DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 5.1: Amostragem de sinais de tempo contínuo

Tiago Barros [1]

[1]⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Programa

Conteúdo

1. Amostragem de sinais de tempo contínuo (TC);
2. Amostragem periódica;
3. Representação da amostragem no domínio da frequência;
4. Reconstrução de um sinal de banda limitada a partir de suas amostras;

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. e Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 4:
  - Seções 4.0, 4.1, 4.2, 4.3;

Material complementar

- Oppenheim, A.V. e Willsky, A. S., Sinais e Sistemas.
- Lathi, B. P., Sinais e Sistemas Lineares.
- Curso do Prof. Renato Lopes (Unicamp) no Coursera: ⟨https://www.coursera.org/learn/pds⟩;

Amostragem de sinais de TC

Pode-se processar sinais contínuos no tempo através da seguinte abordagem:

- Amostragem no tempo;
- Processamento em tempo discreto;
- Reconstrução do sinal em tempo contínuo;

Amostragem periódica

$\Longrightarrow$ Método mais comum de obter-se sinais de tempo discreto;

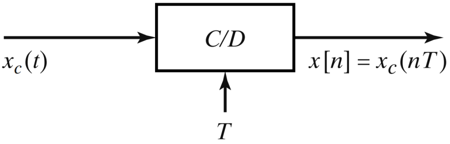
$\Longrightarrow$ Obtém-se sequência de amostras, $x[n]$, do sinal contínuo no tempo, pela relação

$$x[n] = x_c(nT), \; -\infty < n < \infty;$$

- T é o período de amostragem em segundos;
- Define-se $f_s = 1/T$ como a frequência de amostragem, em amostras por segundo;
- Forma alternativa (angular) – frequência de amostragem (analógica):
    - $\Omega_s = 2\pi/T$ rad/s;

Amostragem periódica

Define-se sistema conversor ideal, de tempo contínuo para tempo discreto (conversor C/D):



$\Longrightarrow$ Sistema prático que implementa a amostragem é o conversor analógico digital (A/D);

$\Longrightarrow$ É uma aproximação do conversor C/D ideal:

- Amostrador em tempo;
- Amostrador em amplitude;

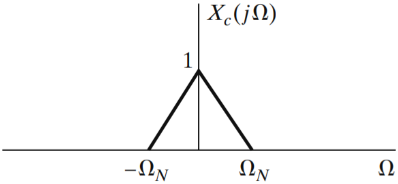
Amostragem periódica

$\Longrightarrow$ Operação de amostragem é não-inversível: $x[n]$ não é suficiente para recuperar $x_c(t)$

- Muitos sinais contínuos possuem mesma saída discreta (ambiguidade);
- Pode-se remover ambiguidade restringindo sinal de entrada no amostrador;
  - Restrição na frequência $\Longrightarrow$ $x_c(t)$ é sinal de banda limitada.

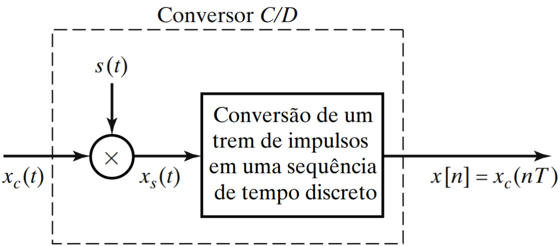
Sinal de banda limitada

Um sinal é de banda limitada se para alguma frequência Ω_N, temos que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$.



Amostragem periódica

$\Longrightarrow$ Representação matemática da amostragem:



Amostragem periódica

Define-se o trem de impulsos como:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac (impulso unitário).

Produto $x_s(t)$ é

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

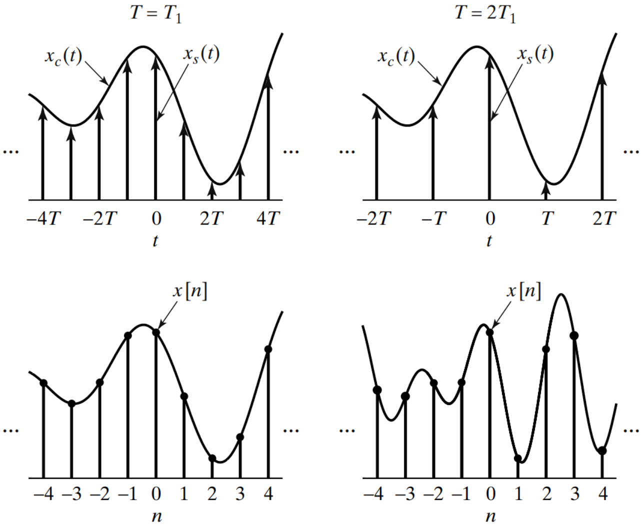
Pode-se mostrar que este produto é

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT).$$

$\Longrightarrow$ Modulação de trem de impulsos:

- Representação matemática da amostragem.

Amostragem periódica



Amostragem periódica

Diferenças entre $x_s(t)$ e $x[n]$:

- $x_s(t)$: sinal de tempo contínuo nulo, exceto nos múltiplos inteiros de T;
- $x[n]$: sequência indexada na variável n; não contém informações implícitas sobre período de amostragem T; amostras são números finitos;

Representação da amostragem no domínio da frequência

Como

$$x_s(t) = x_c(t)s(t),$$

temos que, pela TFTC:

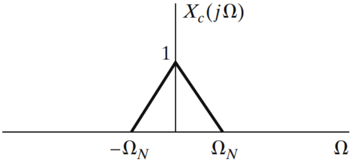
$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega).$$

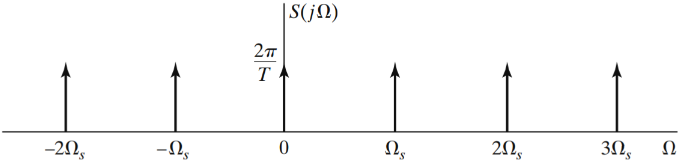
A TFTC de $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ é dada por

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s),$$

onde $\Omega_s = 2\pi/T$.

Representação da amostragem no domínio da frequência





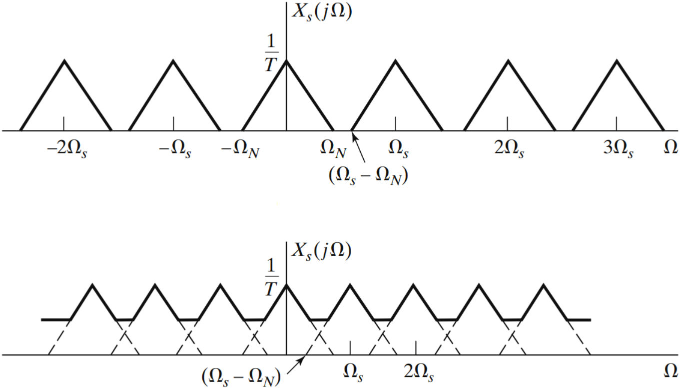
Representação da amostragem no domínio da frequência

Temos que

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j(\Omega - k\Omega_s)\right). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow X_s(j\Omega)$ são cópias periódicas da TF de $x_c(t)$, $X_c(j\Omega)$;

Representação da amostragem no domínio da frequência



Representação da amostragem no domínio da frequência

$\Longrightarrow$ Essas cópias são deslocadas em múltiplos inteiros de Ω_s e depois sobrepostas para formar espectro $X_s(j\Omega)$;

$\Longrightarrow$ Se espectro de $X_c(j\Omega)$ for limitado em $\pm\Omega_N$, para não haver sobreposição espectral devemos ter:

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N$$

ou

$$\Omega_s > 2\Omega_N.$$

$\Longrightarrow$ Se $\Omega_s \leq 2\Omega_N$:

- Haverá sobreposição espectral entre as cópias de $X_c(j\Omega)$ (distorção de *aliasing*);
- Não será mais possível recuperar $X_c(j\Omega)$ a partir de $X_s(j\Omega)$;

Representação da amostragem no domínio da frequência

$\Longrightarrow$ Podemos recuperar $x_c(t)$ a partir de $x_s(t)$ com um filtro passa-baixas (FPB) analógico ideal, com ganho T e frequência de corte Ω_c, tal que

$$\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$$

e

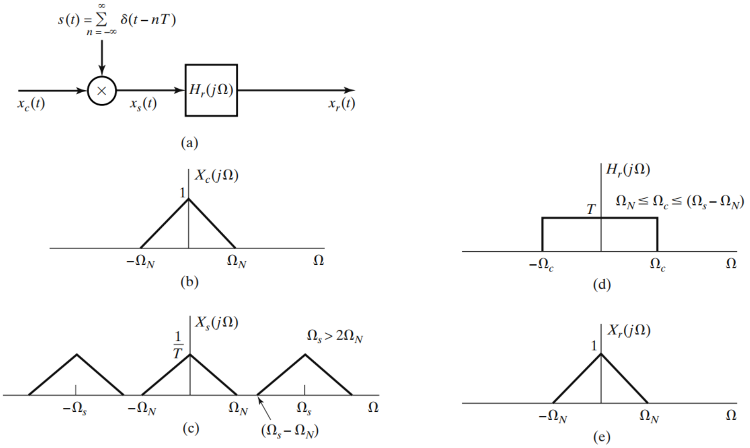
$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega)$$

onde:

- $X_r(j\Omega)$ é o sinal recuperado;
- $H_r(j\Omega)$ é o FPB analógico ideal;

$\Longrightarrow$ Nesse caso, $X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega)$.

Representação da amostragem no domínio da frequência



Representação da amostragem no domínio da frequência

Exemplo

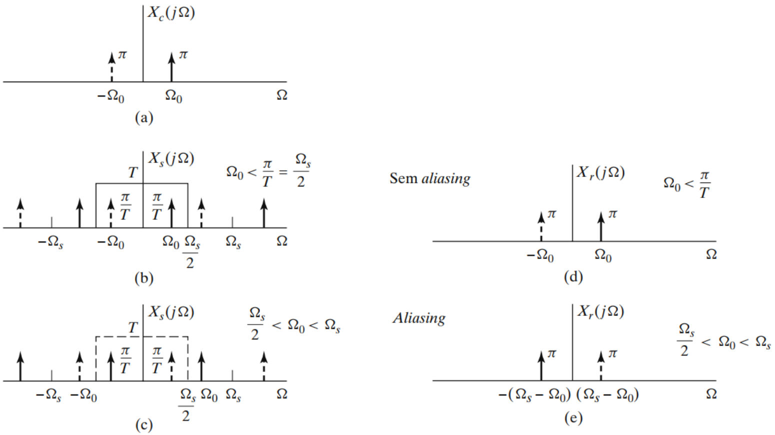
$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t),$$

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0).$$

Duas situações:

- $\Omega_0 < \Omega_s/2$;
- $\Omega_s/2 < \Omega_0 < \Omega_s$;

Representação da amostragem no domínio da frequência



Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

Teorema da amostragem

Seja $x_c(t)$ um sinal de banda limitada com $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$.

Então, $x_c(t)$ é unicamente representado por suas amostras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, se

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N,$$

onde:

- $2\Omega_N$ é a frequência de Nyquist, ou seja, frequência que deve ser excedida por Ω_s;

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

Para obter a TFTD, $X(e^{j\omega})$, de $x[n]$, em termos de $X_s(j\Omega)$ e $X_c(j\Omega)$, lembramos que:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT).$$

Podemos escrever sua TFTC como:

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \right) e^{-j\Omega t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega Tn}. \end{aligned}$$

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

Como $x[n] = x_c(nT)$ e $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$, segue que:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}).$$

Como

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j(\Omega - k\Omega_s)\right),$$

Temos

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)).$$

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

De modo equivalente

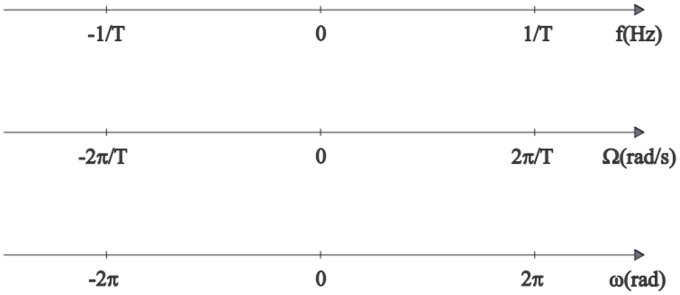
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right].$$

$\Longrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ é uma versão de $X_s(j\Omega)$ com mudança de escala na frequência, com fator de escala especificado por $\omega = \Omega T$;

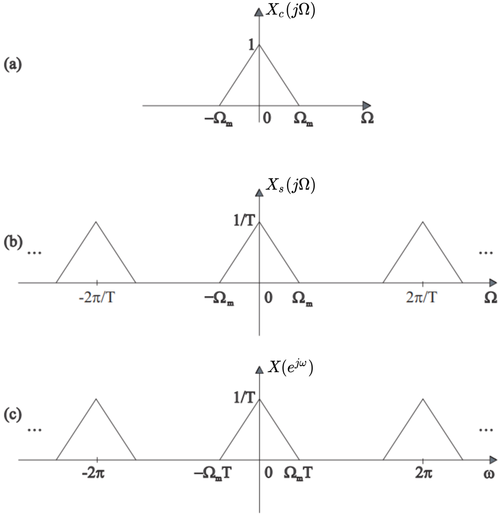
$\Longrightarrow$ Normalização do eixo da frequência:

- $\Omega = \Omega_s$ em $X_s(j\Omega)$ normalizada para $\omega = 2\pi$ em $X(e^{j\omega})$;
- É um resultado direto da normalização do tempo na transformação de $x_s(t)$ para $x[n]$;

Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon



Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon



Reconstrução de um sinal de banda limitada

$\Longrightarrow$ Se sinal for amostrado respeitando-se o teorema da amostragem, ele pode ser recuperado a partir de suas amostras, conhecendo-se o período de amostragem. Esta afirmação pode ser ilustrada da seguinte forma, fazendo uso do trem de impulsos:

Dado $x[n]$, forma-se $x_s(t)$ a partir de um trem de impulsos:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT),$$

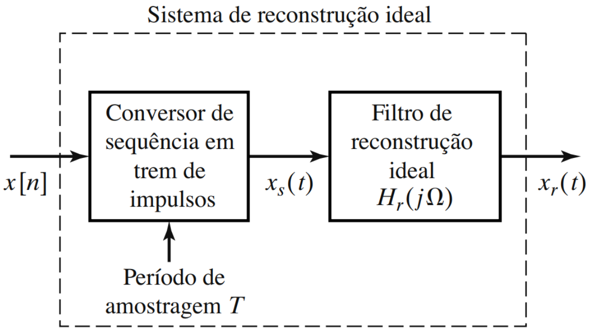
onde a n-ésima amostra está associada ao impulso em $t = nT$, sendo T o período de amostragem da sequência $x[n]$.

Se trem de impulsos for entrada para um FPB ideal com resposta em frequência $H_r(j\Omega)$, a saída do filtro aplicado ao sinal $x_s(t)$ é

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT).$$

Reconstrução de um sinal de banda limitada

Representação por diagrama de blocos:



Reconstrução de um sinal de banda limitada

Filtro de reconstrução ideal, $H_r(j\Omega)$: $\Longrightarrow$ Ganho T;

$\Longrightarrow$ Frequência de corte Ω_c:

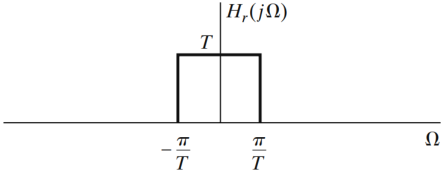
- $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$;
- Valor conveniente apropriado para qualquer relação entre Ω_s e Ω_N que evite *aliasing*:

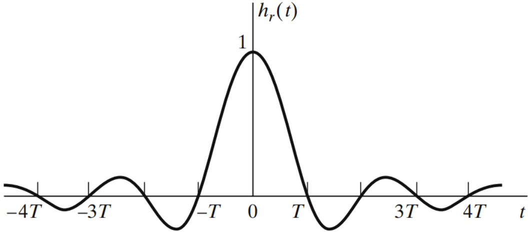
$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

$\Longrightarrow$ Resposta ao impulso do filtro:

$$h_r(t) = \frac{sen(\pi t/T)}{\pi t/T},$$

Reconstrução de um sinal de banda limitada





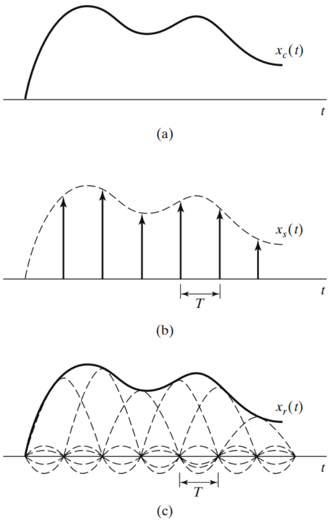
Reconstrução de um sinal de banda limitada

O sinal reconstruído é dado por

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{sen(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}.$$

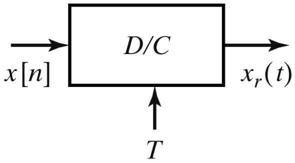
$\Longrightarrow$ Pode-se mostrar que $x_r(t)$ é uma versão reconstruída de $x_c(t)$, onde o sinal é interpolado entre as amostras de $x[n]$.

Reconstrução de um sinal de banda limitada



Reconstrução de um sinal de banda limitada

Sistema equivalente para conversor de tempo discreto para tempo contínuo:



Representa operações de:

- Conversão da sequência em trem de impulsos;
- Filtragem por um FPB ideal;

Reconstrução de um sinal de banda limitada

Como $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT)$, temos que

$$
\begin{aligned}
X_r(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT) \right) e^{-j\Omega t} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_r(t-nT) e^{-j\Omega t} \mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_r(j\Omega) e^{-j\Omega T n} \\
&= H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T}).
\end{aligned}
$$

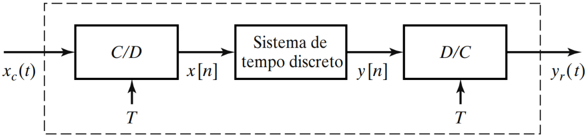
Reconstrução de um sinal de banda limitada

$\Longrightarrow$ Descrição de conversão ideal D/C no domínio da frequência:

- Em $X(e^{j\omega})$, faz-se uma mudança na escala da frequência (ω para ΩT);
- FPB ideal $H_r(j\Omega)$:
  - Seleciona período de base da TF periódica resultante $X(e^{j\Omega T})$;
  - Compensa fator $1/T$ inerente à amostragem;

$\Longrightarrow$ Se sequência $x[n]$ foi obtida pela amostragem na taxa de Nyquist, ou maior, de um sinal com banda limitada, o sinal reconstruído, $x_r(t)$, será igual ao sinal com banda limitada original;

Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo



Como vimos:

- $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$;
- $y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\text{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$,

  ou $Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo

Resposta em frequência de sistema em TD:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}).$$

Sinal reconstruído é

$$\begin{aligned} Y_r(j\Omega) &= H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) \\ &= H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}) \\ &= H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \end{aligned}$$

Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo

$\Longrightarrow$ Se $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \pi/T$, então:

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

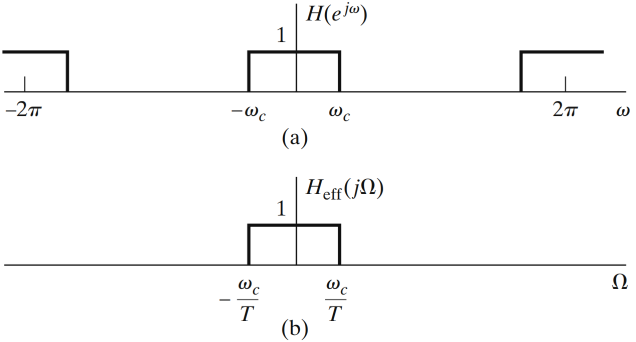
Então a resposta em frequência efetiva, em TC, é dada por:

$$Y_r(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)X_c(j\Omega),$$

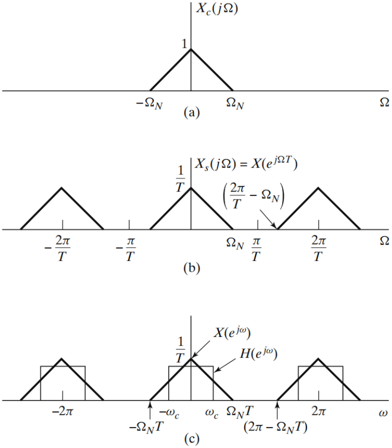
com

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

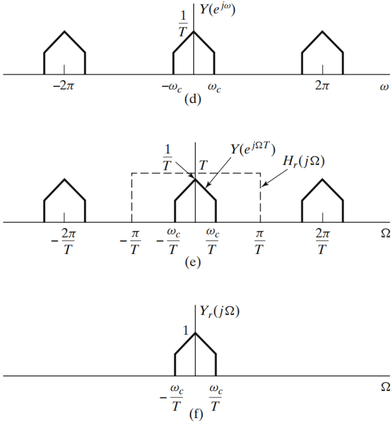
Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo



Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo



Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo



Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo

$\Longrightarrow$ Frequência de corte discreta ω_c;

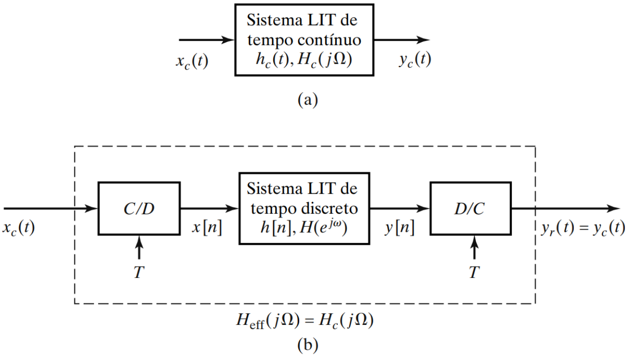
$\Longrightarrow$ Frequência de corte contínua ω_c/T;

Estratégia para projetar filtro contínuo em TD:

- Sistema em TD deve ser LIT;
- Sinal de entrada deve ser amostrado a uma taxa superior à taxa de Nyquist;

Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo

Relação entre resposta ao impulso em TC e TD:



Processamento em tempo-discreto de sinais em tempo-contínuo

Relação entre resposta ao impulso em TC e TD (demonstração no livro):

Propriedade da invariância da resposta ao impulso

$$h[n] = T\, h_c(nT)$$

Quando $h[n]$ e $h_c(t)$ relacionam-se por meio desta propriedade, o sistema de tempo discreto é considerado uma versão invariante ao impulso do sistema de tempo contínuo.