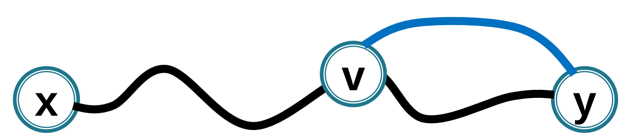
Extremitățile lui P sunt vârfuri terminale, altfel:

- putem extinde lanțul cu o muchie



sau

- se închide un ciclu în T

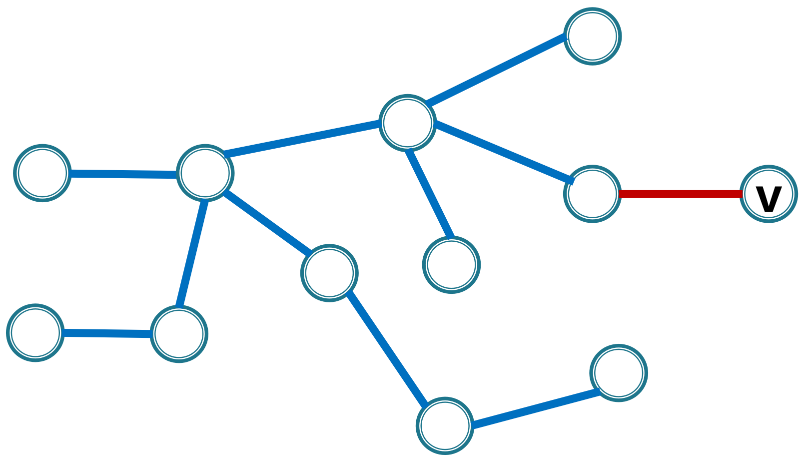


Arbori

Leme

2. Fie T un arbore cu n>1 vârfuri și v un vârf terminal în T.

   Atunci T – v este arbore.

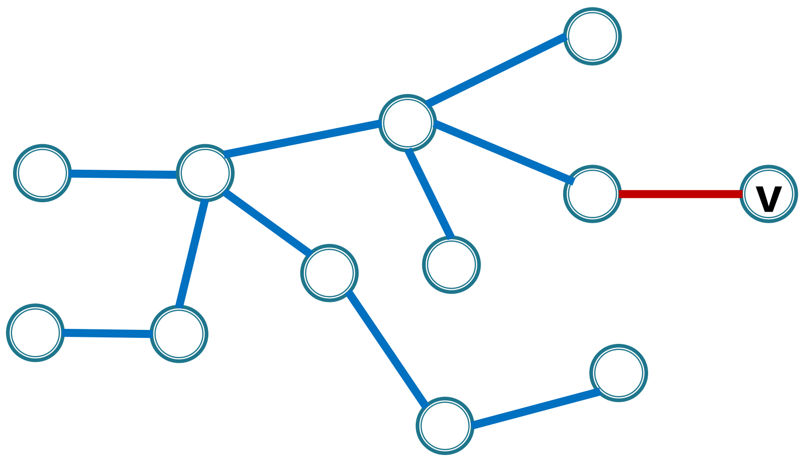


Arbori

Leme

2. Fie T un arbore cu n>1 vârfuri și v un vârf terminal în T.

   Atunci T – v este arbore.



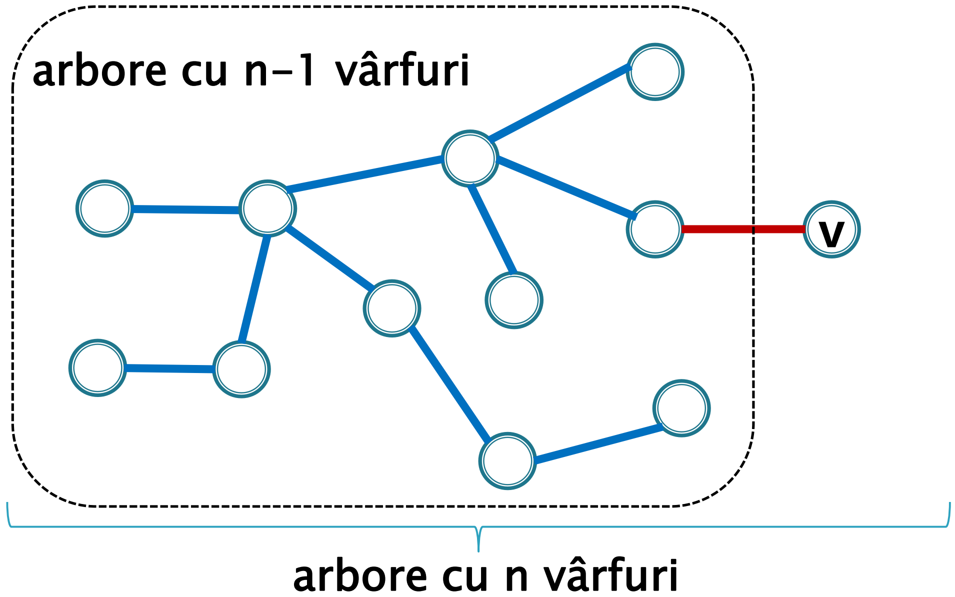
Rezultă din definiția conexității + un vârf terminal nu poate fi vârf intern al unui lanț elementar

Arbori

3. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.

Arbori

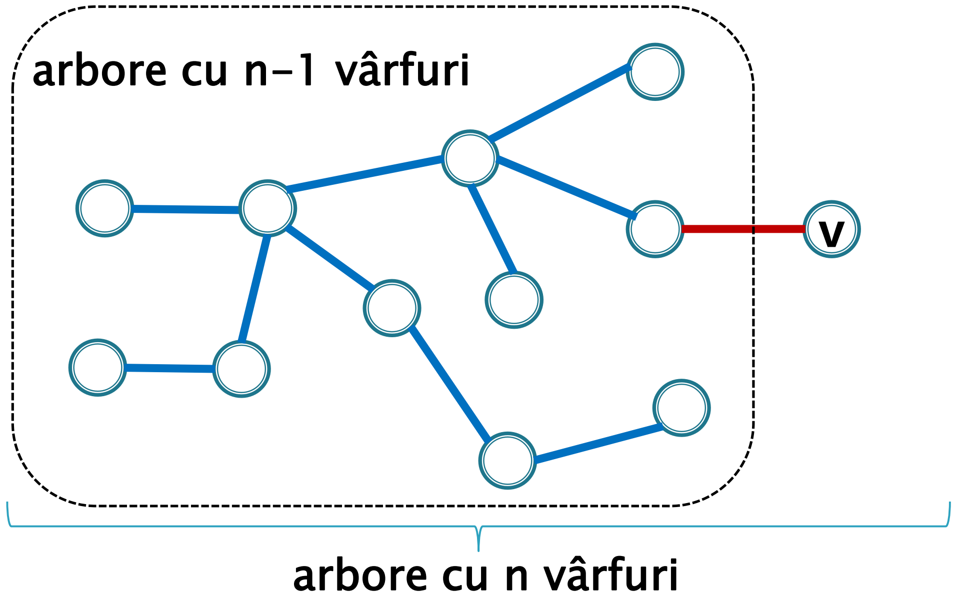
3. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.



Inducție după n

Arbori

3. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.

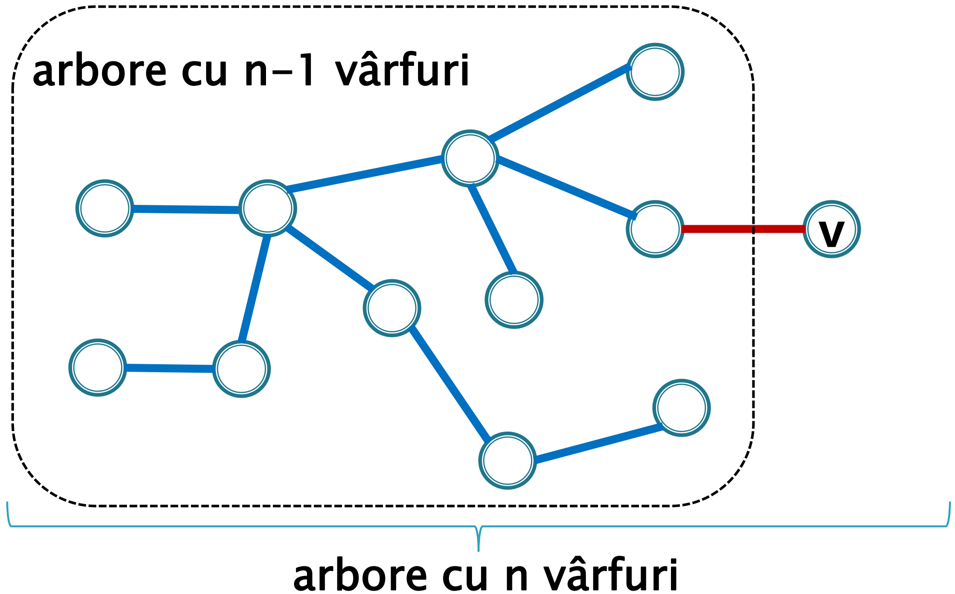


Inducție după n

Verificare – n=1

Arbori

3. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.

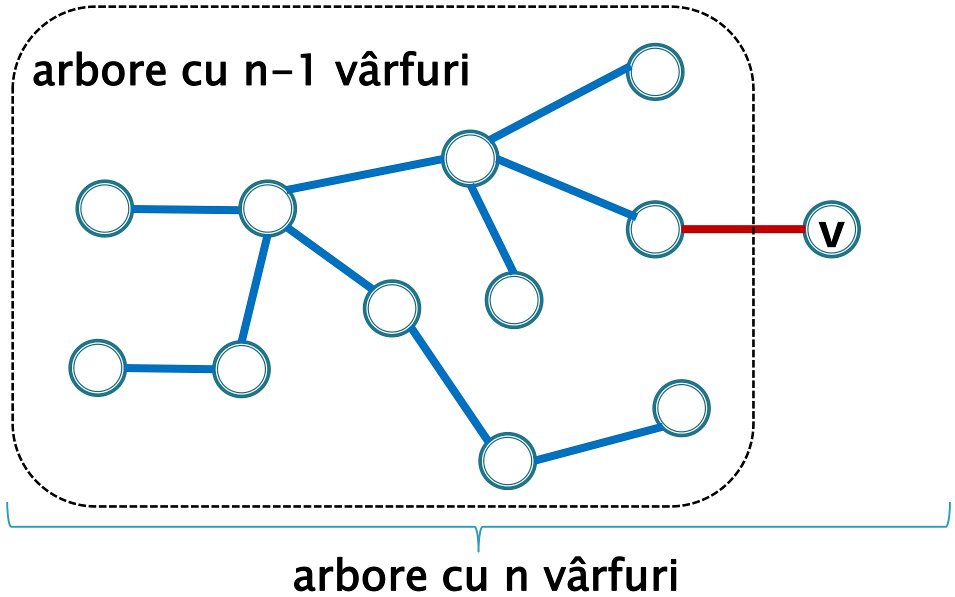


Inducție după n

- Fie T este un arbore cu n vârfuri. Fie **v** vârf **terminal** în **T** (∃, lema 1)

Arbori

3. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.



Inducție după n

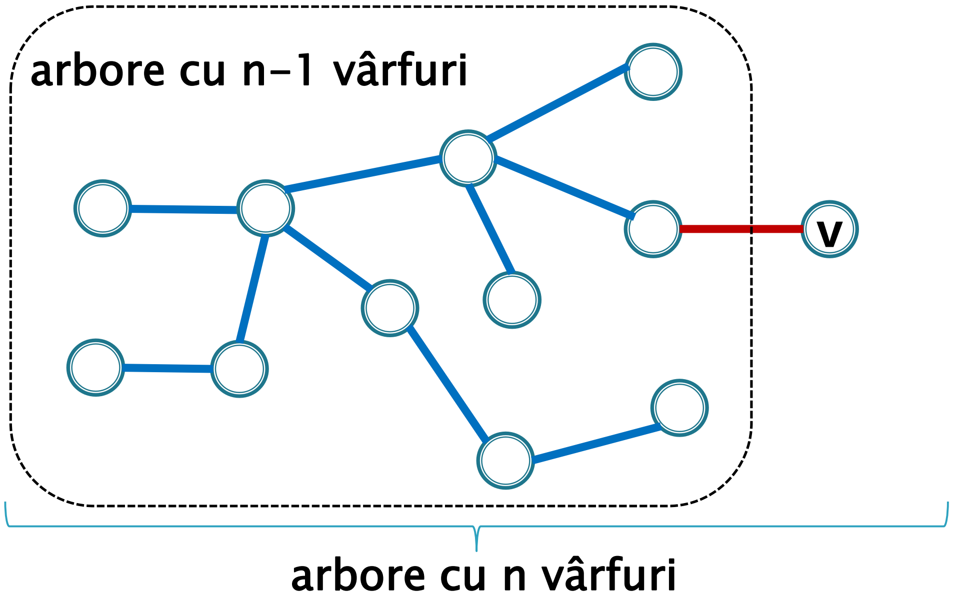
- Fie T este un arbore cu n vârfuri. Fie v vârf terminal în T (∃, Lema 1)

=> **T - v** este arbore cu n-1 vârfuri (Lema 2)

- **Aplicăm ipoteza de inducție pentru T-v**

Arbori

3. Un arbore cu n vârfuri are n-1 muchii.



$\Rightarrow |E(T-v)| = |V(T-v)|-1 = (n-1)-1 = n-2$

$\Rightarrow |E(T)| = |E(T-v)| + 1 = n-1$

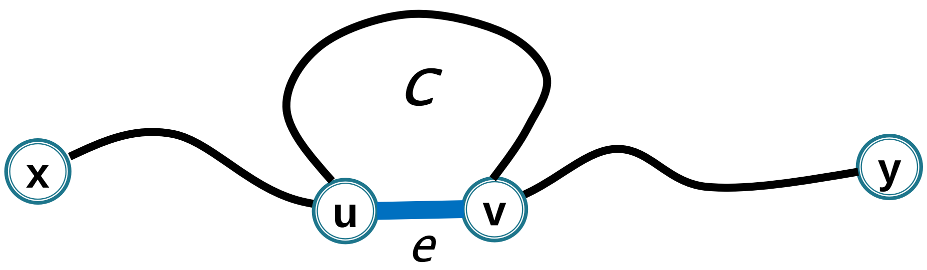
Arbori

Leme

4. Fie G un graf neorientat conex și C un ciclu in G.

Fie e $\in$ E(C) o muchie din ciclul C.

Atunci G−e este tot un graf conex.

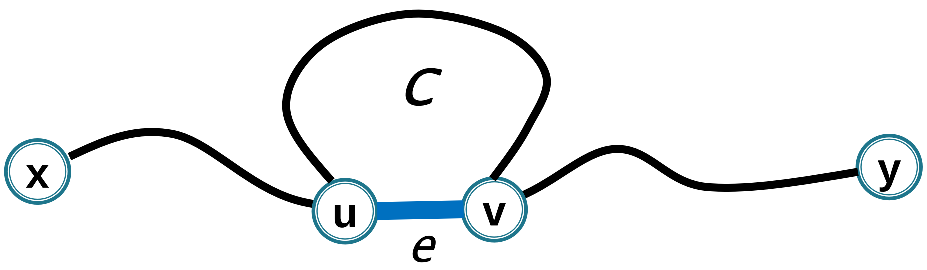


Leme

4. Fie G un graf neorientat conex și C un ciclu in G.

Fie e ∈ E(C) o muchie din ciclul C.

Atunci G-e este tot un graf conex.



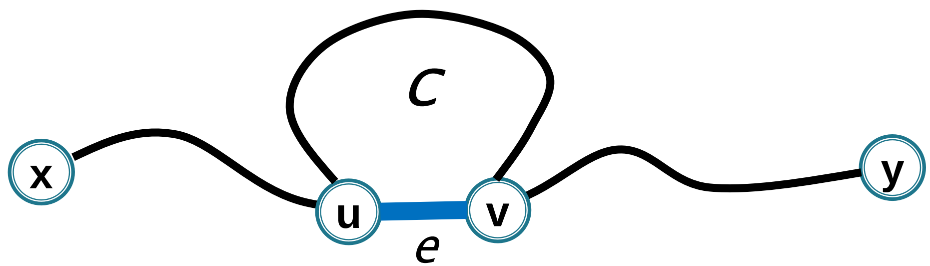
Rezultă din definiția conexității + observația:

Leme

4. Fie G un graf neorientat conex și C un ciclu in G.

Fie e $\in$ E(C) o muchie din ciclul C.

Atunci G−e este tot un graf conex.



Rezultă din definiția conexității + observația:

- dintr-un *x*−*y* lanț în *G* care conține muchia *e* se poate obține un *x*−*y* lanț în *G*−*e* **înlocuind muchia *e* cu lanțul *C*−*e*.**

Arbori

Definiții echivalente

Fie T un graf neorientat cu n>1 vârfuri.

Următoarele afirmații sunt echivalente.

1. **T este arbore (conex și aciclic)**
2.
3.
4.
5.
6.

Arbori

Definiții echivalente

Fie T un graf neorientat cu n>1 vârfuri.

Următoarele afirmații sunt echivalente.

1. **T este arbore (conex și aciclic)**
2. **T este conex muchie-minimal**
3.
4.
5.
6.

prin eliminarea unei muchii din T se obține un graf care nu mai este conex

Arbori

Definiții echivalente

Fie T un graf neorientat cu n>1 vârfuri.

Următoarele afirmații sunt echivalente.

1. **T este arbore (conex și aciclic)**
2. **T este conex muchie-minimal**
3. **T este aciclic muchie-maximal**
4.
5.
6.

prin eliminarea unei muchii din T se obține un graf care nu mai este conex

Arbori

Definiții echivalente

Fie T un graf neorientat cu n>1 vârfuri.

Următoarele afirmații sunt echivalente.

1. **T este arbore (conex și aciclic)**
2. **T este conex muchie-minimal**
3. **T este aciclic muchie-maximal**
4. **T este conex și are n-1 muchii**
5. **T este aciclic și are n-1 muchii**
6.

Arbori

Definiții echivalente

Fie T un graf neorientat cu n>1 vârfuri.

Următoarele afirmații sunt echivalente.

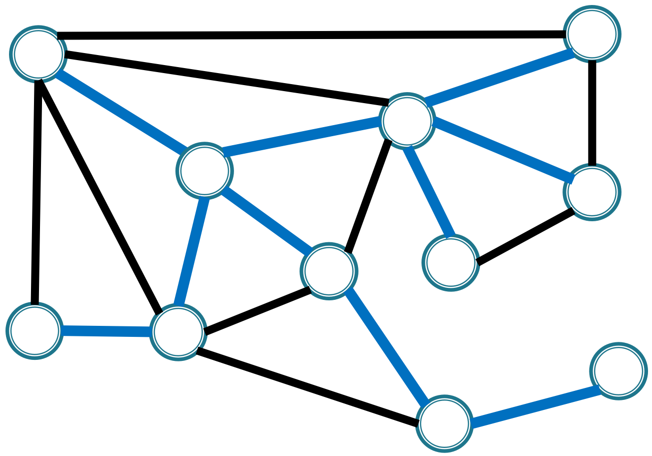
1. **T este arbore (conex și aciclic)**
2. **T este conex muchie-minimal**
3. **T este aciclic muchie-maximal**
4. **T este conex și are n-1 muchii**
5. **T este aciclic și are n-1 muchii**
6. **Între oricare două vârfuri din T există un unic lanț elementar.**

Arbori

Demonstrații echivalențe – Temă (seminar)

Arbori parțiali
ai unui graf

Arbori parțiali

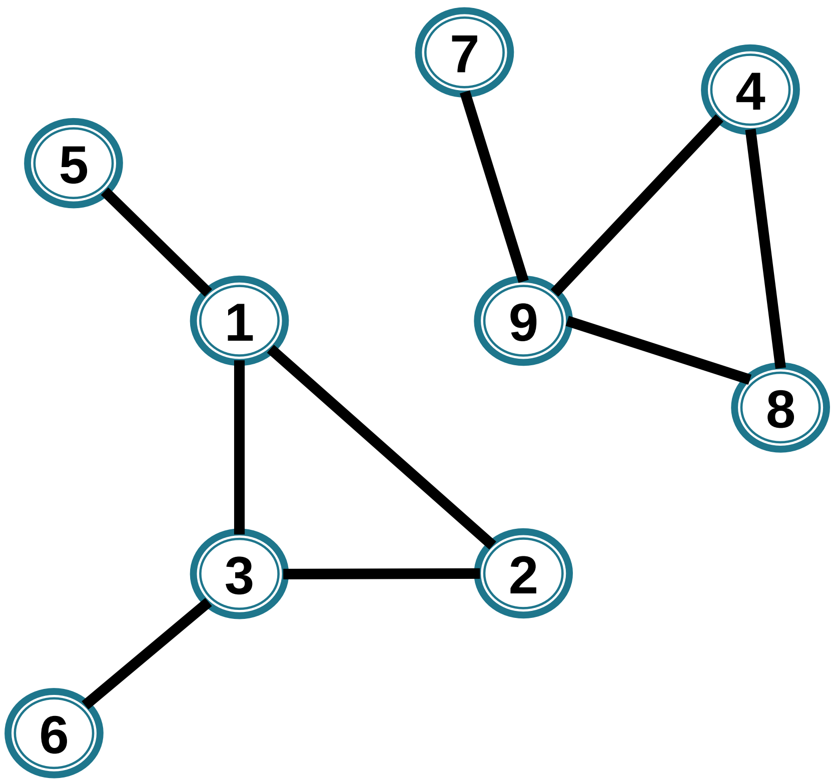


- “Scheletul” grafului
- Transmiterea de mesaje în rețea astfel încât mesajul să ajungă o singură dată în fiecare vârf
- Conectare fără redundanță + cu cost minim

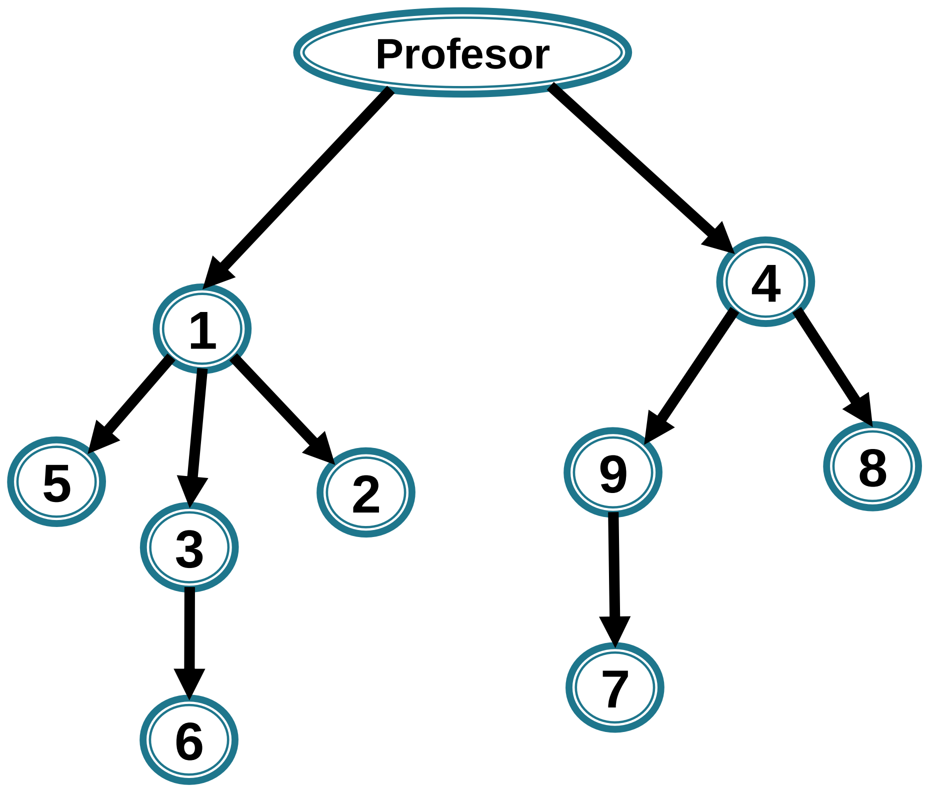
Aplicații

- Determinarea unui arbore parțial al unui graf conex

- **Transmiterea unui mesaj în rețea**: Între participanții la un curs s-au legat relații de prietenie și comunică și în afara cursului. Profesorul vrea să transmită un mesaj participanților și știe ce relații de prietenie s-au stabilit între ei. El vrea să contacteze cât mai puțini participanți, urmând ca aceștia să transmită mesajul între ei. Ajutați-l pe profesor să decidă cui trebuie să transmită inițial mesajul și să atașeze la mesaj o listă în care să arate fiecărui participant către ce prieteni trebuie să trimită mai departe mesajul, astfel încât mesajul să ajungă la fiecare participant la curs o singură dată.



7
4
5
9
1
8
3
2
6

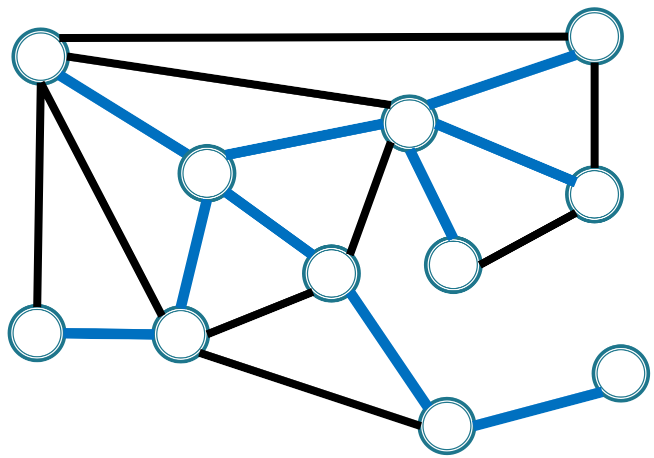


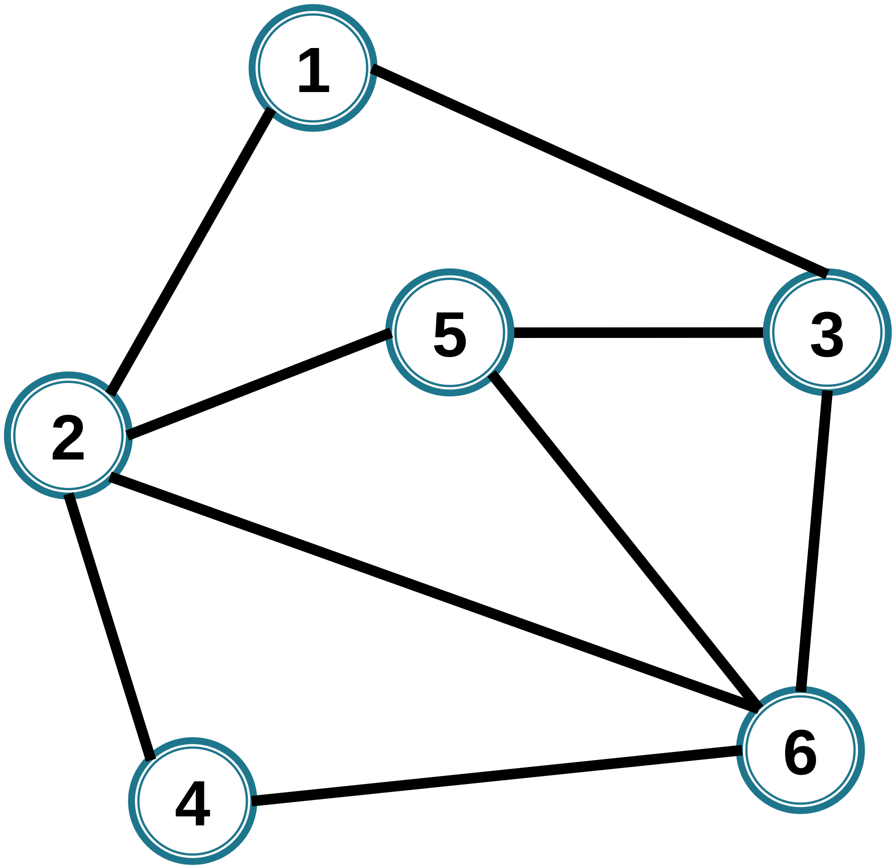
Profesor
1
4
5
3
2
9
8
6
7

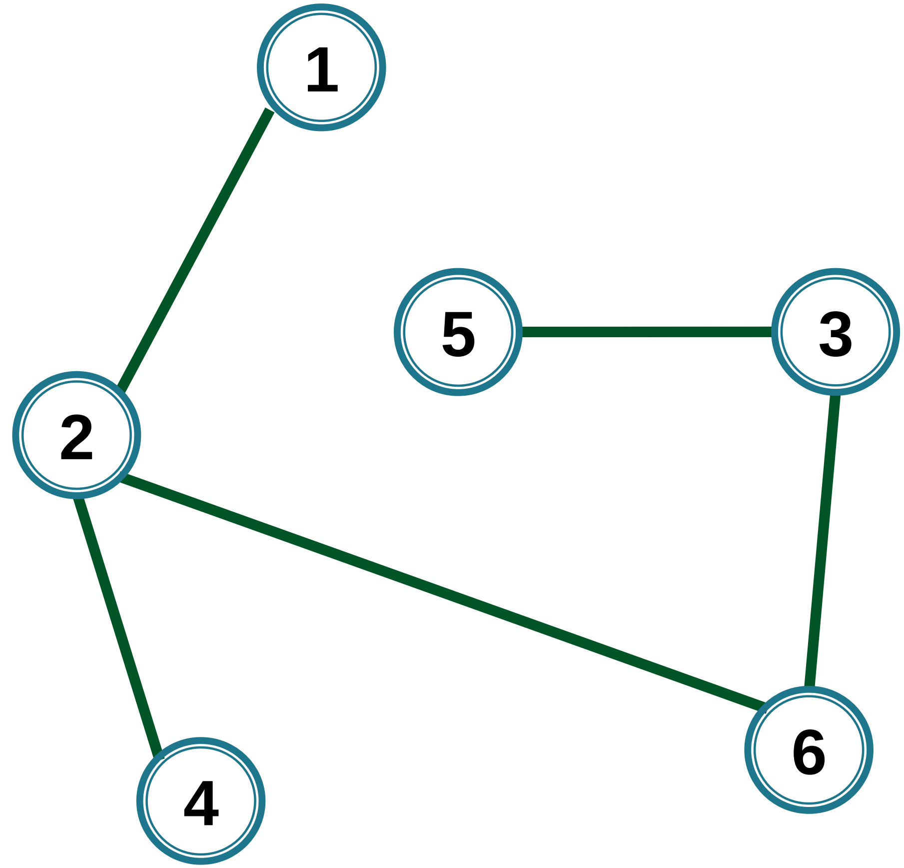
Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial (un graf parțial care este arbore).




1
5
3
2
6
4


1
5
3
2
6
4

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial

Demonstrație – două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V,E):

Prin adăugare de muchii (bottom – up)	Prin eliminare de muchii (cut –down)

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial

Demonstrație – două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V,E):

Prin adăugare de muchii (bottom – up)	Prin eliminare de muchii (cut –down)
$T \leftarrow (V, \varnothing)$	

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial

Demonstrație – două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V,E):

Prin adăugare de muchii (bottom – up)	Prin eliminare de muchii (cut –down)
$T \leftarrow (V, \emptyset)$ cat timp T **nu este conex** executa • alege $e \in E(G) - E(T)$ care **unește două componente conexe** din T (nu formează cicluri cu muchiile din T) • $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$ returneaza T	

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial

Demonstrație – două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V,E):

Prin adăugare de muchii (bottom – up)	Prin eliminare de muchii (cut –down)
$T \leftarrow (V, \emptyset)$ cat timp T **nu este conex** executa • alege $e \in E(G) - E(T)$ care **unește două componente conexe** din T (nu formează cicluri cu muchiile din T) • $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$ returneaza T	
În final T este conex și aciclic, deci arbore	

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial

Demonstrație – două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V,E):

Prin adăugare de muchii (bottom – up)	Prin eliminare de muchii (cut –down)
$T \leftarrow (V, \emptyset)$ cat timp T **nu este conex** executa • alege $e \in E(G) - E(T)$ care **unește două componente conexe** din T (nu formează cicluri cu muchiile din T) • $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$ returneaza T	$T \leftarrow (V, E)$ cat timp T **conține cicluri** executa • alege $e \in E(T)$ o **muchie dintr-un ciclu** • $E(T) \leftarrow E(T) - \{e\}$ returneaza T
În final T este conex și aciclic, deci arbore	

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial

Demonstrație – două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V,E):

Prin adăugare de muchii (bottom – up)	Prin eliminare de muchii (cut –down)
T $\leftarrow$ (V, $\emptyset$) cat timp T **nu este conex** executa • alege e$\in$E(G) – E(T) care **unește două componente conexe** din T (nu formează cicluri cu muchiile din T) • E(T) $\leftarrow$ E(T) $\cup$ {e} returneaza T	T $\leftarrow$ (V, E) cat timp T **conține cicluri** executa • alege e$\in$E(T) o **muchie dintr-un ciclu** • E(T) $\leftarrow$ E(T) – {e} returneaza T
În final T este conex și aciclic, deci arbore	În final T este aciclic și conex (s-au eliminat doar muchii din ciclu), deci arbore

Arbori parțiali

Algoritmi de determinare a unui arbore parțial al unui graf conex

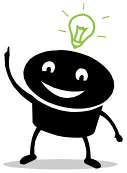
Algoritm de determinare a unui arbore parțial?

Complexitate algoritm?

Arbori parțiali

Algoritmi de determinare a unui arbore parțial al unui graf conex

Complexitate algoritm?



arborele asociat unei parcurgeri este arbore parțial $\Rightarrow$

determinăm un arbore parțial printr-o <u>parcurgere</u>