Probabilități și statistică

Curs 2 – 11.10.2021

<u>Reamintim:</u> experiment aleator

Ω - spațiul stărilor (mulț. ev. elementare)

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\begin{cases} a)\ \emptyset \in \mathcal{F} \\ b)\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ c)\ A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F} \end{cases}$ algebră

<u>Exp:</u> $\Omega = \mathbb{N}^*$ → nr de aruncări cu banul până am obținut pt prima oară H.

$A = \{$obținem H după un nr par de aruncări$\}$

$= \bigcup_{j \geq 1} \{2j\}$ → am aruncat de $2j$ ori cu banul pt a obține pt prima oară H

c') $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

O mulțime $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică a), b) și c') s.n <u>σ-algebră</u> peste Ω.

<u>Prop:</u>

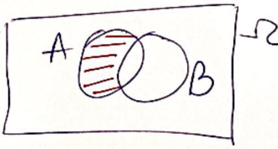
a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ și $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

c) $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

$A \setminus B = A \cap B^c$



Def: Perechea $(\Omega, \mathcal{F})$ se numește spațiu probabilizabil (spațiu măsurabil).

$$\begin{array}{c}\mathcal{F}\\ \cup\\ A\end{array} \longrightarrow \mathbb{P}$$

Avem un experiment aleator și considerăm A un eveniment de interes. Să presupunem că repetăm experimentul de un nr mare de ori N. (păstrând condițiile de desfășurare identice).

Fie $N(A)$ nr de realizări ale evenimentului A

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\frac{N(A)}{N}}_{\text{frecvența relativă}}$$

$\Omega = \{H, T\}$
$A = \{H\}$
$B = \{T\}$

1) $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

2) $A = \emptyset \Rightarrow N(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$A = \Omega \Rightarrow N(\Omega) = N \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) $A \cap B = \emptyset$ (disjuncte)

$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (finit aditivitate)

Dacă extindem la cazul numărabil, atunci obținem proprietatea de σ-aditivitate.

$(A_n)_n \in \mathcal{F}$ (șir de evenimente) disjuncte două câte două

atunci $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (σ-aditivitate)

Scanned with CamScanner

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un spațiu probabilizabil. O funcție
$$P: \mathcal{F} \to [0,1]$$
care satisface proprietățile următoare:

1) $P(\emptyset) = 0$ și $P(\Omega) = 1$
2) dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ un șir de evenimente disjuncte 2 câte 2 atunci:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

se numește măsură de probabilitate (probabilitate) pe $(\Omega, \mathcal{F})$.

Def: Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se numește câmp de probabilitate

Exp: 1) Aruncatul cu banul
$$\Omega = \{H, T\}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \underbrace{\{H, T\}}_{\Omega}\}$$

$P: \mathcal{F} \to [0,1]$ $\quad P(\emptyset) = 0, \; P(\Omega) = 1$

$P(\{H\}) = p \in [0,1] \Rightarrow P(\{T\}) = 1-p.$

Dacă banul este corect $\Rightarrow p = 1/2.$

2) Aruncăm cu zarul $\quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{0,1\}^{\Omega}$$

$A^B = \{f : B \to A\}$

$w_i = \{i\}$

$P(\{i\}) = p_i \in [i, 1]$

$i \in \{1, \dots, 6\}$

$p_1 + p_2 + \dots + p_6 = 1$

Ω | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

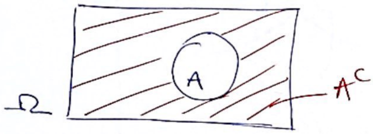
$\Omega = \{w_1\} \cup \dots \cup \{w_6\} \Rightarrow P(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1$

In general, $A \in \mathcal{F}$ atunci

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i$$

<u>Prop</u> Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate. Atunci:

a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$



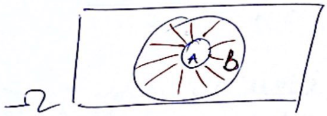
$$\Omega = A \cup A^c$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

b) Dacă $A, B \in \mathcal{F}$ cu $A \subseteq B$ atunci

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \text{ (monotonie)}$$

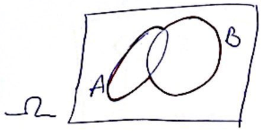


$$B = A \cup (B \setminus A)$$
$$= A \cup (B \cap A^c)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap A^c)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)$$

c) Fie $A, B \in \mathcal{F}$ atunci

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)}$$

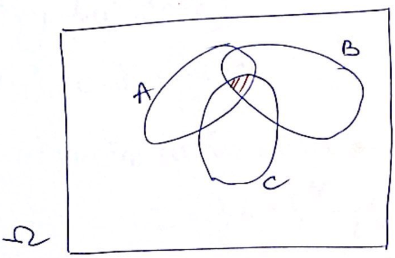
~~eventualitate~~ evenimente disj. 2 câte 2

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$(+) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

c) $A, B, C \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$



d) Formula lui Poincaré: $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

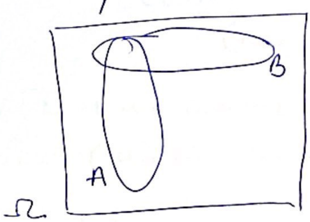
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)$$

<u>Dem</u> prin inducție (temă)

e) $A, B \in \mathcal{F}$ atunci $\mathbb{P}(A\cup B) \le \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$ (Ineg lui Bonferroni)

A – puțini studenții au laptop

B – puțini studenții au telefon mobil



Scanned with CamScanner

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Generalizăm $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1)$

f) (Ineg lui Boole)

$(A_n)_n \in \mathcal{F}$ atunci $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Exp: Aruncăm cu banul de o infinitate de ori

$$\Omega = \{H, T\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \omega_i \in \{H, T\}\}$$

$A = \{$un cap, H, apare mai devreme sau mai târziu$\}$

$\mathbb{P}(\{H\}) = p \in (0,1)$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$A_n = \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega \mid \exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ a.î. $\omega_i = H\}$

în primele n aruncări am obținut cap

$\mathbb{P}(A) = 1$

$\mathbb{P}(A_n) = 1 - (1-p)^n$

$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = 1.$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

Modelul clasic de probabilitate
(modelul lui Laplace)

Fie $N \geq 1$ un număr natural și considerăm un experiment aleator cu un nr N de rezultate posibile.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

- aruncatul cu banul
- aruncatul cu zarul
- ....

Considerăm $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (2^N elemente) și luăm ca măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$, $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ definită prin $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$ (echirepartiție)
(distribuția uniformă discretă)

În acest caz, dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\Big) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}}.$$

Elemente de algebră combinatorială

1) (Formula sumei)
dacă A și B două mulțimi finite, $A \cap B = \emptyset$, at.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$|\cdot| \to$ cardinalul mulțimii

Reformulare: dacă un obiect a poate fi ales în n moduri și un obiect b nu poate fi ales în m moduri atunci avem $n+m$ moduri de a alege a sau b.

Mai mult, dacă A și B sunt mulțimi finite, nu neapărat disjuncte:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Obs: Putem să arătăm relația anterioară folosind formula aferentă prob. reuniunii a 2 evenimente

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$$

Ne plasăm în cadrul câmpului de prob. a lui Laplace, $\mathbb{P}$ este echirepartiția

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \Rightarrow |A| = \mathbb{P}(A)\cdot \underset{\text{const.}}{|\Omega|}$$

Principiul includerii - excluderii

Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$, n mulțimi finite atunci

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\dots+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|$$

Aplicatii: Funcția lui Euler

$n\geq 2$, $\varphi(n)$ - nr de numere prime cu $n \leq$ decât n

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right), \ p\text{-prim}$$

2) (Formula produsului)

Fie A, B două mulțimi finite și considerăm prod

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$$

atunci $A\times B$ este finit și

$$|A\times B| = |A|\cdot|B|$$

Reformulare: Dacă un obiect a poate fi ales în n moduri și apoi un element b poate fi ales în m moduri, atunci cuplul (a,b) scris în această ordine, poate fi ales în $n\times m$ moduri.

Exp: Să presupunem că avem 10 pers care participă la ~~un~~ o cursă. Câte posibilități avem pt primul, al doilea și respectiv al treilea loc?

10 posibilități pt locul 1, 9 posibilități pt locul 2, 8 posibilități pt locul 3.

$10 \times 9 \times 8 = 720$ posibilități

În general,

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$$

Dacă $A_1 = \dots = A_n = A \Rightarrow A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A\}$

Exp: 1) Aruncăm de n ori cu banul

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_j \in \{H, T\}\} = \{H, T\}^n$$

$|\Omega| = 2^n$

2) $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ atunci $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ are 2^n elemente.

$A \subset \Omega$

$$\{0,1\}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_j \in \{0,1\}\}$$

$$A \longrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \{0,1\}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \omega_i \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = |\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$$

Scanned with CamScanner

Schema de extragere cu revenire (cu întoarcere)

Pp că avem o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n și efectuăm k extrageri cu revenire.

$n=3$
$k=4$ 1 1 3 3

$(x_1, x_2, \dots, x_k) \longrightarrow n^k$ posibilități

Reformulare: avem k bile numerotate de la 1 la k și n urne numerotate de la 1 la n

$x_i \Rightarrow$ nr urnei în care a fost distribuită bila i

$(x_1, \dots, x_k)$

Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Pp că avem o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n și efectuăm k extrageri fără întoarcere.

$n=4$ $\{1,2,3,4\}$
$k=2$ (x_1, x_2)

4×3

$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

Dacă $k=n \Rightarrow n!$ permutări

	ordinea contează	ordinea nu contează
cu revenire	n^k	
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	C_n^k