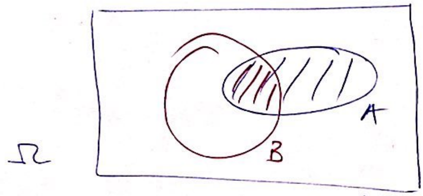
Probabilități și statistică
Curs 5 – 01.11.2021

Probabilitățile condiționale sunt probabilități

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate, $A \in \mathcal{F}$ și $\mathbb{P}(A) > 0$. Atunci $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot / A)$, $Q : \mathcal{F} \to [0,1]$ este o măsură de probabilitate



Pt $B \in \mathcal{F}$
$$Q(B) = \mathbb{P}(B/A) \in [0,1]$$

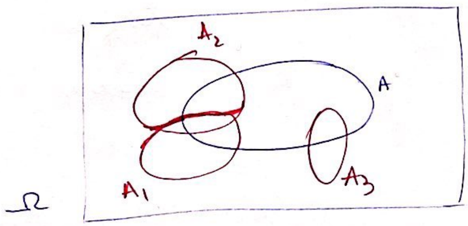
$$Q(A) = \mathbb{P}(A/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$$

eveniment sigur.

$$Q(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset / A) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$

Fie $A_1, A_2, \dots,$ un șir de evenimente din $\mathcal{F}$ disjuncte două câte două $(A_i \cap A_j = \emptyset)$

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i / A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)}$$



$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)$$

$(A_i)_{i \geq 1}$ disjuncte 2 câte 2

$\Downarrow$

$(A_i \cap A)_{i \geq 1}$ disjuncte 2 câte 2

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Astfel, Q e o măsură de probab. pe A.

Exp: Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ și $A, B, C \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$ și $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$.

Atunci $\mathbb{P}(A \mid B, C) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \cdot \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$

$\hookrightarrow B \cap C$ - probab lui A știind că B și C s-au realizat

Definim

$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$ atunci din formula lui Bayes

$$Q(A \mid B) = \frac{Q(B \mid A) \cdot Q(A)}{Q(A)}$$

dar $Q(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B, C)$

Exp: Să presupunem că o pers are în buzunar 2 monede, una echilibrată (șansă 1/2 să obținem H) și una trucată (șansă 3/4 să obținem cap). Persoana alege la întâmplare (prob 1/2) o monedă și o aruncă de 3 ori obținând HHH.

a) Având această inf care este probab să fi ales moneda echilibrată?

b) Persoana aruncă pt a 4a oară moneda și ne întrebăm care e probab să obțină H?

Sol a)

A - even. prin care am obținut HHH

B - moneda aleasă să fie echilibrată

$\mathbb{P}(B) = 1/2$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\, \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\, \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c)\, \mathbb{P}(B^c)} =$$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\mathbb{P}(A \mid B^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}} =$$

b) Fie C - evenimentul prin care la a patra aruncare am obținut cap.

$\mathbb{P}(C|A) = ?$ putem considera $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$

Vrem să calculăm: $Q(C) = ?$

~~Q(C)~~

Din formula probab. totale: $Q(C) = Q(C/B)Q(B) + Q(C/B^c)Q(B^c)$

$$\left.\begin{array}{l} Q(C/B) = \frac{1}{2} \\ Q(C/B^c) = \frac{3}{4} \\ Q(B) = \mathbb{P}(B/A) = \text{din punctul a)} \\ Q(B^c) = 1 - Q(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(C)}$$

Independență

Dacă evenimente A și B sunt independente dacă realizarea unuia nu influențează în niciun mod realizarea celuilalt

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Def

Spunem că 2 evenimente A și B sunt independente dacă $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Notăm $A \perp\!\!\!\perp B$ (A independent de B)

Obs Independența e diferită de evenimente disjuncte.

Obs: Dacă A și B sunt independente atunci A și B^c, ~~sunt i~~, A^c și B, A^c și B^c sunt independente.

Exp: Aruncăm cu banul de 2 ori a.î. cele 4 rezultate posibile să fie egal probabile.

A_1 - ______ am obținut H la prima

A_2 - ______ H la a doua

Sunt A_1 și A_2 independente?

$A_1 \cap A_2 = \{HH\}$

$\Omega = \{H, T\}^2$

$A_1 = \{HH, HT\}$

$A_2 = \{HH, TH\}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1/4 \\ \mathbb{P}(A_1) = 1/2 \\ \mathbb{P}(A_2) = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)$$

Exp: Considerăm că avem un zar cu 4 fețe și aruncăm de 2 ori cu acest zar a.î. cele 16 rezultate posibile să fie egal probabile.

A - {primul zar are fața 1}

B - {suma punctelor este 5}

$A \perp\!\!\!\perp B$?

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((1,4)) = \frac{1}{16} \\ \mathbb{P}(A) = 4/16 = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = 4/16 = 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$$

Def: Spunem că evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt independente dacă

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i), \quad \forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

Mai spunem că evenimentele sunt mutual independente.

Exp: A, B, C sunt indep (mutual)

$$\begin{cases} P(A\cap B) = P(A)P(B) \\ P(A\cap C) = P(A)P(C) \\ P(B\cap C) = P(B)P(C) \\ P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

Câte egalități treb verificate pt n evenimente?

$$C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$$

Exp: În contextul aruncării a 2 monede, fie

A_1 - am obținut H la prima aruncare

A_2 - am obținut H la a doua aruncare

B - cele 2 aruncari au rezultate diferite

$\Omega = \{H, T\}^2 \qquad B = \{HT, TH\}$

$P(B) = 1/2 \qquad P(A_1) = P(A_2) = 1/2$

$P(A_1\cap B) = 1/4 = P(A_1) \times P(B)$

$P(A_1\cap A_2) = 1/4 = P(A_1) \times P(A_2)$

$P(B\cap A_2) = 1/4 = P(B) \times P(A_2)$

A_1, A_2, B - indep 2 câte 2

$P(A_1\cap A_2\cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_1)\times P(A_2) \times P(B)$

deci A_1, A_2, B nu sunt independente (mutual)

Obs: În contextul probab condiționate putem defini independența condiționată.

A și B evenimente și C ev care s-a realizat $P(C)>0$

Atunci A și B sunt independente condiționat de ev C:

$$P(A\cap B | C) = P(A|C) \times P(B|C)$$

$Q(\cdot) = P(\cdot | C)$ atunci relația devine $Q(A\cap B) = Q(A) \times Q(B)$

Scanned with CamScanner

Exp: (Independența nu implică independența condiționată)
În contextul exemplului anterior, A_1 și A_2 sunt independente necondiționat.

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A_2|B) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | B) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0$$

Deci A_1 și A_2 nu sunt independente condiționat la B.

Exp: În scenariul exemplului de date trecute:

$\mathbb{P}(D) = 1\%$

acuratețea testului (senzitivitatea = specificitatea) 95%

$$\mathbb{P}(T|D) = \mathbb{P}(T^c|D^c) = 0.95$$

Am văzut că

$$\mathbb{P}(D|T) \simeq 16\%$$

Pp că persoana respectivă efectuează un nou test independent de primul test. (independența are loc dat fiind statusul bolii) și are aceeași acuratețe.

Rezultatul este tot pozitiv. Care este probab ca persoana să aibă afecțiunea respectivă?

Sol:

Fie T_1 - primul test e pozitiv

T_2 - al doilea test e pozitiv

D - persoana are afecțiunea

$\mathbb{P}(D | T_1 \cap T_2) = ?$

Al doilea test e indep de primul în fct de status:

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D) = \mathbb{P}(T_1|D) \times \mathbb{P}(T_2|D)$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c) = \mathbb{P}(T_1|D^c) \times \mathbb{P}(T_2|D^c)$$

$$\mathbb{P}(D|T_1\cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1\cap T_2|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_1\cap T_2)}$$

$\mathbb{P}(D) = 1\%$

$\mathbb{P}(T_1\cap T_2/D) = \mathbb{P}(T_1/D)\,\mathbb{P}(T_2/D) = 0.95^2$

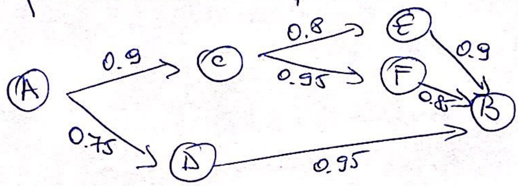
$$\mathbb{P}(T_1\cap T_2) = \mathbb{P}(T_1\cap T_2/D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T_1\cap T_2/D^c)\,\mathbb{P}(D^c)$$

$$= \mathbb{P}(T_1/D)\,\mathbb{P}(T_2/D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T_1/D^c)\,\mathbb{P}(T_2/D^c)\,\mathbb{P}(D^c)$$

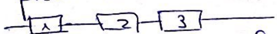
$$= 0.95^2 \times 0.01 + (1-0.95)^2 \cdot 0.99$$

$$\mathbb{P}(D|T_1\cap T_2) = \frac{0.95^2\times 0.01}{0.95^2\times 0.01 + 0.05^2\times 0.99} \simeq 80\%$$

Exp: FB că avem o rețea de calculatoare:



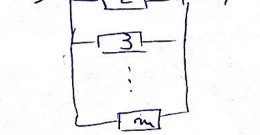
A→B evenimentul prin care există conexiune de la A la B.

a) subsistem serie 

avem m componente și p_i este prob ca a i-a componentă să funcționeze.

$\mathbb{P}$(transmitem mesajul într-un sistem serie) $= p_1 \times p_2 \times \dots \times p_m$

b) subsistem paralel



$\mathbb{P}$(transmite mesajul în sistem paralel)

$= 1 - \mathbb{P}$(sistemul să nu transmită mesajul)

$= 1 - \mathbb{P}(\text{eșec } n_1) \times \mathbb{P}(\text{eșec } n_2) \times \dots \times \mathbb{P}(\text{eșec nod } m)$

$= 1 - (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_m)$

Pt problema noastră:

$$\mathbb{P}(A \to B) = ?$$

$$\mathbb{P}(C \to B) = 1 - (1 - \mathbb{P}(C \to E \text{ și } E \to B))(1 - \mathbb{P}(C \to F \text{ și } F \to B))$$
$$= 1 - (1 - 0.8 \times 0.9)(1 - 0.95 \times 0.85)$$

$$\mathbb{P}(A \to B) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A \to C \text{ și } C \to B)) \times (1 - \mathbb{P}(A \to D\} \text{ și } D \to B))$$
$$= 1 - (1 - p_{AC} \times p_{CB})(1 - p_{AD} \times p_{DB})$$

Variabile aleatoare. Variabile aleatoare discrete

Aruncăm 2 zaruri:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$$

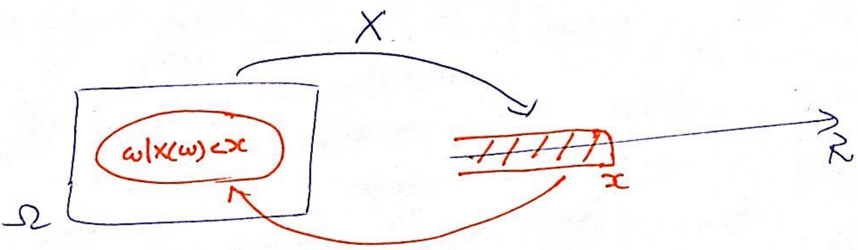
a) suma punctelor e egală cu 3
b) nr de fețe cu 3 pct în cele 2 aruncări
c) nr de pct al celui de-al doilea zar la cub.

Ideea de variabilă aleatoare (v.a.) este de a asocia fiecărui elem. elementar $\omega \in \Omega$ o valoare numerică din $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate. O variabilă aleatoare este o fct reală

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ care verif proprietățile}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) \le x\} \subseteq \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$$



Exp: Aruncăm cu banul de 2 ori: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

X – nr de H în cele 2 aruncări

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$X(HH) = 2$

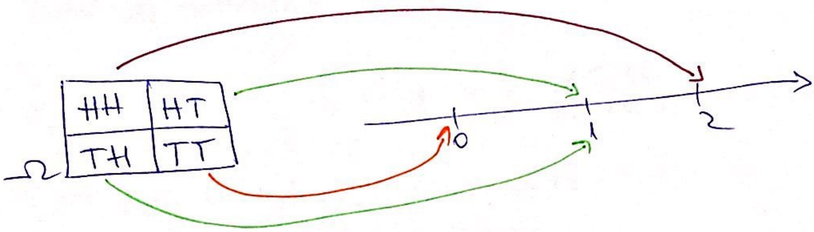
$X(HT) = 1$

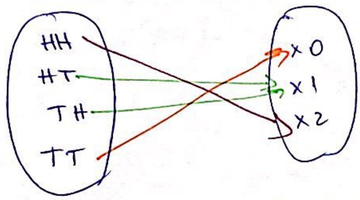
$X(TH) = 1$

$X(TT) = 0$

$x \in \mathbb{R}$, $x = \sqrt{2}$

$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$$
$$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0 \text{ sau } X(\omega) = 1\}$$
$$= \{TT, TH, HT\} \in \mathcal{F}$$





Notație: Variabilele aleatoare se notează în general cu litere mari: $X, Y, Z, T, W, \ldots$

Def: Spunem că o variabilă aleatoare X e discretă dacă $X(\Omega)$ (mulțimea val pe care le poate lua X) este cel mult numărabilă.
În caz contrar, spunem că e continuă.

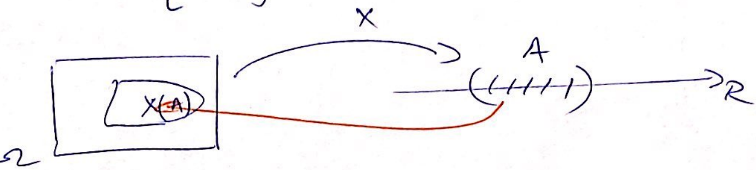
Exp: Să pp că alegem la întâmplare un nr a din [0,1
Atunci v.a. X care asociază lui a valoarea a^3 este continuă, pe când variabila aleatoare Y care asociază lui a semnul lui a.

$$Y = \text{sign}(a) = \begin{cases} -1, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ +1, & a > 0 \end{cases}$$

este discretă.

Scopul: având $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o v.a. să calculăm probab de tipul $\mathbb{P}(X\in A)$, $A\subset\mathbb{R}$

$$\{X\in A\}=\{\omega\in\Omega \,/\, X(\omega)\in A\}$$



$\{X\in A\}=X^{-1}(A)$ sn preimaginea lui A.

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(X^{-1}(A))=(\mathbb{P}\circ X^{-1})(A)$

Exp: $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$ $\quad X:\Omega\to\mathbb{R}$

X - nr de H în 2 aruncări

$X(\Omega)=\{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \,/\, X(\omega)=0\})=\mathbb{P}(TT)=1/4$

$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\{HT, TH\})=1/2$

$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(HH)=1/4$

$A=[0.5,\ 1.7]\subset\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{P}\{X\in A\}=\mathbb{P}(X=1)=1/2$