$a = 8$ $b = 7$

Lăzănoiu Teodora - Bianca, 141

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

3. Calculaţi $a^{a^{b^b}}$ (mod 31).

4. Considerăm polinomul cu coeficienţi întregi $P(X) = X^3 - aX + b$. Determinaţi dacă polinomul $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{2^b}, +)$.

6. Fie p cel mai mic număr prim din descompunerea în factori primi a lui a şi q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu $a+b$, diferit de p. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $\exp_p(n)$ exponentul la care apare p în descompunerea în factori primi a lui n. Considerăm pe $\mathbb{N}$ relaţia binară ρ dată astfel: $m \rho n$ dacă $\exp_p(n) = \exp_p(m)$ şi $\exp_q(n) = \exp_q(m)$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi b şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă } x < -b, \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă } x \geq -b. \end{cases}$$

Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-1, b+1])$.

8. Demonstraţi că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a^2+a} | \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

9. Determinaţi constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinoamele $X^b - aX + 1$ şi $cX + d$ să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$.

Lăzăroiu Teodora - Bianca, 141

$a = 8$, $b = 7$

1. există permutări de ordin 55 în S_{15} ?

$55 = 11 \cdot 5$

Cum $11 + 5 = 16 > 15$ adică se depășește nr. de elemente posibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu există permutări de ordin 55 în S_{15}

Se consideră σ un produs de 2 cicli dij. de lung. 8 resp. 7

2. $\sigma = (1\ 2\ \dots\ 8)(9\ 10\ \dots\ 15)$ din S_{15}

$\tau \in S_{15}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$. Det. toate permutările $\tau \in S_{15}$

$sgn(\sigma) = (-1)^{7+6} = (-1)^{13} = -1 \Rightarrow sgn(\tau) = -1$

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$

7-ciclu din σ poate veni doar dintr-un 7-ciclu

8-ciclu din σ poate veni doar dintr-un 8-ciclu $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ τ = produs de un 7-ciclu și un 8-ciclu

$\tau = (1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 3\ 6)(9\ 14\ 12\ 10\ 15\ 13\ 11)$

unica soluție

3. $8^{8^{7^7}} \pmod{31}$ calculați :

Teorema lui Fermat: $8^{30} \equiv 1 \pmod{31}$

Notăm $8^{7^7} = x + 30$

$8^{8^{7^7}} = 8^{x+30} = 8^x \cdot 8^{30} = 8^x$

4. Considerăm polinomul $P(X) = X^3 - 8X + 7 \in \mathbb{Z}[X]$ coeficienți întregi

Determinați dacă $P(X)$ e ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

$P(X) = X^3 - 8X + 7 = X^3 - X - 7X + 7 = X(X^2-1) - 7(X-1)$

$= X(X+1)(X-1) - 7(X-1) = (X^2+X)(X-1) - 7(X-1) =$

$= (X-1)(X^2+X-7) \Rightarrow X = 1 \in \mathbb{Q}$ are cel puțin o soluție în $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(X) = X^3 - 8X + 7 = (X-1)(X^2+X-7)$

polinomul nu e ireductibil deoarece se poate scrie ca produs de 2 pol. neconstante cu cel puțin o soluție în $\mathbb{Q}$

5. Det. numărul de elemente de ordin 8 din $(\mathbb{Z}_{256},+) \times (\mathbb{Z}_{128},+)$

Fie $(\hat{a},\bar{b}) \in (\mathbb{Z}_{256},+) \times (\mathbb{Z}_{128},+)$

Știm că: $ord((\hat{a},\bar{b})) = [ord(\hat{a}), ord(\bar{b})] \Rightarrow$

$\Rightarrow [ord(\hat{a}), ord(\bar{b})] = 8 \Rightarrow$ $ord(\hat{a}) | 8$, $ord(\bar{b}) | 8$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow ord(\hat{a}) \in \{1,2,4,8\}$ $\quad ord(\bar{b}) \in \{1,2,4,8\}$

$\hat{a} \in \mathbb{Z}_{256} \Rightarrow ord(\hat{a}) = \dfrac{256}{(256,a)}$

$ord(\hat{a}) = 1 \Rightarrow 256 = (256,a) \Rightarrow \hat{a} = \widehat{256} = \hat{0}$

$ord(\hat{a}) = 2 \Rightarrow 256 = 2 \cdot (256,a)$

$128 = (256,a) \Rightarrow \hat{a} = \widehat{128} \in \mathbb{Z}_{256}$

$ord(\hat{a}) = 4 \Rightarrow 256 = 4 \cdot (256,a)$

$(256,a) = 64 \Rightarrow \hat{a} = \widehat{64} \in \mathbb{Z}_{256}$

$ord(\hat{a}) = 8 \Rightarrow 256 = 8 \cdot (256,a)$

$(256,a) = 32 \Rightarrow \hat{a} = \widehat{32} \in \mathbb{Z}_{256}$

$(\mathrm{ord}(\hat{a}), \mathrm{ord}(\bar{b})) \in \{(1,8),(2,8),(4,8),(8,8),(8,1),(8,2),(8,4)\}$

$\hat{a} \in \{\hat{32}, \hat{64}, \hat{128}, \hat{0}\}$ $\qquad$ $\mathrm{ord}(\bar{b}) = \frac{128}{(128,b)}$

$\mathrm{ord}(\bar{b}) = 1 \Rightarrow 128 = (128,b) \Rightarrow \bar{b} = \overline{128} = \bar{0}$

$\mathrm{ord}(\bar{b}) = 2 \Rightarrow (128,b) = 64 \Rightarrow \bar{b} = \overline{64}$

$\mathrm{ord}(\bar{b}) = 4 \Rightarrow (128,b) = 32 \Rightarrow \bar{b} = \overline{32}$

$\mathrm{ord}(\bar{b}) = 8 \Rightarrow (128,b) = 16 \Rightarrow \bar{b} = \overline{16}$

$\bar{b} \in \{\bar{0}, \overline{16}, \overline{32}, \overline{64}\}$

$\Rightarrow (\hat{a},\bar{b}) \in \{(\hat{0},\overline{16}),(\hat{128},\overline{16}),(\hat{64},\overline{16}),(\hat{32},\overline{16}),(\hat{32},\bar{0}),(\hat{32},\overline{64}),(\hat{32},\overline{32})\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sunt 7 elemente

6. $a = 2^3 \Rightarrow p = 2$ cel mai mic nr. prim din desc. lui a

$a+b = 8+7 = 15 \Rightarrow q = 13$ cel mai mare nr. prim ≤ 15

$\exp_2(n)$ = exp. la care apare 2 în desc.

$m \rho n \Leftrightarrow \exp_2(n) = \exp_2(m)$ și $\exp_{13}(n) = \exp_{13}(m)$

Să se arate că ρ e rel. de echiv. ; SCR pentru ρ

reflexivitate: Fie $n \in \mathbb{N}$, $n = 2^x \cdot 13^y$

$n \rho n \Rightarrow \exp_2(n) = \exp_2(n) \Rightarrow x = x$ „A"

$\exp_{13}(n) = \exp_{13}(n) \Rightarrow y = y$ „A"

simetrie: Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $n = 2^x \cdot 13^y$, $m = 2^{x'} \cdot 13^{y'}$

$n \rho m \Rightarrow \exp_2(n) = \exp_2(m)$

$\exp_2(m) = \exp_2(n)$

și

$\exp_{13}(n) = \exp_{13}(m)$

$\exp_{13}(m) = \exp_{13}(n)$

$\Rightarrow m \rho n$

c.c.t.d.

Tranzitivitate: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a \rho b \Rightarrow \begin{array}{l} exp_2(a) = exp_2(b) \\ exp_{13}(a) = exp_{13}(b) \end{array} \\ b \rho c \Rightarrow \begin{array}{l} exp_2(b) = exp_2(c) \\ exp_{13}(b) = exp_{13}(c) \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_2(c) \\ exp_{13}(a) = exp_{13}(c) \end{cases} \Rightarrow a \rho c \text{ c.c.t.d.}$$

$\Rightarrow$ „ρ" este rel. de echivalență

SCR: $\{ 2^x \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot 13^y \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m} \mid m \in \mathbb{N}$
x, y fixate$\}$

7. Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 8x + 63, & x < -7 \\ 8x^2 + 112x + 399, & x \geq -7 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 8x + 63 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -7} 8x + 63 = 7$$

$$f(-7) = 8 \cdot 49 + 112 \cdot (-7) + 399 = 392 - 784 + 399 =$$
$$= 791 - 784 = 7$$

$$\lim_{x \to +\infty} 8x^2 + 112x + 399 = +\infty$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} f = (-\infty, 7) \cup [7, +\infty) = \mathbb{R} \Rightarrow$$
$\Rightarrow f(x)$ surjectivă (1)

$8x + 63 \Rightarrow$ funcție monoton crescătoare
(funcție liniară)

$\min(8x^2 + 112x + 399) = 7$ în $x = -7$ nu e monotonă $\Rightarrow$ $f(x)$ nu e injectivă (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $f(x)$ nu e bijectivă

Calculați $f^{-1}([-8, 8])$

8. Demonstrați că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2-64-8)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{72}], +, \cdot)$ unde $\mathbb{Q}[\sqrt{72}] = \{\alpha + \beta\sqrt{72} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$

$$\mathbb{Q}[X]/(X^2-72) \sim \mathbb{Q}[\sqrt{72}]$$

9. Determinați constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ a.î. polinoamele $X^7 - 8X + 1$ și $cX + d$ să fie în aceeași clasă de echivalență în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2-72)$

$$\begin{array}{l|l} X^7 - 8X + 1 & X^2 - 72 \\ \cline{2-2} -X^7 + 72X^5 & X^5 + 72X^3 + 72^2X \\ \cline{1-1} = 72X^5 - 8X + 1 & \\ -72X^5 + 72^2X^3 & \\ \cline{1-1} = 72^2X^3 - 8X + 1 & \\ -72^2X^3 & \end{array}$$