

# Лабораторна робота 1

## ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ

Мета роботи – дослідити особливості наближення функцій за допомогою степеневих рядів, виконати аналіз похибок наближення.

### 1.1. Короткі теоретичні відомості

Одним із широко застосовуваних методів обчислення функцій (логарифмічних, тригонометричних, показникових та інших) є розкладання функції у степеневий ряд. Головним при цьому є визначення умов збіжності ряду та оцінювання похибки наближення функції степеневим рядом.

Слід розрізняти методичну похибку наближення функції степеневим рядом, що зумовлена зрізанням нескінченного ряду, в який розкладають функцію, та обчислювальну похибку, яка виникає при виконанні операцій округлення.

Дійсна функція  $f(x)$  називається аналітичною у точці  $\xi$ , якщо в деякому околі  $|x - \xi| < R$  цієї точки функція розкладається у степеневий ряд Тейлора:

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \dots \quad (1.1)$$

При  $\xi = 0$  отримаємо ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.2)$$

Залишковий член, що є похибкою наближення функції  $f(x)$  степеневим рядом (1.1), дорівнює

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi + \theta(x - \xi))}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1},$$

де  $0 < \theta < 1$ . Для ряду (1.2) залишковим членом є

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де  $0 < \theta < 1$ .

Для залишкового члена ряду Тейлора характерно те, що він достатньо швидко спадає при наближенні  $x$  до  $\xi$ .

Якщо значення  $f(\xi)$  відоме і необхідно знайти значення  $f(\xi + h)$ , де  $h$  – «мала поправка», то (1.1) можна переписати у вигляді

$$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n + R_n(h),$$

$$\text{де } R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

При розв'язанні задач у реальному часі (наприклад, у спецобчислювачах) природним є прагнення отримати мінімальну кількість членів ряду, які забезпечують потрібну точність значення функції. Для цього необхідно заздалегідь дослідити отриманий степеневий ряд з метою визначення залежності похибки наближення функції степеневим рядом від кількості членів ряду, діапазону зміни аргумента функції тощо.

Для експоненціальної функції  $e^x$  розкладання в ряд Маклорена має вигляд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (1.3).$$

Інтервалом збіжності цього ряду є  $-\infty < x < \infty$ , а залишковим членом ряду –

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Якщо аргумент  $x$  набуває великих (за модулем) значень, то ряд (1.3) є малопридатним для обчислень. Тому  $x$  розділяють на цілу та дробову частини:

$$x = [x] + \{x\},$$

де  $[x]$  – ціла частина  $x$ , а  $0 \leq \{x\} < 1$  – його дробова частина. Тоді

$$e^x = e^{[x]} e^{\{x\}}.$$

Перший множник  $e^{[x]}$  отримують перемноженням самої на себе  $[x]$  разів константи  $e$  – при  $x > 0$ , або константи  $1/e$  – при  $x < 0$ .

Розглянемо тепер обчислення другого множника  $e^{\{x\}}$ , тобто випадок, коли  $|x| < 1$ .

Позначивши через  $U_k(x)$  загальний член розкладання (1.3), отримаємо

$$e^x \approx S_n(x) = \sum_{k=0}^n U_k(x) \quad (1.4),$$

де  $U_0 = 1$ ,  $S_0(x) = 1$ , а всі наступні  $U_k$  й  $S_k$  обчислюють за рекурентними співвідношеннями

$$U_k(x) = \frac{x}{k} U_{k-1}(x), \quad S_k(x) = S_{k-1}(x) + U_k(x), \quad k \geq 1 \quad (1.5).$$

Залишковим членом ряду (1.4) є

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} + \dots < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \dots \right) = \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Звідси  $|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n!} \frac{|x|}{n} < U_n$ . Отже, процес підсумовування можна припинити як тільки черговий член ряду (1.4) стане (за модулем) меншим за задану похибку  $\varepsilon$ , тобто, коли  $|U_n| < \varepsilon$ .

Слід наголосити, що з точки зору обсягу обчислень рекурентні співвідношення (1.5) набагато ефективніші, ніж безпосереднє обчислення за (1.3).

При обчисленні синуса та косинуса за допомогою формули зведення аргумент  $x$  має належати відрізку  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . При  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  маємо

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1.6),$$

а при  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sin x = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (1.7),$$

де  $z = \frac{\pi}{2} - x$  і  $0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$ .

Ряд (1.6) обчислюють з використанням рекурентних співвідношень

$$\sin x = U_1 + U_2 + \dots + U_n + R_n,$$

де  $U_1 = x$ ,  $U_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} U_k \quad (k=1,2,\dots,n-1)$ .

Через те, що ряд (1.6) є знакозмінним і його члени є спадними за модулем значеннями, то для  $R_n$ , слушною є оцінка

$$|R_n| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = |U_{n+1}|.$$

Тобто процес підсумовування можна припинити як тільки  $|U_{n+1}| < \varepsilon$ .

Аналогічно для ряду (1.7)

$$\cos z = U_1 + U_2 + \dots + U_n + R_n,$$

де  $U_1 = 1, U_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k-1)}U_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$  і  $|R_n| \leq \frac{z^{2n}}{(2n)!} = |U_{n+1}|$ .

Для обчислення натурального логарифма додатного числа  $x$  це число подають у вигляді

$$x = 2^m z \quad (1.8)$$

де  $m$  – ціле число, і  $1/2 < z < 1$ . Далі приймають  $a = \frac{1-z}{1+z}$ , де  $0 < a \leq \frac{1}{3}$ .

Тепер натуральний логарифм може бути обчислений як

$$\ln x = \ln 2^m z = m \ln 2 + \ln z = m \ln 2 - 2 \left( a + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^{2n-1}}{2n-1} \right) - R_n,$$

де  $0 < R_n < \frac{1}{4(2n+1)} \left( \frac{1}{3} \right)^{2n-1}$ .

Позначивши  $L_k = \frac{a^{2k-1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$ , дістанемо

$$\ln x = m \ln 2 - 2(L_1 + L_2 + \dots + L_n) - R_n$$

(для  $\ln 2$  існує відповідна бібліотечна константа).

Процес підсумовування припиняють коли  $L_n < 4\varepsilon$ .

Перед застосуванням формул наближення елементарних функцій за допомогою степеневих рядів необхідно звести аргумент  $x$  до проміжку найшвидшої збіжності скориставшись однією з таких формул:

$$\begin{aligned} x &= [x] + \{x\}; \\ \sin(\pi \pm x) &= \pm \sin x; \\ \sin(\pi/2 - x) &= \cos x; \\ x &= 2^m z. \end{aligned}$$

Інакше при підсумовуванні доданків, які відрізняються на декілька порядків, похибка округлення за величиною стає зрівнянною зі значенням результату.

Обчислення гіперболічних функцій здійснюють відповідно до наступних формул.

Гіперболічний синус визначають як

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ причому } \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

Гіперболічний синус розкладається в ряд

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Вважаючи, що  $x > 0$ , обчислення гіперболічного синуса виконують за формулою

$$\operatorname{sh} x = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + R_n,$$

де

$$u_1 = x, \quad u_{k+1} = \frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

а  $R_n$  – залишковий член ряду, причому  $R_n < \frac{1}{3} u_n$ .

Гіперболічний косинус визначають як

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{причому } \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$$

Гіперболічний косинус розкладається в ряд

$$\operatorname{ch} x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Обчислення гіперболічного косинуса виконують за формулою

$$\operatorname{ch} x = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + R_n,$$

де

$$u_1 = 1, \quad u_{k+1} = \frac{x^2}{2k(2k-1)} u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

а  $R_n$  – залишковий член ряду, причому  $R_n < \frac{2}{3} u_n$ .

## 1.2. Завдання для лабораторної роботи

Для заданого варіанта (табл. 1.1) виконати 3 завдання.

1. Побудувати таблицю залежності довжини ряду  $n$ , що забезпечує точність функції не меншу за задане значення  $\epsilon_{ps}$  у точці  $x = (b + a)/2$ , від  $\epsilon_{ps}$ :

$\epsilon_{ps}$	$n$	Абсолютна похибка	Залишковий член
$10^{-2}$	4	0.005	0.001
...	...	...	...

Значення  $eps$  змінюється від  $10^{-2}$  до  $10^{-14}$  з кроком  $10^{-3}$ .

2. Для  $n$  (довжина ряду фіксована й дорівнює  $n$ ), отриманого в п.1 при  $eps = 10^{-8}$ , у точках  $x_i = a + h \cdot i$ ,  $h = (b - a)/10$ ,  $i = 0, \dots, 10$  обчислити абсолютну похибку та залишковий член ряду. Результати подати у вигляді таблиці:

$x_i$	Абсолютна похибка	Залишковий член
0	0.005	0.001
...	...	...

П р и м і т к а. Точним значенням функції вважати результат, що його дає бібліотечна функція  $\text{Ci}$ , при обчисленні якої отримують всі члени ряду відмінні від нуля.

3. За допомогою AdvancedGrapher побудувати графік залежності абсолютної похибки від  $x$  (у логарифмічному масштабі).

Звіт має містити вихідний текст програми, таблицю з результатами та висновки.

Таблиця 1.1

### Варіанти завдань для лабораторної роботи 1

Варіант	Функція $f(x)$	Інтервал $[a, b]$	Варіант	Функція $f(x)$	Інтервал $[a, b]$	Варіант	Функція $f(x)$	Інтервал $[a, b]$
1	$\ln x$	[0.98; 5.5]	2	$\cos x$	[-30.3; 7.4]	3	$\sin x$	[51.33; -0.55]
4	$e^x$	[-3.9; 14]	5	$\operatorname{sh} x$	[-9.8; 13.9]	6	$\operatorname{ch} x$	[-0.8; 1.9]
7	$\ln x$	[9.49; 35]	8	$\cos x$	[-3.3; 24.9]	9	$\sin x$	[1.33; -13.55]
10	$e^x$	[1.4; 25.7]	11	$\operatorname{sh} x$	[-0.8; 6.9]	12	$\operatorname{ch} x$	[0; 1]
13	$\ln x$	[0.1; 15]	14	$\cos x$	[-31.3; -4.9]	15	$\sin x$	[0.33; 7.4]
16	$e^x$	[-6.2; 35.7]	17	$\operatorname{sh} x$	[-8.8; 1.9]	18	$\operatorname{ch} x$	[-7; 1]
19	$\ln x$	[50.1; 95]	20	$\cos x$	[6.8; 34.9]	21	$\sin x$	[-0.33; 7.4]
22	$e^x$	[-9.3; 15]	23	$\operatorname{sh} x$	[-1.8; 1.9]	24	$e^x$	[-1.7; 25]
25	$\ln x$	[10.11; 75]	26	$\cos x$	[16.8; 54.9]	27	$\sin x$	[-3; 7.4]
28	$\operatorname{ch} x$	[-7; 1]	29	$\operatorname{sh} x$	[-1.8; 2.9]	30	$\operatorname{ch} x$	[-3; 4]

П р и м і т к а. Для тригонометричних функцій  $a$  і  $b$  задано в радіанах.

### 1.3. Контрольні запитання та завдання

1. Якою є загальна методика обчислення функцій із застосуванням рядів?
2. Що таке методична та обчислювальна похибки наближення функції степеневим рядом?
3. Чому дорівнює методична похибка наближення функції спадним знакозмінним рядом?
4. Як змінюється залишковий член ряду в міру віддалення аргумента від точки  $\xi$ , в околі якої виконується розкладання функції в ряд?
5. Яку функцію називають аналітичною?
6. Записати вираз для розкладання функції в ряд Тейлора.
7. Чим відрізняється ряд Тейлора від ряду Маклорена?
8. Записати вираз для залишкового члена ряду Маклорена.
9. Яку особливість має залишковий член ряду Тейлора?
10. Розкласти в ряд Маклорена функції  $e^x$ ,  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ .

### 1.4. Глосарій

Похибка	Error
Абсолютна похибка	Absolute error
Відносна похибка	Percentage error
Обчислювальна похибка	Computational error
Методична похибка	Methodic(al) error
Операція округлення	Roundoff
Окіл точки	Point vicinity
Елементарна функція	Elementary function
Дійсна функція	Real-valued function
Аналітична функція	Analytic function
Логарифмічна функція	Logarithmic function
Тригонометрична функція	Trigonometric function
Показникова функція	Exponential function
Гіперболічна функція	Hyperbolic function
Обчислення значення функції	Function calculation
Ряд	Series
Наближення функції за допомогою степеневих рядів	Function approximation by the power series
Залишковий член	Remainder term

Зрізання ряду	Series truncation
Ряд Маклорена	Macluarin series
Ряд Тейлора	Taylor series
Степеневий ряд	Power series
Збіжний ряд	Convergent series
Збіжність ряду	Series convergence
Умова збіжності ряду	Series convergence condition
Розбіжний ряд	Divergent series
Розбіжність ряду	Series divergence
Нескінченний ряд	Infinite series

### 1.5. Біографічна довідка

**Брук Тейлор (Brook Taylor, 1685—1731)** — англійський математик, ім'ям якого названо виведену ним відому формулу, що дозволяє обчислити функцію у вигляді ряду, поданого за зростаючими степенями приросту незалежної змінної.

Йому належить праця «New principle of linear perspective» та великий трактат «Methodus incrementorum directa et inversa», у якому, крім виведення його знаменитої формули, дано теорію коливань струн.

Маючи великі математичні здібності, він також був досить вправним музикантом та успішно займався малярством.

Кінець життя він присвятив дослідженням з питань релігії та філософії.

**Колін Маклорен (Colin Maclaurin, 1698 — 1746)** — видатний англійський математик. Вже у 15-річному віці сформулював декілька теорем, які згодом виклав в одній зі своїх праць.

У 1720 році в Лондоні побачила світ книга Маклорена «Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis», яка одразу поставила її автора в ряд першокласних геометрів епохи.

У 1742 році був опублікований його «Трактат флюкцій», у якому автор спробував заповнити важливу прогалину, пропущену як самими творцями аналізу нескінченно малих Ньютоном і Лейбніцем, так і їх першими послідовниками, яка полягала у відсутності доведень головних тверджень теорії. Доведення, запропоновані Маклореном, відзначаються математичною стрункістю і побудовані за зразком старогрецьких геометрів.