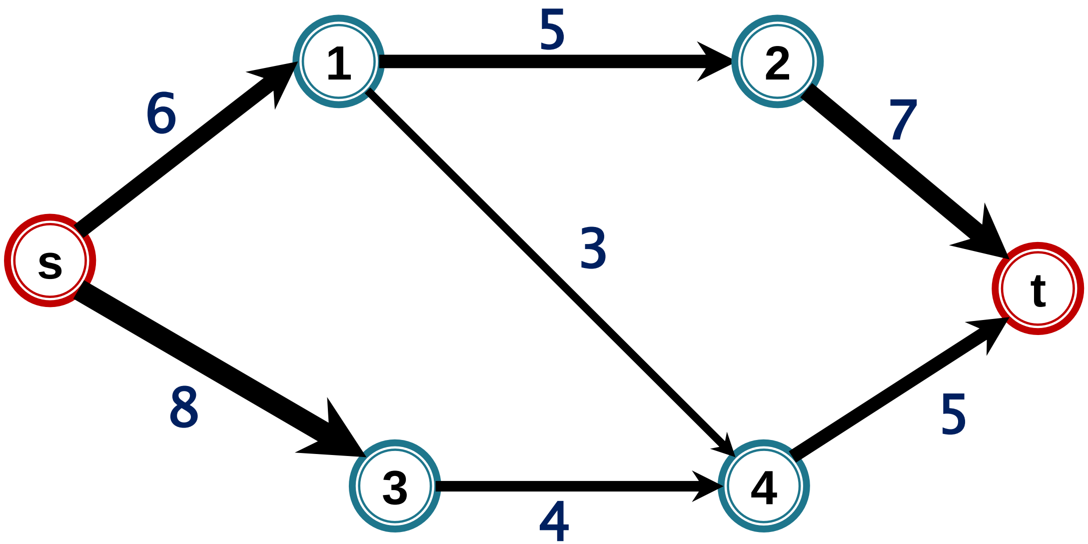
Fluxuri maxime
în rețele de transport

- Avem o reţea în care
  - arcele au limitări de capacitate
  - nodurile = joncţiune

  Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin reţea de la surse la destinaţii?

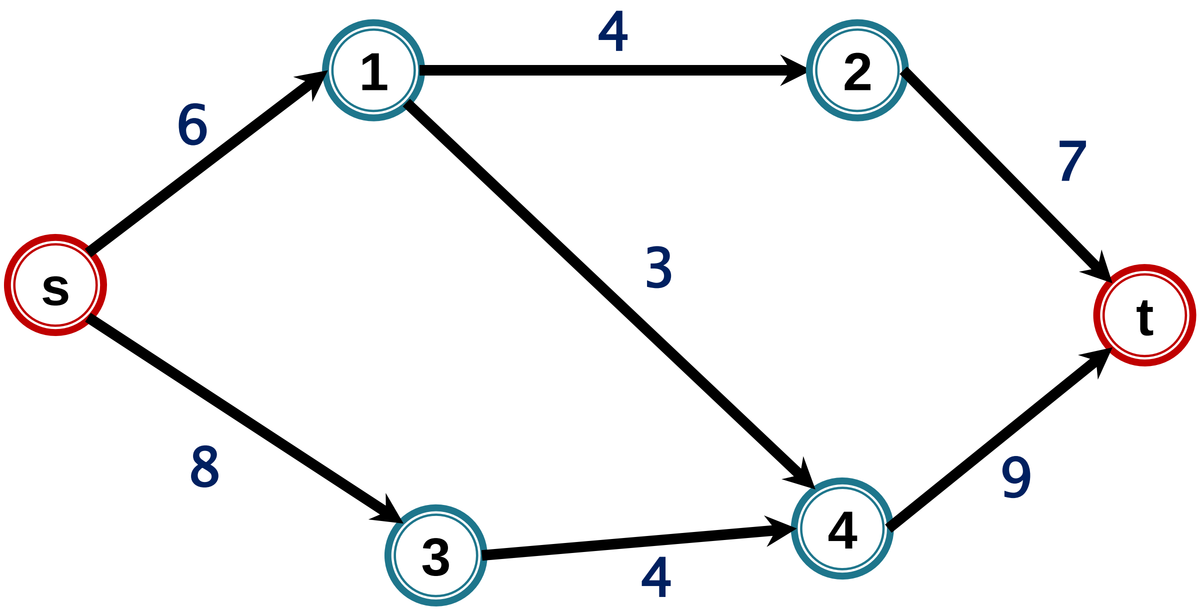
  (în unitatea de timp)



Fluxuri în rețele de transport

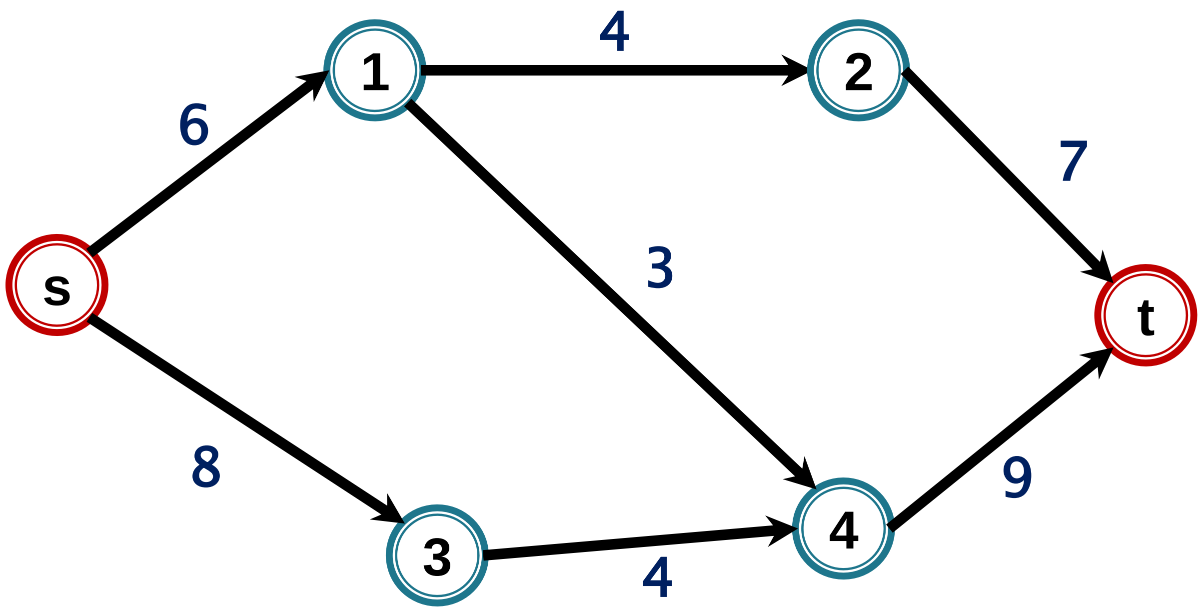
- Rețea de comunicare
  - Transferul de informații – limitat de lățimea de bandă
- Rețele de transport / evacuare în caz de urgențe
  - Limitare – număr de mașini/persoane în unitatea de timp
- Rețele de conducte
- …

Fluxuri în rețele de transport

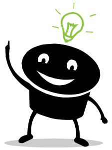


Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t

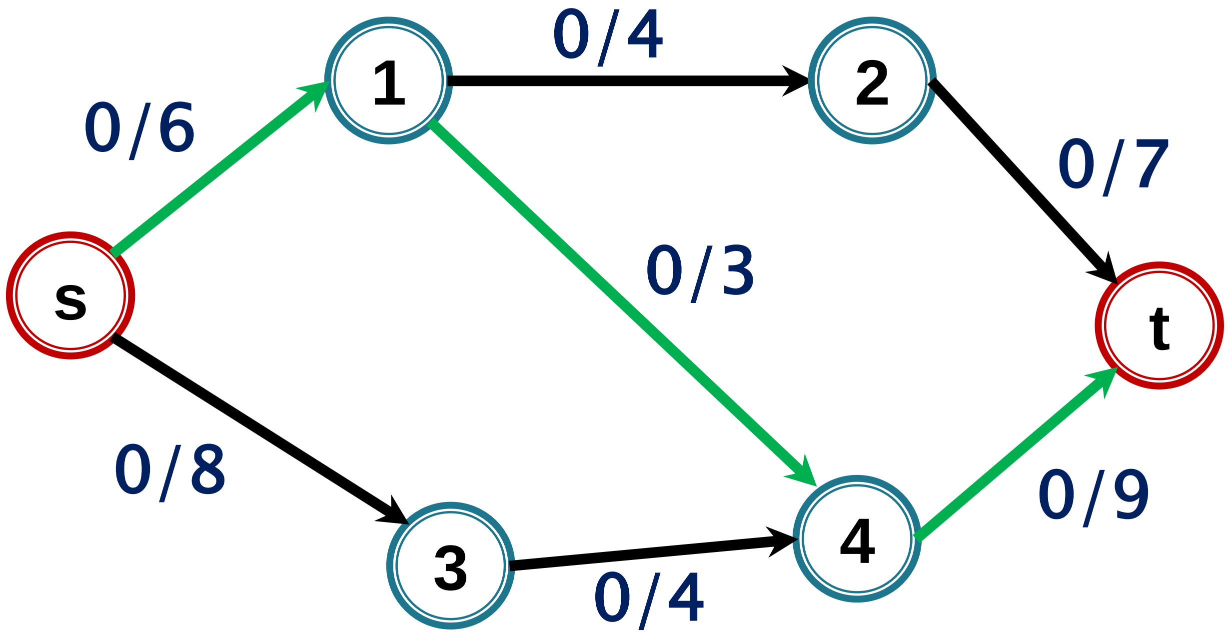
Fluxuri în rețele de transport

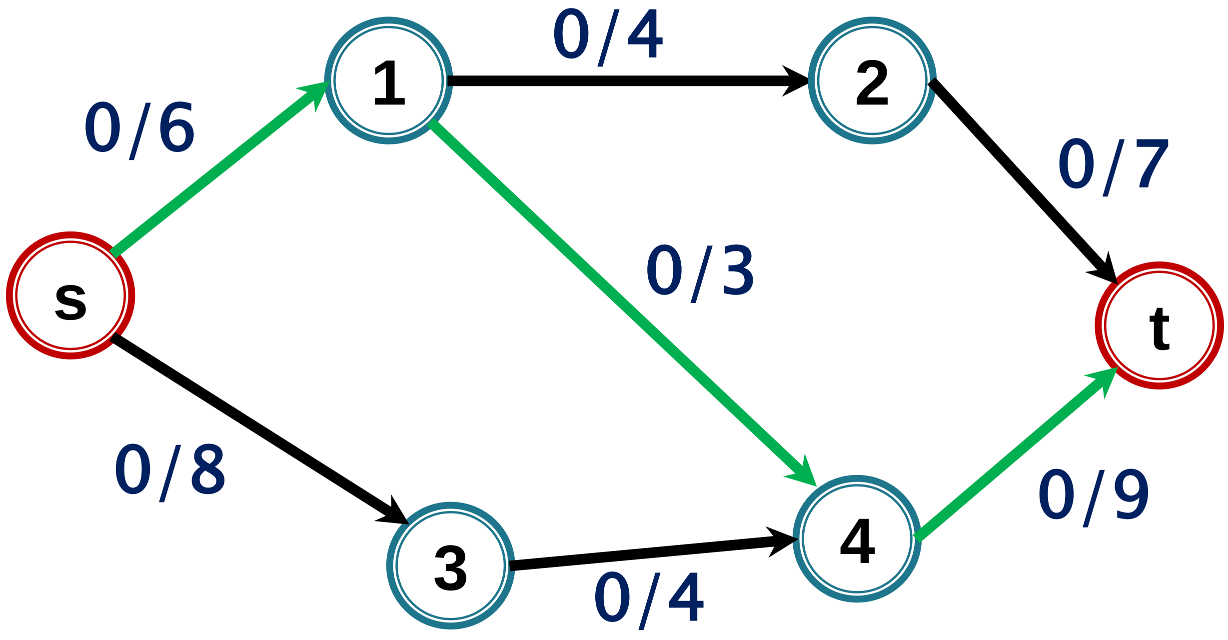


Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t

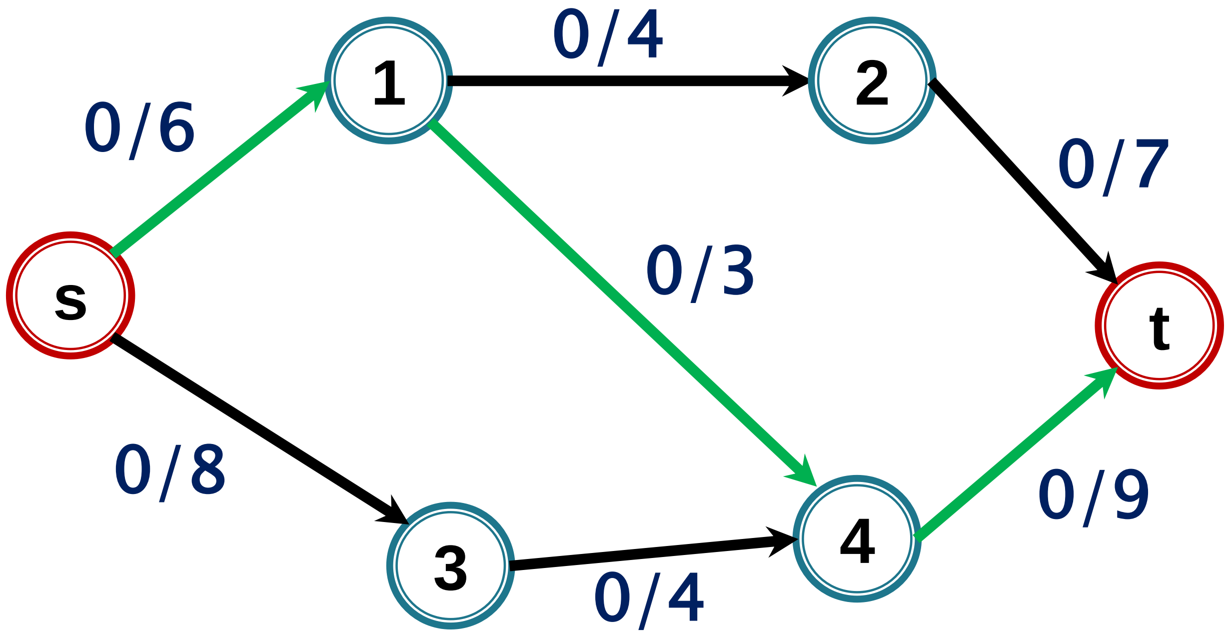


Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă

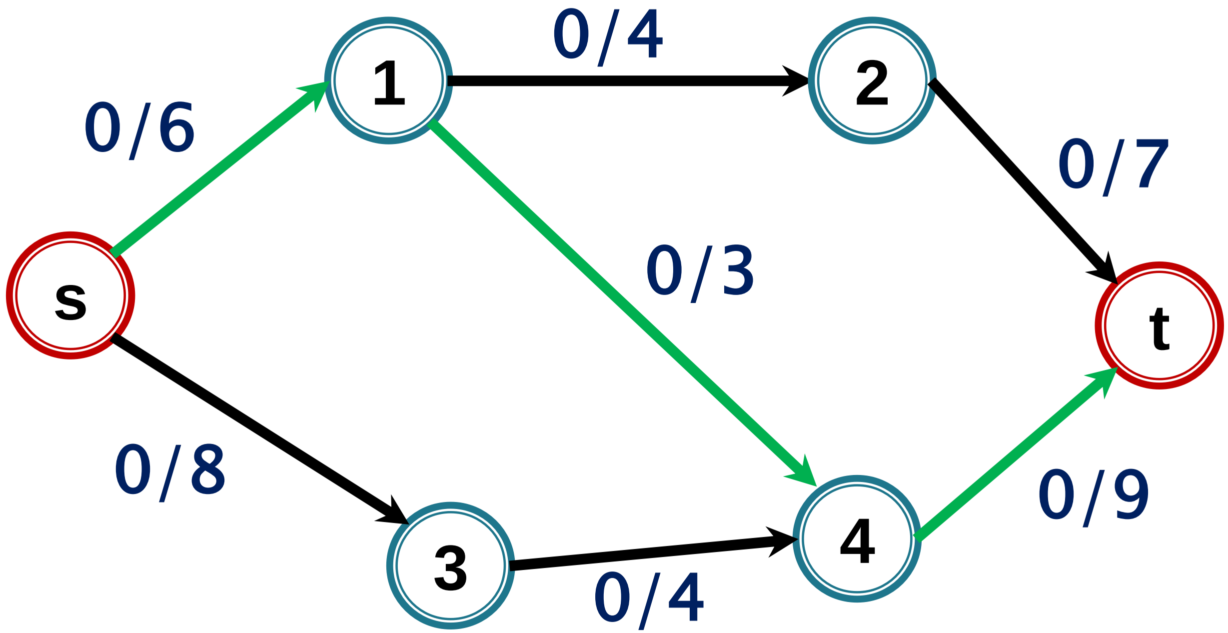

0/4
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
3
4
0/4

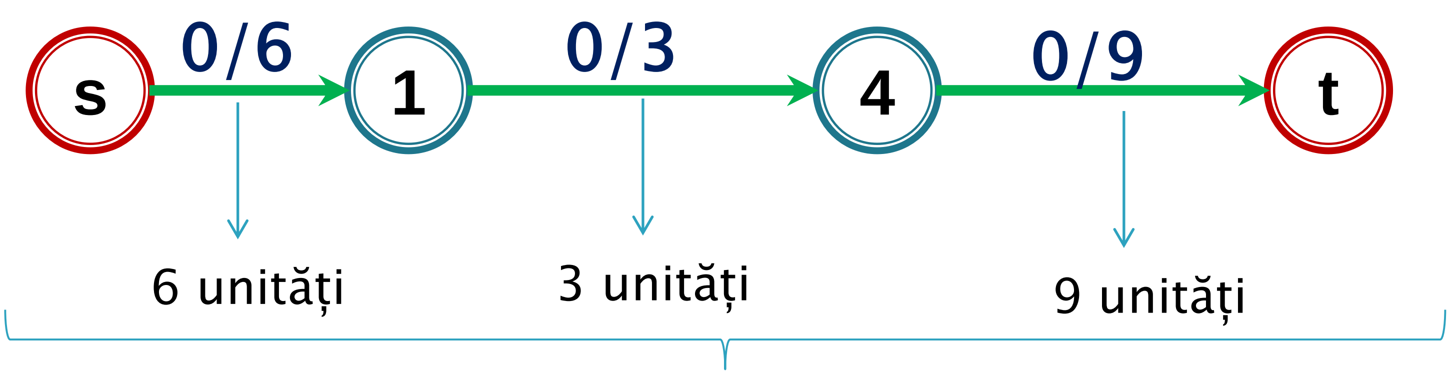


s
1
2
t
3
4
0/6
0/4
0/7
0/3
0/8
0/4
0/9

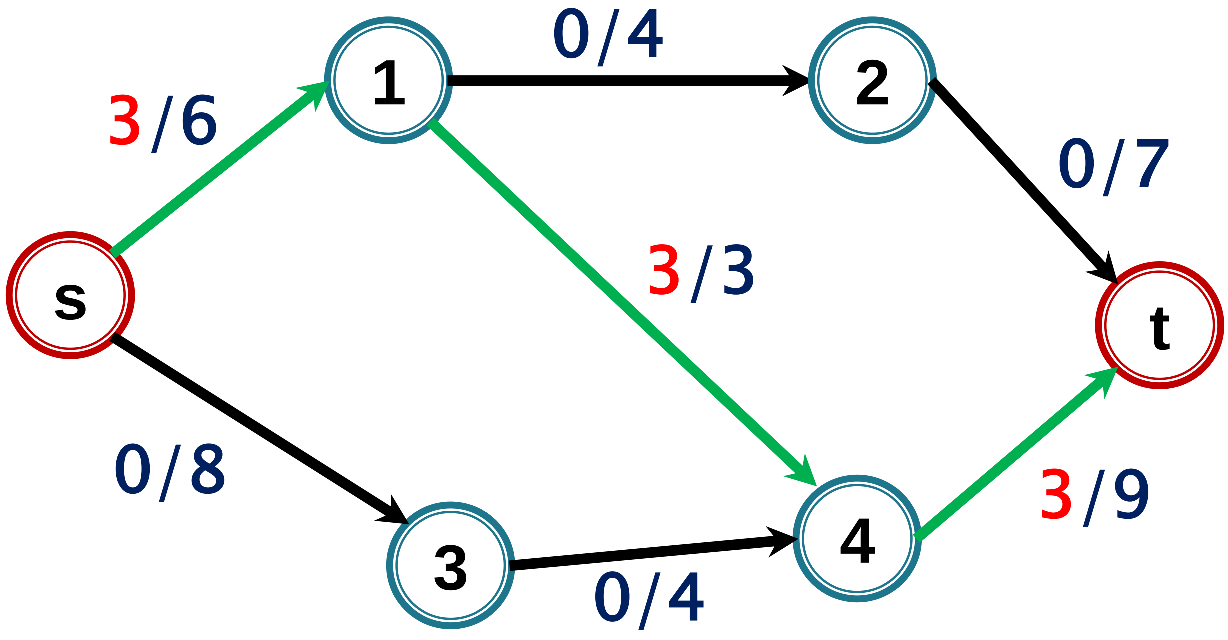

0/4
1
2
0/6
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
3
4
0/4

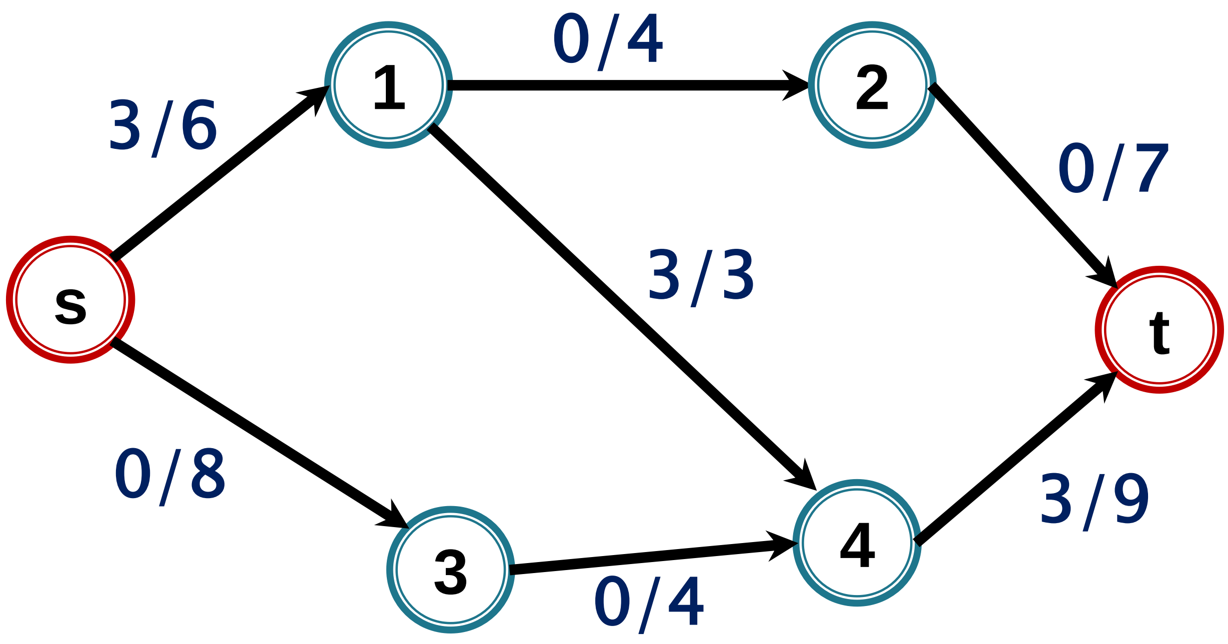

s
0/6
1
0/3
4
0/9
t



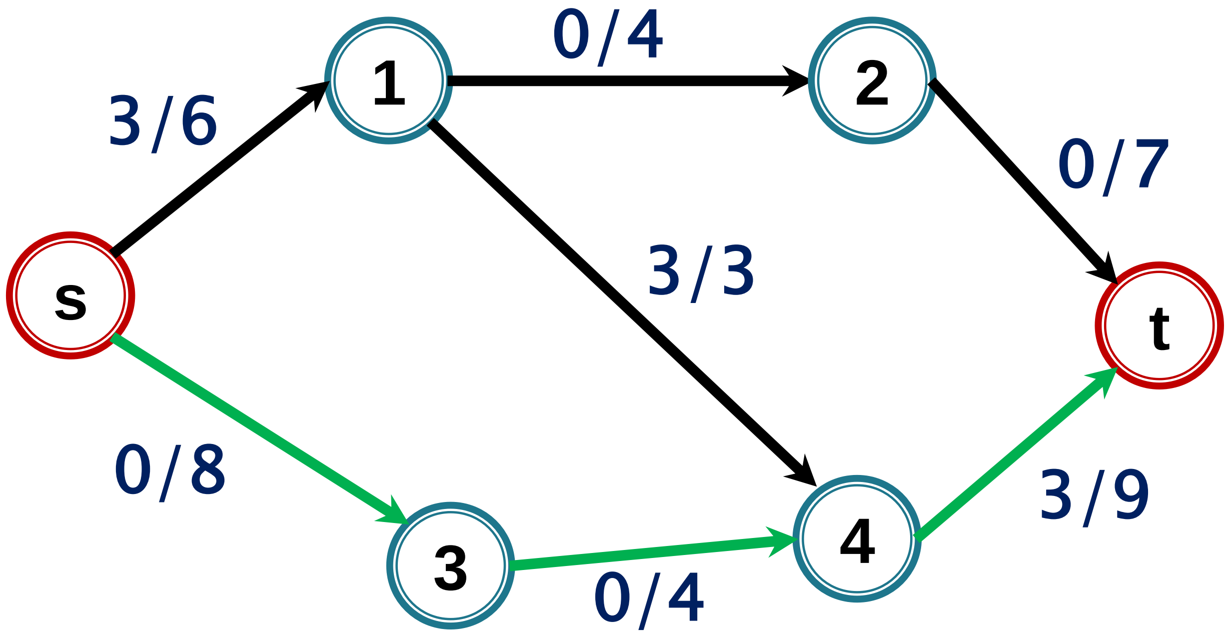


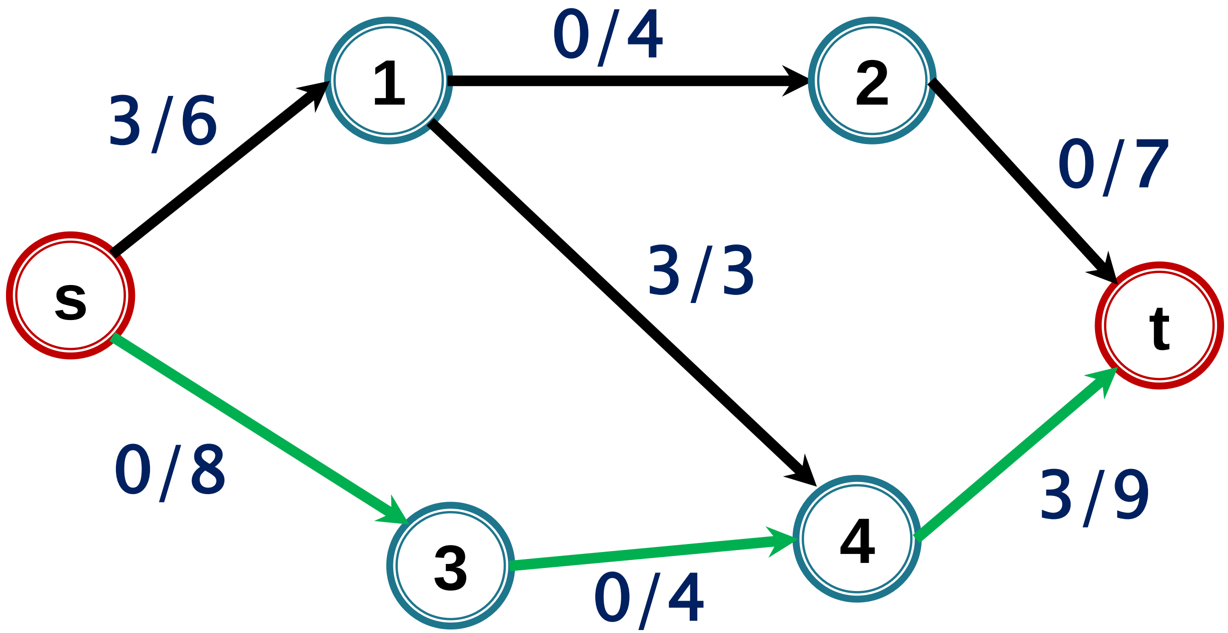
3 unităţi de-a lungul întregului drum

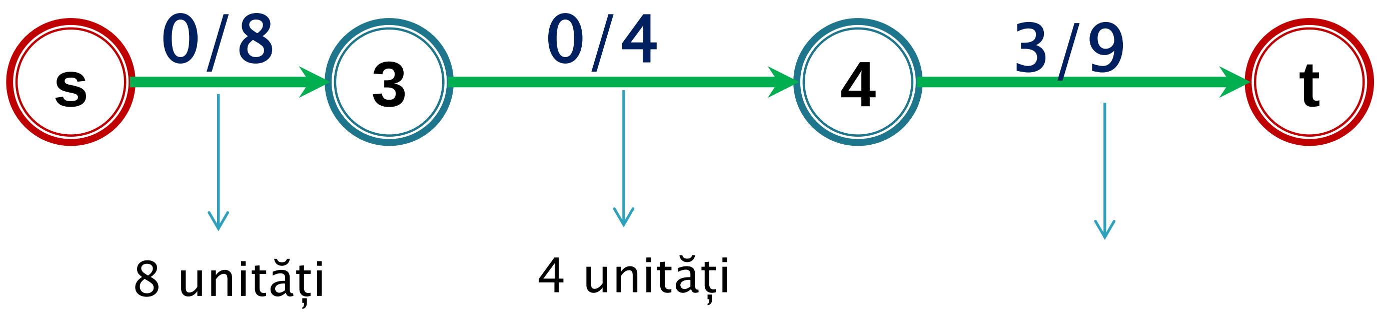

0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
0/8
3/9
4
3
0/4

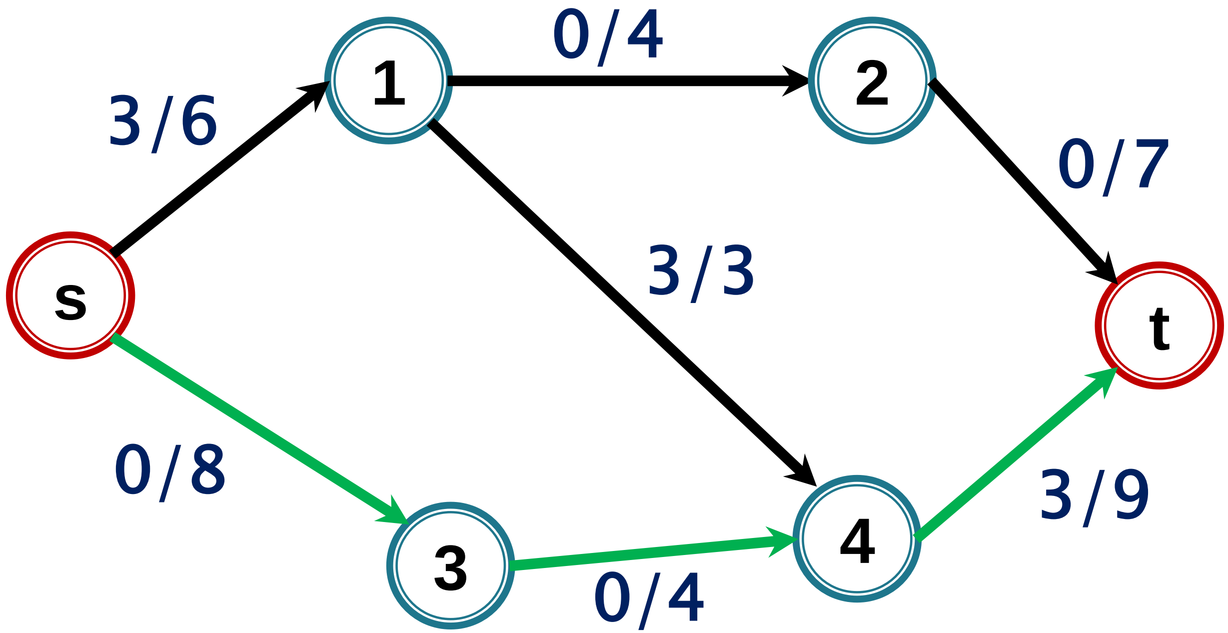


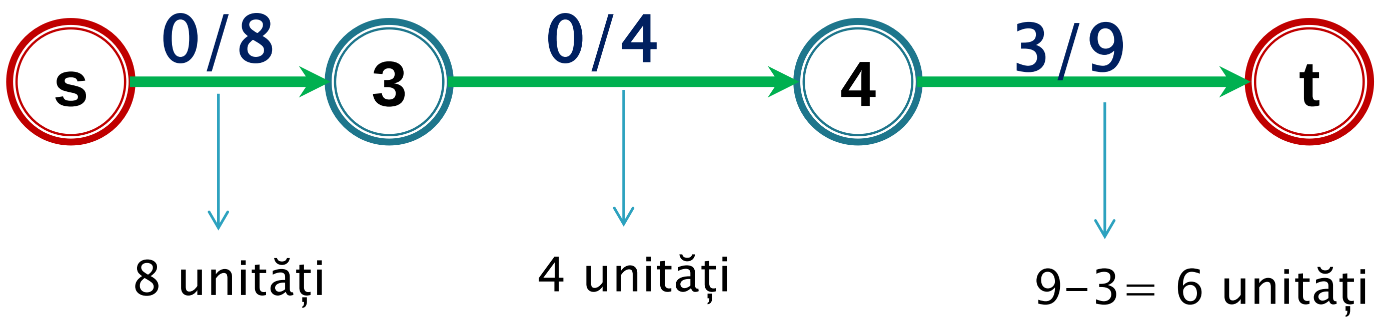
Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

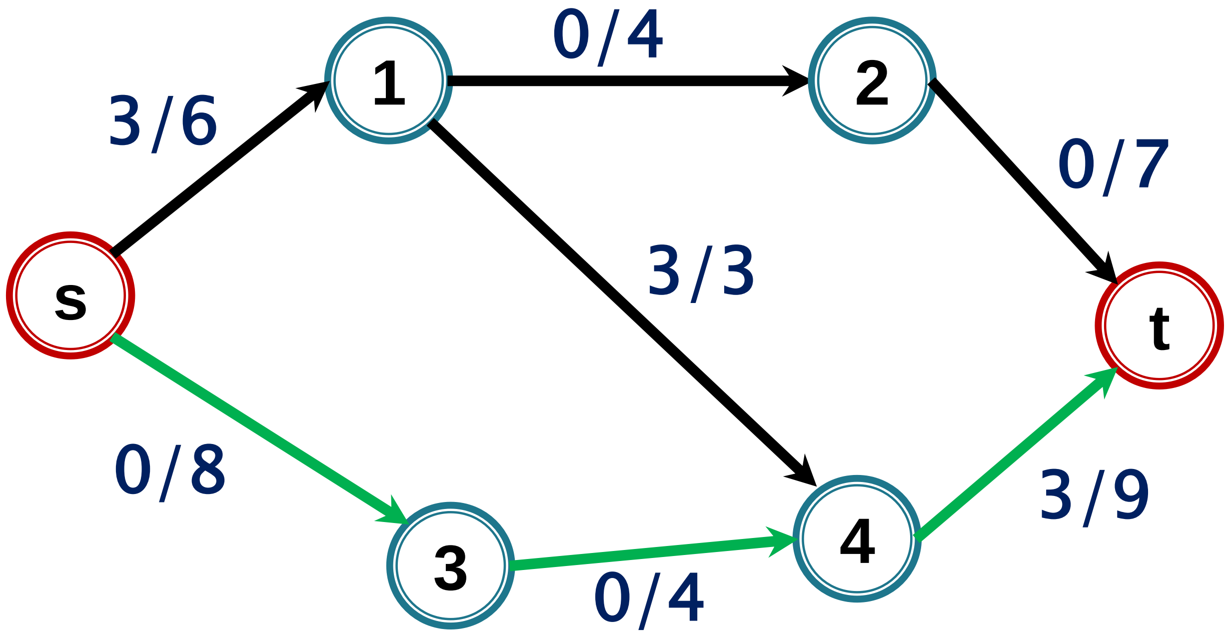

0/4
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/9
4
3
0/4

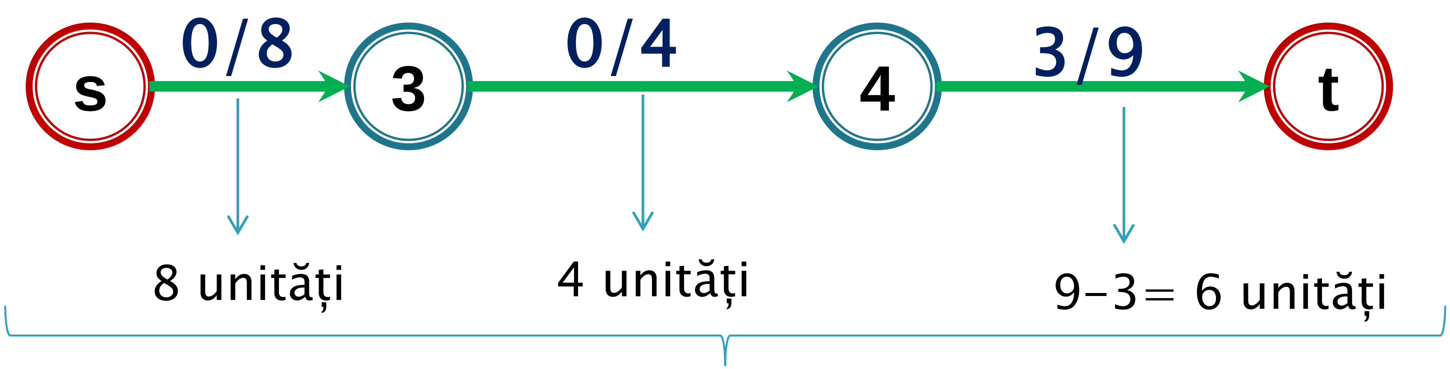

3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
3/9
0/4
s
1
2
3
4
t


0/8
0/4
3/9
s
3
4
t
8 unități
4 unități

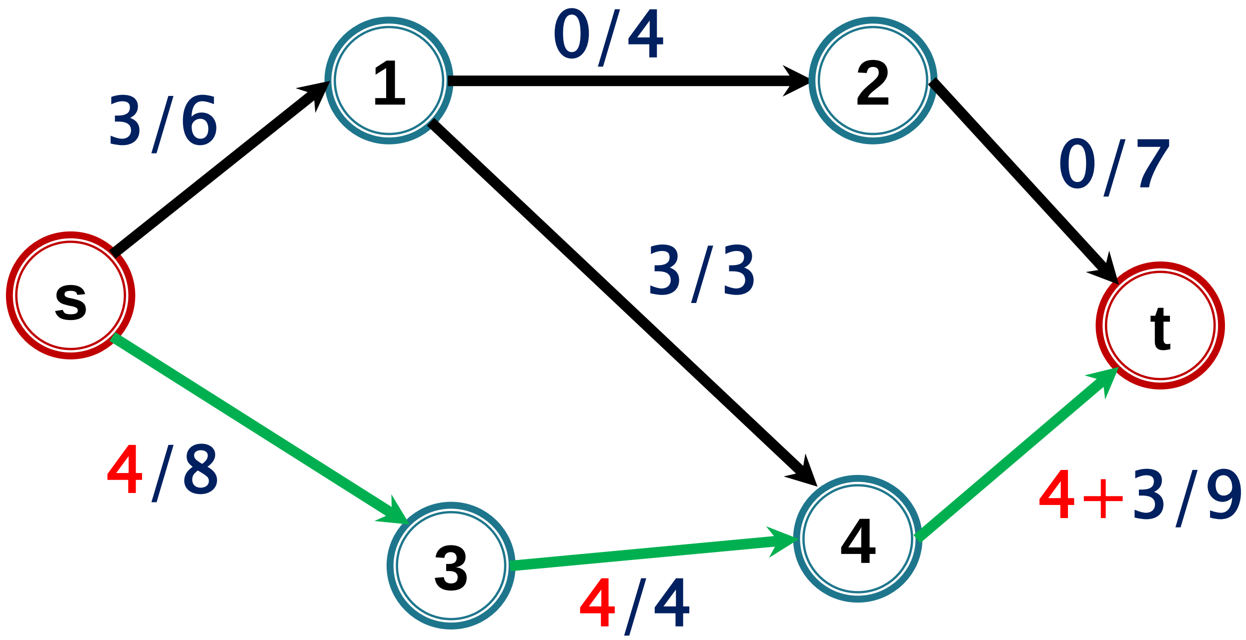

s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
0/4
3/9


s
3
4
t
0/8
0/4
3/9
8 unități
4 unități
9-3= 6 unități

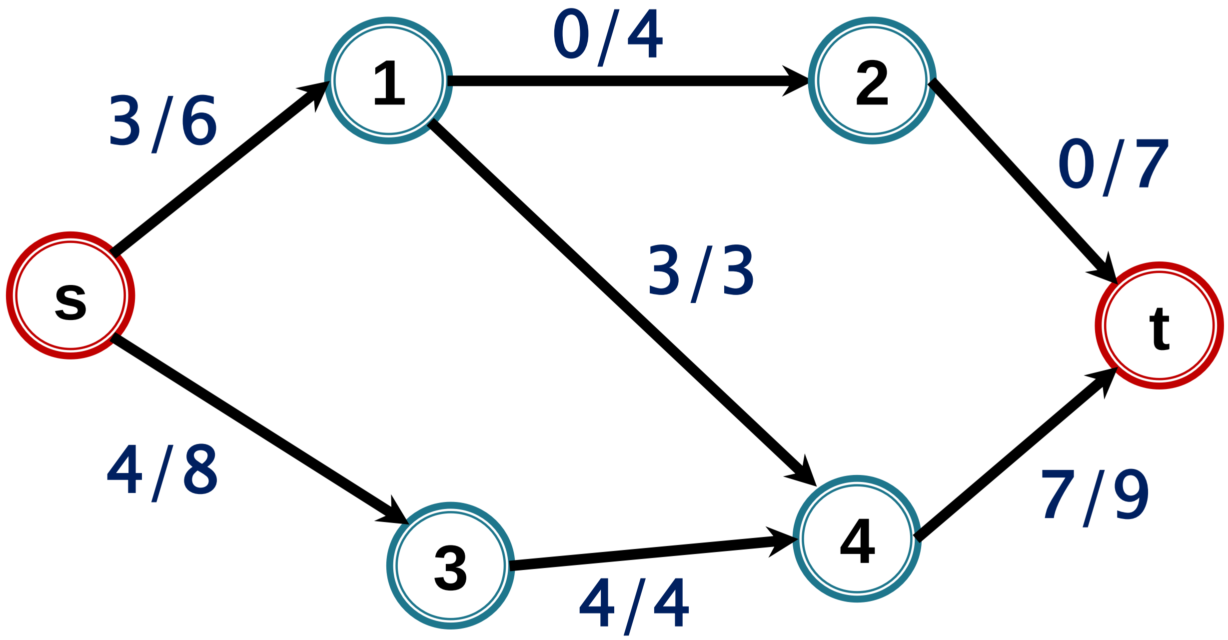


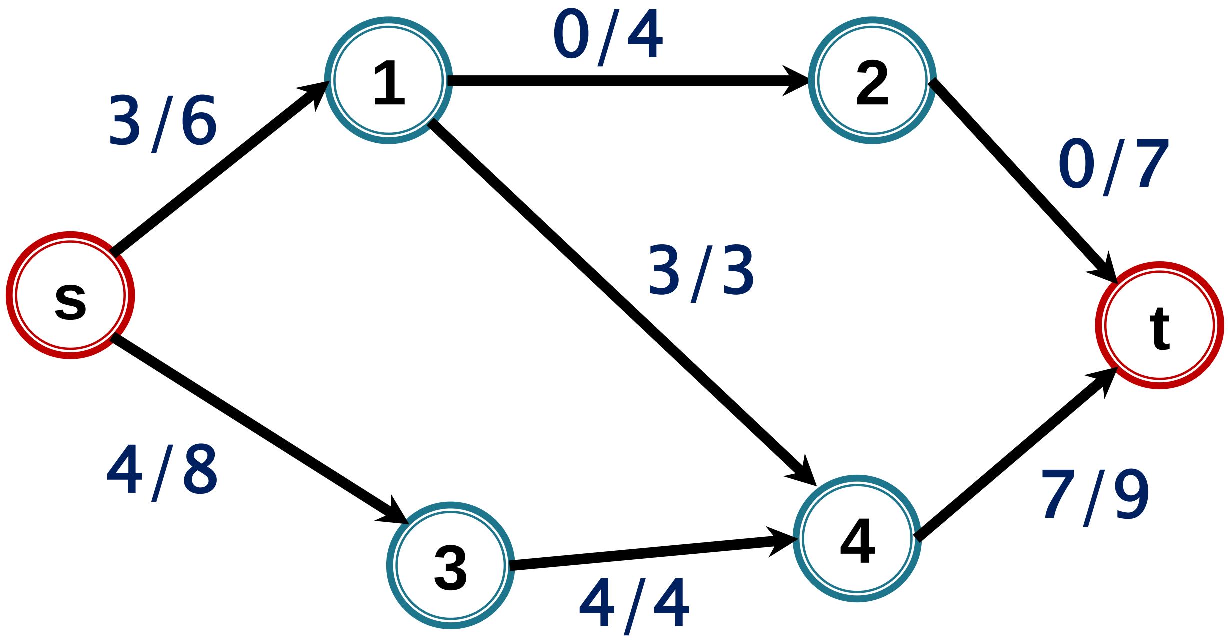


4 unităţi de-a lungul întregului drum

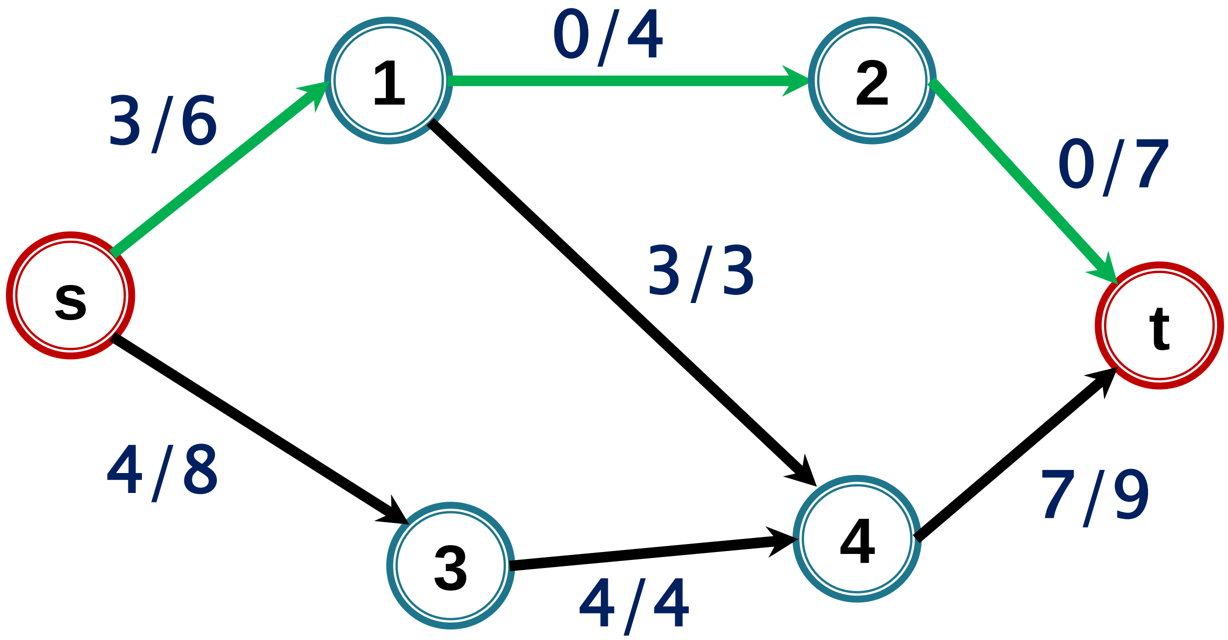


s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
4/8
4/4
4+3/9

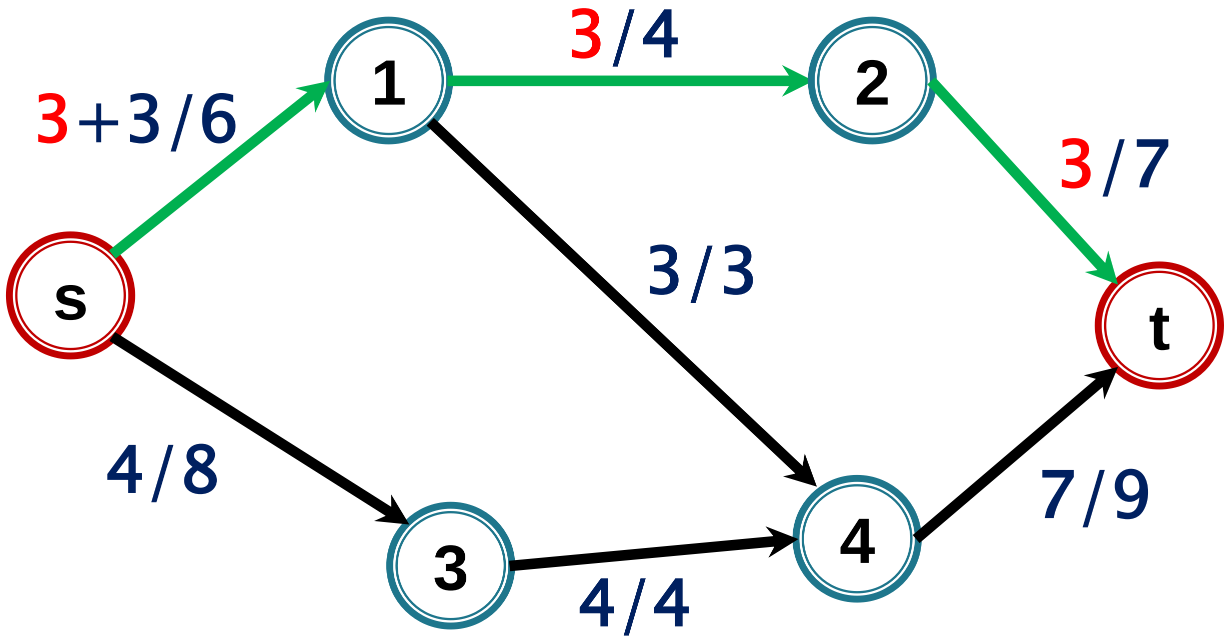

0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
4/8
7/9
3
4
4/4



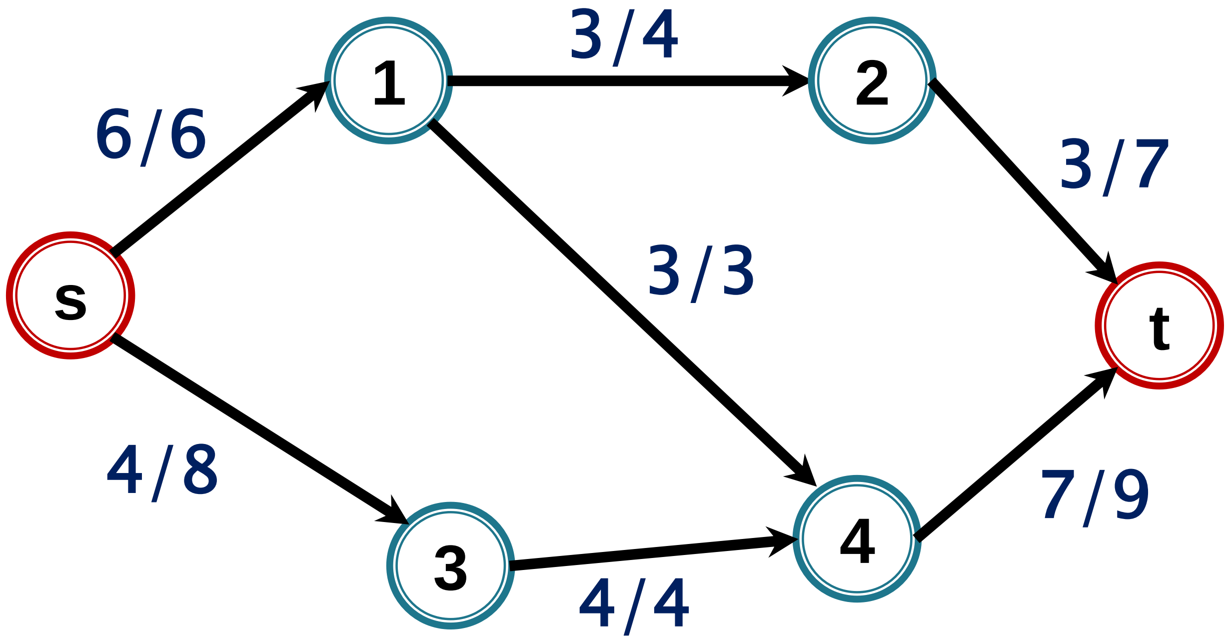
Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux



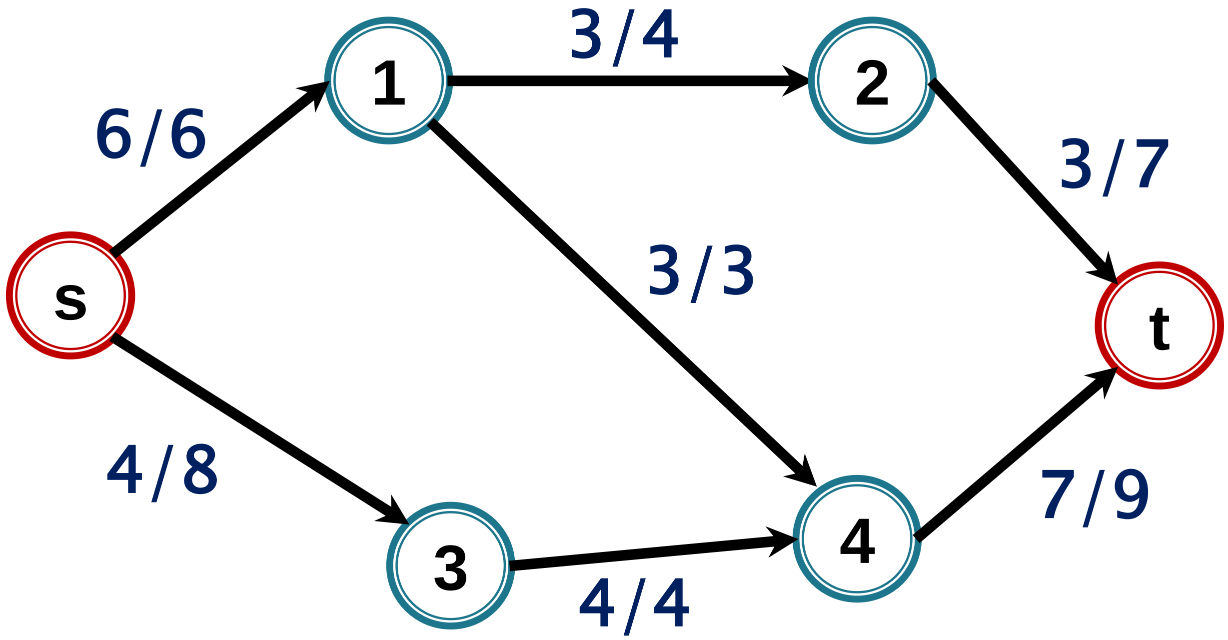
s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
4/8
4/4
7/9



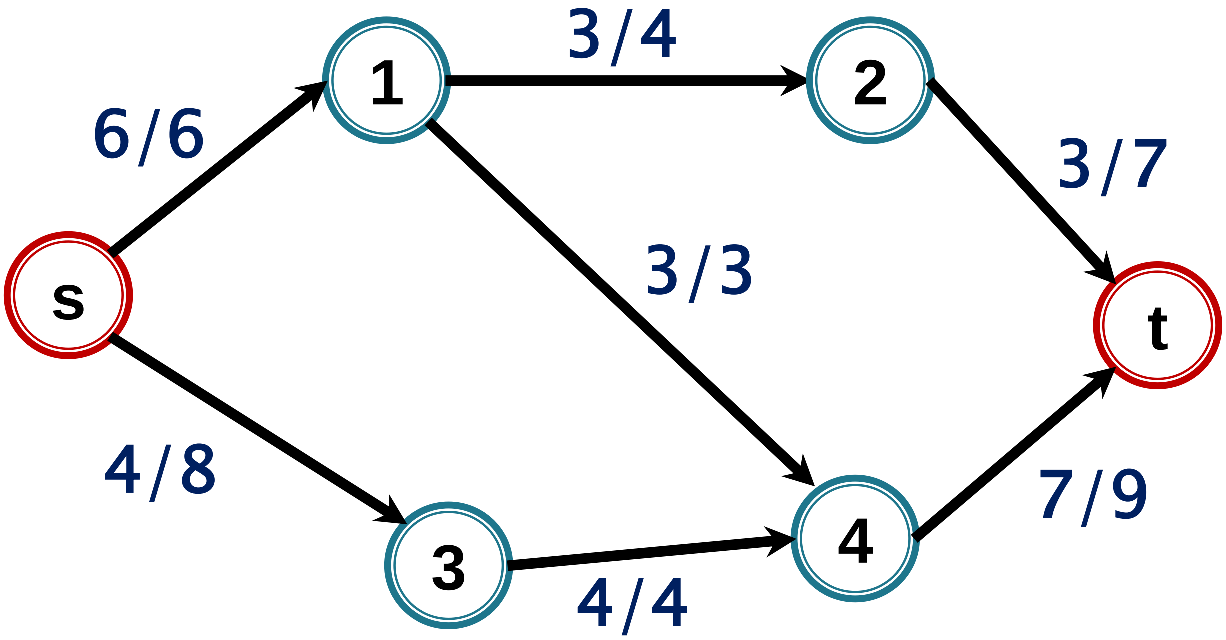
3+3/6
3/4
3/7
3/3
4/8
4/4
7/9
s
1
2
3
4
t



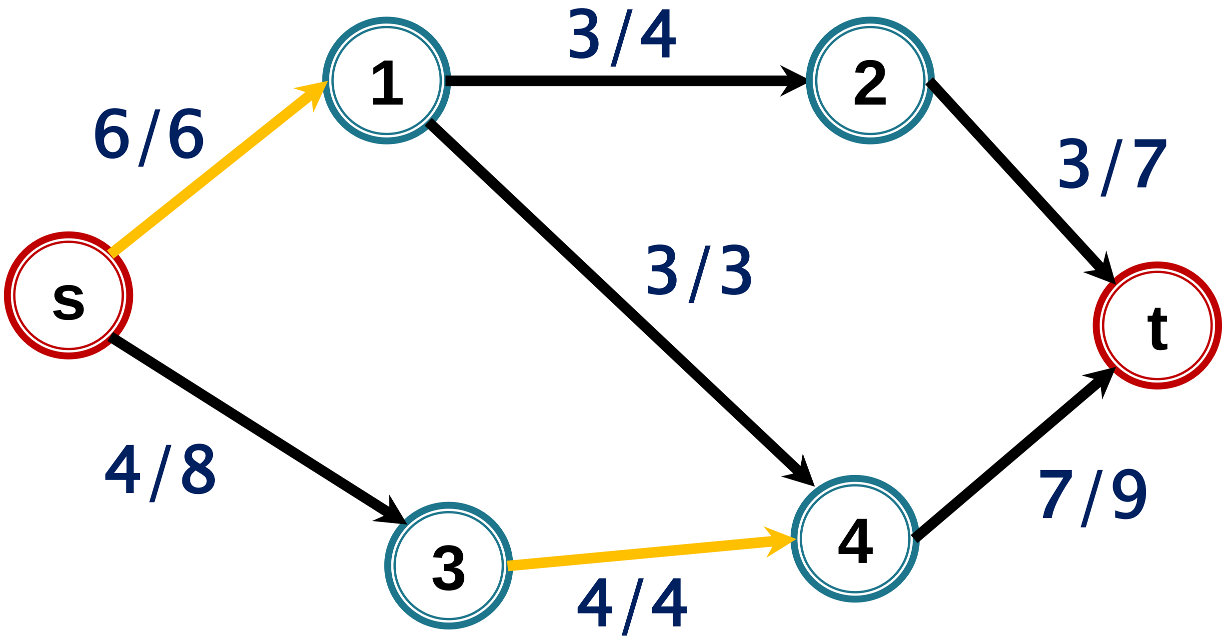
s
1
2
3
4
t
6/6
3/4
3/7
3/3
4/8
7/9
4/4

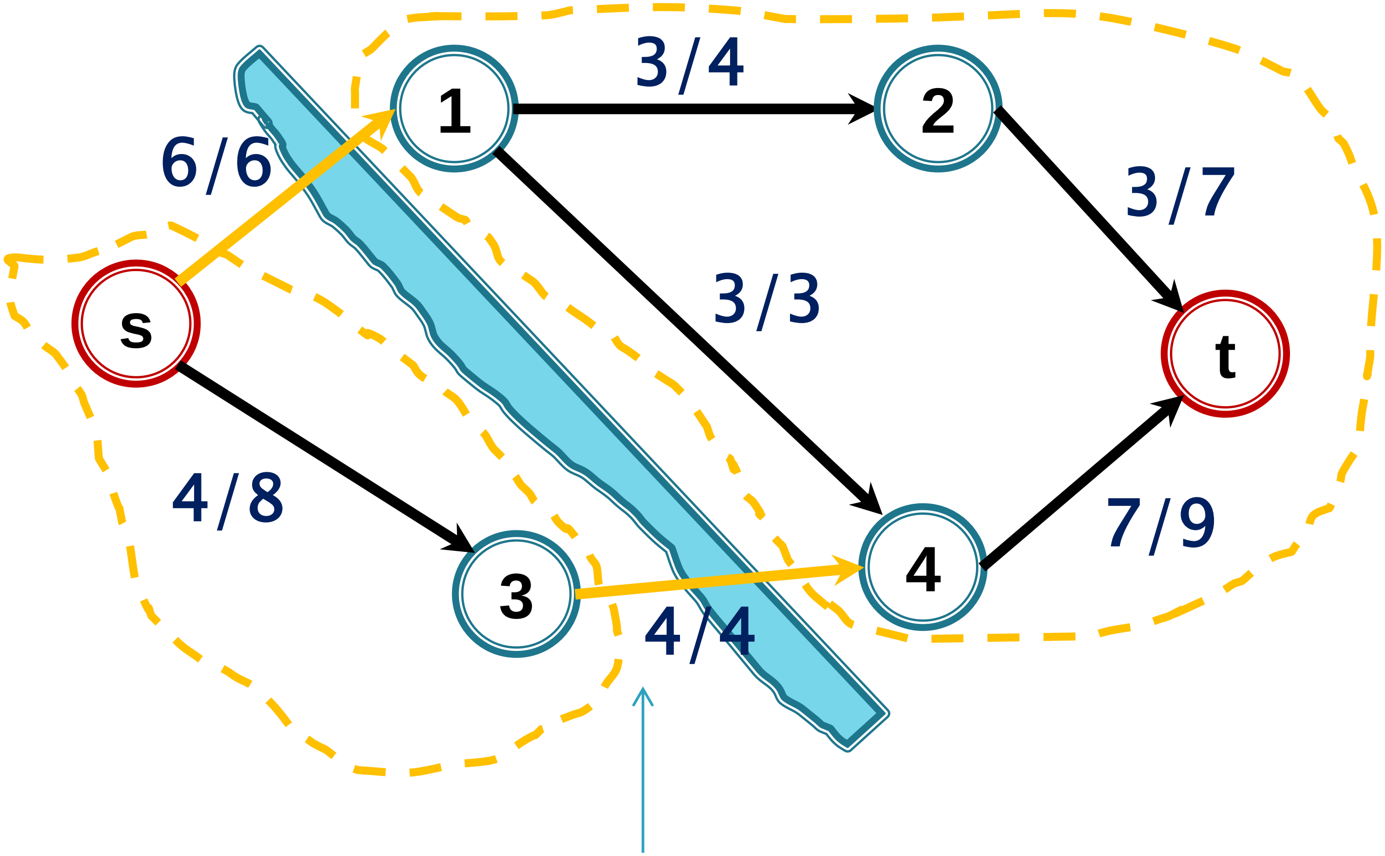


Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux



Este maxim fluxul?

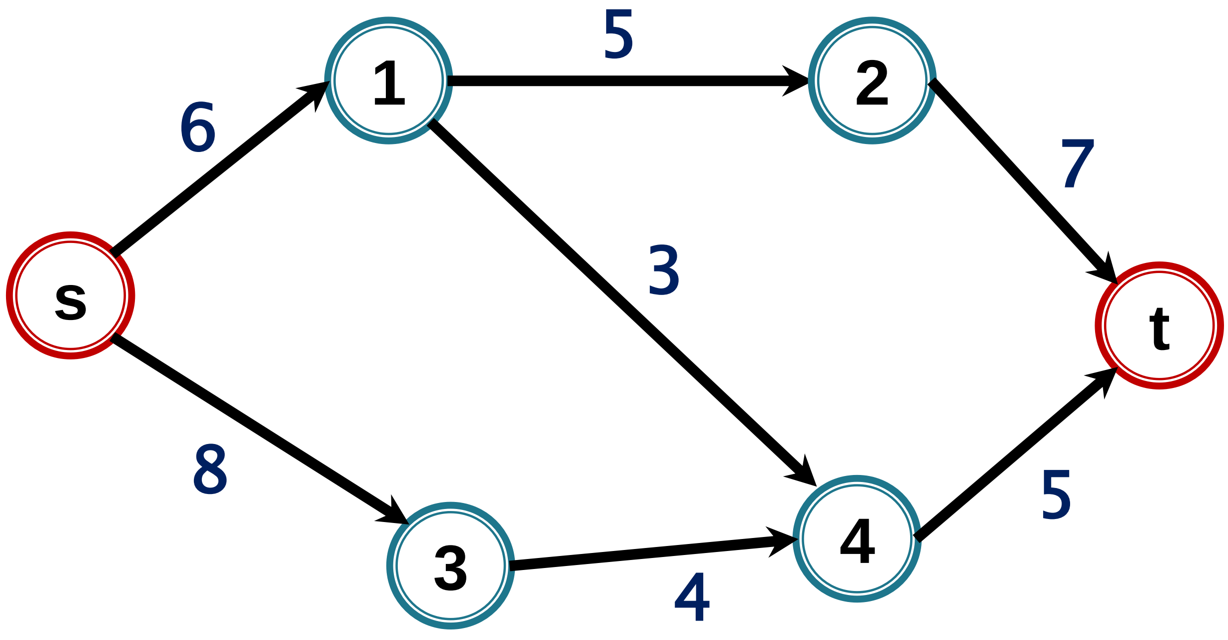

3/4
6/6
1
2
3/7
3/3
s
t
4/8
7/9
3
4
4/4

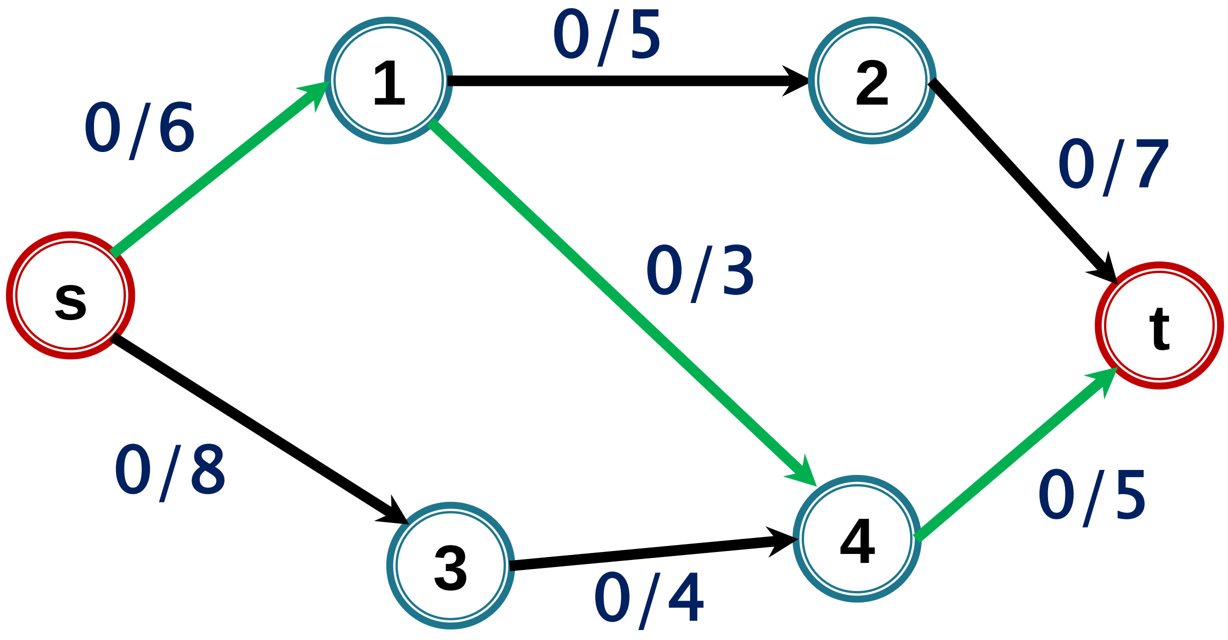


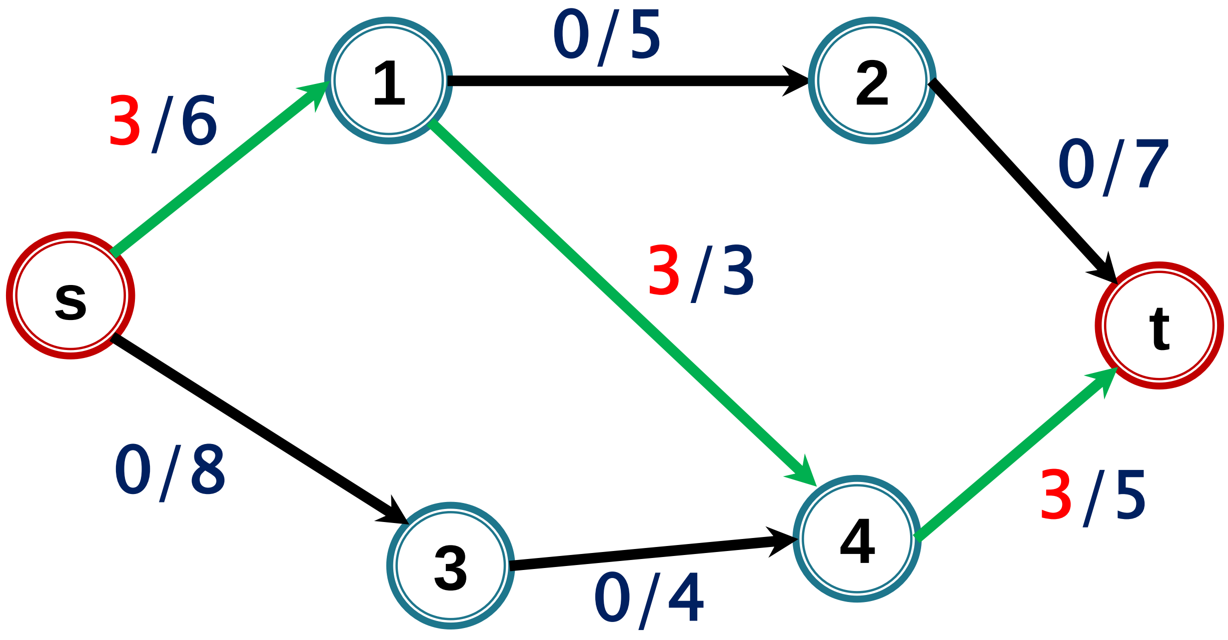
- singurele arce (“poduri “) care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au fluxul = capacitatea) $\Rightarrow$ fluxul este maxim

- s-t tăietură

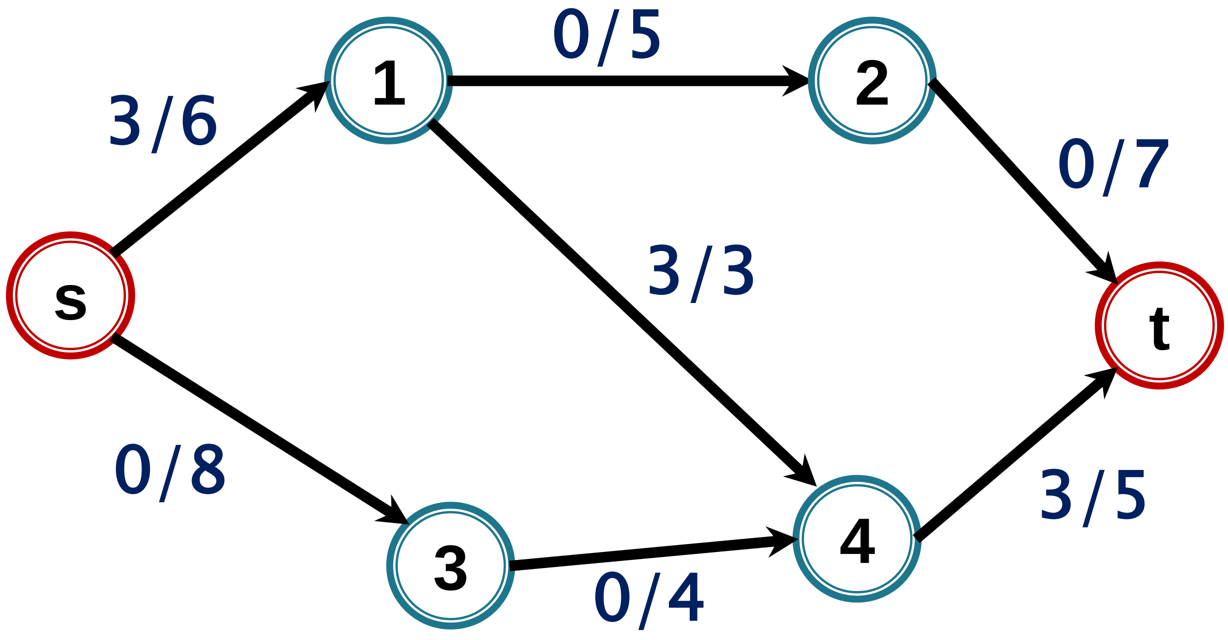
Alt exemplu

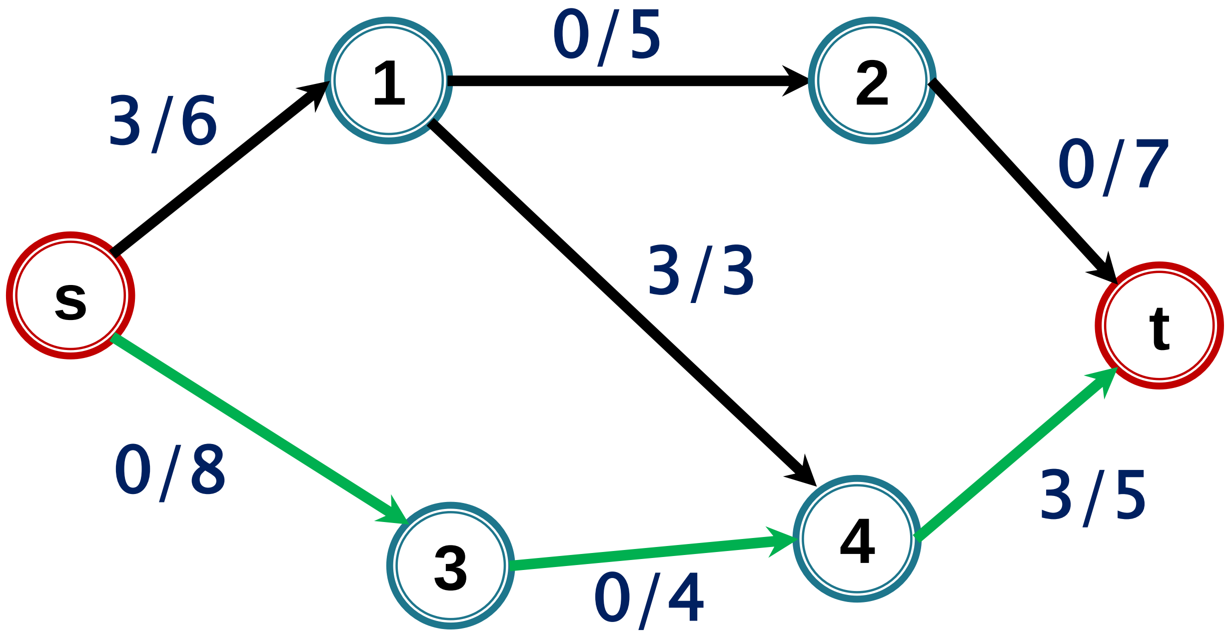

s
1
2
3
4
t
6
5
3
7
8
4
5


0/5
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/5
3
4
0/4

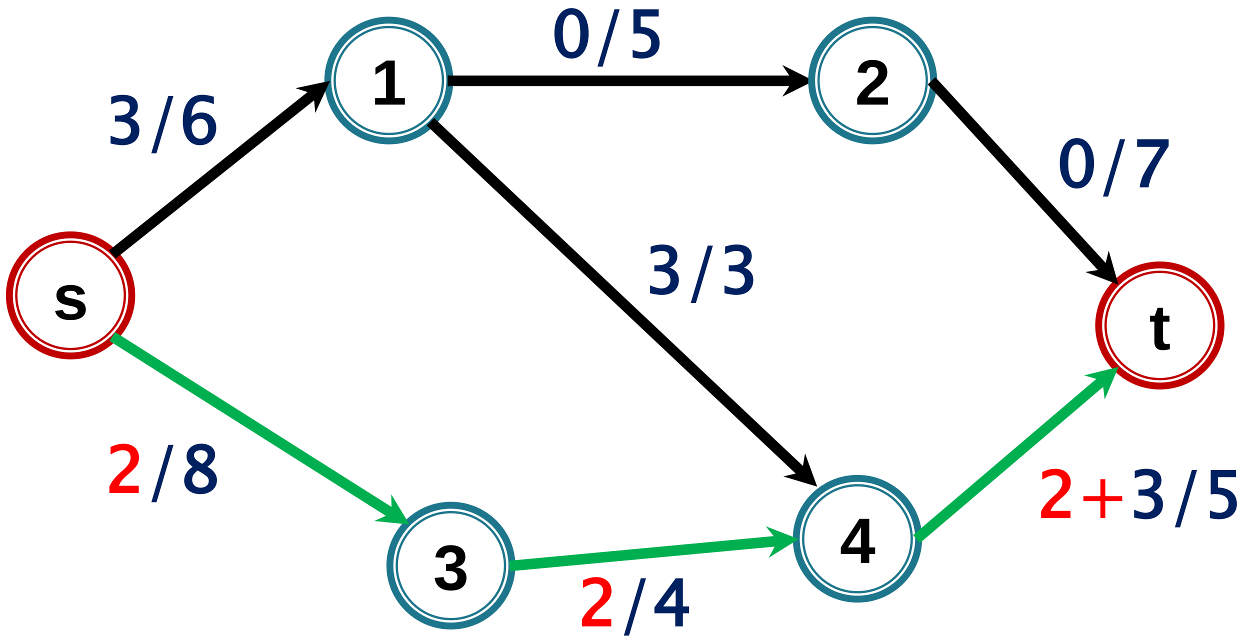


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5

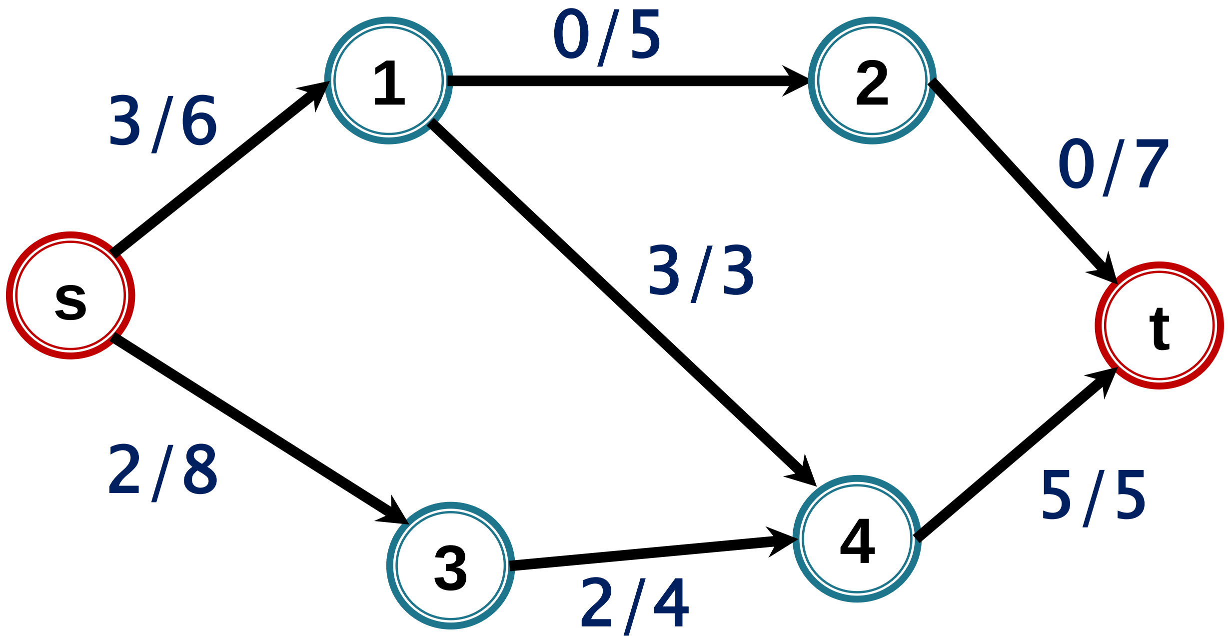

0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/5
4
3
0/4



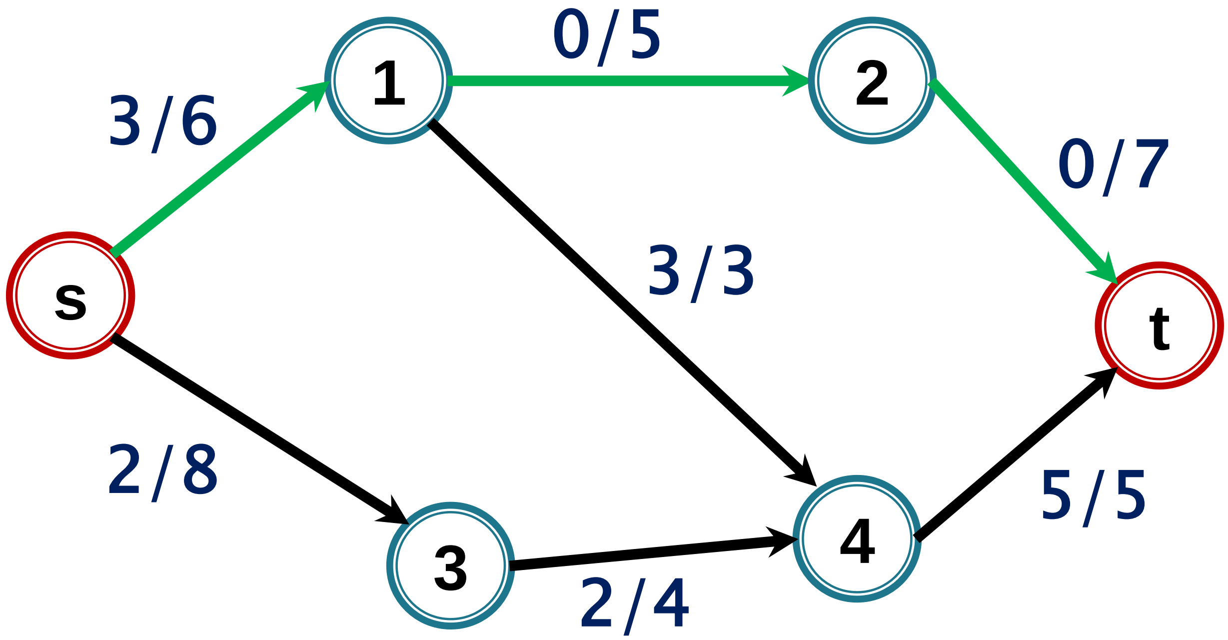
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
3/5
0/4
s
1
2
3
4
t



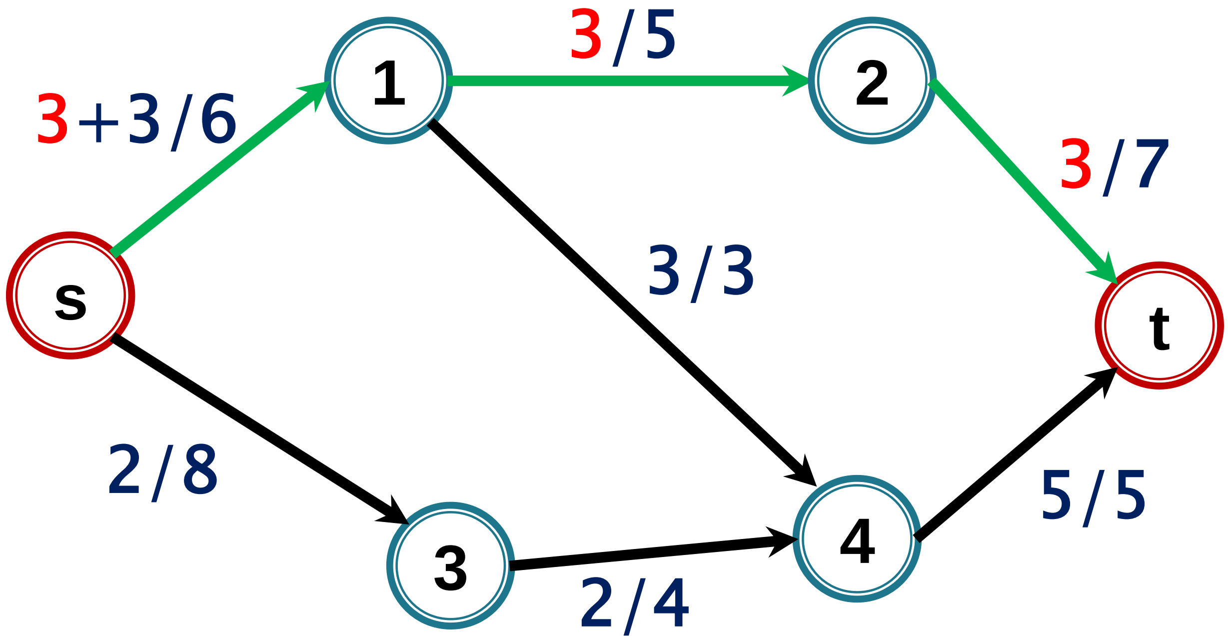
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2+3/5
2/4
s
1
2
3
4
t



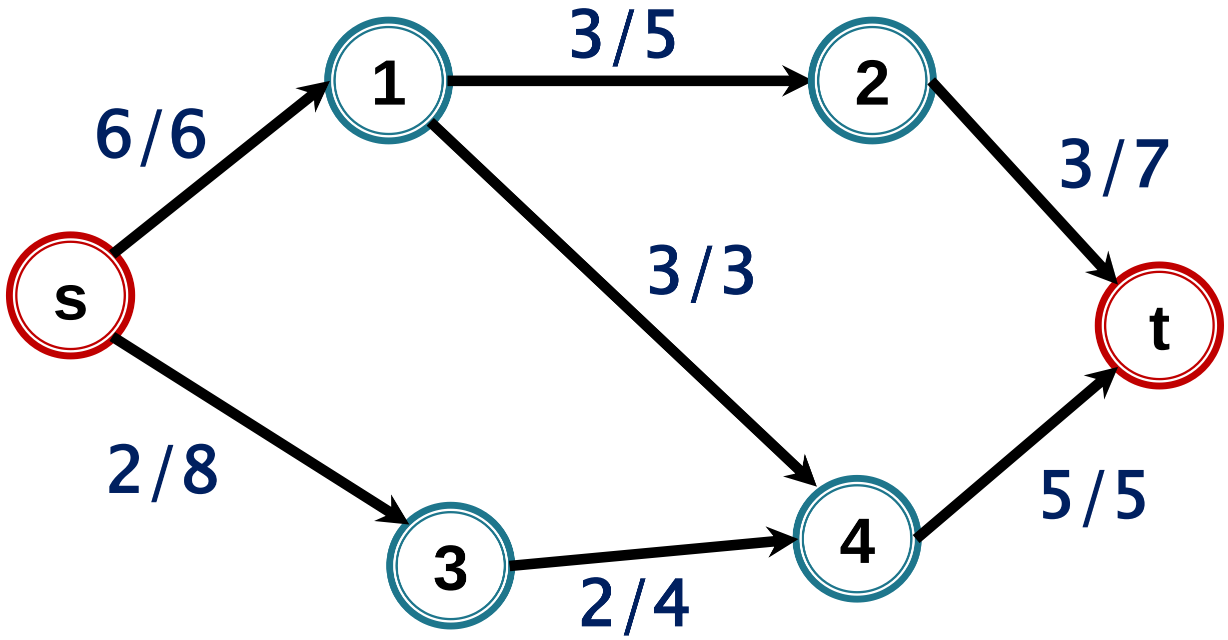
s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5



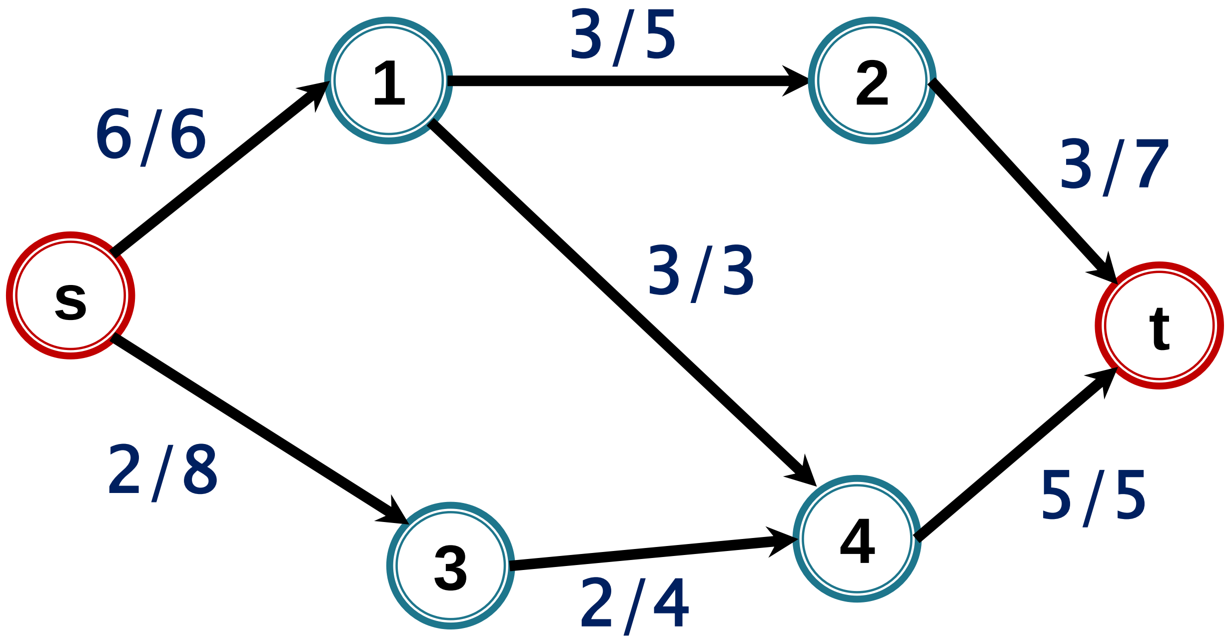
0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
2/8
5/5
3
4
2/4



3+3/6
1
3/5
2
3/7
s
3/3
t
2/8
4
5/5
3
2/4

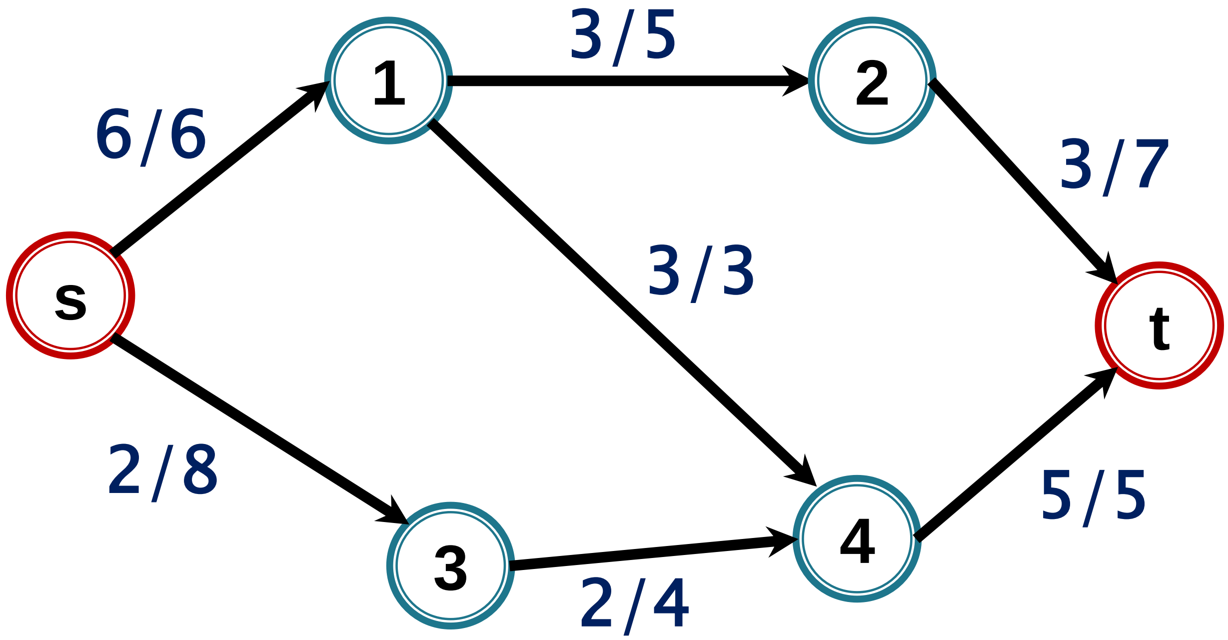


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4

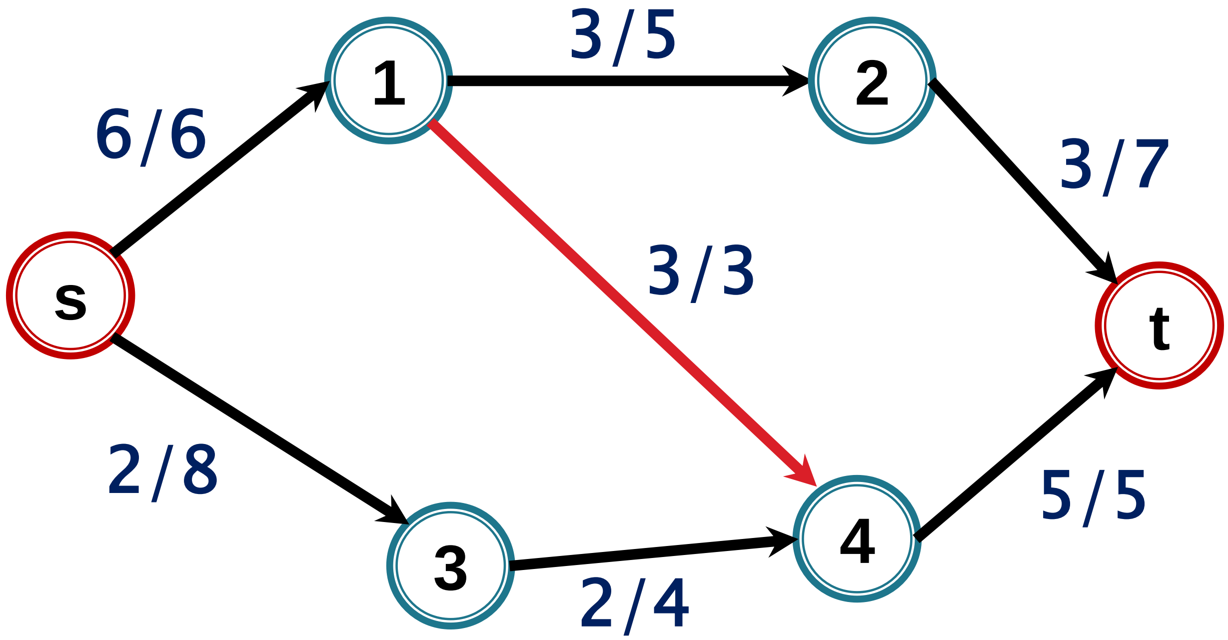


Nu mai există drumuri de la s la t pe care putem crește fluxul

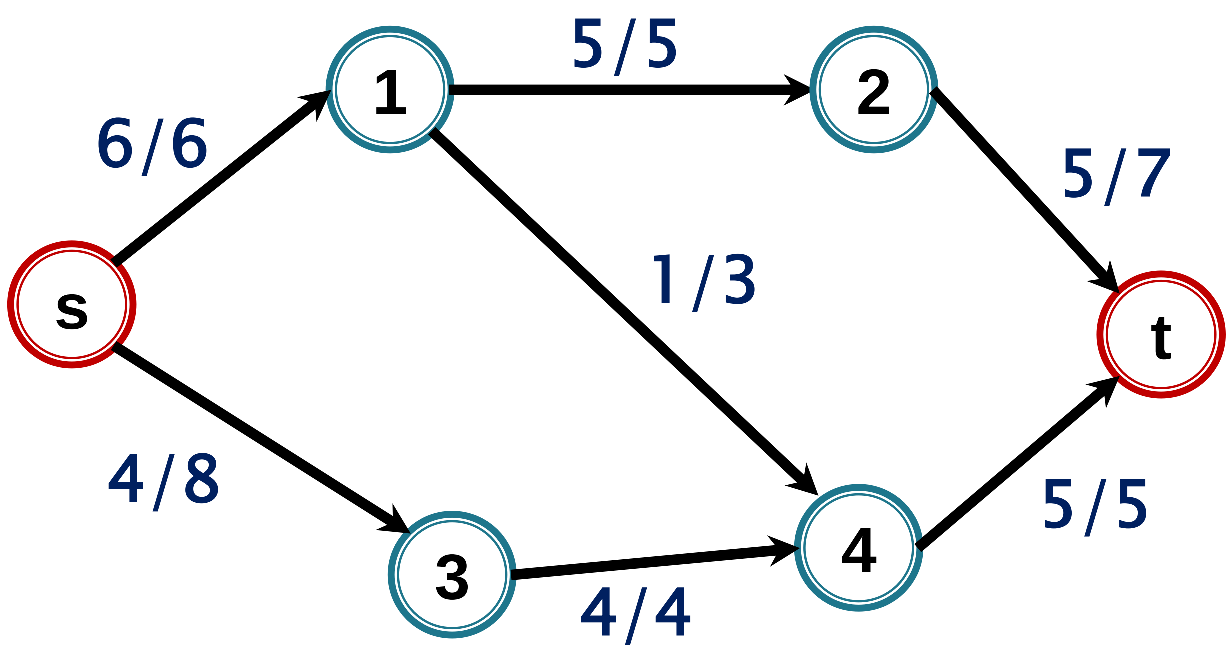
Este maxim fluxul?



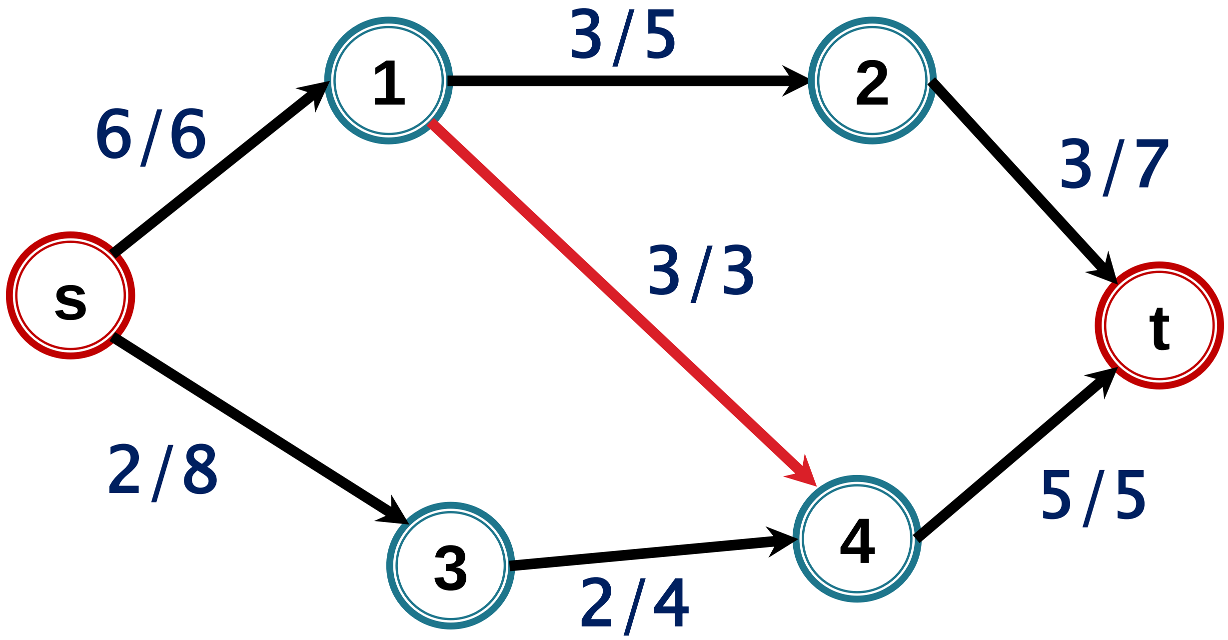
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greşit pe arcul (1,4) (pe drumul [s, 1, 4, t])



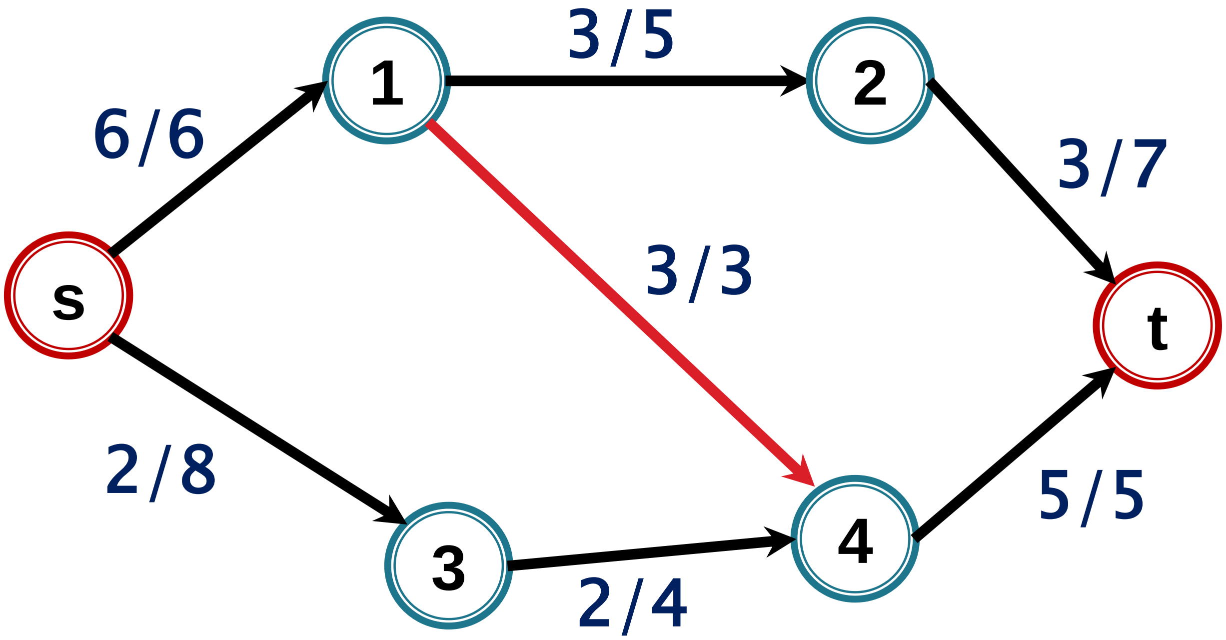
fluxul obținut

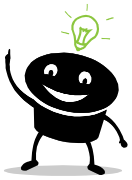


un flux "*mai mare*"

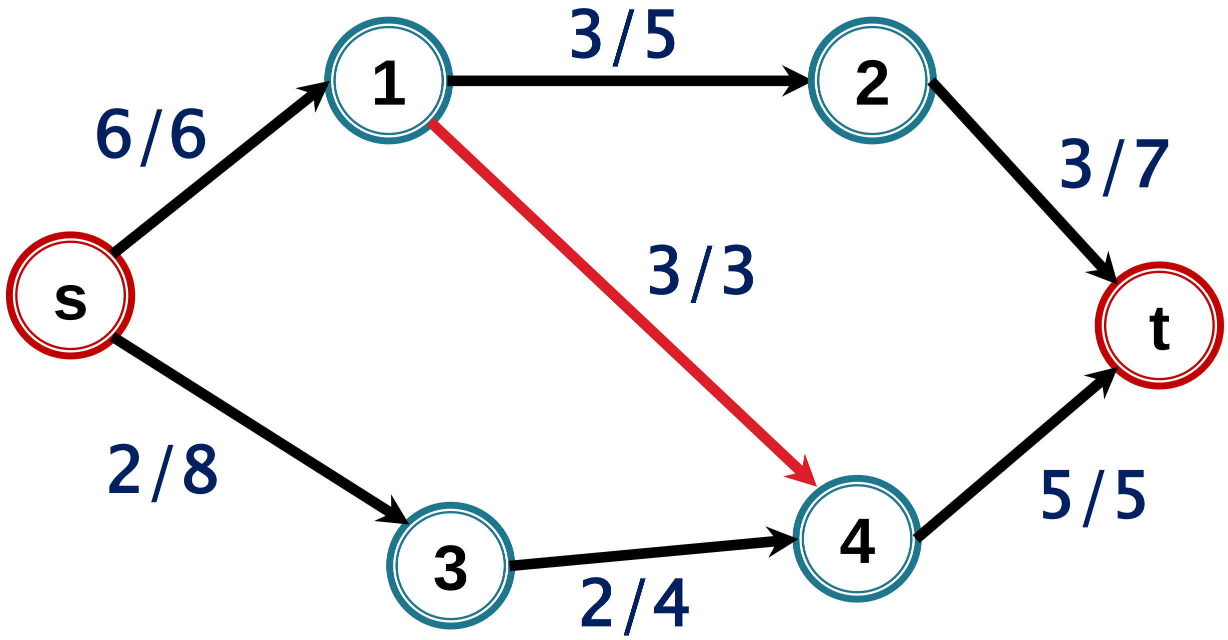


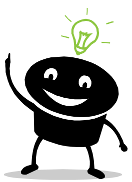
Trebuie să putem corecta (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcţionat prin alte arce către destinaţie)





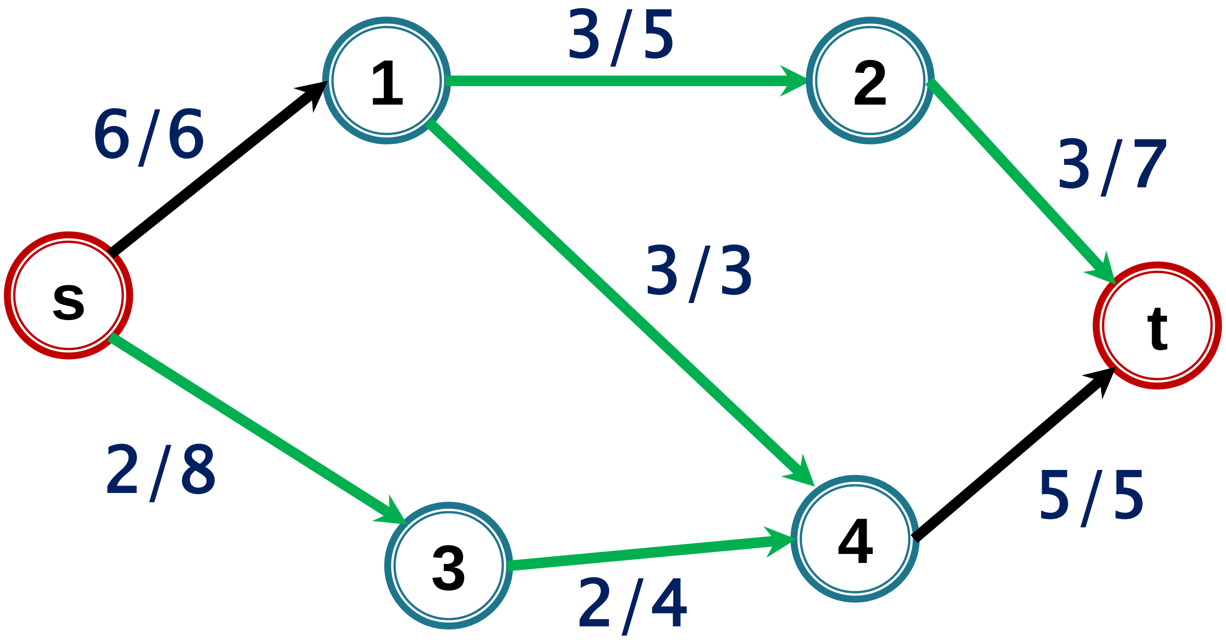
- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)



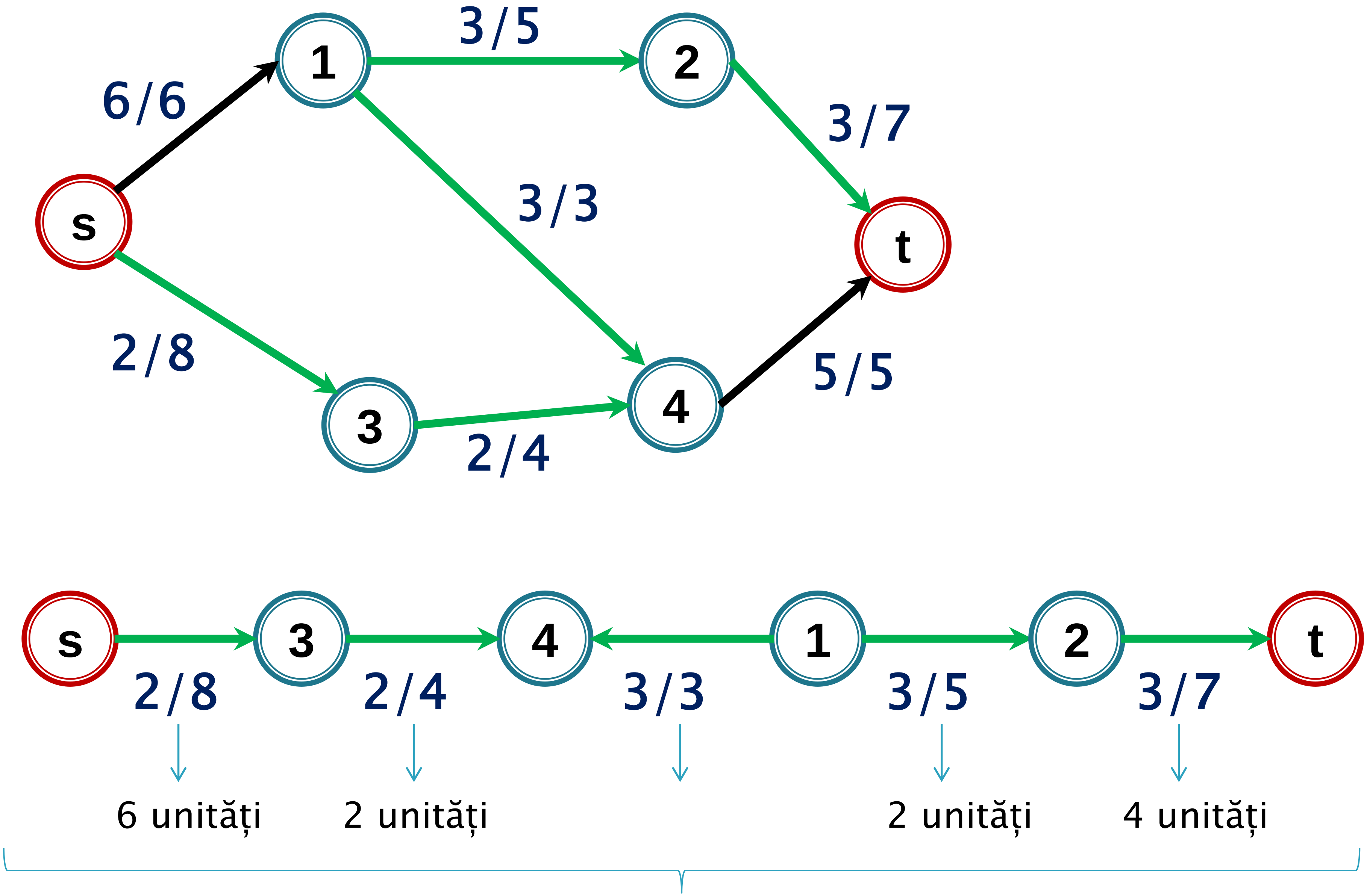


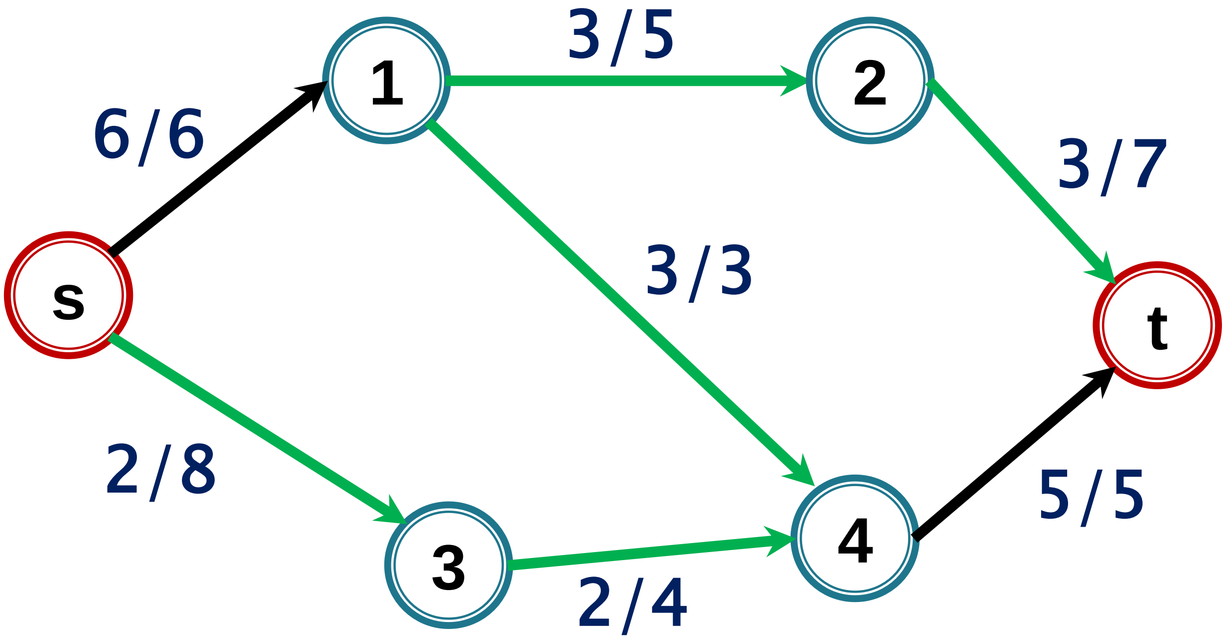
- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)
- Corecția trebuie făcută pe un lanț de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar

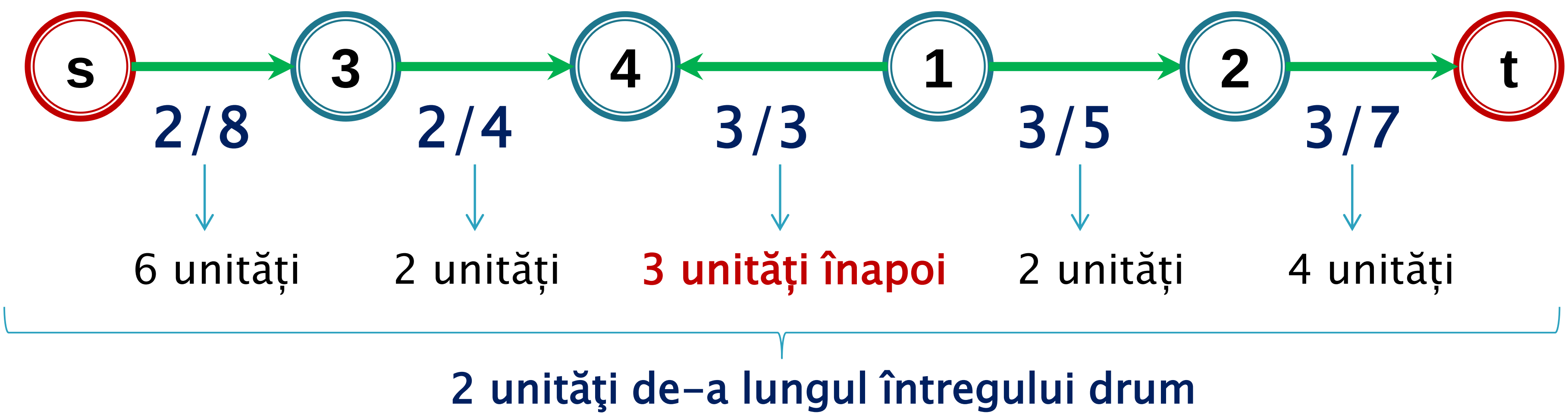
Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

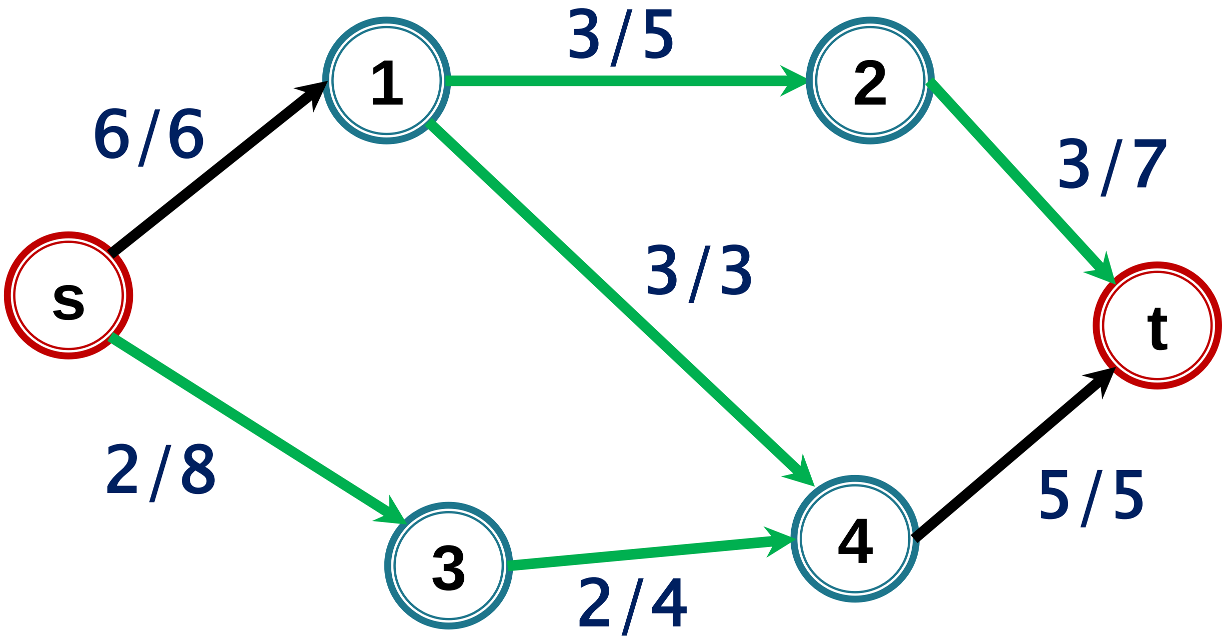


Cu cât putem modifica fluxul pe acest lanț?

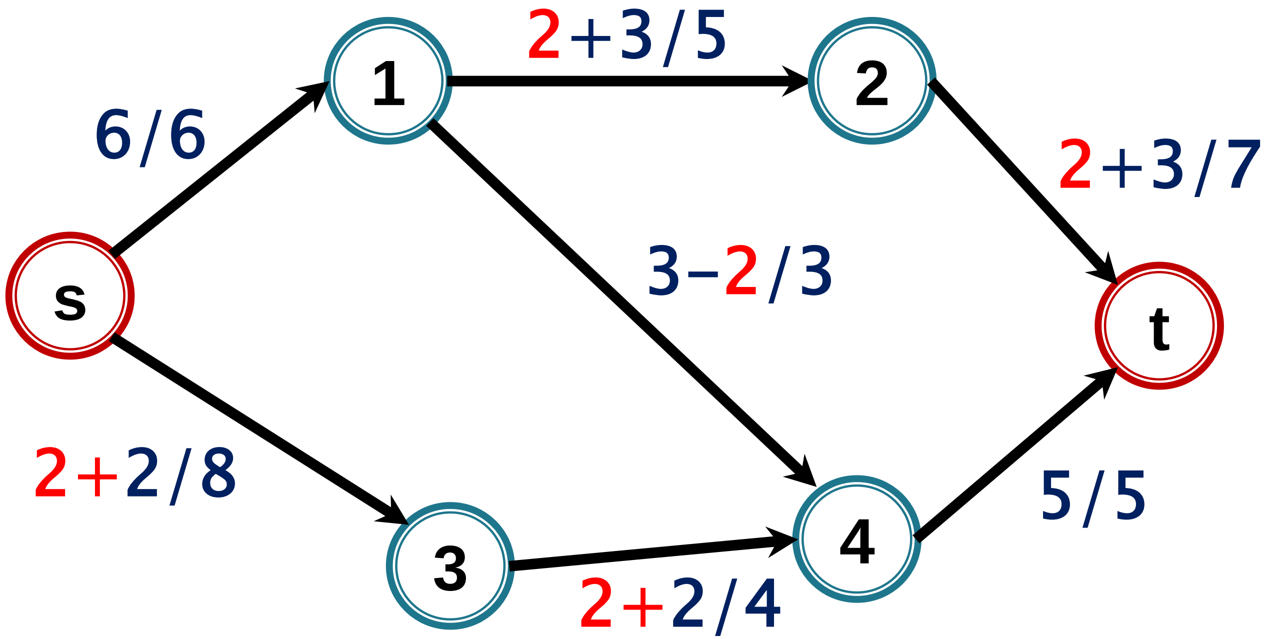

s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
2 unități
4 unități


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

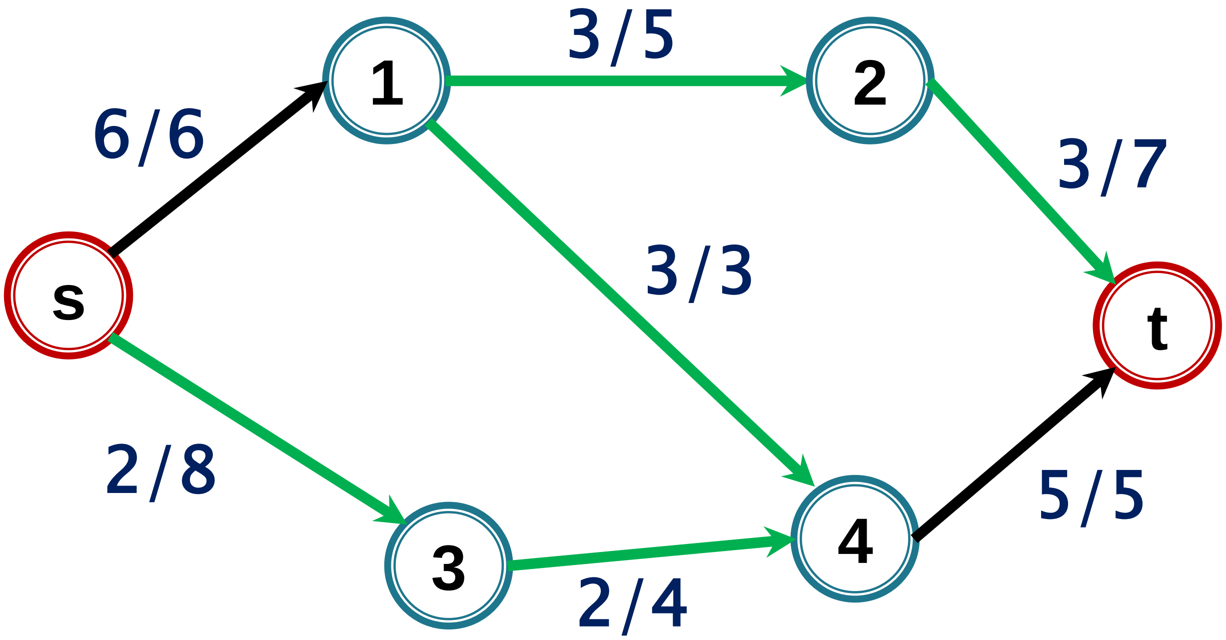

s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
3 unități înapoi
2 unități
4 unități
2 unităţi de-a lungul întregului drum



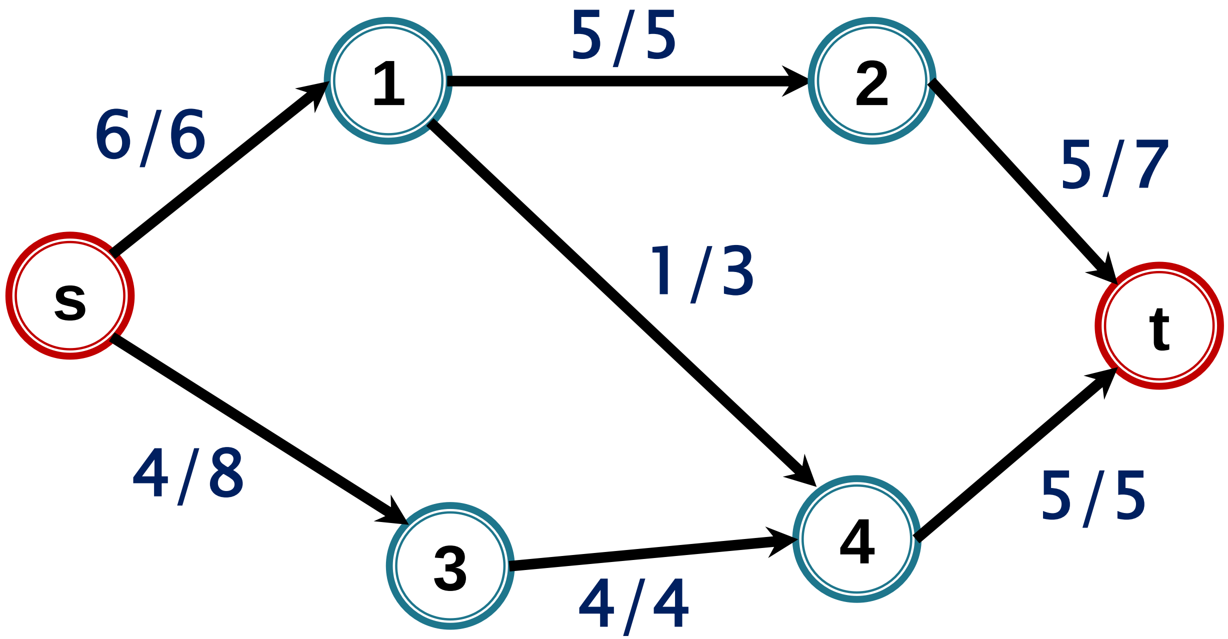
3/5
6/6
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4



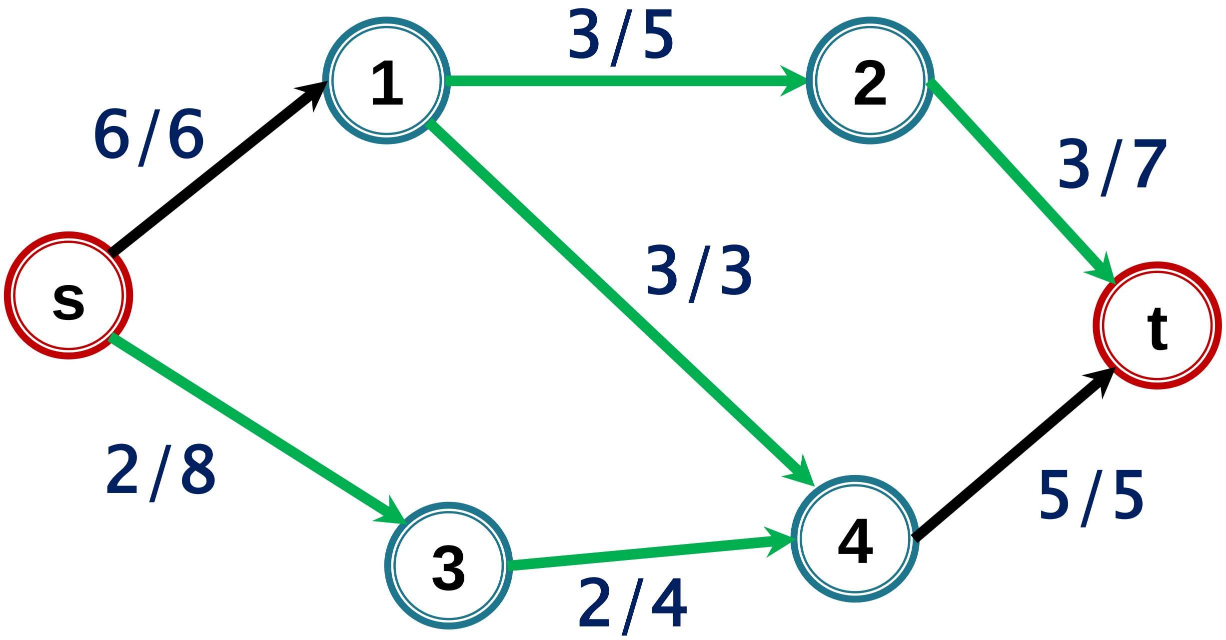
2+3/5
6/6
2+3/7
3−2/3
2+2/8
5/5
2+2/4



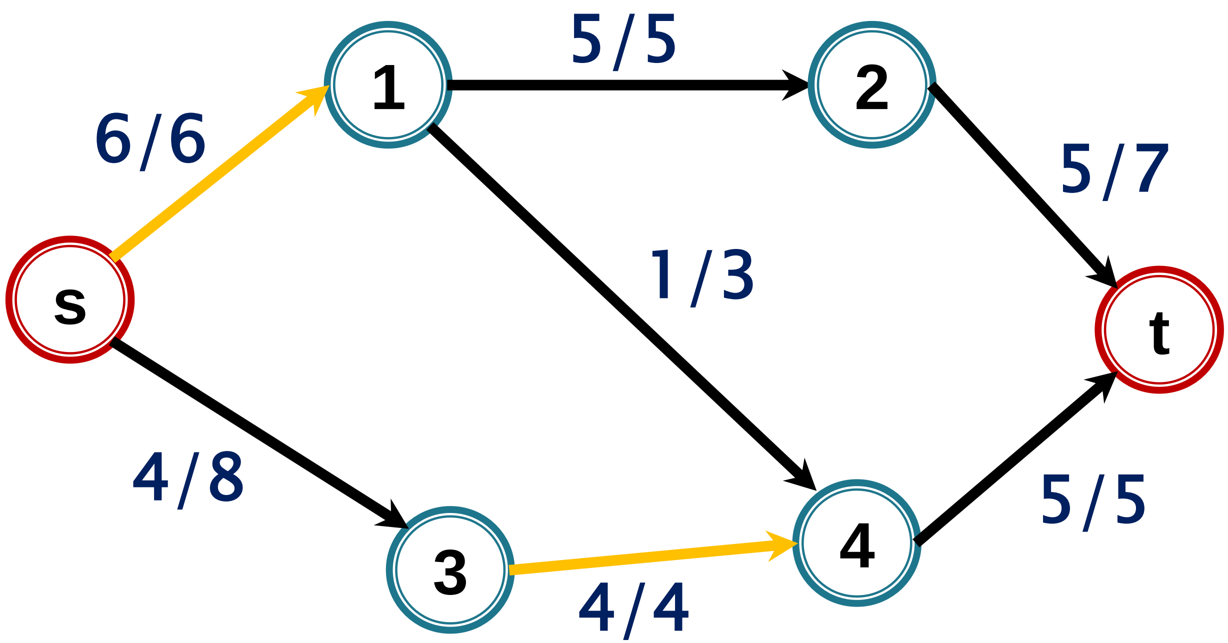
3/5
6/6
1
2
3/7
3/3
s
t
2/8
5/5
3
4
2/4



5/5
6/6
1
2
5/7
1/3
s
t
4/8
5/5
3
4
4/4



3/5
1
2
6/6
3/7
3/3
s
t
2/8
4
5/5
3
2/4



5/5
1
2
6/6
5/7
1/3
s
t
4/8
4
5/5
3
4/4

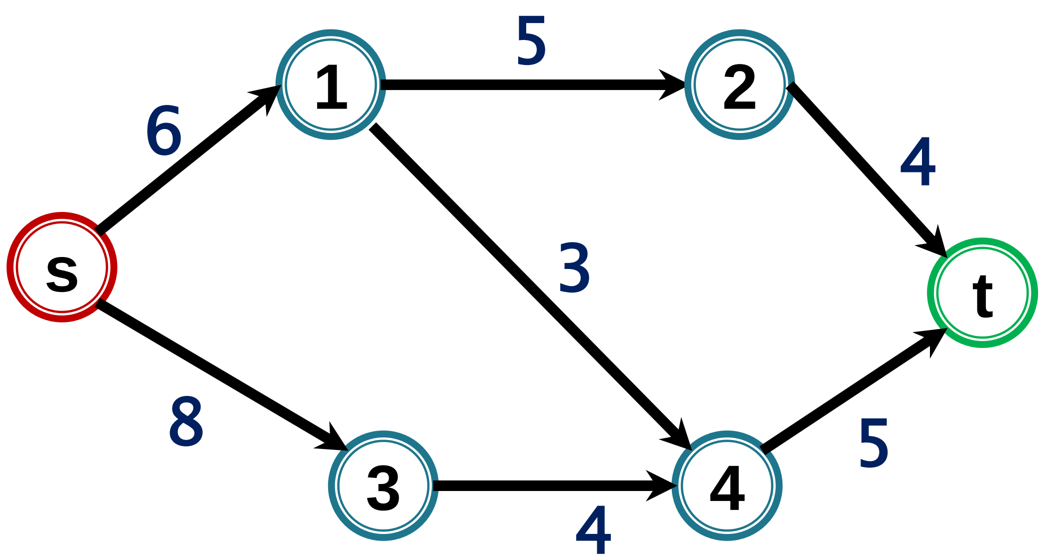
Definiţii

Fluxuri în rețele de transport

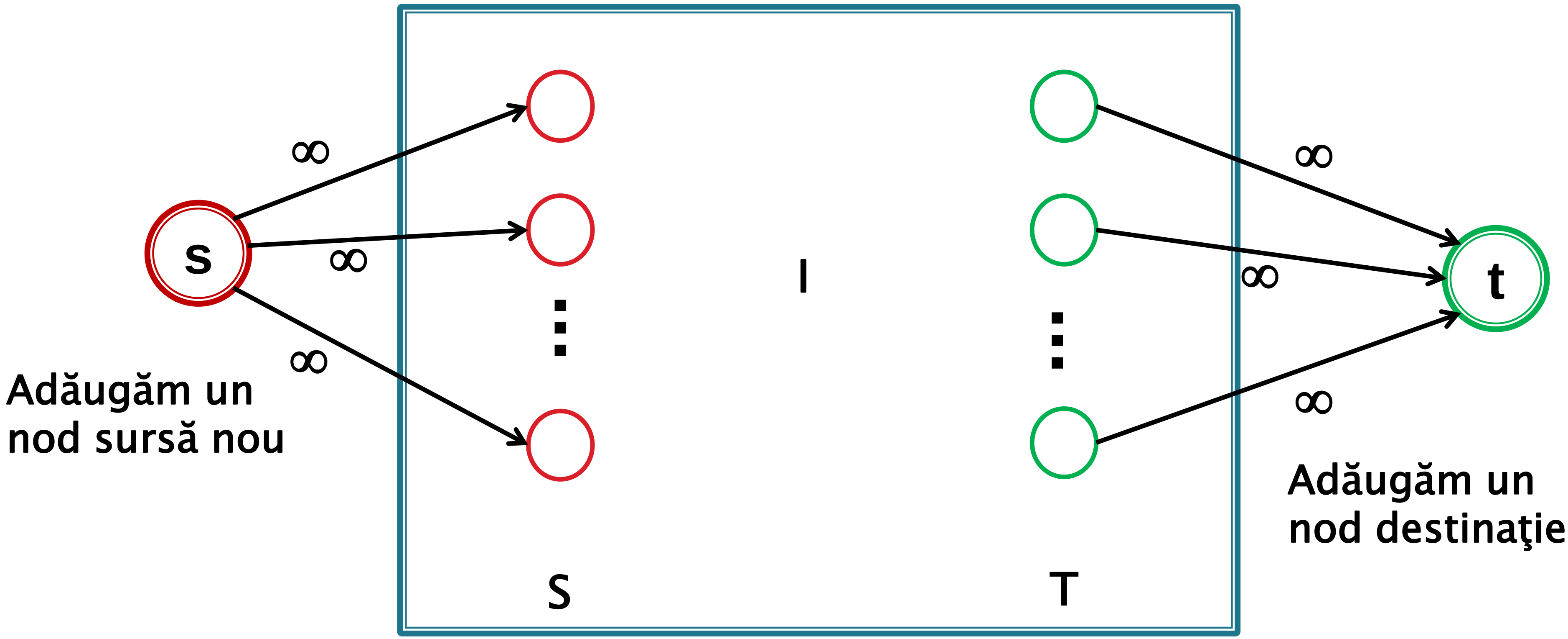
- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
      - S, I , T disjuncte, nevide
      - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
      - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
      - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**
  - $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ funcţia **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^{-}(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^{+}(t) = 0$ – din destinație nu ies arce



- **Ipotezele nu sunt restrictive,** orice reţea poate fi transformată într-o reţea echivalentă de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



Reţeaua N

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce
- orice vârf este accesibil din s
- Notăm $N = (G, s, t, l, c)$

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

- Un **flux** într-o reţea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcţie $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

    1) $0 \le f(e) \le c(e),\ \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie f : E → ℕ cu proprietăţile

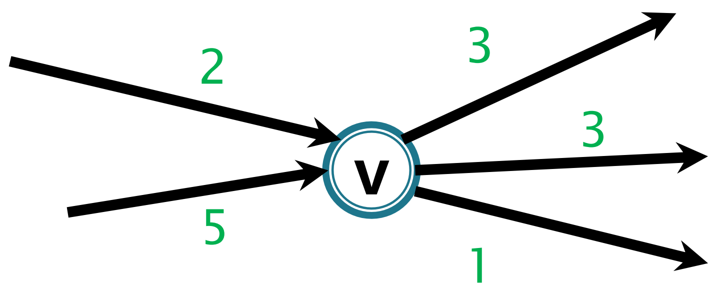
  1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

  2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

  $$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

  *condiţia de **conservare a fluxului***

  (fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)



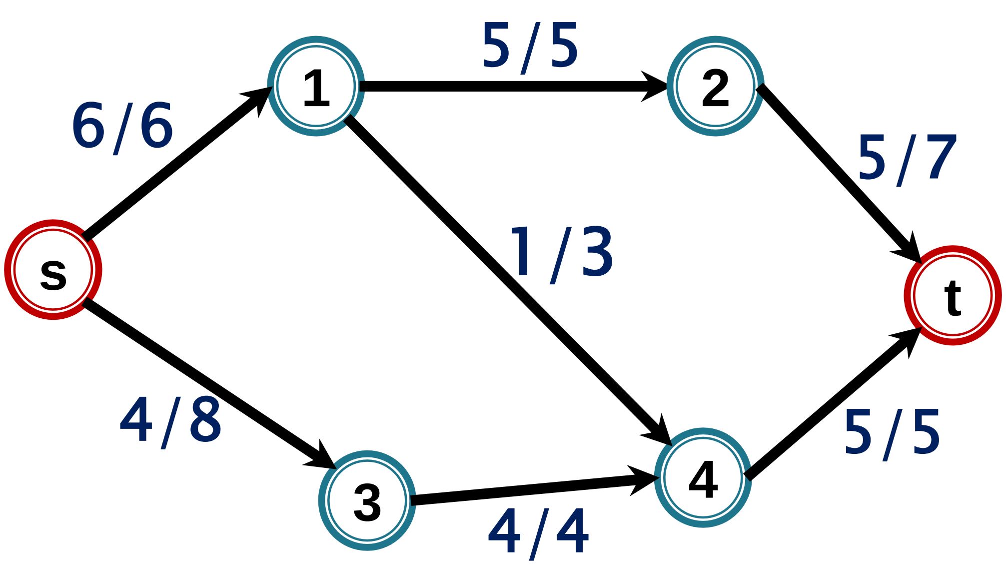
Notații

$\overline{X} = V - X$, pentru $X \subseteq V$

Notații

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E} f(vu) \quad = \text{fluxul care iese din v}$$

$$f^-(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) \quad = \text{fluxul care intră în v}$$

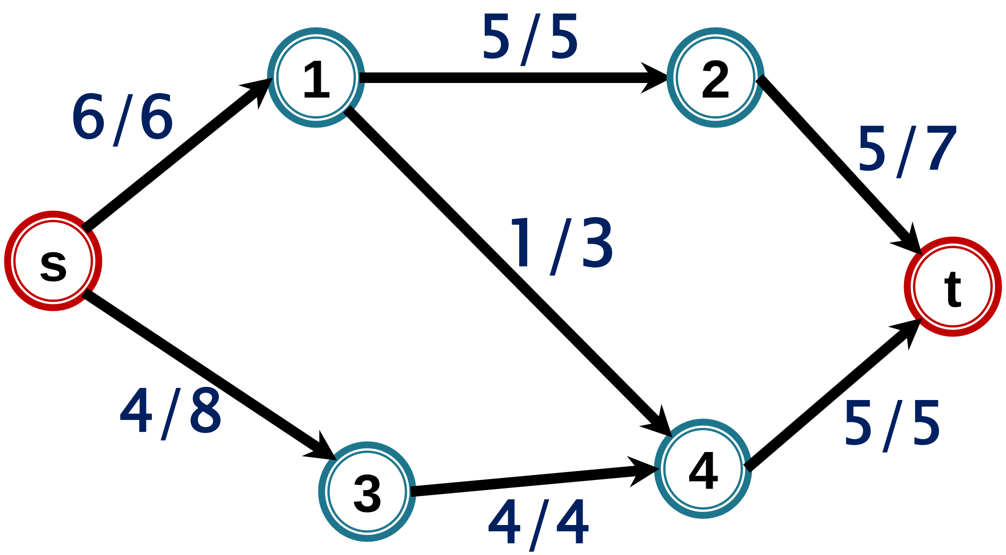


$$f^+(4) = f^-(4) = ?$$

Notații

$$f^{+}(v) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^{-}(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$ = fluxul care intră în v



$$f^{+}(4) = f^{-}(4) = 5$$

Notații

$$f^{+}(v) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^{-}(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$ = fluxul care intră în v

- Condiţia de **conservare a fluxului** devine:

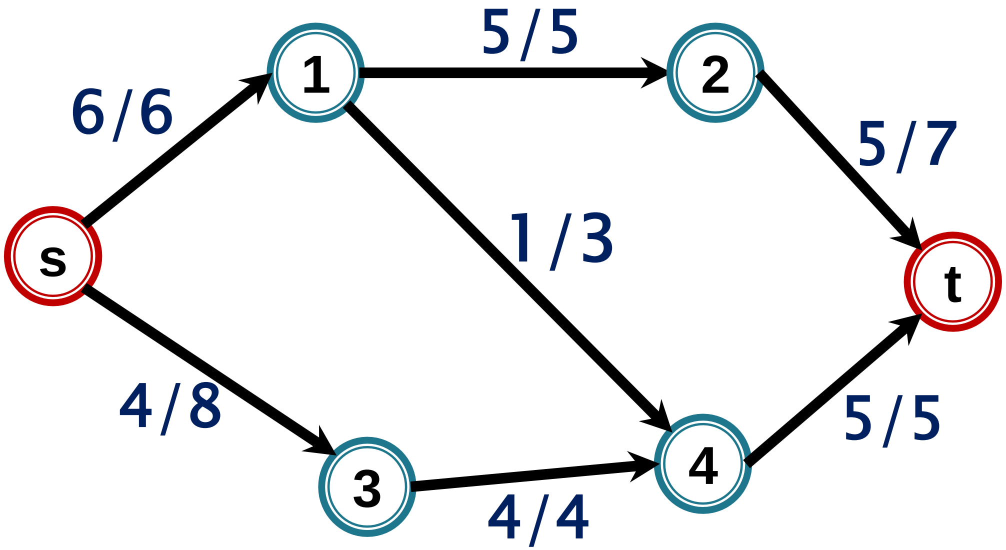
$$f^{-}(v) = f^{+}(v), \forall v \in I$$

Notații

- Pentru X, Y $\subseteq$ V

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \in Y}} f(uv) = \text{fluxul de la X la Y}$$

(pe arcele care ies din X către Y)



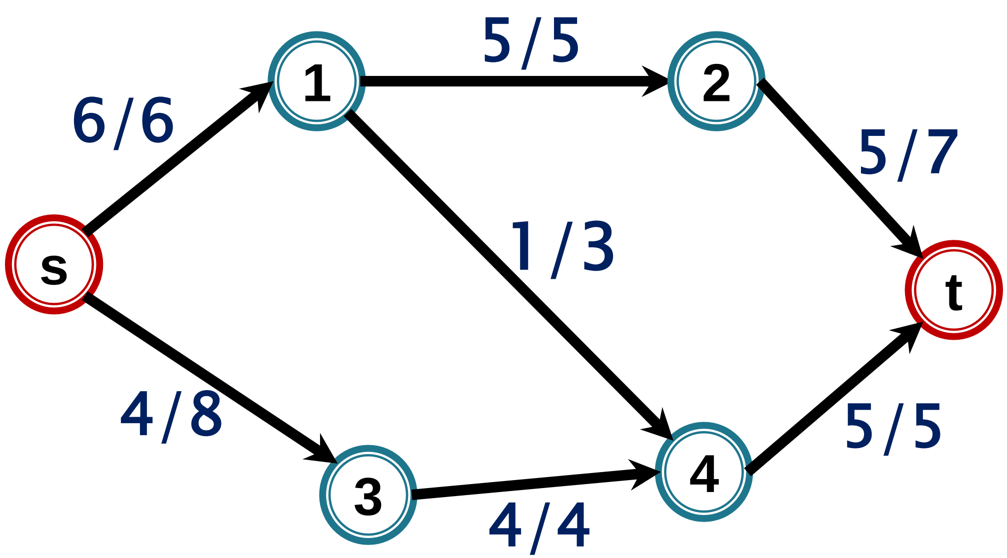
$$f(\{s,1,3\},\{2,4,t\}) = ?$$

Notații

- Pentru X, Y $\subseteq$ V

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \in Y}} f(uv)$$ = fluxul de la X la Y

(pe arcele care ies din X către Y)



$$f(\{s,1,3\},\{2,4,t\}) =$$

= f(1,2) + f(1,4) + f(3,4)=

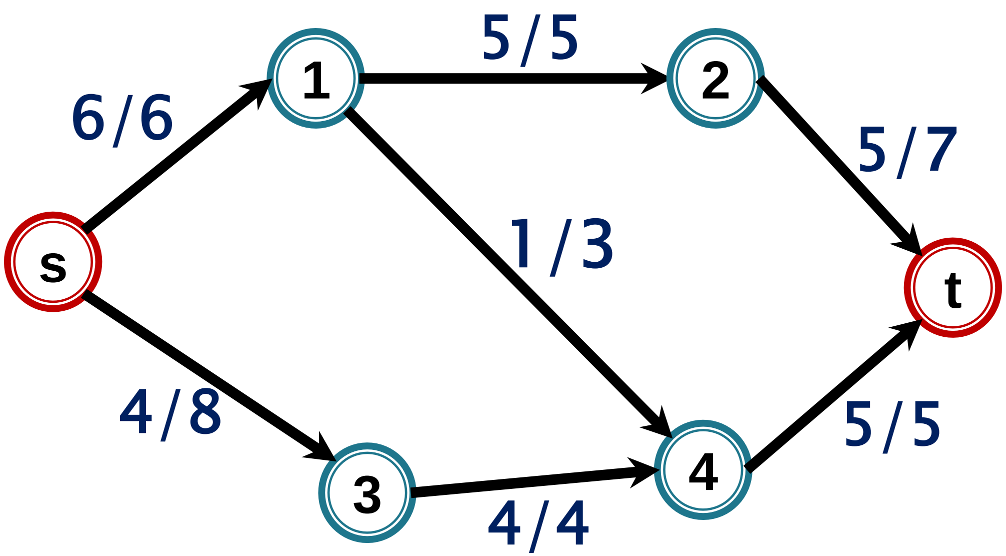
= 10

Notații

- Pentru X $\subseteq$ V

$$f^+(X) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(uv)$$ = fluxul care iese din X (din vârfurile din X)

$$f^-(X) = \sum_{\substack{vu \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(vu)$$



$$f^+(\{s, 1, 3\}) = ?$$

Notații

- Pentru X $\subseteq$ V

$$f^{+}(X)=\sum_{\substack{uv\in E\\ u\in X,v\notin X}} f(uv)$$ = fluxul care iese din X

(din vârfurile din X)

$$f^{-}(X)=\sum_{\substack{vu\in E\\ u\in X,v\notin X}} f(vu)$$

Avem

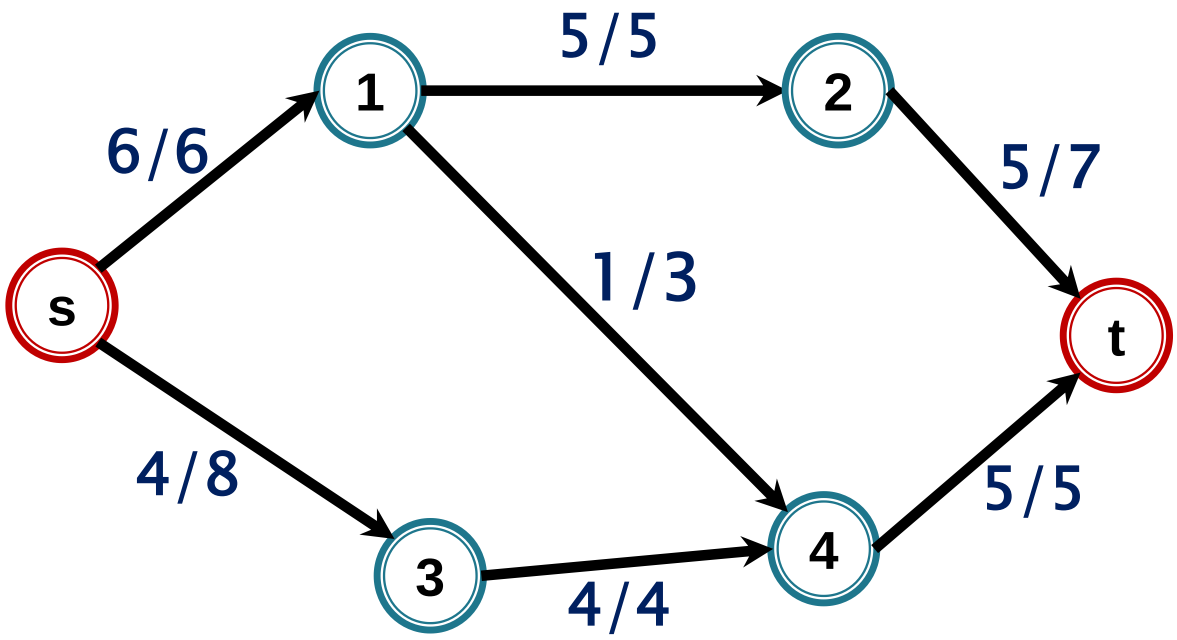
$$f^{+}(X)=f(X,V-X)=f(X,\overline{X})$$

$$f^{-}(X)=f(\overline{X},X)$$

- În general, pentru orice funcție $g : E \rightarrow \mathbb{N}$ **vom folosi notaţii similare**

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = ?

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s)$$

- Vom demonstra ulterior că are loc relaţia

$$val(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

- **Observaţie**: Orice reţea admite cel puţin un flux, spre exemplu fluxul vid:

  $f(e) = 0, \forall e \in E$

Problema fluxului maxim (MAX-FLOW)

- Fie N o reţea.

  Să se determine f* un **flux maxim în N**

Problema fluxului maxim (MAX-FLOW)

- Fie N o reţea.

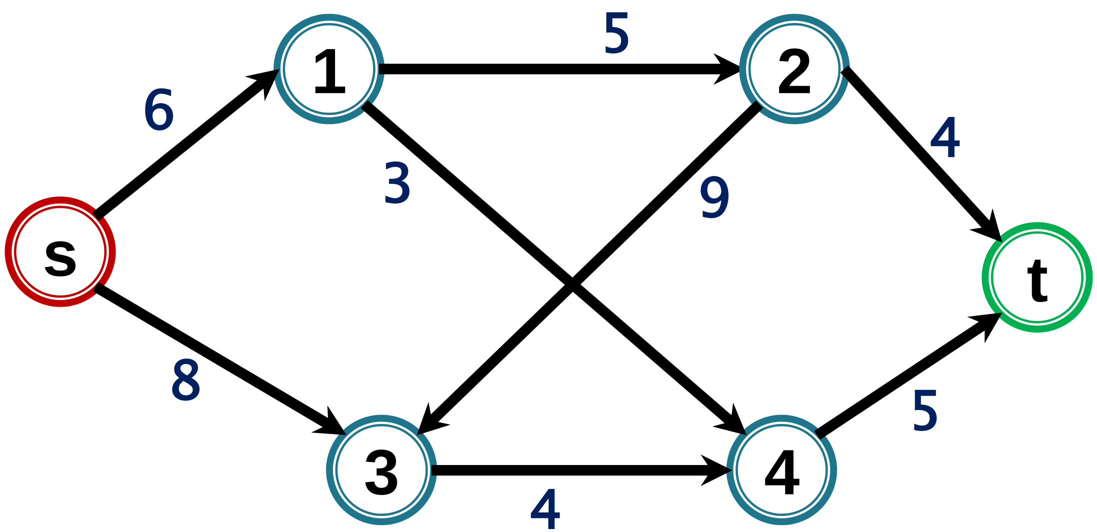
  Să se determine f* un **flux maxim în N**

Problemă întrudită – MIN-CUT (tăietură minimă)

Tăietură minimă

- Arce = poduri, capacitate = costul dărâmării podului.

Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?

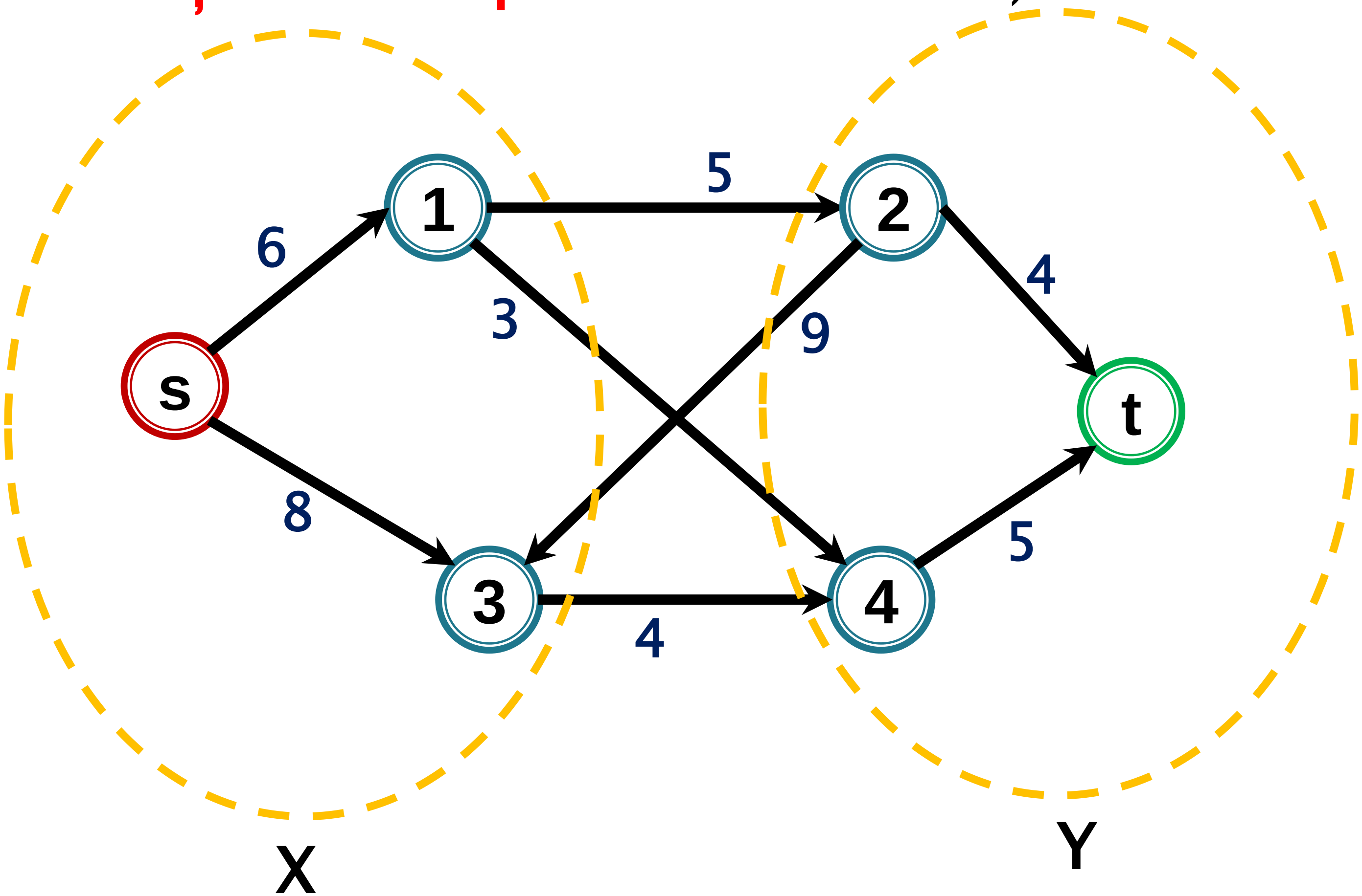


Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o reţea

- O s-t **tăietură** K= (X, Y) în reţea este o (bi)partiţie

(X, Y) a mulţimii vârfurilor V astfel încât s ∈ X şi t ∈ Y

(!**!!este o noțiune independentă de flux**)



Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea

- O s-t **tăietură** K= (X, Y) în reţea este o (bi)partiţie

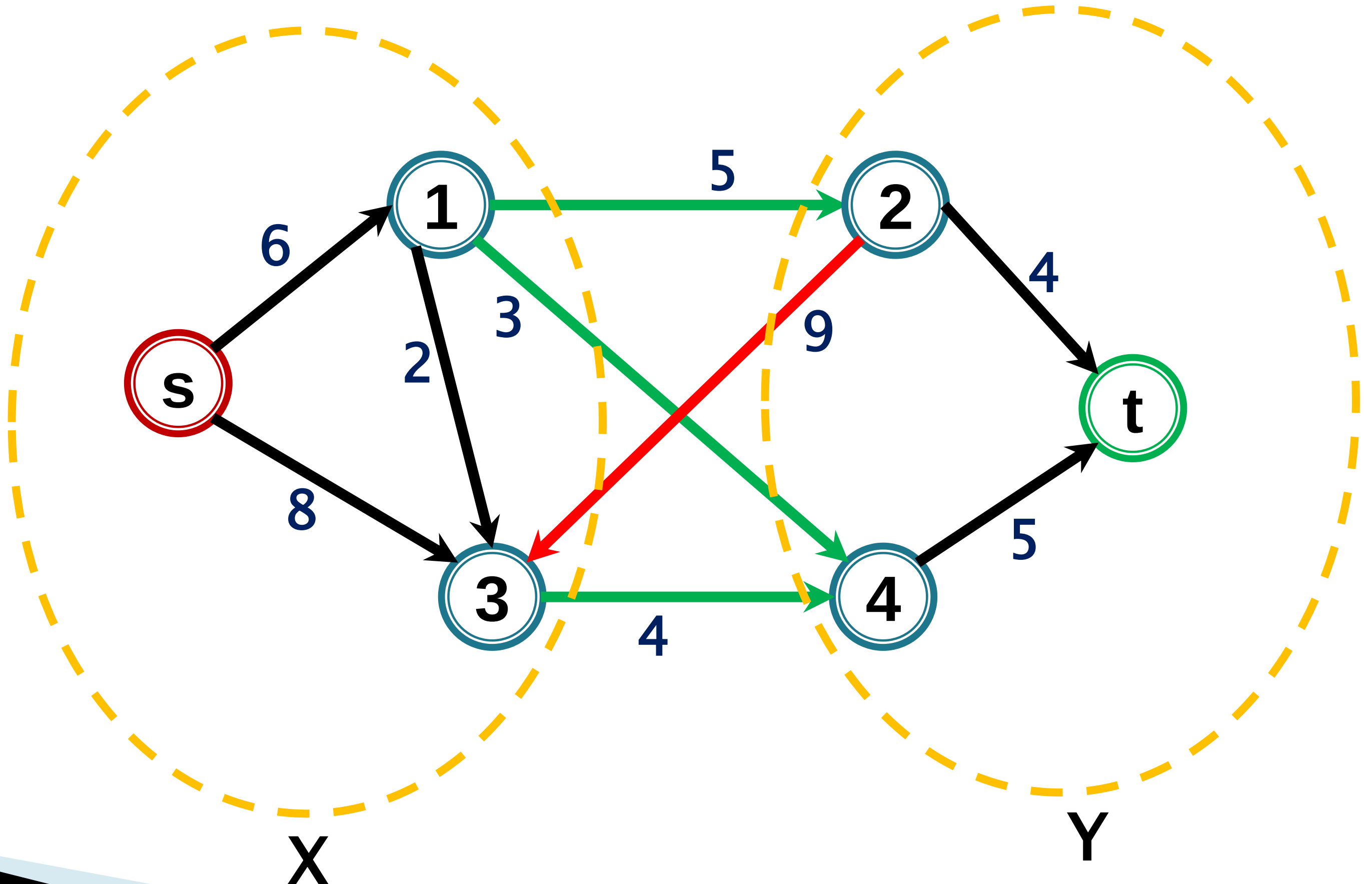
(X, Y) a mulţimii vârfurilor V astfel încât s $\in$ X şi t $\in$ Y

(!**!!este o noțiune independentă de flux**)

În cele ce urmează vom numi o s-t tăietură doar tăiteură

Fie K= (X, Y) o tăietură

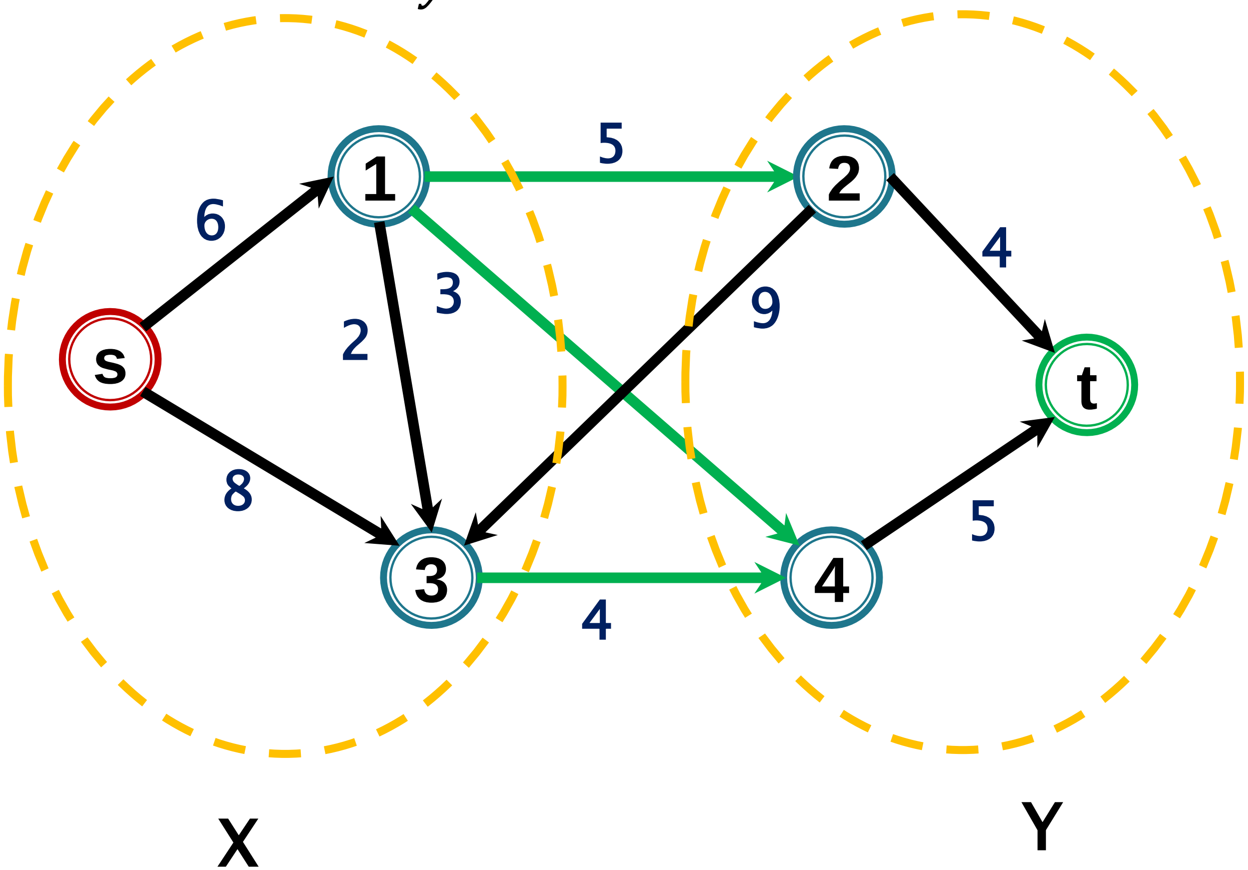
- xy ∈ E cu x∈X, y∈Y = **arc direct** al lui K
- yx ∈ E cu x∈X, y∈Y = **arc invers** al lui K



Fie K= (X, Y) o tăietură

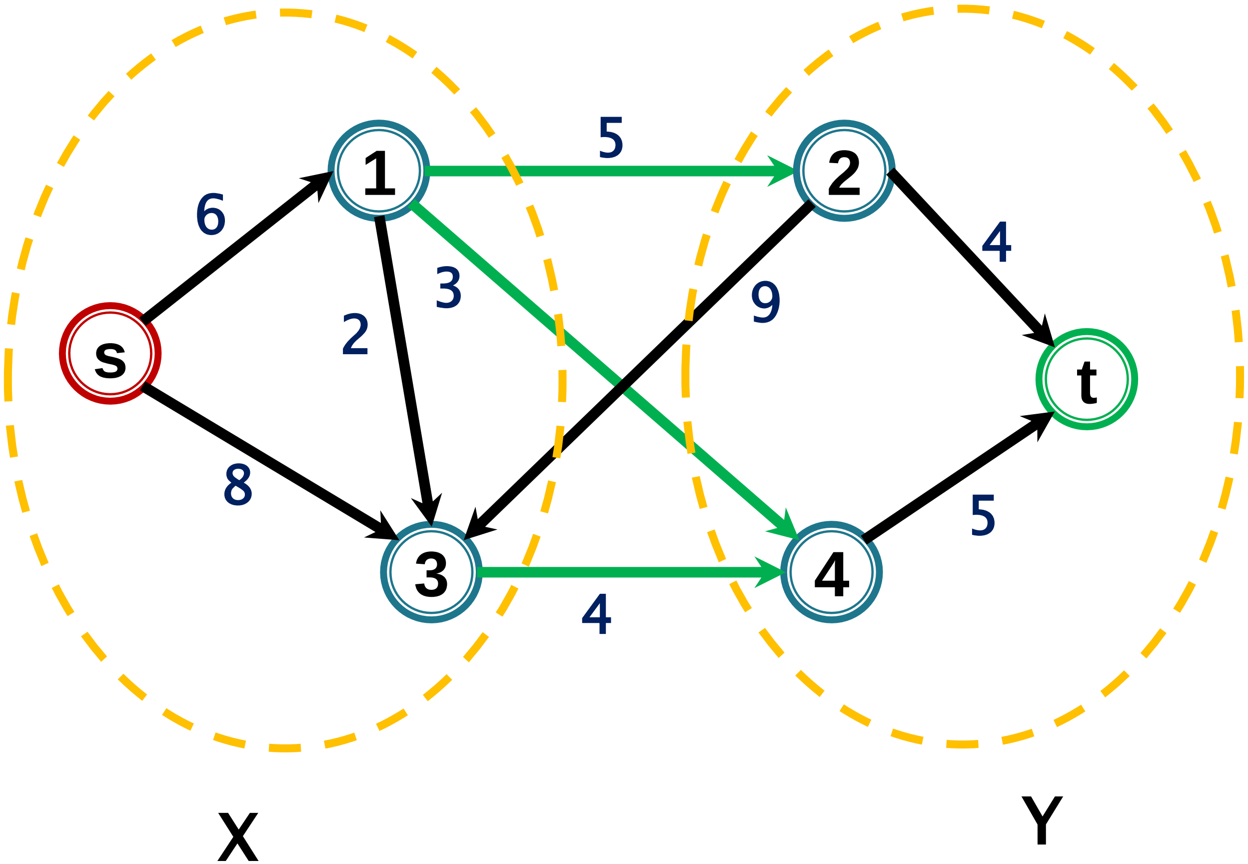
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y):

$$c(K) = c(X,Y) = \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ xy \in E}} c(xy)$$ = suma capacităților **arcelor** **directe**



Fie K= (X, Y) o tăietură

- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



nu și c(2,3)

$$c\left(\{s,1,3\},\ \{2,4,t\}\right) = c(1,2) + c(1,4) + c(3,4) =$$

$$= 5 + 3 + 4 = 12$$

Tăietură minimă

- Fie N o reţea.

O (s-t) tăietură $\widetilde{K}$ se numeşte **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\tilde{K}) = \min\{c(K) \mid K \text{ este tăietură în N}\}$$

Problema tăieturii minime (MIN-CUT)

- Fie N o reţea.

  Să se determine K un **o tăietură minimă în N**

Tăietură minimă

- Vom demonstra că pentru orice flux f și orice tăietură K

$$val(f) \le c(K)$$

- Dacă avem **egalitate** $\Rightarrow$ f flux maxim, K tăietură minimă

Determinarea unui flux maxim $\Rightarrow$ determinarea unei tăieturi minime