SEMINAR 4 11.03.2021

Repere. Coordonate. Subspații vectoriale.

Preliminarii

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect. n-dim.

- $R=\{e_1,..,e_n\}$ reper $\Leftrightarrow$ R bază ordonată.

  $\forall x\in V,\ \exists!\,(x_1,..,x_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$

  (coordonatele lui x în raport cu reperul R)

- $R=\{e_1,..,e_n\}\xrightarrow{A}R'=\{e_1',..,e_n'\}$

  $e_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j,\ \forall i=\overline{1,n}$

  $X=AX',\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$

$(x_1,..,x_n),\ (x_1',..,x_n')$ coord. în rap cu R, resp R'

- Criteriu de LI $\quad S=\{v_1,..,v_m\},\ m\le n.$

  S ~~este~~ SLI $\Leftrightarrow$ rg $C=m=$ maxim

  $C=$ matricea compon. vect din S în raport cu un reper arbitrar

- $V_1,V_2\subset V$ subsp. vect $\Rightarrow V_1\cap V_2$ subsp. vect.

  În general, $V_1\cup V_2$ nu e ssp. vect; $\langle V_1\cup V_2\rangle=V_1+V_2$

  V_1+V_2 este sumă directă i.e $V_1\oplus V_2\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0_V\}$

  $\Leftrightarrow\forall v\in V_1+V_2,\ \exists!\ \begin{matrix}v_1\in V_1\\ v_2\in V_2\end{matrix}$ a.î. $v=v_1+v_2$.

  Dacă $V=V_1\oplus V_2$, $V_2=$ subspațiu complementar lui V_1 (nu e unic)

  R_1 reper în V_1

$R=R_1\cup R_2$ reper în $V\Rightarrow V_2=\langle R_2\rangle$

Th. Grassmann $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$

✓ **EX1.** $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ $\quad \mathcal{R}_0 = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ reperul canonic.

Fie $\mathcal{R}' = \{e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3,\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\}$

a) Să se arate că $\mathcal{R}'$ este reper în $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $\quad A = ?$

b) Să se afle coordonatele vectorului $x = (3,2,1)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}'$

SOL.

a) $\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3 = (1,2,1), \\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3 = (1,7,1), \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 = (-1,1,1) \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A = matricea componentelor vect din $\mathcal{R}'$ în raport cu reperul $\mathcal{R}_0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rg} A = 3 \text{ max} \xrightarrow[LI]{CRIT} \mathcal{R}' \text{ este SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = |\mathcal{R}'| \end{array}\right\} \xRightarrow{OBS} \mathcal{R}' \text{ reper}$$

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$

b) $x = (3,2,1) = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3'$

$= x_1'(1,2,1) + x_2'(1,7,1) + x_3'(-1,1,1)$

$= (x_1' + x_2' - x_3',\ 2x_1' + 7x_2' + x_3',\ x_1' + x_2' + x_3')$

$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_3' = 3 \\ 2x_1' + 7x_2' + x_3' = 2 \\ x_1' + x_2' + x_3' = 1 \end{cases}$ $\quad$ ec3 − ec1 : $2x_3' = -2 \Rightarrow x_3' = -1$

$\begin{cases} x_1' + x_2' = 2 & \Big| \cdot (-2) \\ 2x_1' + 7x_2' = 3 \end{cases}$ $\quad x_2' = -\frac{1}{5}$

$5x_2' = -1$ $\quad x_1' = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

$(x_1', x_2', x_3') = \left(\frac{11}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$ coord. lui x în rap cu $\mathcal{R}'$

$\doteq (\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$, $R_0 = \{\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{X}, \underset{e_3}{X^2}\}$ reperul canonic.

Fie $R' = \{-1+2X+3X^2, X-X^2, X-2X^2\}$

a) Să se arate că R' este reper în $\mathbb{R}_2[X]$; $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A=?$

b) Să se afle coordonatele lui $P = 3-X+X^2$ în raport cu reperul R'

SOL/ $e_1' = \sum_{j=1}^{3} a_{j1} e_j = a_{11}e_1 + a_{21}e_1 + a_{31}e_2$

a) $e_1' = -1+2X+3X^2 = -e_1 + 2e_2 + 3e_3$

$e_2' = X - X^2 \quad = 0e_1 + e_1 - e_3$

$e_3' = X - 2X^2 \quad = 0e_1 + e_2 - 2e_3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A = matricea compon. vect din R' în raport cu R_0

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} rg A = 3 = \max \overset{CRIT}{\underset{LI}{\Longrightarrow}} R' \text{ este SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3 = |R'| \end{array}\right\} \Rightarrow R' \text{ reper}$$

$$R_0 \xrightarrow{A} R'$$

b) $P = 3 - X + X^2 = a_1' e_1' + a_2' e_2' + a_3' e_3' =$

$= a_1'(-1+2X+3X^2) + a_2'(X-X^2) + a_3'(X-2X^2)$

$= -a_1' + X(2a_1' + a_2' + a_3') + X^2(3a_1' - a_2' - 2a_3')$

$$\begin{cases} -a_1' = 3 \\ 2a_1' + a_2' + a_3' = -1 \\ 3a_1' - a_2' - 2a_3' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1' = -3 \\ a_2' + a_3' = 5 \\ -a_2' - 2a_3' = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1' = -3 \\ a_3' = -15 \\ a_2' = 20 \end{cases}$$

$/ \quad -a_3' = 15$

$(a_1', a_2', a_3') = (-3, 20, -15)$ coordonatele lui P în raport cu reperul R'

Scanned with CamScanner

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$P = 3 - X + X^2$

<u>Ex3</u> Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ sp vect 3-dim.
Fie $R = \{v_1, v_2, v_3\}$ reper în V și $R' = \{\underbrace{v_1}_{v_1'}, \underbrace{v_1+v_2}_{v_2'}, \underbrace{v_1+v_2+v_3}_{v_3'}\} \subset V$

a) Să se arate că R' e un reper în V; $R \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) Dacă $v \in V$ are coord. (x_1, x_2, x_3) în raport cu reperul R, at care sunt coord (x_1', x_2', x_3') în raport cu reperul R'.

<u>SOL</u>

a) $\begin{cases} v_1' = v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ v_2' = v_1 + v_2 + 0\cdot v_3 \\ v_3' = v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A = matricea compon. vect din R' în rap cu reperul R

$\left.\begin{array}{l} \det A = 1 \Rightarrow rg\, A = 3 = max \overset{CRIT}{\underset{LI}{\Longrightarrow}} R' \text{ este SLI} \\ \text{dar } \dim_{\mathbb{R}} V = 3 = |R'| \end{array}\right\} \Rightarrow R'$ reper în V

b) $X = AX' \Rightarrow X' = A^{-1}X$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \Rightarrow A^{-1} = A^*$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$(x_1', x_2', x_3') = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$ coord. lui v în raport cu reperul R'.

Ex4 Fie $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$, $\tilde{P} = P$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $\forall i = \overline{1,3}$ subspații vectoriale

b) Precizați câte un reper R_i în V_i, $i = \overline{1,3}$

c) aflați coordonatele lui

$P_1 = X + 2X^2 + 3X^3$ în raport cu R_1

$P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3$ —"— R_2

$P_3 = X + 3X^2 - 4X^3$ —"— R_3.

d) Determinați câte un subspațiu complementar V_i' lui V_i $i = \overline{1,3}$

i.e $\mathbb{R}_3[X] = V_i \oplus V_i'$, $i = \overline{1,3}$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[X]$ ca suma directă a 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vectoriale.

SOL

a) $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$.

$\forall P, Q \in V_1$ $\Rightarrow aP + bQ \in V_1$.
$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\underbrace{aP+bQ}_{S}$

$S(0) = a\underbrace{P(0)}_{0} + b\underbrace{Q(0)}_{0} = 0 \Rightarrow S \in V_1$

$\Rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}_3[X]$ subsp. vect.

Analog pt V_2 și V_3.

b) $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \langle\{X, X^2, X^3\}\rangle$

$P(0) = 0 \Rightarrow a_0$

$\mathcal{R}_1 = \{X, X^2, X^3\}$ e SG pt V_1
$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}$ $\Rightarrow \mathcal{R}_1$ SLI $\Rightarrow \mathcal{R}_1$ reper
($1 = e_1$, $X = e_2$, $X^2 = e_3$, $X^3 = e_4$)
$\mathcal{R}_0$ reperul canonic $\Rightarrow$ SLI

• $V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = -(a_1 + a_2 + a_3) + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$

$P(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$

$P = a_1(-1 + X) + a_2(-1 + X^2) + a_3(-1 + X^3) \in \langle\{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}\rangle$

$\mathcal{R}_2 = \{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}$ SG pt V_2 (1)

$$\begin{cases} -1 + X = -e_1 + e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ -1 + X^2 = -e_1 + 0e_2 + e_3 + 0e_4 \\ -1 + X^3 = -e_1 + 0e_2 + 0e_3 + e_4 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = max \Rightarrow \mathcal{R}_2 \text{ este SLI } (2)$$

Din (1), (2) $\Rightarrow \mathcal{R}_2$ reper în V_2.

• $V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = -(a_2 + a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases}$$

$P = a_2(-X + X^2) + a_3(-X + X^3) \in \langle\{-X+X^2, -X+X^3\}\rangle$

$\mathcal{R}_3 = \{-X+X^2, -X+X^3\}$ este SG pt V_3 (*)

$$\begin{cases} -X + X^2 = 0e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 \\ -X + X^3 = 0e_1 - e_2 + 0e_3 + e_4 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = max \Rightarrow \mathcal{R}_3 \text{ este SLI } (**)$$

Din (*), (**) $\Rightarrow \mathcal{R}_3$ reper în V_3

c) • $P_1 = X + 2X^2 + 3X^3 \in V_1$, $\mathcal{R}_1 = \{X, X^2, X^3\}$

$(1,2,3)$ coord lui P_1 în raport cu reperul $\mathcal{R}_1$

• $P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3 \in V_2$, $\mathcal{R}_2 = \{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}$

$$P_2 = b_1(-1+X) + b_2(-1+X^2) + b_3(-1+X^3)$$

$$1 + 2X^2 - 3X^3 = -(\underbrace{b_1+b_2+b_3}_{-1}) + \underset{0}{\underset{\parallel}{b_1}}X + \underset{2}{\underset{\parallel}{b_2}}X^2 + \underset{-3}{\underset{\parallel}{b_3}}X^3$$

$(b_1, b_2, b_3) = (0, 2, -3)$ coord. lui P_2 în rap. cu $\mathcal{R}_2$

• $P_3 = X + 3X^2 - 4X^3 \in V_3$, $\mathcal{R}_3 = \{-X+X^2, -X+X^3\}$

$$P_3 = c_1(-X+X^2) + c_2(-X+X^3)$$

$$X + 3X^2 - 4X^3 = -(\underbrace{c_1+c_2}_{\overset{\parallel}{-1}})X + \underset{3}{\underset{\parallel}{c_1}}X^2 + \underset{-4}{\underset{\parallel}{c_2}}X^3$$

$(c_1, c_2) = (3, -4)$ coord. lui P_3 în rap. cu $\mathcal{R}_3$

d) • $\mathbb{R}_3[X] = V_1 \oplus V_1'$

$\mathcal{R}_1 = \{X, X^2, X^3\}$ reper în $V_1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 3$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \mathcal{R}_1' = \{2\} \text{ e SLI}$$

$V_1' = \langle \mathcal{R}_1' \rangle$, $\dim V_1' = 1$.

subspațiu complementar lui V_1.

• $\mathbb{R}_3[X] = V_2 \oplus V_2'$

$\mathcal{R}_2 = \{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}$ reper în $V_2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \neq 0 , \quad \mathcal{R}_2' = \{2+2X+2X^2+2X^3\} \text{ SLI}$$

$V_2' = \langle \mathcal{R}_2' \rangle$, $\mathcal{R}_2'$ reper în V_2'

- $\mathbb{R}_3[X] = V_3 \oplus V_3'$

$\mathcal{R}_3 = \{-X+X^2, -X+X^3\}$ reper în $V_3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_3 = 2$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

$\mathcal{R}_3' = \{1, X^3\} \subset \underbrace{\mathcal{R}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}}_{SLI} \Rightarrow \mathcal{R}_3'$ e SLI

$V_3' = \langle \mathcal{R}_3' \rangle$, $\mathcal{R}_3'$ reper în V_3'

e). $\mathbb{R}_3[X] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

$\mathcal{R}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}$ reperul canonic

$W_1 = \langle\{1, X\}\rangle$, $W_2 = \langle\{X^2\}\rangle$; $W_3 = \langle\{X^3\}\rangle$

$\mathbb{R}_3[X] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$U_1 = \langle\{1\}\rangle$; $U_2 = \langle\{X\}\rangle$; $U_3 = \langle\{X^2\}\rangle$, $U_4 = \langle\{X^3\}\rangle$

Ex 5 $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$, $V' = \{(a,b,c,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$V'' = \{(0,0,d,e) \mid d,e \in \mathbb{R}\}$

Este V'' subspațiu complementar lui V' ?

i.e. $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$?

SOL NU $V' \cap V'' \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$(0,0,1,0) \in V' \cap V''$

OBS $V' = \{a e_1 + b e_2 + c e_3 , a,b,c \in \mathbb{R}\} = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$

$\mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ reperul can din $\mathbb{R}^4$

$\mathcal{R}' = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \underbrace{\mathcal{R}_0}_{SLI} \Rightarrow \mathcal{R}'$ este SLI

Deci $\mathcal{R}'$ este bază în V'

$V'' = \{d e_3 + e e_4,\ d, e \in \mathbb{R}\} = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$

$R'' = \{e_3, e_4\} \subset R_0 \Rightarrow R''$ e SLI

$\Rightarrow R''$ bază în V''

$\dim(V' + V'') \overset{SLI}{=} \dim V' + \dim V'' - \dim(V' \cap V'')$

$= 3 + 2 - 1 = 4.$

$\mathbb{R}^4 = V' + V''$

$\oplus$ nu este directă $(V' \cap V'' = \langle\{e_3\}\rangle)$

Tema 2 (sem)

① Fie $(V_1, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ sp vect cu $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bază

$(V_2, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ —"— $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ bază

Să se determine o bază în $(V_1 \times V_2, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$

② $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$, R_0 = reperul canonic

$S = \{(1,0,-1,2), (1,1,1,1), (2,1,0,3), (3,2,1,4)\}$

a) S este SLD

b) Să se extragă S' un SLI max și să se extindă la un reper R în $\mathbb{R}^4$

c) $R_0 \xrightarrow{A} R$; $A = ?$

d) Să se afle coord. lui $x = (1,2,3,-4)$ în rap cu R

③ $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$

$V' = \left\{ A = \begin{pmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle|\ u, x \in \mathbb{R} \right\}$ ssp vect

a) Precizați o bază în V'

b) Determinați V'' un subspațiu complementar lui V'.