GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 1
Matrice, calcul matriceal; Determinanţi

Matricea este un tablou dreptunghiular de elemente ce aparţin unui inel comutativ, în particular unui corp comutativ. Vom lucra peste corpul numerelor reale, $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} ; a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

Are linii şi coloane. Mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ fiind un inel comutativ. Matricele se pot aduna şi înmulţi cu scalari. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$, definim suma $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$, matricea obţinută prin adunarea pe componente. Înmulţirea cu un scalar se face înmulţind fiecare componentă cu respectivul scalar: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{i,j}) = (\alpha \cdot a_{i,j})$

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ formează un grup abelian. Elementul neutru pentru adunarea matricelor este matricea $0_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Opusa unei matrice se obţine din schimbarea semnului fiecărui element al matricei, adică $-A = (-a_{i,j})$. Este clar că $-A + A = A - A = 0_{m,n}$.

Notăm cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătrate cu n linii şi n coloane.

O altă operaţie ce se poate face cu matrice este înmulţirea. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Înmulţirea se face linie cu coloană.

$$A \cdot B = ((A \cdot B)_{i,l})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} = (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant p}}$$

.

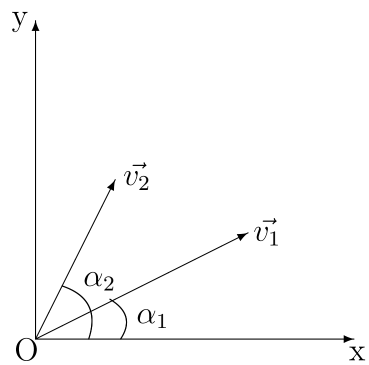
Notând cu $L_i(A)$ linia i a lui A şi cu $C_l(B)$ coloana l a lui B, atunci $(A \cdot B)_{i,l} = L_i(A) \cdot C_l(B)$, produsul dintre linia i a matricei A şi coloana l a matricei B.

$$(A \cdot B)_{i,l} = L_i(A) \cdot C_l(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l}.$$

Determinanţi

Motivaţia pentru introducerea determinantului este una geometrică. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Determinantul matricei A este volumul paralelipipedului construit cu vectorii coloanele lui A (sau liniile acesteia).

În particular în plan, deci pentru $n = 2$ este aria paralelogramului ce are ca laturi coloanele matricei.



Considerăm $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ în $\mathbb{R}^2$ şi paralelogramul construit cu aceştia. Aria paralelogramului este $||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ unde α_j este unghiul făcut de $\vec{v_j}$ cu partea pozitivă a axei Ox. Presupunem că $\alpha_2 > \alpha_1$. Folosind expresiile $\sin(\alpha_j) = \frac{y_j}{||\vec{v_j}||}, \cos(\alpha_j) = \frac{x_j}{||\vec{v_j}||}$ rezultă aria paralelogram $= ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot (\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)) = ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

Notăm cu S_n mulţimea permutărilor (bijecţiilor) $\sigma : [n] \longrightarrow [n[$, unde am notat cu $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. S_n este un grup cu operaţia de compunere a funcţiilor pentru care unitatea este $1 = \mathrm{id}_{[n]} : [n] \longrightarrow [n], 1(i) = i$.

Definiţia 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim determinantul matricei A

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

Exemplul 2. (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. $S_2 = \{1, (12)\}$, unde (12) este bijecţia $\sigma : [2] \longrightarrow [2], \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$. Signatura acestei bijecţii (12) este -1, având o inversiune.

Folosind **definiţia ??** avem în formula $\det(A)$ doi termeni corespunzători elementelor din S_2. Astfel, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(2) Pentru $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Primii trei termeni ai sumei corespund permutărilor id_{S_3}, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ care au signatură 1 (sunt 3-cicli) iar următoarii trei termeni corpund transpoziţiilor $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ care au signatura -1.

Matricea transpusă a unei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notată cu ${}^tA$ este definită $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Exemplul 3. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, transpusa este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Propoziţia 4 (Proprietăţi ale determinanţilor)**.** *Determinantul verifică următoarele proprietăţi.*

(1) $\det({}^tA) = \det(A)$, *unde* ${}^tA$ *este transpusa matricei* A.
(2) *dacă* A *are o linie nulă, atunci* $\det(A) = 0$.
(3) *dacă* $B \in \mathcal{M}_n(R)$ *se obţine din* A *prin înmulţirea unei linii cu* $\lambda \in \mathbb{R}$, *atunci* $\det(B) = \lambda \det(A)$
(4) *dacă* A *are două linii proporţionale atunci* $\det(A) = 0$
(5) *dacă* $L_i(A) = (b_{i1} + c_{i1}, \dots, b_{in} + c_{in})$, *şi* B *şi respectiv* C *sunt matricele obţinute din* A *înlocuind* $L_i(A)$ *cu* $(b_{i1}, \dots, b_{in})$ *şi respectiv* $(c_{i1}, \dots, c_{in})$, *atunci* $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.
(6) *dacă* B *se obţine din permutarea a două linii a lui* A *atunci* $\det(B) = -\det(A)$.
(7) *dacă* B *se obţine din* A *prin adunarea la o linie a lui* A *a multiplului unei alte linii a lui* A $(L_i(B) = L_i(A) + \lambda \cdot L_j(A))$, *atunci* $\det(B) = \det(A)$.

Observaţia 5. Din (1) rezultă faptul că sunt adevărate aserţiunile similare $2 - 7$ pentru coloane.

Exemplul 6 (Determinantul Vandermonde de ordin 3). $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ scădem $a_1 \cdot L_1$ din L_2 şi respectiv $a_1 \cdot L_2$ din L_3 şi obţinem $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 \end{vmatrix} =$ $a_3(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) - a_2(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) = (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)$.

Dezvoltări ale determinanţilor, formula Laplace

Fie $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pentru mulţimile $I \subset [p] = \{1, \ldots, p\}$ şi $J \subset [q] = \{1, \ldots, q\}$, notăm cu $A_{I,J}$ matricea obţinută prin intersecţia liniilor I cu coloanele J. Dacă $|I| = |J| = m$, atunci $\det(A_{I,J})$ se numeşte minor de ordin m a lui A.

Exemplul 7.
- Dacă $I = \{i\}$ şi $J = \{j\}$ atunci $A_{I,J} = a_{ij} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $I = J = \{1, 2\}$ atunci $A_{I,J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant m \leqslant p$ şi $I = \{i_1, \ldots, i_m\}, J = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset [p]$ cu $i_1 < \ldots < i_m$ şi $j_1 < \ldots < j_m$. Fie $\overline{I} = [p] \backslash I$ şi $\overline{J} = [p] \backslash J$ complementele mulţimilor I şi J în $[p]$. Notăm cu $M = \det(A_{I,J})$ minorul de ordin m din A corespuzător mulţimilor de indici I şi J şi cu $M' = (-1)^{i_1 + \ldots + i_m + j_1 + \ldots + j_m} \det(A_{\overline{I}, \overline{J}})$ complementul algebric al lui M.

Teorema 8 (Formula Laplace). *Fie $p \in \mathbb{N}^\star$ şi $1 \leqslant m \leqslant p$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ şi $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_m \leqslant p$. Atunci*

$$\det(A) = \sum_{\substack{M \text{ minor obţinut din} \\ \text{liniile } i_1, \ldots, i_m \\ \text{şi } m \text{ coloane}}} M \cdot M'$$

Exerciţiul 9. *Demonstraţi*

(1) $A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det(M)\det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *şi* $N \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$,

(2) $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ N & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det(M)\det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *şi* $N \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$,

(3) $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = (-1)^{np}\det(N)\det(P)$ pentru $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *şi* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = (-1)^{mn} \det(M) \det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *şi* $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.