DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 3: Transformada Z

Tiago Barros [1]

[1]⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Programa

Conteúdo

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. e Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 3:
  - Seções 3.0, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5

Material complementar

- B. P. Lathi, Sinais e Sistemas Lineares, Bookman, 2007.
- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky and S. H. Nawab, Sinais e Sistemas, 2a edição, Pearson, 2010.
  - Capítulo 10: Seções 10.0, 10.1, 10.2, 10.3, 10.5, 10.6.

Recapitulando

A Transformada de Fourier para sinais de tempo discreto (TFTD) é dada por:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

Para sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT), com resposta ao impulso $h[n]$, têm-se, da definição de autofunção:

$$h[n] * e^{j\omega n} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Autofunções

Aplicando-se, na entrada do SLIT $h[n]$, a função $x[n] = z^n$, onde $z = re^{j\omega}$, tem-se:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{(n-k)} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \\ &= H(z)z^n \end{aligned}$$

Onde

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}.$$

Observação: $H(z)$ é definida como função de transferência ou função de sistema.

Transformada Z

Definição

A transformada Z da função $x[n]$ é dada por:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad , \quad z \in R_x$$

O domínio R_x é o conjunto dos valores de $z \in \mathbb{C}$ (complexos) para os quais a soma é finita. Também conhecido como região de convergência (RDC).

A transformada Z consiste em uma expressão algébrica na forma de $X(z)$ e uma RDC que explicita onde esta expressão é válida.

Notação:

$$X(z) \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad x[n]$$

Relação com a TFTD

- Transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

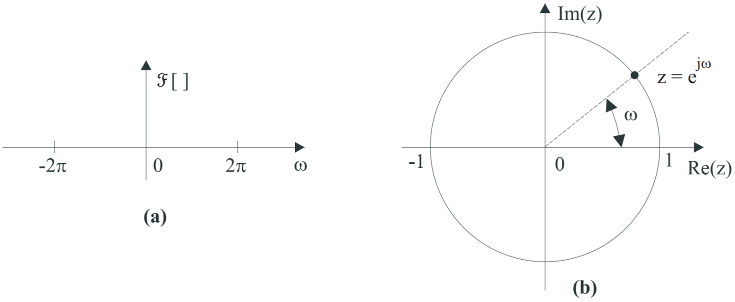
- Transformada Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

- Transformada de Fourier é transformada Z quando $|z| = 1$.

Relação com a TFTD



- TFTD é periódica com período 2π;
- Circunferência de raio unitário (CRU) é ferramenta de análise para sistemas de tempo discreto;

Transformada Z

Por que precisamos da transformada Z?

- A TFTD nem sempre existe (converge);

$$\text{Condição suficiente:} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

- Transformada Z pode existir em casos em que a TFTD não existe;
- Notação mais simples $\Longrightarrow$ polinômios em z;
- Útil para projeto de filtros digitais;

Convergência

- Seja $z = re^{j\omega}$;
- Por definição

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n};$$

- A transformada Z pode ser escrita como

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = X(re^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

$$X(z) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

- Transformada Z converge se $\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$

Exemplo – convergência

Sequência degrau – TFTD

$$u[n] \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] = \infty$$

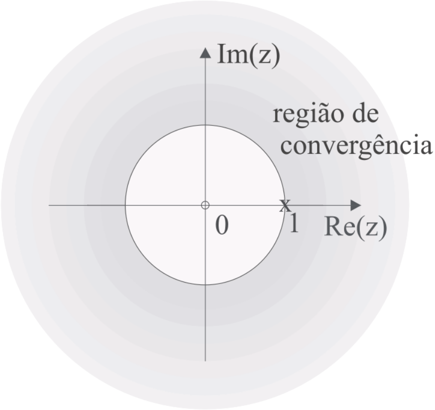
$u[n]$ não possui TFTD.

Determinando a RDC (para $r \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]r^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{1-1/r}, \quad |r| > 1.\end{aligned}$$

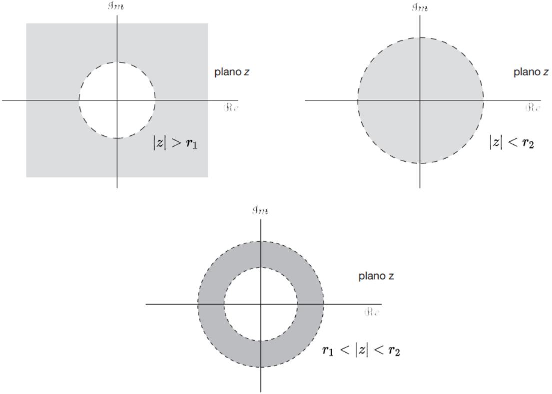
A RDC da transformada Z de $u[n]$ é $|r| > 1$.

Exemplo – convergência



Convergência

Convergência da transformada Z depende apenas de $|z| = r$.



Observação: se RDC incluir CRU ($r = 1$), TFTD existe (converge).

Estabilidade; polos e zeros

Estabilidade

- Se a transformada Z de uma resposta ao impulso de um SLIT, $h[n]$, converge na CRU (TFTD existe), então o sistema é estável.

Polos e zeros

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- $N(z) = 0 \Longrightarrow X(z) = 0$ (raízes de $N(z)$ são os zeros);
- $D(z) = 0 \Longrightarrow X(z) = \infty$ (raízes de $D(z)$ são os polos);

Exemplo – Sequência exponencial lateral direita

Transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$:

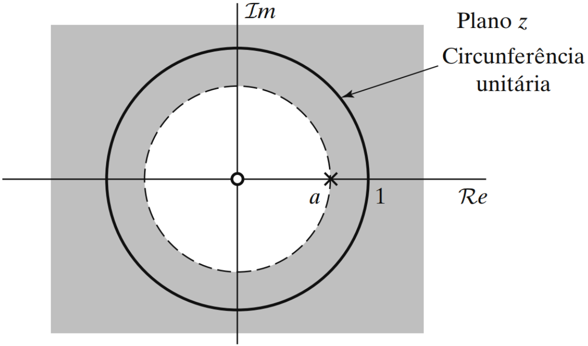
$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n, \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \end{aligned}$$

para

$$|az^{-1}| < 1 \Longrightarrow |z| > |a|$$

Exemplo – Sequência exponencial lateral direita

RDC para $|a| < 1$:



Note que o domínio de existência de $X(z)$ é o exterior do círculo de raio $|a|$ centrado na origem e, portanto, o polo (isto é, a raiz $z = a$ do denominador) não pertence ao domínio.

Exemplo – Sequência exponencial lateral esquerda

Transformada Z de $x[n] = -a^n u[-n-1]$:

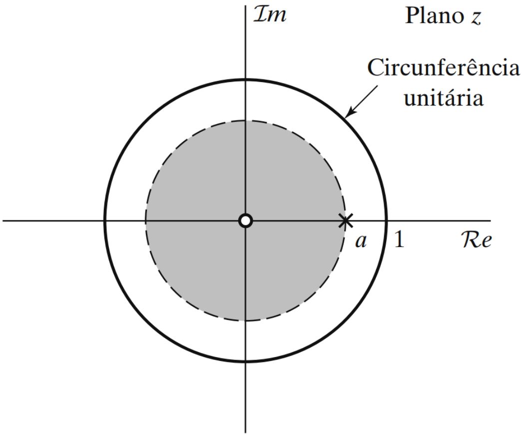
$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n z^{-n} u[-n-1] \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{n} = \frac{-(z/a)}{1-(z/a)} = \frac{z}{z-a}, \end{aligned}$$

para $|z/a| < 1 \Longrightarrow |z| < |a|$.

Observe que a expressão da transformada Z é a mesma da transformada apresentada no exemplo anterior, porém o domínio de convergência é o interior do círculo de raio $|a|$ centrado na origem.

Exemplo – Sequência exponencial lateral esquerda

RDC para $|a| < 1$:



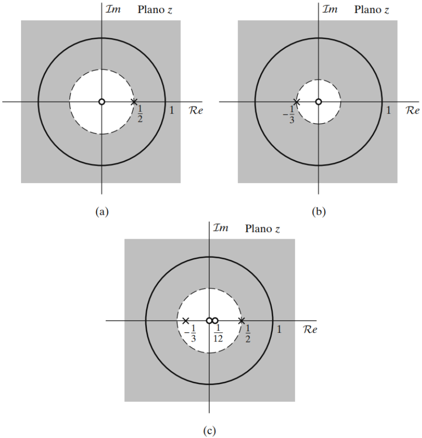
Exemplo – Soma de duas sequências exponenciais

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n].$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n]\right\} z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} z^{-1}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}
\end{aligned}$$

$\mathrm{RDC}_1 : |z| > 1/2$, $\mathrm{RDC}_2 : |z| > 1/3$. $\mathrm{RDC} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 : |z| > 1/2$

Exemplo – Soma de duas sequências exponenciais



Exemplo – Sequência exponencial bilateral

$$x[n] = \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1].$$

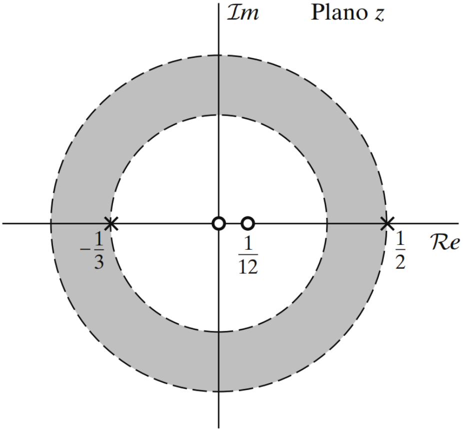
$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > 1/3 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < 1/2. \end{aligned}$$

Pela linearidade da transformada Z

$$X(z) = \frac{2z\left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

RDC : $1/3 < |z| < 1/2$.

Exemplo – Sequência exponencial bilateral



Exemplo – sequência exponencial de duração finita

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \in (0,\ N-1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \frac{1-(a/z)^N}{1-a/z} = \frac{z^N - a^N}{z^N - az^{N-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)} \end{aligned}$$

- N zeros nas raízes de $z^N = a^N$;
- $N-1$ polos em $z = 0$;
- 1 polos em $z = a$;

$$\boxed{\text{Soma de PG: } S = \frac{\text{elemento inicial} - \text{elemento final} \times \text{razão}}{1 - \text{razão}}}$$

Exemplo – sequência exponencial de duração finita

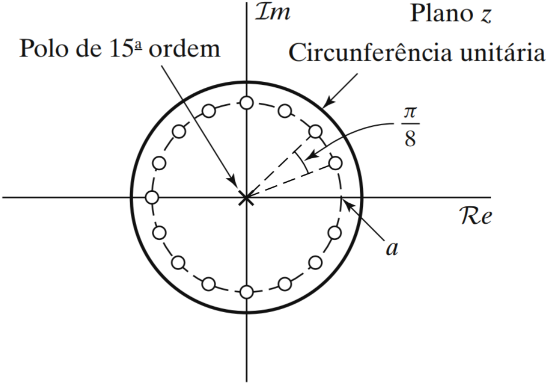
$N = 16$:

- 16 zeros distribuídos na circunferência de raio $|a|$:
    - Raízes do polinômio: $z_k = ae^{j(2\pi k/N)}$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$;
- 1 polo em $z = |a|$;
    - Cancelado por zero em $|z| = a$;
- 15 polos em $z = 0$;

RDC é determinada pelos valores de z em que $\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty \Longrightarrow$ RDC é $|z| > 0$.

Para sequências truncadas, de comprimento finito, RDC é todo o plano z (com possíveis exceções em $|z| = 0$ e $|z| = \infty$).

Exemplo – sequência exponencial de duração finita

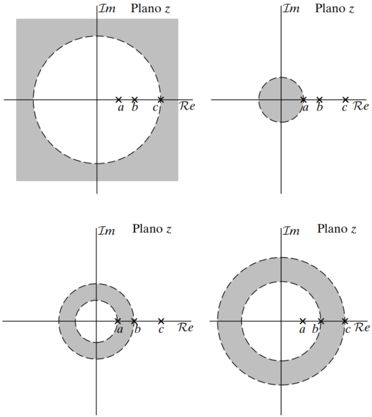


Propriedades da RDC

1) A RDC é um anel ou disco centrado em $z = 0$.
2) A TFTD de $x[n]$ converge em valor absoluto se RDC da TZ de $x[n]$ inclui CRU.
3) A RDC não contém polos.
4) Se $x[n]$ for uma sequência de comprimento finito, RDC é todo o plano z, exceto, possivelmente, $|z| = 0$ e $|z| = \infty$.

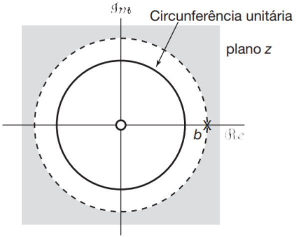
Propriedades da RDC

5) Sequências laterais (direita, esquerda, bilaterais)



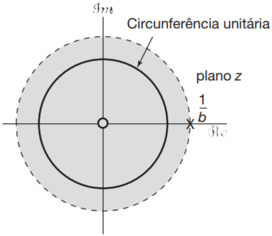
Propriedades da RDC

6) Para sistemas lineares e invariantes no tempo, com função de transferência $H(z)$:
   6.1 Sistema é estável se RDC incluir CRU;
   6.2 Sistema é causal se resposta ao impulso for sequência lateral direita;

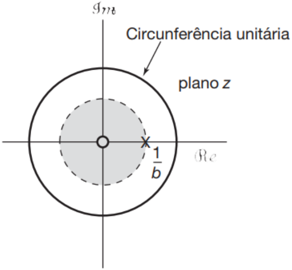


Causal.
Não estável.

Propriedades da RDC



Estável.
Não causal.

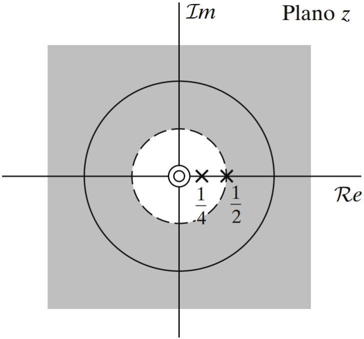


Não estável.
Não causal.

Propriedades da RDC

Cenário desejável:

- RDC se estende para fora, a partir do polo de maior magnitude e todos os polos estão contidos no interior da CRU.



Pares de transformada Z importantes

- $\delta[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} 1$, para todo z;
- $u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$;
- $-u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| < 1$;
- $a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$;
- $-a^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| < |a|$;
- $\cos[\omega_0 n]u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$, $|z| > 1$;
- $r^n \mathrm{sen}[\omega_0 n]u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{(r\mathrm{sen}\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$, $|z| > r$;
- $\begin{cases} a^n, & 0 \le n < N-1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$, $|z| > 0$;

Propriedades da transformada Z

Linearidade

$$\mathcal{Z}\{x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(z) + bX_2(z),$$
$$R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

ou seja, a transformada Z é linear e a região de convergência é no mínimo a interseção das regiões (pode ser maior se na soma aparecerem zeros que cancelem polos).

Exemplo:

$$x[n] = (2)^{n+1}\cos(3n)u[n] = (2e^{j3})^n u[n] + (2e^{-j3})^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2e^{j3}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2e^{-j3}z^{-1}}, \; |z| > 2$$

Propriedades da transformada Z

Deslocamento no eixo n

$$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-n_0]\} = z^{-n_0}X(z),$$
$$R_y = R_x$$

e a região de convergência resultante é igual à região inicial exceto pela adição ou exclusão de $z = 0$ e $z \to \infty$, provocadas pelo termo z^{-n_0}.

Propriedades da transformada Z

Exemplo

Se

$$x[n] = \delta[n] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X(z) = 1,\ \forall z.$$

Então

$$\begin{aligned} \delta[n - n_0] \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad & z^{-n_0}; \\ & \forall z,\ \text{exceto}\ z = 0\ \text{se}\ n_0 > 0, \\ & \text{ou exceto}\ z \to \infty\ \text{se}\ n_0 < 0. \end{aligned}$$

Propriedades da transformada Z

Reflexão no tempo

$$\mathcal{Z}\{y[n] = x[-n]\} = X\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$R_y = \frac{1}{R_x}$$

Exemplo

$$x[n] = \rho^n u[-n]$$

Definimos

$$y[n] = x[-n] = \rho^{-n} u[n] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{z}{z - \rho^{-1}}, \ |z| > \rho^{-1}$$

implicando em

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-1} - \rho^{-1}}, \ |z| < \rho$$

Propriedades da transformada Z

Propriedade da convolução

A transformada Z da convolução de dois sinais é o produto das transformadas, ou seja,

$$\mathcal{Z}\{x[n] = x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z),$$
$$R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Propriedades da transformada Z

Exemplo

$$y[n] = x[n] * x[n], \quad x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= (\delta[n-1] + \delta[n+1]) * (\delta[n-1] + \delta[n+1]) \\ &= \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n] + \delta[n+2] = \delta[n-2] + 2\delta[n] + \delta[n+2] \end{aligned}$$

Ou, por transformada Z

$$Y(z) = (z^{-1} + z)(z^{-1} + z) = z^{-2} + 2 + z^{2}$$

Propriedades da transformada Z

Diferenciação no domínio z

$$\mathcal{Z}\{y[n] = nx[n]\} = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z},$$
$$R_y = R_x$$

exceto pela adição ou exclusão de $z = 0$ ou $z \to \infty$.

Exemplo

$$y[n] = na^n u[n]$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-a}\right) \\ &= \frac{az}{(z-a)^2},\ |z| > |a| \end{aligned}$$

Transformada inversa

Transformada Z inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

- Integral de linha (complexa) para algum $|z| = r$ no contorno dado pela RDC;
- De forma prática, não se calcula integral;
- TZ inversa (procurar por padrões):
  - Método da inspeção;
  - Método de frações parciais;
  - Expansão em série de potências;

Método da inspeção

Sabemos que

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \; |z| > |a|.$$

Vamos calcular a TZ inversa de

$$X(z) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right), \; |z| > 1/2.$$

Por inspeção

$$x[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n].$$

Caso RDC tivesse sido definida por $|z| < 1/2$, teríamos

$$x[n] = -\left(\frac{1}{2} \right)^n u[-n-1].$$

Método de frações parciais

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{z}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}, \ |z| > 2 \\
&= \frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})} \\
&= \frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1-2z^{-1}} \\
&= \frac{A(1-2z^{-1}) + B(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})} \\
&= \frac{(A+B) + (-2A-\frac{1}{3}B)z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})} \\
&= \frac{-3/5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3/5}{1-2z^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$
x[n] = -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{3}{5}(2)^n u[n].
$$

Expansão em série de potências

Sequência de comprimento finito:

$$X(z) = 3z^{-2} + 5z^{-1} - \frac{1}{2} + 3z^{3}, \text{ RDC: } 0 < |z| < \infty.$$

Podemos escrever TZ como

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots + x[-1]z^{1} + x[-2]z^{2} + \cdots \end{aligned}$$

A TZ inversa é

$$x[n] = \begin{cases} 3, & n = -3, \\ -1/2, & n = 0 \\ 5, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou

$$x[n] = -\frac{1}{2}\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n+3].$$

Expansão em série de potências

Divisão longa de polinômios:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \; |z| > |a|.$$

Podemos dividir os polinômios e obter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - az^{-1}} &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a^n u[n]\right) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}
\end{aligned}$$

Como a sequência é lateral direita, podemos identificar o padrão e obter

$$x[n] = a^n u[n].$$

EDLCC

Obter a função de sistema, $H(z)$, a partir da equação a diferenças

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{5}x[n-1].$$

Aplicando-se a TZ

$$Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{5}z^{-1}X(z)$$

De onde obtém-se

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{5}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

Supondo que desejássemos ter uma sequência lateral direita, nesse caso a RDC seria dada por $|z| > 1/4$.

EDLCC

Calcule a resposta a uma entrada degrau unitário, $x[n] = u[n]$.

Como TZ do degrau é

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \ |z| > 1.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{5}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{A}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$