Nume și prenume: LAZAROIU M. TEODORA-BIANCA Nota: ____________
Grupa: 241

Examen - Sesiunea ianuarie - februarie 2022

31 Ianuarie 2022

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF[1] în folderul vostru de pe Drive aveți 15 minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe **la ora 9 și 0 minute** și se termină la **ora 12 și 15 minute.**

⚠ Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1 — 10p

Se consideră variabilele aleatoare X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0,1).$$

a) Aflați p_1 și p_2 știind că $\mathbb{P}(X = -1, Y = 5) = 0.1233333$ și $\mathbb{E}[X|Y = 5] = 0.5$.

b) Considerând valorile lui p_1 și p_2 aflate anterior, determinați repartițiile variabilelor aleatoare $X+Y$, $X-Y$, $4X^2+3Y^2$ și calculați $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(8X-6Y+11)$ precum și coeficientul de corelație $\rho(X,Y)$.

Exercițiul 2 — 10p

Fie X și Y două variabile aleatoare i.i.d. pozitive și $c > 0$. Pentru fiecare din punctele de mai jos completați cu unul din simbolurile $=$, $\leq$, $\geq$ sau ? (în caz că nu putem decide). Justificați alegerile făcute:

1. $\mathbb{E}[\log(X)]$ $\geq$ $\log(\mathbb{E}[X])$
2. $\mathbb{E}[X]$ $\geq$ $\sqrt{\mathbb{E}[X]}$
3. $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)]$ $\leq$ 1
4. $\mathbb{P}(X > c)$ $\leq$ $\frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$ Marbov
5. $\mathbb{P}(X \leq Y)$ $\leq$ $\mathbb{P}(X \geq Y)$
6. $\mathbb{P}(X + Y > 10)$ $\leq$ $\mathbb{P}(X > 5 \text{ sau } Y > 5)$
7. $\mathbb{E}[\min(X,Y)]$? $\min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$
8. $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}]$ $\geq$ $\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$
9. $\mathbb{E}[X^2(X^2+1)]$? $\mathbb{E}[X^2(Y^2+1)]$
10. $\mathbb{E}[\frac{1}{X}]$? $\frac{1}{\mathbb{E}[X]}$

Exercițiul 3

10p

Ştim că într-un lot de 6 telefoane mobile Huawei două prezintă defecte de fabricaţie. Telefoanele sunt testate unul după celălalt până când cele două telefoane defecte sunt depistate. Fie X numărul de teste efectuate pentru identificarea primului telefon defect și Y numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea telefon defect.

a) Determinaţi repartiția comună a cuplului (X, Y) și repartițiile marginale.
b) Găsiți media și varianța lui X și respectiv Y și coeficientul de corelație dintre X și Y.
c) Calculați media și varianța repartiției condiționate a lui X la $Y = 2$.

Exercițiul 4

10p

Se dă variabila aleatoare X care are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{x}{64} e^{-\frac{x^2}{128}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Să se calculeze raportul $\frac{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}{\sqrt{Var(X)}}$, unde F este funcția de repartiție a lui X.

Exercițiul 5

10p

La alegerile pentru șefia Partidului Național Liberal din 2021 vor participa doi candidați: Florin Cîțu și Ludovic Orban. Să presupunem că numărul alegătorilor care votează poate fi modelat prin intermediul unei variabile aleatoare repartizate $Pois(778)$ și că fiecare alegător votează pentru candidatul Florin Cîțu cu probabilitatea 0.69 iar pentru candidatul Ludovic Orban cu probabilitatea 0.31, independent de ceilalți alegători. Fie V variabila aleatoare care descrie diferența de voturi dintre cei doi candidați, definită ca numărul de voturi pentru Florin Cîțu minus numărul de voturi pentru Ludovic Orban.

a) Determinați repartiția cuplului dat de variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru candidatul Florin Cîțu și respectiv Ludovic Orban.

b) Arătați că variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru cei doi candidați sunt independente.

c) Calculați $\mathbb{E}[V]$ și $Var[V]$.

Exercițiul 6

10p

Aruncăm în mod repetat cu o monedă pentru care probabilitatea de succes este $p = 0.65$. Fie X variabila aleatoare care descrie numărul de succese înainte de al 3-lea eșec într-o secvență de aruncări repetate. Determinați repartiția lui X, $\mathbb{E}[9X - 9]$ și $Var(4X + 15)$.

[1]Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

exercițiul 1

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

X, Y v.a, $p_1, p_2 \in (0,1)$

a) $p_1, p_2 = ?$ știind că $P(X=-1, Y=5) = 0.1233333$

și $E[X \mid Y=5] = 0.5$

b) pentru p_1, p_2 aflate mai sus det. repartițiile: $X+Y$, $X-Y$, $4X^2+3Y^2$ și calculați $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(8X-6Y+11)$, $\rho(X,Y)$

rezolvare:

X \ Y	-6	5	
-1	0.2466	0.1233	0.37
2	$p_1 - 0.246$	$p_2 - 0.123$	0.63
	p_1	p_2	

a) repartiția comună:

Fie $\pi_{i,j}$ el. de pe poziția (i,j) din tabelul de repartiție

$$P(X=-1, Y=5) = 0.12(3) \Rightarrow \pi_{1,2} = 0.1233333 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_{1,1} = 0.37 - 0.1233333 = 0.2466667$$

$$E[X \mid Y=5] = 0.5 \Rightarrow \quad X \mid Y=5 \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ P_{X|Y}(-1|5) & P_{X|Y}(2|5) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \mid Y=5 \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \dfrac{0.1233}{p_2} & \dfrac{p_2 - 0.1233}{p_2} \end{pmatrix}$$

$$E[X \mid Y=5] = 0.5 \Rightarrow (-1)\cdot \frac{0.1233}{p_2} + 2 \cdot \frac{p_2 - 0.1233}{p_2} = 0.5$$

$$\Rightarrow -0.1233 + 2p_2 - 0.2466 = 0.5 \cdot p_2 \quad \mid -0.5 \cdot p_2$$

$$1.5 \cdot p_2 - 0.3699 = 0 \quad \mid + 0.3699$$

$$1.5 \cdot p_2 = 0.3699999 \quad \mid : 1.5$$

$$p_2 = 0.2466666$$

$\Rightarrow \pi_{2,2} = 0.2466 - 0.1233 = 0.1233 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_{2,1} = 0.63 - \pi_{2,2} = 0.63 - 0.1233 = 0.5066$

$p_1 = \pi_{1,1} + \pi_{2,1} =$

$= 0.2466 + 0.5066 =$

$\simeq 0.7533$

X \ Y	-6	5	
-1	0.2466	0.1233	0.37
2	0.5066	0.1233	0.63
	0.7533	0.2466	

b) $p_1 = 0.7533$

$p_2 = 0.2466$ $\Rightarrow$ $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$

$Y \sim \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0.7533 & 0.2466 \end{pmatrix}$

$X + Y \sim \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 & 7 \\ 0.278721 & 0.091242 & 0.474579 & 0.155358 \end{pmatrix}$

$X + Y \sim \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 & 7 \\ 0.278721 & 0.474579 & 0.091242 & 0.155358 \end{pmatrix}$

$X - Y \sim \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 & -3 \\ 0.278721 & 0.091242 & 0.474579 & 0.155358 \end{pmatrix}$

$X - Y \sim \begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 & 8 \\ 0.091242 & 0.155358 & 0.278721 & 0.474579 \end{pmatrix}$

$4X^2 \sim \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$ $3Y^2 \sim \begin{pmatrix} 108 & 75 \\ 0.7533 & 0.2466 \end{pmatrix}$

$4X^2 + 3Y^2 \sim \begin{pmatrix} 112 & 79 & 124 & 91 \\ 0.278721 & 0.091242 & 0.474579 & 0.155358 \end{pmatrix}$

$E[X] = (-1)\cdot 0.37 + 2\cdot 0.63 = 1.26 - 0.37 = 0.89$

$E[Y] = (-6)\cdot 0.7533 + 5\cdot 0.2466 = 1.233 - 4.5198 = -3.2868$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$ $\quad Y^2 \sim \begin{pmatrix} 36 & 25 \\ 0.7533 & 0.2466 \end{pmatrix}$

$E[X^2] = 0.37 + 4\cdot 0.63 = 2.52 + 0.37 = 2.89$

$E[Y^2] = 36\cdot 0.7533 + 25\cdot 0.2466 = 27.1188 + 6.165 = 33.2838$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 2.89 - 0.89^2 = 2.89 - 0.7921$

$Var(X) = 2.0979$

$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = 33.2838 - (-3.2868)^2 =)$

$Var(Y) = 33.2838 - 10.8030 = 22.4808$

$Var(8X - 6Y + 11) = Var(8X - 6Y)$

Notăm $8X - 6Y = Z$

$8X \sim \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$ $\quad -6Y \sim \begin{pmatrix} 36 & -30 \\ 0.7533 & 0.2466 \end{pmatrix}$

$Z = 8X - 6Y \sim \begin{pmatrix} 28 & 52 & -38 & -14 \\ 0.278721 & 0.474579 & 0.091242 & 0.155358 \end{pmatrix}$

$Z^2 \sim \begin{pmatrix} 784 & 2704 & 1444 & 196 \\ 0.278721 & 0.474579 & 0.091242 & 0.155358 \end{pmatrix}$

$E[Z] = 7.804188 + 24.678108 - 3.467196 - 2.175012$

$E[Z] = 26.840088$

$E[Z^2] = 218.517264 + 24.678108 - 3.467196 - 2.175012$

$E[Z^2] = 237.553164$

$Var(8X-6Y+11) = Var(Z) = E[Z^2] - E(Z)^2 =$

$= 237.553164 - 720.390324 = -482.83716$

$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

$$X \cdot Y \sim \begin{pmatrix} 6 & -5 & -12 & 10 \\ 0.278721 & 0.091242 & 0.474579 & 0.155358 \end{pmatrix}$$

$E[XY] = 1.672326 - 0.45621 - 5.694948 + 1.55358$

$E[XY] = -2.925252$

$Cov(X,Y) = -2.925252 - 0.89 \cdot (-3.2868)$

$Cov(X,Y) = -2.925252 + 2.925252 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X}\sqrt{Var Y}} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ X, Y necorelate

exercițiul 2

1. $x \geq \log x, \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow E[\log(X)] \geq \log(E[X])$
2. $x \geq \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow E[X] \geq \sqrt{E[X]}$

exercițiul 3

a) 6 telefoane
2 defecte $\Big\} \Rightarrow p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ = prob. să fie defect

X = nr. de teste pentru ident. primului tel. defect
Y = nr. de teste pentru al doilea (suplimentare

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $Y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

X \ Y	1	2	3	4	5	
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	

A_i = la momentul i se găsește un telefon defect

$(A_1 \cap A_2)$ = telefoanele defecte se găsesc primele

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2^c | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2^c) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{1}{15}$

$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{15}$

$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \frac{\cancel{4}}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{15}$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{15}$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5 \cap A_6) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{15}$

b) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

repartiții uniforme

$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$E[X] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$

$E[Y] = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{8}{5} + \frac{10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$Y^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$E[X^2] = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3} + \frac{16}{3} + \frac{25}{3} = \frac{55}{3} = 18,33$

$E[Y^2] = \frac{2}{5} + \frac{8}{5} + \frac{18}{5} + \frac{32}{5} + \frac{50}{5} = \frac{110}{5} = 22$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 18.33 - 25 = -6.67$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 22 - 36 = -14$

$X \cdot Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$

$X \cdot Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 15 & 16 & 20 & 25 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$

$$E[xy] = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} + \frac{12}{15} + \frac{8}{5} + \frac{20}{15} + \frac{24}{15} + \frac{32}{15} + \frac{18}{15} +$$

$$+ \frac{40}{15} + \frac{48}{15} + \frac{60}{15} + \frac{32}{15} + \frac{80}{15} + \frac{50}{15} = \frac{450}{15} = 30$$

$$Cov(x,y) = E[xy] - E[x] \cdot E[y] = 30 - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(x,y) = 0 \Rightarrow x, y \text{ necorelate}$$

c) $P(X \mid Y = 2) = \frac{2}{5}$

$$X \mid Y = 2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$$E[X] = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

$$(X \mid Y = 2)^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$$E[(X \mid Y=2)^2] = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{9}{15} + \frac{16}{15} + \frac{25}{15} = \frac{55}{15} = 3.66$$

$$Var(X \mid Y = 2) = E((X \mid Y = 2)^2) - E(X \mid Y = 2)^2 =$$

$$= 3.66 - 1 = 2.66$$

exercițiul 6

$p = 0.65$ probabilitatea de succes

n = nr. de repetări înainte de al 3-lea eșec

distribuție binomială $\Rightarrow P(x) = C_n^x \, p^x (1-p)^{n-x}$

$$= C_n^x (0.65)^x (0.35)^{n-x}$$