DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 2: Transformada de Fourier de tempo discreto

Tiago Barros [1]

[1] ⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Tópico 2 – Programa

Conteúdo

1. Representação no domínio da frequência de sinais de tempo discreto;
   1.1 Resposta em frequência de sistemas discretos LIT;
2. Representação de sequências por transformadas de Fourier;
   2.1 Transformada de Fourier para sequências de tempo discreto;
   2.2 Propriedades e teoremas da transformada de Fourier;

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. e Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 2:
  - Seções 2.6, 2.7, 2.8, 2.9.

Material complementar

- Lathi, B. P., Sinais e Sistemas Lineares.
- Oppenheim, A.V. e Willsky, A. S., Sinais e Sistemas.

Resposta em frequência de sistemas discretos LIT

Seja um SLIT com saída

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Considere a entrada senoidal $x[n] = e^{j\omega n}$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega n}e^{-j\omega k} \\ &= e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}. \end{aligned}$$

Resposta em frequência de sistemas discretos LIT

Definindo

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}.$$

Obtém-se

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

- $H(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência do sistema:
  - Número complexo (constante): escalonamento em amplitude e deslocamento na fase da entrada.
- $e^{j\omega n}$ é uma autofunção de sistemas LIT:
  - $H(e^{j\omega})$ é o autovalor associado a $e^{j\omega n}$.

Periodicidade em ω

$H(e^{j\omega})$ é periódico em ω com período 2π:

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}$$

$e^{\pm j2\pi n} = 1$ para n é inteiro. Logo

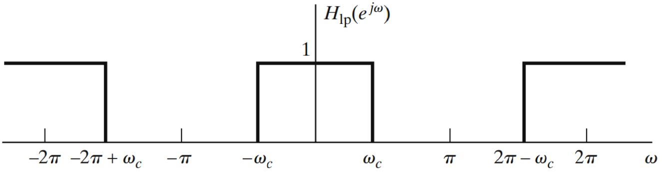
$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H(e^{j\omega}), \text{ para todo } \omega.$$

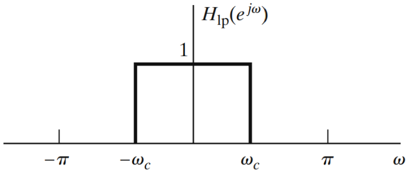
Generalizando

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = H(e^{j\omega}), \text{ para } r \text{ inteiro.}$$

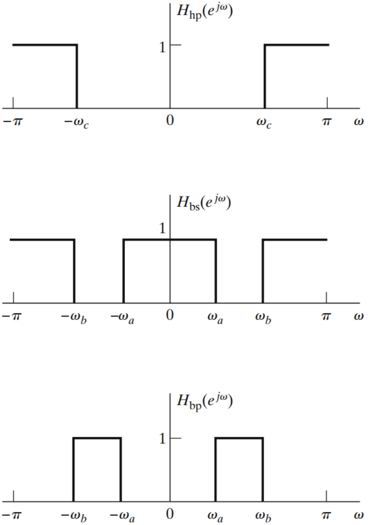
- $\omega = 0 \longrightarrow$ baixas frequências;
- $\omega = \pi \longrightarrow$ altas frequências;

Exemplos de Resposta em Frequência

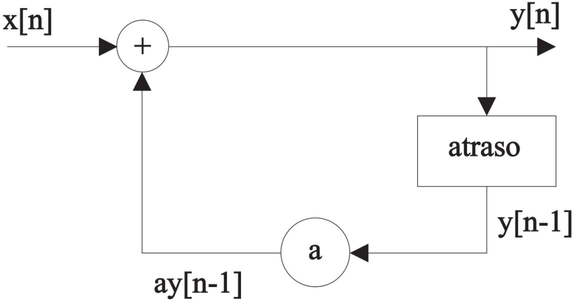




Exemplos de Resposta em Frequência



Sistema com realimentação



$$y[n] = x[n] + ay[n-1]$$

Condições iniciais nulas: $y[n] = 0$ para $n < 0$ (causal).

Sistema com realimentação

Entrada $\delta[n]$

$$\begin{aligned} h[0] = \delta[0] + ah[-1] = \delta[0] \quad &\longrightarrow \quad h[0] = 1, \\ h[1] = \delta[1] + ah[0] = ah[0] \quad &\longrightarrow \quad h[1] = a, \\ h[2] = \delta[2] + ah[1] = ah[1] \quad &\longrightarrow \quad h[1] = a^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$h[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1.$$

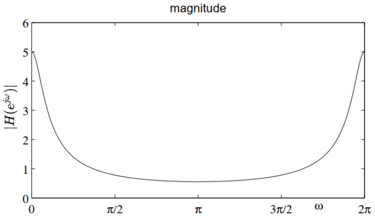
Sistema com realimentação

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\
&= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.
\end{aligned}
$$

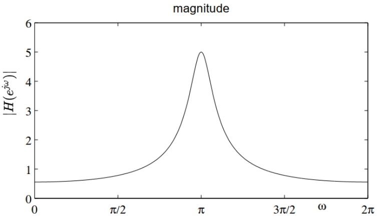
- $H(e^{j\omega})$ pode ser dividido em respostas em:
  - Magnitude: $|H(e^{j\omega})|$ (ou $|H(e^{j\omega})|^2$)
  - Fase: $\angle H(e^{j\omega})$

Sistema com realimentação

Passa-baixas: $a = 0,8$.

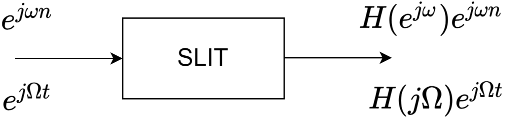


Passa-altas: $a = -0,8$.



Domínio da frequência

- Representação natural de alguns sinais (som) e sistemas (filtro passa-baixas);
- Fácil de estimar em laboratório;
- Pode facilitar cálculos:
  - Integração $\Longleftrightarrow$ divisão;
  - Convolução $\Longleftrightarrow$ produto;
  - Permite caracterizar sistemas lineares e invariantes no tempo;



Transformada de Fourier de tempo discreto – TFTD

- Todo sinal prático pode ser escrito como uma sobreposição de senóides.
- Para sequências discretas: transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD ou *DTFT*)
- Representações:
  - $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$;
  - $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$;
  - $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$;

Transformada de Fourier de tempo discreto – TFTD

- Transformada de Fourier de tempo-contínuo (TFTC):
  - $X_c(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_c(t)\} \triangleq \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t;$
  - $x_c(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_c(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega;$
  - Ω: frequência contínua em rad/s.
- Transformada de Fourier de tempo-discreto (TFTD):
  - $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \triangleq \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n};$
  - $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega;$
  - ω: frequência discreta em rad (ou rad/amostra);
  - Periódica em ω com período 2π.

Existência da TFTD (convergência da soma infinita)

- Somabilidade em valor absoluto:
  - Condição suficiente;
  - Sequências estáveis possuem TFTD;

$$X(e^{j\omega}) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \text{ para todo } \omega.$$

- Sequências quadraticamente somáveis:
  - Relaxamento da condição de convergência;
  - Quadraticamente somáveis;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty.$$

Filtro passa-baixas ideal

FPB ideal

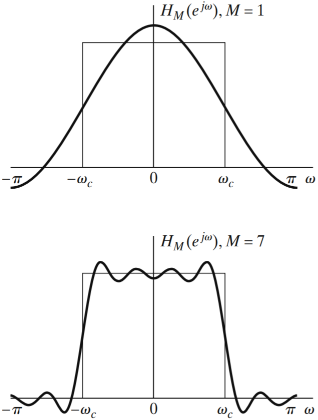
$$H_{\mathrm{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{lp}}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j n}\left[e^{j\omega n}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n}(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \\ &= \frac{\mathrm{sen}[\omega_c n]}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

TFTD não converge ($n \longrightarrow \infty$). Utiliza-se a soma de número finito de parcelas, M:

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\mathrm{sen}[\omega_c n]}{\pi n} e^{-j\omega n}.$$

Filtro passa-baixas ideal



Linearidade, Parseval e Convolução

Linearidade

$$\mathcal{F}\{ax[n] + by[n]\} \longleftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$$

Parseval

$$\text{Energia de } x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \mathrm{d}\omega$$

Convolução

- Definição: $c[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$
- Propriedade: $x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

Convolução

Propriedade da convolução:

- Convolução no tempo $\longleftrightarrow$ produto em frequência;
- $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$;

Função de transferência (resposta em frequência):

- TFTD de $h[n]$.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}.$$

TFTD inversa para obter $h[n]$.

Deslocamento no tempo:

Se $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ então $x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$

Demonstração:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega(k+n_0)} = X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

Aplicação: função de transferência

$$y[n] = x[n] + ay[n-1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) + ae^{-j\omega}Y(e^{j\omega})$$

$$\Longrightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Deslocamento em frequência:

Se $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ então $e^{-j\omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega+\omega_0)})$

Demonstração:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j(\omega+\omega_0)n} = X(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

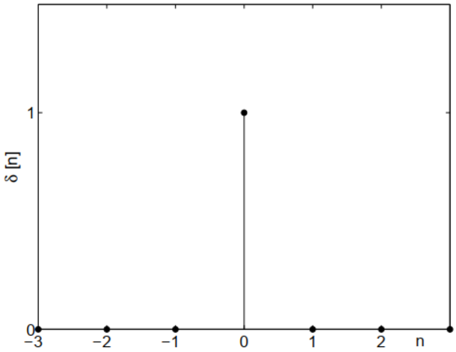
Aplicação: modulação

Como $\cos[\omega_0 n] = \frac{e^{j\omega_0 n}}{2} + \frac{e^{-j\omega_0 n}}{2}$

então $x[n]\cos[\omega_0 n] \longleftrightarrow \frac{X(e^{j(\omega-\omega_0)})}{2} + \frac{X(e^{j(\omega+\omega_0)})}{2}$

Impulso unitário

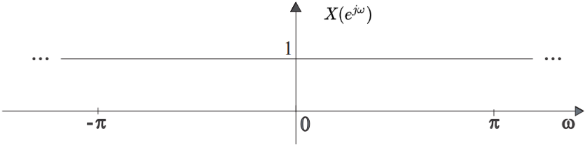
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$



Impulso unitário

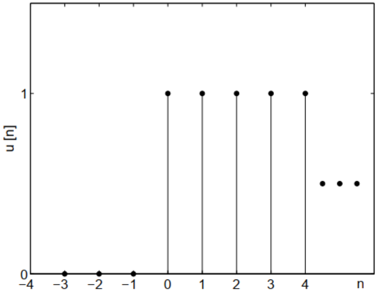
Seja $x[n] = \delta[n]$:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} \\ &= 1. \end{aligned}$$



Degrau unitário

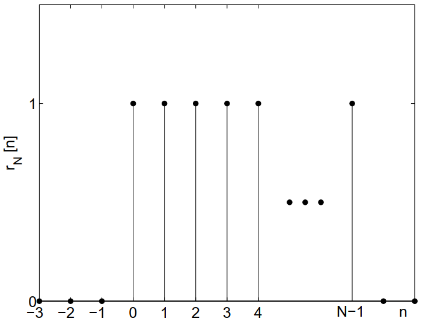
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$



- Não possui transformada de Fourier.

Pulso retangular

$$r_N[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

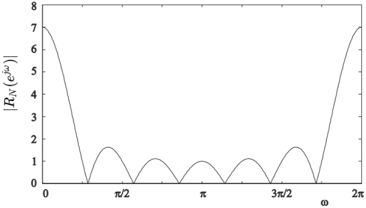


Pulso retangular

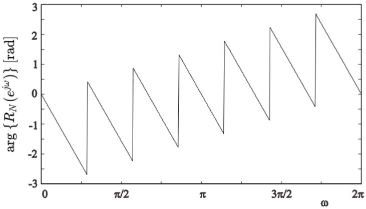
$$
\begin{aligned}
R_N(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_N[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{e^{-jN\omega/2}(e^{jN\omega/2} - e^{-jN\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\
&= e^{-j(N-1)\omega/2}\frac{\text{sen}(N\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\text{Soma de PG: } S = \frac{\text{elemento inicial} - \text{elemento final} \times \text{razão}}{1 - \text{razão}}}
$$

Pulso retangular



(a)

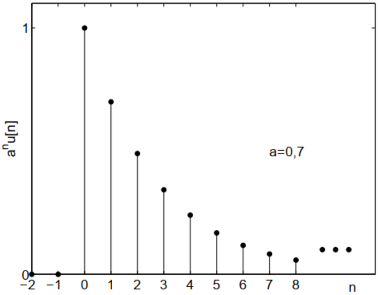


(b)

Exponencial

$$x[n] = a^n u[n],$$

para a constante real e $|a| < 1$.



Exponencial

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$