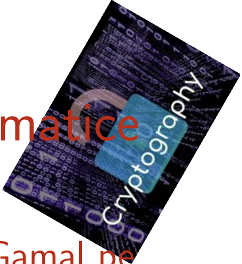



# Securitatea Sistemelor Informatice

## - Curs 10.6 -
## Schimbul de chei Diffie-Hellman și ElGamal pe curbe eliptice

Adela Georgescu

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București
Anul universitar 2022-2023, semestrul I

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Am studiat schimbul de chei Diffie-Hellman peste un grup ciclic $\mathbb{G}$, de ordin $q$;

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Am studiat schimbul de chei Diffie-Hellman peste un grup ciclic $\mathbb{G}$, de ordin $q$;
- Transpunem construcția pe curbe eliptice:

$$(\mathbb{G}, \cdot) \rightarrow (E(\mathbb{Z}_q), +)$$

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

|  Alice | |  Bob |
|---|---|---|
| $x \leftarrow \mathbb{Z}_q$ | $\xrightarrow{\mathbb{G}, q, g, h_1}$ | $y \leftarrow \mathbb{Z}_q$ |
| $h_1 := g^x$ | $\xleftarrow{h_2}$ | $h_2 := g^y$ |
| $k_A := h_2^x$ | | $k_B := h_1^y$ |

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și $P$ un punct pe curbă (generator);

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și $P$ un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \leftarrow^{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și $P$ un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și $P$ un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Bob alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și $P$ un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Bob alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;
- Bob îi trimite $H_2$ lui Alice și întoarce cheia $k_B := yH_1$;

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și $P$ un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Bob alege $y \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;
- Bob îi trimite $H_2$ lui Alice și întoarce cheia $k_B := yH_1$;
- Alice primește $H_2$ și întoarce cheia $k_A = xH_2$.

# Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Corectitudinea protocolului presupune ca $k_A = k_B$, ceea ce se verifică ușor:
- Bob calculează cheia

$$k_B = yH_1 = y(xP) = (xy)P$$

- Alice calculează cheia

$$k_A = xH_2 = x(yP) = (xy)P$$

# Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;

# Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;
- Întrebare: Cum poate un adversar pasiv să determine cheia comună dacă poate sparge ECDLP?

# Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;
- Întrebare: Cum poate un adversar pasiv să determine cheia comună dacă poate sparge ECDLP?
- Răspuns: Ascultă mediul de comunicație și preia mesajele $H_1$ și $H_2$. Rezolvă *ECDLP* pentru $H_1$ și determină $x$, apoi calculează $k_A = k_B = xH_2$.

# Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;
- Întrebare: Cum poate un adversar pasiv să determine cheia comună dacă poate sparge ECDLP?
- Răspuns: Ascultă mediul de comunicație și preia mesajele $H_1$ și $H_2$. Rezolvă *ECDLP* pentru $H_1$ și determină $x$, apoi calculează $k_A = k_B = xH_2$.
- Aceasta nu este însă singura condiție necesară pentru a proteja protocolul de un atacator pasiv!

# ECCDH (Elliptic Curve Computational Diffie-Hellman)

- O condiție mai potrivită ar fi că adversarul să nu poată determina cheia comună $k_A = k_B$, chiar dacă are acces la întreaga comunicație;

# ECCDH (Elliptic Curve Computational Diffie-Hellman)

- O condiție mai potrivită ar fi că adversarul să nu poată determina cheia comună $k_A = k_B$, chiar dacă are acces la întreaga comunicație;
- Aceasta este problema de calculabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECCDH): Fiind date curba eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, un punct $P$ pe curbă și 2 alte puncte $H_1, H_2 \leftarrow^R E(\mathbb{Z}_q)$, să se determine:

$$ECCDH(H_1, H_2) = (ECDLP(P, H_1)ECDLP(P, H_2))P$$

# ECCDH (Elliptic Curve Computational Diffie-Hellman)

- O condiție mai potrivită ar fi că adversarul să nu poată determina cheia comună $k_A = k_B$, chiar dacă are acces la întreaga comunicație;
- Aceasta este problema de calculabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECCDH): Fiind date curba eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, un punct $P$ pe curbă și 2 alte puncte $H_1, H_2 \leftarrow^R E(\mathbb{Z}_q)$, să se determine:

$$ECCDH(H_1, H_2) = (ECDLP(P, H_1)ECDLP(P, H_2))P$$

- Pentru schimbul de chei Diffie-Hellman, rezolvarea ECCDH înseamnă că adversarul determină $k_A = k_B = xyP$ cunoscând $H_1, H_2, E(\mathbb{Z}_q), P$ (toate disponibile pe mediul de transmisiune nesecurizat).

# ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;

# ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;
- O condiție și mai potrivită este ca pentru adversar, cheia $k_A = k_B$ să fie **indistinctibilă** față de o valoare aleatoare;

# ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;
- O condiție și mai potrivită este ca pentru adversar, cheia $k_A = k_B$ să fie **indistinctibilă** față de o valoare aleatoare;
- Sau, altfel spus, să satisfacă problema de decidabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECDDH):

# ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;
- O condiție și mai potrivită este ca pentru adversar, cheia $k_A = k_B$ să fie **indistinctibilă** față de o valoare aleatoare;
- Sau, altfel spus, să satisfacă problema de decidabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECDDH):

### Definiție

*Spunem că problema decizională Diffie-Hellman (ECDDH) este dificilă (relativ la curba eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$), dacă pentru orice algoritm PPT $\mathcal{A}$ există o funcție neglijabilă $\mathrm{negl}$ așa încât:*
$|Pr[\mathcal{A}(E(\mathbb{Z}_q), P, xP, yP, zP) = 1]$ - $Pr[\mathcal{A}(E(\mathbb{Z}_q), P, xP, yP, xyP) = 1]|$
$\leq negl(n)$, *unde* $x, y, z \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$

# Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;
- Arătăm acum că schimbul de chei Diffie-Hellman este total nesigur pentru un adversar activ ...

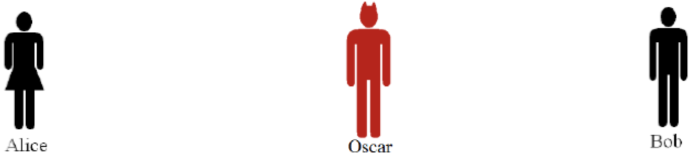
# Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;
- Arătăm acum că schimbul de chei Diffie-Hellman este total nesigur pentru un adversar activ ...
- ... care are dreptul de a intercepta, modifica, elimina mesajele de pe calea de comunicație;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;
- Arătăm acum că schimbul de chei Diffie-Hellman este total nesigur pentru un adversar activ ...
- ... care are dreptul de a intercepta, modifica, elimina mesajele de pe calea de comunicație;
- Un astfel de adversar se poate interpune între Alice și Bob, dând naștere unui atac de tip Man-in-the-Middle.

# Atacul Man-in-the-Middle




$$
\begin{array}{ccccc}
x \leftarrow \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{\mathbb{G},\, q,\, g,\, h_1} & a \leftarrow \mathbb{Z}_q & & \\
h_1 := g^x & \xleftarrow{\quad h_2' \quad} & h_2' := g^a & & \\
{\color{red} k_A := {h_2'}^x} & & b \leftarrow \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{\mathbb{G},\, q,\, g,\, h_1'} & y \leftarrow \mathbb{Z}_q \\
& & h_1' := g^b & \xleftarrow{\quad h_2 \quad} & h_2 := g^y \\
& & {\color{red} k_A := {h_1}^a;\ k_B := h_2^b} & & {\color{red} k_B := {h_1'}^y}
\end{array}
$$

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;
- Oscar inițiază, în locul lui Alice, o nouă sesiune cu Bob: alege $b \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1' := bP$;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;
- Oscar inițiază, în locul lui Alice, o nouă sesiune cu Bob: alege $b \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1' := bP$;
- Bob alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și $P$ un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;
- Oscar inițiază, în locul lui Alice, o nouă sesiune cu Bob: alege $b \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1' := bP$;
- Bob alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;
- Oscar și Bob dețin acum cheia comună $k_B = ybP$.

# Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;
- De fiecare dată când Alice va transmite un mesaj criptat către Bob, Oscar îl interceptează și îl previne să ajungă la Bob;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;
- De fiecare dată când Alice va transmite un mesaj criptat către Bob, Oscar îl interceptează și îl previne să ajungă la Bob;
- Oscar îl decriptează folosind $k_A$, apoi îl recriptează folosind $k_B$ și îl transmite către Bob;

# Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;
- De fiecare dată când Alice va transmite un mesaj criptat către Bob, Oscar îl interceptează și îl previne să ajungă la Bob;
- Oscar îl decriptează folosind $k_A$, apoi îl recriptează folosind $k_B$ și îl transmite către Bob;
- Alice și Bob comunică fără să fie conștienți de existența lui Oscar.

# Sistemul de criptare ElGamal pe curbe eliptice

- Am studiat sistemul de criptare ElGamal peste un grup ciclic $\mathbb{G}$, de ordin $q$;

# Sistemul de criptare ElGamal pe curbe eliptice

- Am studiat sistemul de criptare ElGamal peste un grup ciclic $\mathbb{G}$, de ordin $q$;
- Transpunem construcția pe curbe eliptice:

$$(\mathbb{G}, \cdot) \to (E(\mathbb{Z}_q), +)$$

# Sistemul de criptare ElGamal pe curbe eliptice

1. Se generează $E(\mathbb{Z}_q)$ o curbă eliptică și $P$ un punct pe curbă (generator), se alege $z \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și se calculează $H = xP$;
   - Cheia publică este: $(E(\mathbb{Z}_q), P, H)$;
   - Cheia privată este $(E(\mathbb{Z}_q), P, x)$;
2. **Enc**: dată o cheie publică $(E(\mathbb{Z}_q), P, H)$ și un mesaj $M \in E(\mathbb{Z}_q)$, alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și întoarce $C = (C_1, C_2) = (yP, M + yH)$;
3. **Dec**: dată o cheie secretă $(E(\mathbb{Z}_q), P, x)$ și un mesaj criptat $C = (C_1, C_2)$, întoarce $M = C_2 + x(-C_1)$.

# Securitate

- Sistemul transpus pe curbe eliptice păstrează proprietățile sistemului inițial;
- Deci curba eliptică trebuie aleasă a.î. ECDLP și ECDDH să fie dificile...

# Securitate

- Sistemul transpus pe curbe eliptice păstrează proprietățile sistemului inițial;
- Deci curba eliptică trebuie aleasă a.î. ECDLP și ECDDH să fie dificile...
- ... și sistemul rămâne nedeterminist și homomorfic.

# Important de reținut!

- Modalitatea de trecere de la o construcție peste $(\mathbb{Z}_q, \cdot)$ la $(E(\mathbb{Z}_q), +)$
- Prezumții criptografice: ECCDH, ECDDH
- Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice păstrează proprietățile schimbului de chei Diffie Hellman definit peste $\mathbb{G}$ grup ciclic de ordin $q$