Probabilități și statistică
Curs 4 - 25.10.2021

Probabilități condiționate, formula lui Bayes și independență

Probabilitățile condiționate ne permit modelarea modului în care se schimbă probabilitatea realizării unui eveniment de interes atunci când avem la dispoziție informații suplimentare despre experiment.

a) Un punct apare pe radar. Care e probabilitatea ca acesta să fie un avion inamic?

b) Care este șansa ca un individ să fie infectat cu COVID-19 știind că testul a ieșit pozitiv?

Ex1: Aruncăm cu o monedă echilibrată de 3 ori.

a) Care e probabilitatea să obținem HHH?

$\Omega = \{H, T\}^3, \quad |\Omega| = 8$

Ω

HHH	HHT	THH	THT
HTH	HTT	TTH	TTT

Ω'

$A = \{HHH\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$

b) La prima aruncare am obținut cap. Cât este probabilitatea să obținem HHH având această info. suplimentară?

$\Omega' = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

ev. de interes

știind că

$1/4 = \mathbb{P}(A \mid B)$ ev. care s-a realizat.

$B = \{$am obținut cap la prima aruncare$\}$

$\mathbb{P}(A|B) \Rightarrow$ probabilitatea realizării evenimentului A știind că ev. B s-a realizat.

Vom citi $\mathbb{P}(A|B)$ probab. lui A condiționat la B.

<u>Din perspectivă frecvenționistă:</u>

Presupunem că repetăm experimentul aleator de N ori (în aceleași condiții) și de fiecare dată înregistrăm dacă evenimentul A resp B s-au realizat. Ne uităm doar la acele experimente în care B s-a realizat și calculăm frecvența de realizare a lui A.

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)}$$

$N(A \cap B) \to$ nr de exp. în care și A și B s-au realizat.

$N(B) \to$ nr de realizări ale lui B

Din perspectivă frecvenționistă am interpretat prob. evenimentului A drept $\mathbb{P}(A) \approx \frac{N(A)}{N}$

Atunci $$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \approx \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

<u>Def</u>: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob. și A și B 2 evenimente cu $\mathbb{P}(B) > 0$. Atunci prob. condiționată a lui A la B se notează cu $\mathbb{P}(A|B)$ și este definită prin

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

<u>Obs</u>: "A|B" <u>nu</u> este un eveniment!!

$\mathbb{P}(A)$ - prior sau probabilitate a priori

$\mathbb{P}(A|B)$ - posterior sau probabilitate a posteriori

Ex1 (continuare)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{4/8} = 1/4$$

Ex2: Presupunem că avem un pachet de cărți de joc și extragem (în mod aleator) două cărți succesiv fără revenire

A - "prima carte este de inimă roșie"

B - "a doua carte este de inimă roșie"

C - "a doua carte este culoare roșie"

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(B/A)$, $\mathbb{P}(C/A)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(A|C)$.

Sol:

$\mathbb{P}(B/A) = ?$

Într-un pachet cu 52 cărți avem 13 de inimă roșie.

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{12}{51}$$

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{3/51}{1/4} = 12/51$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{13\times 12}{52\times 51} = \frac{3}{51}$$

Cât este $\mathbb{P}(C/A)$? $\frac{25}{51}$

Cât este $\mathbb{P}(A|B)=?$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/51}{1/4} = \frac{12}{51}$$

Astfel $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A|B)$

Cât este $\mathbb{P}(A|C)$?

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A|C) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\ \mathbb{P}(C) &= \frac{26}{52} = 1/2 \\ \mathbb{P}(A\cap C) &= \frac{13\times 25}{52\times 51} = \frac{25}{204} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A|C) = \frac{\frac{25}{204}}{1/2} = \frac{25}{102} \neq \underbrace{\frac{25}{51}}_{\mathbb{P}(C|A)}$$

Ex 3: O familie are 2 copii.

a) Care este probabilitatea ca cei 2 copii să fie de sex feminin știind că cel mai în vârstă este fată?

b) Care este ——— // ——— știind că cel puțin un copil este de sex feminin?

Presupuneri: - nu putem avea decât sex feminin sau masculin.

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F) = 1/2$

B ↓ sex masculin

- genul unui copil nu influențează în niciun mod genul celuilalt copil.

Sol: a) $\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$

$|\Omega| = 4$

Scanned with CamScanner

$A = \{$ambii sunt de sex feminin$\} = \{FF\}$

$B = \{$cel mai în vârstă este fată$\} = \{FB, FF\}$

$C = \{$cel puțin un copil este fată$\} = \{FB, FF, BF\}$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

Obs: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ pp că $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$$

Exp 4: Dacă o aeronavă apare într-o anumită zonă pe radar atunci se declanșează o alarmă cu prob de 99%. Dacă o aeronavă nu este prezentă atunci avem o alarmă (falsă) cu prob de 10%. În zona de ~~[illegible]~~ interes putem obs o aeronavă cu prob de 5%.

a) Care este prob să nu avem aeronavă și să avem alarmă falsă?

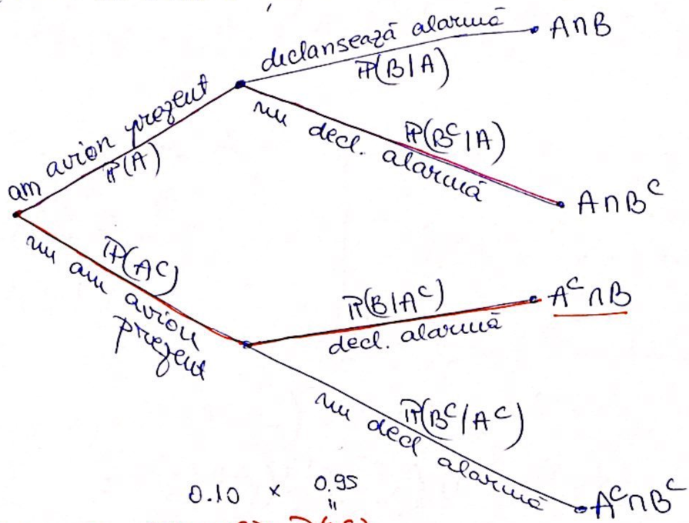
b) Care este prob să avem aeronavă și să nu fie detectată?

$A = \{$avem aeronavă prezentă$\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 5\%$

$B = \{$radarul declanșează alarmă$\}$

$\mathbb{P}$(nu avem aeronavă și avem alarmă) = $\mathbb{P}(A^c \cap B)$

$\mathbb{P}$(avem aeronavă și nu avem alarmă) = $\mathbb{P}(A \cap B^c)$



$$\mathbb{P}(B \cap A^c) = \underbrace{\mathbb{P}(B|A^c)}_{0.10} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A^c)}_{0.95}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \underbrace{\mathbb{P}(B^c|A)}_{0.01} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{0.05}$$

P (Regula înmulțirii)

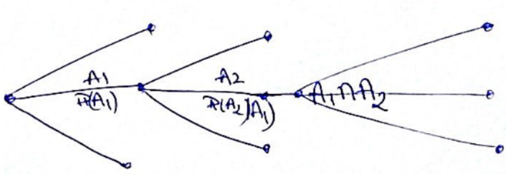
Pentru orice evenimente $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$ avem

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Obs $n=3$

$$\mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2}_{B} \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3 | \underbrace{A_1 \cap A_2}_{B})\, \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

$$= \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\, \mathbb{P}(A_2|A_1)\, \mathbb{P}(A_1).$$



Formula probabilității totale:

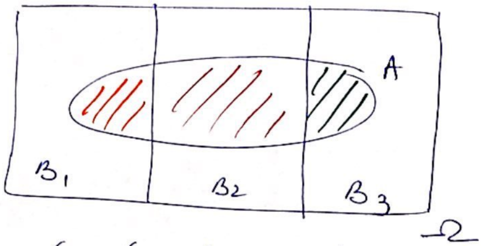
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probab, $A \in \mathcal{F}$ e eveniment de interes și B_1, B_2 și $B_3 \in \mathcal{F}$ care formează o partiție pe Ω.

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

$B_1 \cap B_3 = \emptyset$



$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)) \\
&= \mathbb{P}((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) \\
&= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)
\end{aligned}
$$

(P) Dacă A și B sunt 2 evenimente cu probab lui B $\in (0, 1)$ atunci

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)}$$

Mai mult, $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ care formează o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ atunci

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

formula probabilității totale

Ex 2 (continuare)

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}$ (a doua carte e de inimă roșie) $= 1/4$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)$ (din formula prob totale)

$\mathbb{P}(B|A) = \frac{12}{51}$

$\mathbb{P}(A) = 1/4 \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 3/4$

$\mathbb{P}(B|A^c) = \frac{13}{51}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{12}{51}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{13}{51} = \frac{12+3\cdot 13}{4\cdot 51} = \frac{1}{4}$$

(T) (Formula lui Bayes)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probab, $A, B \in \mathcal{F}$ aî $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$, Atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)}}$$

Mai mult, dacă $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ care formează o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ atunci

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}$$

Ex 5 (Testăm o afecțiune rară)

Să presupunem că prevalența unei boli în populație este de 1%. P ca efectuăm un test de detecție a prezenței bolii în organism a cărei acuratețe e de 95%.

Prin acuratețea unui test înțelegem ca rata de true pozitive (senzitivitatea) și rata de true negativ (specificitatea) sunt de 95%, unde prin rata de true positive înțeleg probab ca testul să fie pozitiv dat fiind ca pacientul este infectat

—"— true negative = probab ca testul să fie negativ știind că pacientul nu e infectat.

D – pacientul are boala

T – testul a ieșit pozitiv

Senzitivitatea testului $= P(T/D) = 0.95$
rata de true poz.

Specificitatea testului $= P(T^c/D^c) = 0,95$
rata de true neg

rata → false positive $P(T/D^c) = 0.05$

rata → false negative $P(T^c/D) = 0.05$

Presupunem că am efectuat testul și e negativ. Care e probab să am boala?

$P(D/T)$?

$$P(D/T) \xrightarrow{\text{Bayes}} \frac{P(T/D)\,P(D)}{P(T)} = \frac{P(T/D)\,P(D)}{P(T/D)\,P(D) + P(T/D^c)\,P(D^c)}$$

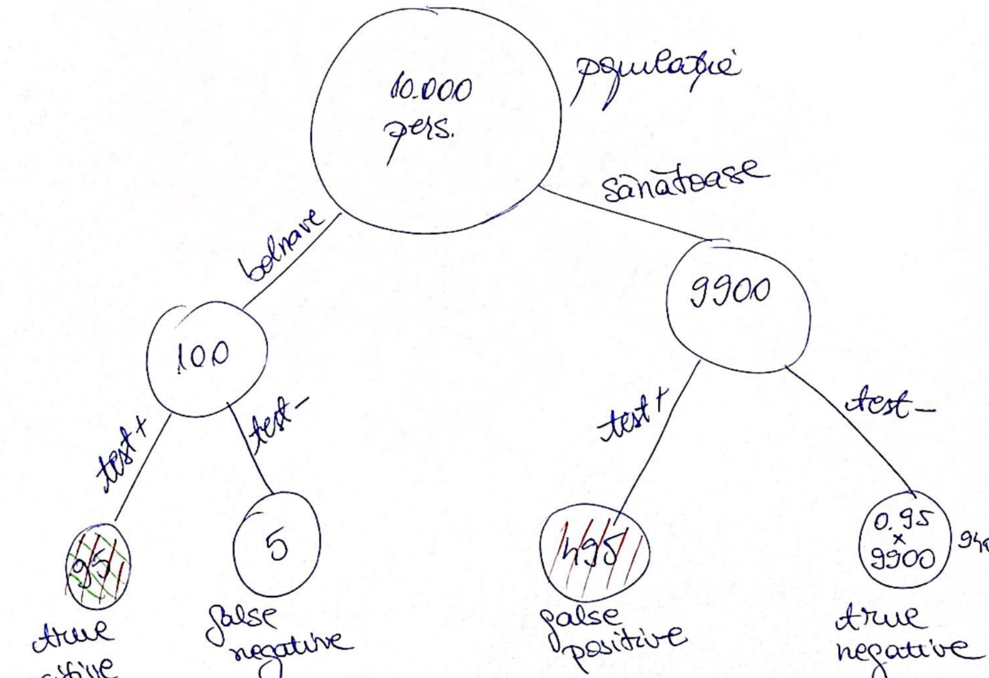
$P(D) = 1\% = 0.01$

$P(T/D) = 0.95$

$P(T/D^c) = 1 - P(T^c/D^c) = 0.05$

$$P(D/T) = \frac{0{,}95 \times 0.01}{0.95 \times 0{,}01 + 0.05 \times (1 - 0{,}01)} \simeq 0{,}16$$

Total populație 10.000 pers.



$$P(D/T) = \frac{95}{95+495} = 0{,}16$$