Probabilități și Statistică
Curs 3 – 18.10.2021

Modalitatea de extragere a eșantionului din populație
→ Schema de extragere cu revenire
→ Schema de extragere fără revenire

Posibile metode de numărare:

nr de șiruri de lung k cu termeni oarecare

	ordinea contează	ordinea nu contează
cu revenire	n^k	
fără revenire	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	

(nr de cazuri cu termeni distincți)
șiruri de lungime k cu termeni $\{1, 2, \dots, n\}$

Exp: 1) Câte cuvinte putem forma, de 4 litere, ~~care~~ din cuvântul mate?

→ cu revenire $\boxed{M, A, T, E}$ 4^4

→ fără revenire $4!$

2) Ionel are 10 cd-uri
- 4 de muzica rock
- 3 de clasică
- 2 de pop
- 1 de electronică

Vrea să așeze cd-urile pe un raft a.î. ~~să păstreze~~ genurile muzicale să rămână grupate? În câte moduri poate face acest lucru?

Scanned with CamScanner

Avem 4 genuri muzicale : rock, clasică, pop, electro care pot fi adunate în 4! secvențe.

4! moduri

R C P E

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in A_i\}$

(x_1, x_2, x_3, x_4) (y_1, y_2, y_3) $2!$ $1!$

$4!$ $3!$

$4! \times 3! \times 2! \times 1!$

În total găsesc $4!(4! \times 3! \times 2! \times 1!)$

2 1 1 → permutate

$4!(2! \times 2! \times 1! \times 1!)$

Exp: (Problema aniversărilor)

Să presupunem că avem n persoane într-o încăpere. Ne întrebăm care e probabilitatea ca cel puțin 2 să se fi născut în aceeași zi?

Ipoteze – anul are 365 zile

– șansa ca o persoană să se nască într-o zi dată este $\frac{1}{365}$.

– șansa ca o persoană să se nască într-o zi anume nu influențează în niciun fel șansele ca celelalte persoane să se fi născut în zile anume.

Formalizare : $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{1, \dots, 365\}\}$

$|\Omega| = 365^n$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ - echirepartiția $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{365^n}$

A – cel puțin 2 pers sunt născute în aceeași zi

$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists\, i, j,\ i \neq j$ a.î. $x_i = x_j\}$

$\mathbb{P}(A) = ?$ – câmpuri de prob a lui Laplace

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}$(nicio pers. să nu fie născută în aceeași zi)

$$= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

n	10	15	22	$\boxed{23}$	—	—	55
$\mathbb{P}(A)$	0.12	0.25	0.48	$\boxed{0.51}$			>0.99

Să presupunem că avem n persoane și vrem să formăm comisii cu k dintre ele. Câte avem? Altfel spus suntem interesați nr de submulțimi cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente?

Nu ne interesează ordinea!

Prop: Fie $0 \le k \le n$. Atunci numărul de submulțimi cu k elemente al unei mulțimi cu n elemente este

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (C_n^k)$$

Exp: 1) Nr. de mâini într-un joc de cărți (Poker)

$$\binom{52}{5}$$

2) Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 ași, 2 popi și o damă.

52 cărți: Culoare → 4 culori; Figuri → 13 figuri

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{alegem ași}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{alegem popi}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{damă}}$$

3) Care e probabilitatea ca în jocul de poker să obținem FullHouse? $(K, K, 10, 10, 10)$

$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \mid \omega_i$ e mulț. cărților de joc $\omega_i \ne \omega_j\}$

$|\Omega| = \binom{52}{5}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ - echirepartiție

A - evenimentul prin care am obținut FullHouse

$A = \{\{w, w, q, q, q\} \mid w \ne q,\ w, q \in$ mulț. figurilor cărților de joc $\}$

Mulțimea cărților de joc:

$T=\{(c,f) \mid c \in C,\ f \in F\}$, $C=\{\text{culorilor}\}$, $F=\{\text{figurilor}\}$

$P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$

$|A|$: - putem alege figura pt cele 3 cărți ~~la fel~~ cu aceeași figură $\binom{13}{1}$ moduri și putem alege culoarea în $\binom{4}{3}$ moduri

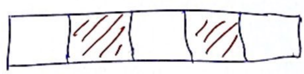
- apoi alegem din cele 12 figuri rămase, figura pt ultimele 2 cărți $\binom{12}{1}$ moduri și putem alege culoarea în $\binom{4}{2}$ moduri.

$$|A| = \binom{13}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{4}{2}$$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

4) Probabilitatea să avem o pereche la Poker?

$B=\{\text{o pereche}\}$



$|B|$: - aleg figura pt cele 2 cărți din pereche: $\binom{13}{1}$ moduri

- aleg culoarea celor 2 cărți din pereche; $\binom{4}{2}$ moduri

- aleg figurile celorlalte 3 cărți: $\binom{12}{3}$ moduri

- aleg pt fiecare din cele 3 cărți culorile: $\binom{4}{1}$

$$|B| = \binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\binom{12}{3}\cdot\binom{4}{1}^3$$

Exp: (Problema Newton - Pepys)

Care dintre evenimentele următoare au probab. mai mare?

a) ~~A~~ Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri perfecte?

b) Cel puțin 2 valori de 6 apar atunci când aruncăm 12 zaruri?

c) Cel puțin 3 valori de 6 apar atunci când aruncăm 18 zaruri?

Sol

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^6 \qquad |\Omega| = 6^6$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ - echirepartiție

A - cel puțin un 6 din 6 aruncări

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{niciun 6 să nu apară})$$
$$= 1 - \frac{5^6}{6^6} \simeq 0{,}67$$

b) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{12}$

B - cel puțin 2 valori de 6 în 12 aruncări

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{cel mult 1 valoare de 6 în 12 aruncări})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\underbrace{\text{nu avem niciun 6}}_{B_1} \text{ sau } \underbrace{\text{avem exact 1}}_{B_2})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\text{nu avem niciun 6}) - \mathbb{P}(\text{avem exact un 6})$$
$$= 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - \frac{\binom{12}{1}\cdot 5^{11}}{6^{12}} \simeq 0{,}62 < 0{,}67$$

c) $\Omega = \{1,2,\dots,6\}^{18}$, C = cel puțin 3 valori de 6

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \underset{\text{maxim 2 valori}}{\mathbb{P}(C^c)} = 1 - \frac{5^{18} + 18\cdot 5^{17} + \binom{18}{2}5^{16}}{6^{18}} \simeq 0{,}60 < 0{,}67$$

Partiții $\longrightarrow$ coeficient multinomial

Fie o mulțime cu n elemente și $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ cu $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Considerăm o partiție cu k subm. disjuncte pt care submulțimea i conține n_i elemente. În câte moduri putem partiționa mulțimea cu n elemente?

Obs: Problema e echivalentă cu nr. de șiruri de lungime n care conțin n_1 elemente de tip 1, n_2 elem de tip 2, ..., n_k elem de tip k cu

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Avem $\binom{n}{n_1}$ moduri de formare a primei submulț, apoi avem $\binom{n-n_1}{n_2}$ moduri de formare a celei de-a 2 submulțimi

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \dots \times \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} * \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} * \dots \times \frac{\cancel{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}}{n_k!(n-n_1-\dots-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} =: \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Ex 1) MATEMATICA → câte cuvinte diferite putem obține rearanjând literele din cuv. dat?

M - 2 ori
A - 3 ori
T - 2 ori
E, I, C - 1 ori

$$\binom{10}{2,3,2,1,1,1}$$

2) Într-o grupă de lab P&S sunt 4 băieți și 12 fete și prof. împarte în mod aleator în grupe de câte 4 studenți. Care este probab. ca fiecare grup să conțină un băiat?

Obs: Înțelegem prin "mod aleator" că fiecare partiție e egal probabilă.

Ω - mulțimea tuturor partițiilor în grupe de câte 4 a celor 16 studenți.

$$|\Omega| = \binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$$

A = fiecare grup conține un băiat

|A| → 4! moduri distribuim băieții

→ mai rămân 12 fete care se distribuie câte 3 în fiecare grup în $\binom{12}{3,3,3,3}$ moduri diferite.

$$P(A) = \frac{4!\cdot\binom{12}{3,3,3,3}}{\binom{16}{4,4,4,4}} = \frac{4!\cdot\frac{12!}{3!^4}}{\frac{16!}{4!^4}} = \frac{4\cdot 8\cdot 12}{13\cdot 14\cdot 15}$$

Posibile metode de numărare:

	ordinea contează	ordinea nu contează
cu revenire	n^k	?
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Exemplu: (Exemplul lui Bose-Einstein)

În câte moduri putem ~~extrage~~ alege k obiecte dintr-o mulțime cu n obiecte atunci când extragerea se face cu revenire și ordinea nu contează?

Problema revine la a determina nr de ori în care putem distribui k ~~obiecte~~ bile identice în n urne distincte?

$n=5$ |o | |oo | | | |ooo | |o |

$k=7$

Similară cu: nr de soluții naturale a ecuației
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$

I o | oo | | ooo | o I

k bile ; n-1 bare verticale

$\binom{n+k-1}{k}$ - nr de soluții ale ec $x_1+\dots+x_n=k$
$x_i \in \mathbb{N}$

Exp: (Problema întâlnirilor - de Montmort)

n - plicuri cu destinatari diferiți

n - scrisori corespunzătoare celor n destinatari

Amestecă aleator scrisorile în plicuri. Care e probabilitatea ca cel puțin un destinatar să fi primit scrisoarea corectă.

Sol:

A - cel puțin un destinatar primește scrisoarea corectă.

$$\begin{array}{l} \text{nr plic} \\ \text{nr scrisoare} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} = \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ bij}$$