Securitatea Sistemelor Informatice

- Curs 10.4 -
ElGamal

Adela Georgescu

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București
Anul universitar 2022-2023, semestrul I

Sistemul de criptare ElGamal

- 1976 - Diffie și Hellman definesc conceptul de criptografie asimetrică;

Sistemul de criptare ElGamal

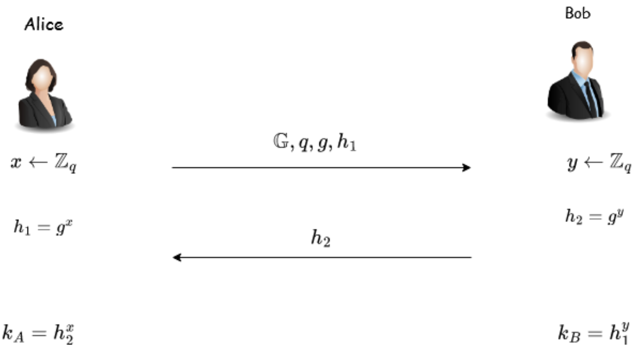
- 1976 - Diffie și Hellman definesc conceptul de criptografie asimetrică;
- 1977 - R.Rivest, A.Shamir și Leonard Adleman introduc sistemul RSA;

Sistemul de criptare ElGamal

- 1976 - Diffie și Hellman definesc conceptul de criptografie asimetrică;
- 1977 - R.Rivest, A.Shamir și Leonard Adleman introduc sistemul RSA;
- 1985 - T.ElGamal propune un nou sistem de criptare.

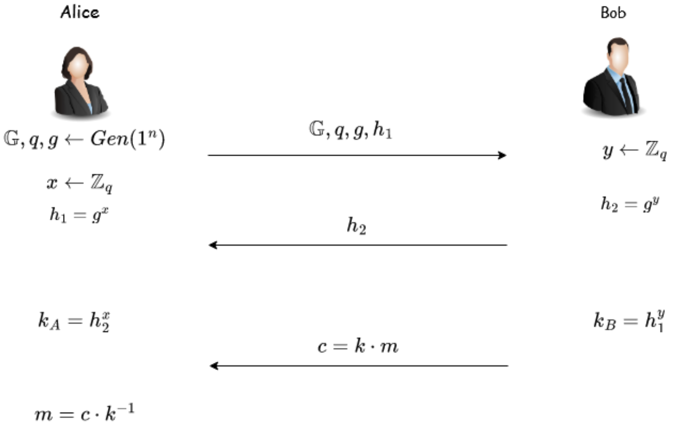
Sistemul de criptare ElGamal

- Reamintim schimbul de chei Diffie-Hellman



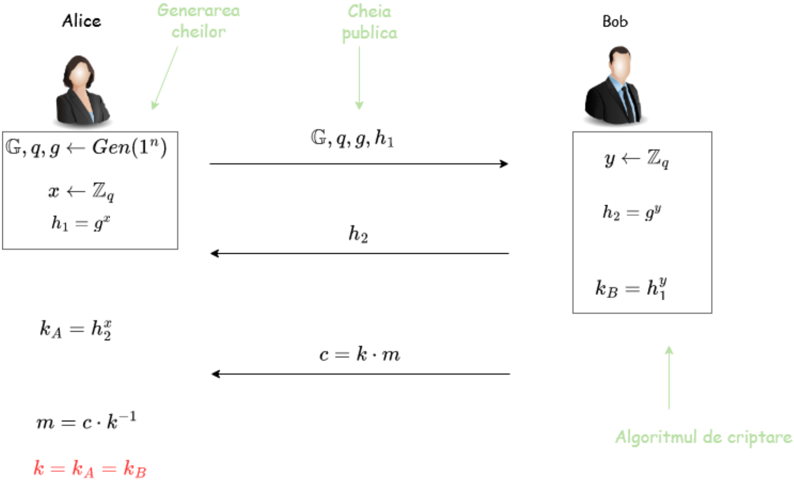
Sistemul de criptare ElGamal

- Il modificăm așa încât să permită criptare

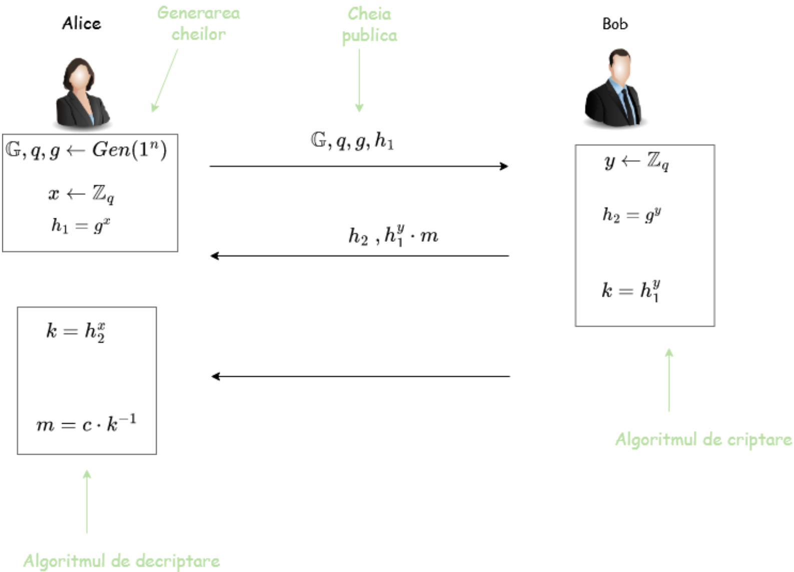


Sistemul de criptare ElGamal

- Acum poate fi văzut ca un sistem de criptare



Sistemul de criptare ElGamal



Sistemul de criptare ElGamal

- Definim sistemul de criptare *ElGamal* pe baza ideii prezentate anterior;
  1. Se generează $(\mathbb{G}, q, g)$, se alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și se calculează $h = g^x$;
     - Cheia publică este: $(\mathbb{G}, q, g, h)$;
     - Cheia privată este x;
  2. **Enc**: dată o cheie publică $(\mathbb{G}, q, g, h)$ și un mesaj $m \in \mathbb{G}$, alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și întoarce $c = (c_1, c_2) = (g^y, m \cdot h^y)$;
  3. **Dec**: dată o cheie secretă $(\mathbb{G}, q, g, x)$ și un mesaj criptat $c = (c_1, c_2)$, întoarce $m = c_2 \cdot c_1^{-x}$.

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?
- Răspuns: NU! Sistemul este nedeterminist, datorită alegerii aleatoare a lui y la fiecare criptare.

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?
- Răspuns: NU! Sistemul este nedeterminist, datorită alegerii aleatoare a lui y la fiecare criptare.
- Un același mesaj m se poate cripta diferit, pentru $y \neq y'$:

$$c = (c_1, c_2) = (g^y, m \cdot h^y)$$

$$c' = (c'_1, c'_2) = (g^{y'}, m \cdot h^{y'})$$

Securitate - Problema 1

Problema 1: Determinismul

- Întrebare: Este sistemul ElGamal determinist?
- Răspuns: NU! Sistemul este nedeterminist, datorită alegerii aleatoare a lui y la fiecare criptare.
- Un același mesaj m se poate cripta diferit, pentru $y \neq y'$:

$$c = (c_1, c_2) = (g^y, m \cdot h^y)$$

$$c' = (c'_1, c'_2) = (g^{y'}, m \cdot h^{y'})$$

Securitate - Problema 2

Problema 2: Dificultatea DLP

- Întrebare: Rămâne ElGamal sigur dacă problema DLP este simplă?

Securitate - Problema 2

Problema 2: Dificultatea DLP

- Întrebare: Rămâne ElGamal sigur dacă problema DLP este simplă?
- Răspuns: NU! Se determină x a.î. $h = g^x$, apoi se decriptează orice mesaj pentru că se cunoaște cheia secretă.

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$
- Întrebare: Dacă un adversar cunoaște c_1 și c_2 criptările lui m_1, respectiv m_2, ce poate spune despre $c_1 \cdot c_2$?

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;
- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$
- Întrebare: Dacă un adversar cunoaște c_1 și c_2 criptările lui m_1, respectiv m_2, ce poate spune despre $c_1 \cdot c_2$?
- Răspuns: $c_1 \cdot c_2$ este criptarea lui $m_1 \cdot m_2$ folosind $y = y_1 + y_2$:
  $$c_1 \cdot c_2 = (g^{y_1+y_2}, m_1 m_2 h^{y_1+y_2})$$

Securitate - Problema 3

Problema 3: Proprietatea de homomorfism

- Fie m_1, m_2 2 texte clare și $c_1 = (c_{11}, c_{12}), c_2 = (c_{21}, c_{22})$ textele criptate corespunzătoare;

- Atunci:
  $c_1 \cdot c_2 = (c_{11} \cdot c_{21}, c_{12} \cdot c_{22}) = (g^{y_1} \cdot g^{y_2}, m_1 h^{y_1} \cdot m_2 h^{y_2})$

- Întrebare: Dacă un adversar cunoaște c_1 și c_2 criptările lui m_1, respectiv m_2, ce poate spune despre $c_1 \cdot c_2$?

- Răspuns: $c_1 \cdot c_2$ este criptarea lui $m_1 \cdot m_2$ folosind $y = y_1 + y_2$:
$$c_1 \cdot c_2 = (g^{y_1+y_2}, m_1 m_2 h^{y_1+y_2})$$

- Un sistem de criptare care satisface $Dec_s k(c_1 \cdot c_2) = Dec_{sk}(c_1) \cdot Dec_{sk}(c_2)$ se numește sistem de criptare **homomorfic**.
  (homomorfismul este deseori o proprietate utilă în criptografie)

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;
- Întrebare: Este corect să se utilizeze de mai multe ori aceiași parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$?

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;
- Întrebare: Este corect să se utilizeze de mai multe ori aceiași parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$?
- Răspuns: Se consideră că DA. Cunoașterea parametrilor publici pare să nu conducă la rezolvarea DDH.

Securitate - Problema 4

Problema 4: Utilizarea multiplă a parametrilor publici

- Este comun în practică pentru un administrator să fixeze parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$, apoi fiecare utilizator să își genereze doar cheia secretă x și să publice $h = g^x$;
- Întrebare: Este corect să se utilizeze de mai multe ori aceiași parametrii publici $(\mathbb{G}, q, g)$?
- Răspuns: Se consideră că DA. Cunoașterea parametrilor publici pare să nu conducă la rezolvarea DDH.
- Atenție! Acest lucru nu se întâmpla și la RSA, unde modulul NU trebuie utilizat de mai multe ori.

Securitate - teoremă

Teoremă

Dacă problema decizională Diffie-Hellman (DDH) este dificilă în grupul $\mathbb{G}$, atunci schema de criptare ElGamal este CPA-sigură.

- Se poate vedea din securitatea schimbului de chei Diffie-Hellman

Securitate - teoremă

Teoremă

Dacă problema decizională Diffie-Hellman (DDH) este dificilă în grupul $\mathbb{G}$, atunci schema de criptare ElGamal este CPA-sigură.

- Se poate vedea din securitatea schimbului de chei Diffie-Hellman
- In forma aceasta, sistemul ElGamal nu este CCA-sigur...pentru ca este maleabil

Securitate - teoremă

Teoremă

Dacă problema decizională Diffie-Hellman (DDH) este dificilă în grupul $\mathbb{G}$, atunci schema de criptare ElGamal este CPA-sigură.

- Se poate vedea din securitatea schimbului de chei Diffie-Hellman
- In forma aceasta, sistemul ElGamal nu este CCA-sigur...pentru ca este maleabil
  Insă poate fi modificat așa încât să fie CCA-sigur

Important de reținut!

- Sistemul de criptare ElGamal
- Proprietatea de homomorfism