

Cuaternioni

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2022 - 2023

Problematizare - generalități

Când este considerată o clasă de transformări:

- (i) de câte informații numerice este nevoie pentru a indica o transformare?
- (ii) există o structură algebrică subiacentă?

1. Translații

1. Translații

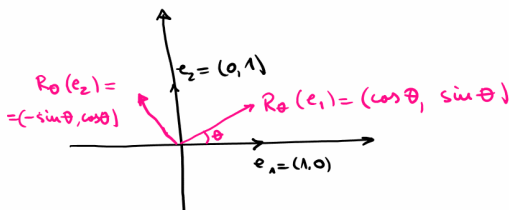
Context 2D, respectiv 3D :

- 2, respectiv 3 numere;
- $(\mathbb{R}^2, +)$, respectiv $(\mathbb{R}^3, +)$

2. Rotații 2D

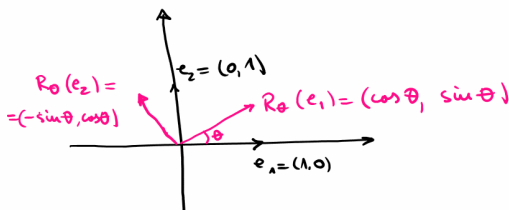
2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



Avem

$$R_{\theta}(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2$$

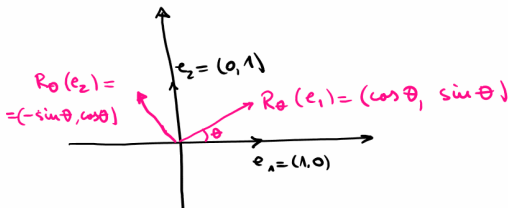
$$R_{\theta}(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta) = -\sin \theta \cdot e_1 + \cos \theta \cdot e_2$$

Așadar, R_{θ} este complet caracterizată de matricea

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



Avem

$$R_{\theta}(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2$$

$$R_{\theta}(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta) = -\sin \theta \cdot e_1 + \cos \theta \cdot e_2$$

Așadar, R_{θ} este complet caracterizată de matricea

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Matricea R_{θ} verifică relația $R_{\theta} \cdot R_{\theta}^T = \mathbb{I}_2$.

2. Rotații 2D. De reținut

- pentru a indica o rotație 2D este necesară / suficientă o singură informație numerică,
- a descrie o rotație \Leftrightarrow
 - \Leftrightarrow a indica modul în care este transformat un reper ortonormat în alt reper ortonormat păstrând orientarea \Leftrightarrow
 - \Leftrightarrow a indica matricea de transformare între repere, în cazul 2D aceasta este de forma $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

- (a) $(O(n), \cdot)$ este grup: **grupul ortogonal de ordinul n** .
- (b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$, după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru $\det A = 1$, respectiv $\det A = -1$.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

- (a) $(O(n), \cdot)$ este grup: **grupul ortogonal de ordinul n** .
- (b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$, după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru $\det A = 1$, respectiv $\det A = -1$.

Definiție (iii) $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$. Se numește **grupul special ortogonal de ordinul n** .

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

- (a) $(O(n), \cdot)$ este grup: **grupul ortogonal de ordinul n** .
- (b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$, după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru $\det A = 1$, respectiv $\det A = -1$.

Definiție (iii) $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$. Se numește **grupul special ortogonal de ordinul n** .

Observații.

- (c) $SO(n)$ este subgrup al lui $O(n)$.

2. Rotații 2D și grupul $SO(2)$

- Am văzut că unei rotații R_θ de unghi θ îi corespunde o matrice M_{R_θ} din $SO(2)$.

2. Rotații 2D și grupul $SO(2)$

- ▶ Am văzut că unei rotații R_θ de unghi θ îi corespunde o matrice M_{R_θ} din $SO(2)$.
- ▶ Și reciproc este adevărat: se poate arăta că orice matrice $A \in SO(2)$ corespunde unei rotații de unghi convenabil.

2. Rotații 2D și grupul $SO(2)$

- ▶ Am văzut că unei rotații R_θ de unghi θ îi corespunde o matrice M_{R_θ} din $SO(2)$.
- ▶ Și reciproc este adevărat: se poate arăta că orice matrice $A \in SO(2)$ corespunde unei rotații de unghi convenabil.
- ▶ Grupul \mathcal{R}_{2D} al rotațiilor 2D este izomorf cu un grup de matrice

$$(\mathcal{R}_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot).$$

2. Rotații 2D și numere complexe

- ▶ Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

2. Rotații 2D și numere complexe

- ▶ Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

- ▶ **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

2. Rotații 2D și numere complexe

- ▶ Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

- ▶ **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- ▶ (S^1, \cdot) este grup.

2. Rotații 2D și numere complexe

- ▶ Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

- ▶ **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- ▶ (S^1, \cdot) este grup.

- ▶ **Avem izomorfisme naturale**

$$(\mathcal{R}_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot) \simeq (S^1, \cdot).$$

$$R_\theta \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \leftrightarrow \cos \theta + i \sin \theta.$$

Remember: corpul \mathbb{C} al numerelor complexe

Construcție: Se consideră mulțimea \mathbb{R}^2 , înzestrată cu două operații:

$$"+": (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$"\cdot": (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

Remember: corpul \mathbb{C} al numerelor complexe

Construcție: Se consideră mulțimea \mathbb{R}^2 , înzestrată cu două operații:

$$"+": (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$"\cdot": (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

Notatii:

$$1 \equiv (1, 0), \quad i \equiv (0, 1)$$

și folosind aceste notații orice pereche (a, b) se reprezintă sub forma $a + ib$.

Are loc relația fundamentală $i^2 = -1$.

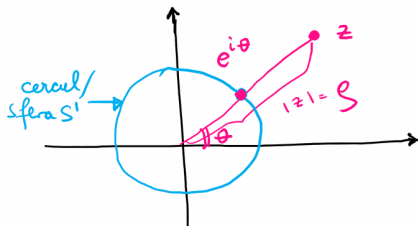
Corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Remember: corpul \mathbb{C} al numerelor complexe

Proprietăți și notații

- (i) Pentru $z = a + ib \in \mathbb{C}$, modulul lui z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- (ii) Dacă $z = a + ib \neq 0$, are loc relația $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, unde $\bar{z} = a - ib$ este conjugatul lui z
- (iii) Orice număr complex $z \neq 0$ se scrie în mod unic sub forma

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |z|.$$



3. Rotații 3D - generalități

Observație 1.

A indica o rotație 3D \Leftrightarrow

\Leftrightarrow a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

\Leftrightarrow a indica o matrice din grupul $SO(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (SO(3), \cdot).$$

3. Rotații 3D - generalități

Observație 1.

A indica o rotație 3D \Leftrightarrow

\Leftrightarrow a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

\Leftrightarrow a indica o matrice din grupul $SO(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (SO(3), \cdot).$$

Observație 2.

Orice matrice $A \in SO(3)$ (i.e. orice rotație în context 3D) admite **o valoare proprie reală și un vector propriu (axă a rotației)**. De asemenea, rotația este caracterizată de **un unghi**, măsurat în planul perpendicular pe axă. Pentru rotația de unghi θ și axă (v_1, v_2, v_3) :

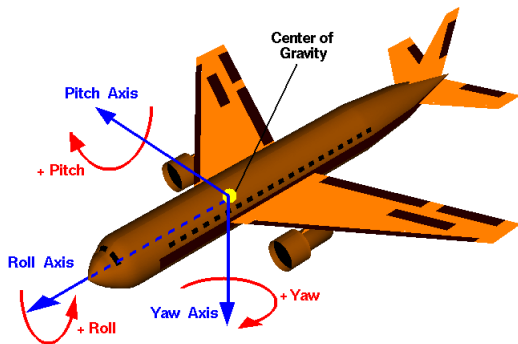
`glm::rotate(θ , vec3(v1, v2, v3))`

3. Rotații 3D - problematizare: structura grupului $SO(3)$

Două posibilități:

- folosind unghiurile lui Euler
- folosind cuaternioni

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție



Sursa: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Rollpitchyawplain.png>

Altă reprezentare:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/Euler2a.gif>

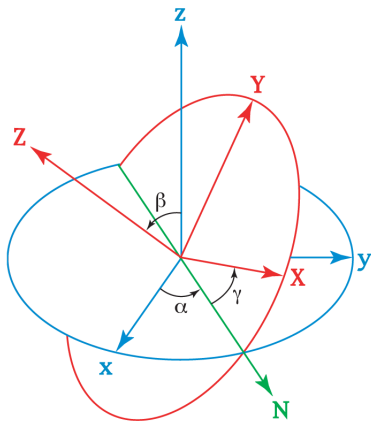
3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow SO(3)$$

se obține utilizând rotațiile în jurul
axelor de coordonate.

Fapt: orice matrice din $SO(3)$ poate fi
obținută ca produs al unor rotații (3)
în jurul axelor de coordonate,
cu unghiuri alese convenabil
(unghiurile lui Euler)

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: formalizare



Sursa: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Euler.png>

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: *Gimbal Lock*

Ilustrare *Gimbal Lock*

Exemplu. $R(\alpha, (1, 0, 0))$ (rotație de unghi α
în axa $(1, 0, 0)$)

$$R\left(\frac{\pi}{2}, (0, 1, 0)\right)$$

$$R(\gamma, (0, 0, 1))$$

($\alpha, \gamma \rightarrow$ parametri)

componere (scriem matrice,) \Rightarrow

matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0 \end{pmatrix}$$

"se pierde o
libertate
de mișcare"

(legată de propr. apl. $S' \times S' \times S' \rightarrow SO(3)$)

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

$$\mathbb{R}^4 = \{ (s, a, b, c) \mid s, a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

???

$$\mathbb{H} = \{ \underbrace{s}_{\text{"parte reală"}} + \underbrace{a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k}_{\text{"parte imaginară"}} \mid s, a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

i, j, k sunt definite prin

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot k = -k \cdot j = i \\ k \cdot i = -i \cdot k = j \end{cases}$$

Pe \mathbb{H} se definesc $\begin{cases} "+" \\ "." \end{cases}$ pe componente
în baza de regulile de mai sus.

Fapt: $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ corp necomutativ.

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Observație. Fie

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid M = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fapt, $(\mathcal{H}, +, \cdot) \simeq (\mathbb{H}, +, \cdot)$.

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Notatie. Fie $q = s + ai + bj + ck = (s, \mathbf{v})$,
unde $\mathbf{v} = (a, b, c)$

Cu această notatie:

(i) înmulțirea este

$$q \cdot q' = (s \cdot s' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', s \cdot \mathbf{v}' + s' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}')$$

$$(ii) \quad |q|^2 = s^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$(iii) \quad \text{Ptr } q \neq 0, \quad q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}, \quad \overline{q} = (s, -\mathbf{v})$$

Notatie $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}.$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Propoziție. (legătura dintre rotații 3D și cuaternioni)

(i) Fie rotația 3D având axa dată de versorul u și unghiul θ . Fie cuaternionul $q \in S^3$ dat de

$$q = (s, v), \quad \begin{cases} s = \cos \frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \\ v = \sin \frac{\theta}{2} u \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Fie $P \in \mathbb{R}^3$ și P' punctul obținut aplicând rotația de unghi θ și axă u lui P , adică

$$P' = R_{u,\theta}(P).$$

Atunci în \mathbb{H} are loc relația

$$(0, P') = q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}.$$

Altfel spus, pentru a determina P' efectuăm în \mathbb{H} calculul $q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}$ și rezultatul ne va conduce la cuaternionul $(0, P')$.

(ii) Fie $q = s + ai + bj + cK \in S^3$ un cuaternion de normă 1. El corespunde unei rotații având matricea 3×3

$$\begin{pmatrix} s^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2sc & 2ac + 2sb \\ 2ab + 2sc & s^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2sa \\ 2ac - 2sb & 2bc + 2sa & s^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Exemplu. Considerăm rotația $R_{u,\theta}$ dată de **vectorul** $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ **și de unghi** $\theta = \frac{2\pi}{3} (120^\circ)$. De exemplu, avem $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$. Interpretarea acestei relații folosind cuaternioni este următoarea.

(i) Vectorul u se scrie cu cuaternioni $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$. Conform propoziției anterioare, rotației $R_{u,\theta}$ i se asociază cuaternionul

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} u = \cos \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right) = \dots$$

Prin calcul, se deduce

$$q = \frac{1}{2}(1 + i + j + k), \quad q^{-1} = \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

(ii) Versorii axelor Ox, Oy, Oz corespund cuaternionilor i, j, k , deci $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ se rescrie $R_{u,\theta}(i) = j$. Se poate verifica faptul că are loc relația $(0, j) = q \cdot (0, i) \cdot q^{-1}$, care este exact rescrierea din propoziția anterioară (cu $P = (1, 0, 0) \equiv i, P' = (0, 1, 0) \equiv j$).

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Alte detalii teoretice și despre implementare:

K. Shoemake, Quaternions

<https://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html>