Lăzăroiu Teodora - Bianca, 141, examen 8.06.2021

1. Fie spațiul vectorial $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ și sistemul de vectori $S = \{1-x, x+x^2, -3+ax^2\}$

Det. $a \in \mathbb{R}$ a.î. S este SLD

rezolvare:

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_0 = \{1, x, x^2\}$ reper canonic în $\mathbb{R}_2[X]$

$R_0 = \{1, x, x^2\} \Rightarrow R_0' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ în $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ S devine $S = \{(1,-1,0), (0,1,1), (-3,0,a)\}$

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ a.î. $x(1,-1,0) + y(0,1,1) + z(-3,0,a) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 3d = 0 \\ -b + c = 0 \\ c + da = 0 \end{cases} \overset{\text{"+"}}{\Rightarrow} \begin{cases} c - 3d = 0 \\ c + d \cdot a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3$$

pentru S SLD

2. Fie spațiul vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ și subspațiul vectorial $V = \langle \{(1,2,1), (1,1,-1), (-1,1,5)\} \rangle$

Aflați dim V

rezolvare:

$R = \{(1,2,1), (1,1,-1), (-1,1,5)\}$ reper

matricea asociată:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 + 1 + 1 + 1 - 10 = 0 \Rightarrow \text{este SLD} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow \dim V = 2$

3. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2) = (x_1-x_2, 2x_1-x_2, x_1, -x_2)$

Aflați $Ker(f)$ și $im(f)$

rezolvare:

$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^4}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker(f) = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$. injectivă

$im(f) = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^2$ a.î. $f(x) = y\} \Rightarrow$

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim Ker f + \dim im f \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim im(f) = 2 - 0 = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 = y_2 \\ x_1 = y_3 \\ -x_2 = y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_3 + y_4 \\ y_2 = 2y_3 + y_4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow im(f) = \{(y_3+y_4, 2y_3+y_4, y_3, y_4) \mid y_3, y_4 \in \mathbb{R}\}$

4. Fie $f \in End(\mathbb{R}_2[x])$. Fie $P_1 = 1+x$, $P_2 = 1-x^2$, $P_3 = x+2x^2$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$

Să se afle $f(1+x+x^2)$

rezolvare:

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, $R_0 = \{1, x, x^2\}$ reper canonic

$f(P_k) = \lambda_k P_k$, $\forall\, k \in \{1,2,3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(P_1) = f(1+X) = \lambda_1(1+X) = 1+X$

$f(P_2) = f(1-X^2) = \lambda_2(1-X^2) = 2-2X^2$

$f(P_3) = f(X+2X^2) = \lambda_3(X+2X^2) = -2X-4X^2$

cum $f \in End(\mathbb{R}_2[X]) \Rightarrow f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow$
$\Rightarrow f$. aplicaţie liniară

$f(P_2+P_3) = 2-2X^2-2X-4X^2$

$f(1-X^2+X+2X^2) = -6X^2-2X+2$

$f(1+X+X^2) = -6X^2-2X+2$

5. Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă pătratică şi G mat. asociată în raport cu reperul canonic

a) Să se aducă Q la o formă canonică

b) Fie g forma polară asociată lui Q. Este $(\mathbb{R}^3, g)$ un spaţiu vectorial euclidian?

rezolvare:

a) $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g(x,x) = Q(x) =$

$= 3x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_2$

$+ 2x_2^2 + x_2x_3 - x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 =$

$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 +$

$+ x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_1^2 \Rightarrow$

metoda

$\Rightarrow Q(x) = (x_1+x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 + x_1^2$

Gauss

forma canonică

b) $Q(x) = \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_1-x_3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_2+x_3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_1^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow$ $Q(x)$ pozitiv definită $\Rightarrow$ $g(x,x)$ este poz. def.

deci $(\mathbb{R}^3, g)$ este spațiu vectorial euclidian deoarece g este formă biliniară simetrică (formă pătratică)

6. Fie $(\mathbb{R}^3, g_0)$ spațiu vectorial euclidian canonic. Fie subspațiul vectorial $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

a) Să se afle $U^\perp$. Precizați un reper ortonormat $R = R_1 \cup R_2$, unde R_1, R_2 sunt repere ortonormate în U, respectiv $U^\perp$

b) Fie p_1 proiecție ortogonală pe $U^\perp$ și s_1 simetria ortogonală față de $U^\perp$. Să se afle $p_1(1,2,3)$, și $s_1(1,2,3)$

rezolvare:

a) $(\mathbb{R}^3, g_0)$ spațiu vectorial euclidian $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ g_0 formă biliniară simetrică pozitiv definită (produs scalar)

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ subspațiu și $U^\perp$ complement ortogonal $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ (sumă directă)

$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ $\quad u = (1,2,-1)$

$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_0((x_1,x_2,x_3),(1,2,-1)) = 0\} \Rightarrow U^\perp = \langle\{1,2,-1\}\rangle$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim U = 2$, $\dim U^{\perp} = 1$

$\Rightarrow U = \{(x_1, x_2, x_1 + 2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(x_1, 0, x_1) + (0, x_2, 2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_1(1,0,1), x_2(0,1,2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Fie $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (0,1,2)$ din reperul arbitrar

$\{f_1, f_2\}$ este SG și $\dim U = 2$

Fie $R_0 = \{f_1, f_2\}$ reperul arbitrar

Gram - Schmidt $\Rightarrow$ fie $R' = \{e_1, e_2\}$ reperul ortogonal

atunci:

$e_1 = f_1 = (1,0,1)$

$e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1 = (0,1,2) - \dfrac{2}{2} \cdot (1,0,1) =$

$= (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1)$

având $\langle f_2, e_1\rangle = g_0(f_2, e_1) = g_0((0,1,2),(1,0,1))$
$= 2$

$\langle e_1, e_1\rangle = g_0(e_1, e_1) = g_0((1,0,1),(1,0,1)) = 2$

Fie $R_1 = \left\{\dfrac{e_1}{\|e_1\|}, \dfrac{e_2}{\|e_2\|}\right\}$ = reper ortonormat în subspațiul U

$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\|e_2\| = \sqrt{\langle e_2, e_2\rangle} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow R_1 = \left\{ \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}} \right\}$

Fie R_2 reper ortonormat în $U^\perp$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_2 = \left\{ \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} \right\}$

Fie $R = R_1 \cup R_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) \right\}$ reper în $\mathbb{R}^3$ ortonormat

b) $p_1(x+y) = y$ proiecție
unde $x \in U, y \in U^\perp$

$$(1,2,3) = \underbrace{a(1,0,1) + b(0,1,2)}_{x} + \underbrace{c(1,2,-1)}_{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 1 \quad | \cdot (-2) \\ b + 2c = 2 \\ a + 2b - c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2c = -2 \\ b + 2c = 2 \end{cases}$$

$b - 2a = 0$

$b = 2a$

$a = 1 - c \Rightarrow b = 2(1-c) = 2 - 2c$

$\Rightarrow a + 2b - c = 3$

$1 - c + 2(2-2c) - c = 3$

$1 - c + 4 - 4c - c = 3$

$5 - 6c = 3 \Rightarrow 6c = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1 - c = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$b = 2a = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$(1,2,3) = (a+c,\ b+2c,\ a+2b-c)$

$p_1(1,2,3) = \frac{1}{3}(1,2,-1)$

$s_1 = 2p_1 - id_{U^\perp}$ unde s_1 e simetric

$s_1 = \frac{2}{3}(1,2,-1) - (1,2,-1) =$

$= -\frac{1}{3}(1,2,-1)$

7. Fie $(\mathbb{R}^3, g_0)$ spațiu vectorial euclidian canonic. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = u \cdot g_0(x,u)$ unde $u = (1,2,2)$

a) Arătați că f este endomorfism simetric
Să se scrie formă pătratică Q asociată lui f

b) Să se aducă la o formă canonică, efectuând o transformare ortogonală

Rezolvare:

a) domeniu = codomeniu = $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ e endomorfism ($f \in End(\mathbb{R}^3)$)

$f(x) = (1,2,2) \cdot g_0(x,u) =$

$\Rightarrow f$ e endomorfism simetric

8. În spațiul euclidian $\mathcal{E}_2$ se consideră conica

$\Gamma: f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 - 3 = 0$

Să se aducă la o formă canonică, efectuând izometrii

–

9. În spațiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră dreptele

$D_1: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{2}$, $D_2: \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 + 1}{1} = \frac{x_3 - 2}{3}$

a) Să se arate că cele două drepte sunt coplanare

b) Să se determine ecuația planului π determinat de cele 2 drepte

–