DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 6: Projeto de filtros digitais

Tiago Barros [1]

[1] ⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Programa

Conteúdo

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. Tradução Daniel Vieira. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 7:
  - Seções 7.0, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6.

Técnicas de projeto de filtros de tempo discreto

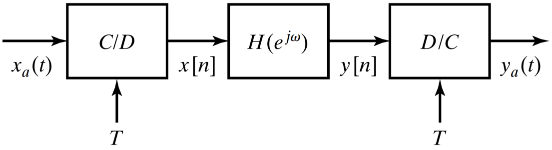
Foco em filtros passa-baixas (FPB), seletivos em frequência, causais.

Estágios de projeto de filtros de tempo discreto

- Especificação das propriedades desejadas do sistema;
  - Resposta em frequência;
  - Estrutura (FIR ou IIR, número de coeficientes);
- Aproximação das especificações usando sistema causal discreto;
  - Determinação dos coeficientes;
  - Precisão finita;
- Realização do sistema;
  - Implementação por meio de diagramas de estruturas discretas;

Técnicas de projeto de filtros de tempo discreto

Sistema discreto para filtragem de sinais contínuos:



Resposta em frequência de um FPB de tempo contínuo

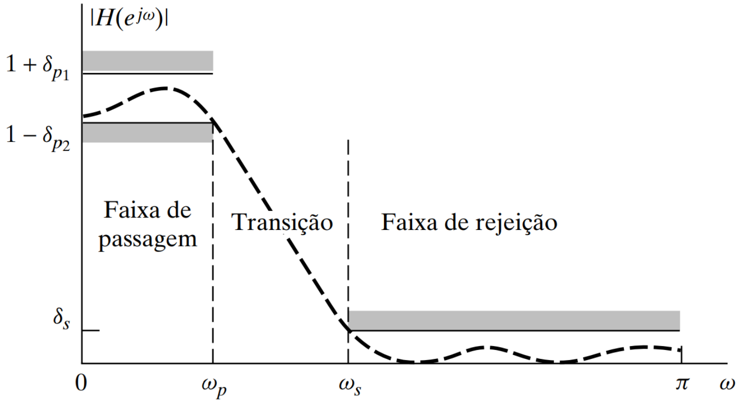
$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

Para o sinal discreto no tempo, $\omega = \Omega T$, logo:

$$H(e^{j\omega}) = H_{\text{eff}}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi$$

Técnicas de projeto de filtros de tempo discreto

Máscara da resposta em amplitude:



Filtros FIR

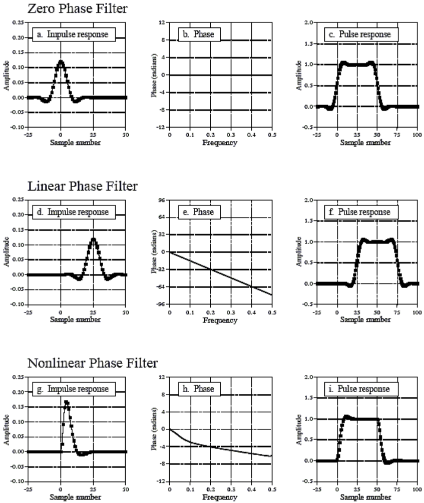
Filtros FIR:

- Fase linear;
- Estáveis;
- Baixa sensibilidade a erros de arredondamento;
- Resposta ao impulso $h[n]$ diretamente ligada aos coeficientes;

Desafio

- Resposta em frequência desejada $H_d(e^{j\omega})$ leva a resposta ao impulso $h_d[n]$ de duração infinita.
- Que $h[n]$ **finito** melhor aproxima $h_d[n]$?

Filtros FIR

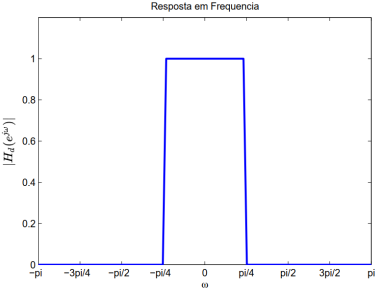


Fonte:

⟨http://www.dspguide.com/ch19/4.htm⟩

- Não causa distorção de fase, apenas atraso;
- Simetria na resposta:
  - Exigido por comunicações e processamento de imagem;
- Implementado com metade das multiplicações;

Exemplo: Filtro passa-baixas ideal



Problemas

- Resposta de duração infinita;
- Não causal;

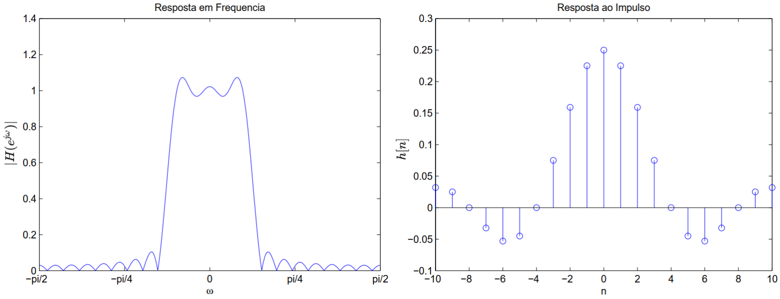
Característica desejável

- Fase zero;

Truncando a resposta

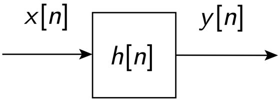
Ideia para resposta ao impulso finita:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & |n| < M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Causalidade

Truncamento ainda não é causal:



$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-10}^{10} x[n-k]h[k] \\
&= x[n+10]h[-10] + x[n+9]h[-9] + \cdots + x[n-10]h[10]
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ $y[n]$ depende de valores futuros de $x[n]$;

$\Longrightarrow$ Não pode ser implementado em tempo real;

Atraso e causalidade

Solução causal:

- Desloca $h[n]$ de 10 amostras para a direita:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n-10], & 0 \leq n \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 10} H_{\text{truncado}}(e^{j\omega})$$

$\Longrightarrow$ Mesma magnitude;

$\Longrightarrow$ Fase linear: $-10\,\omega$;

Resposta ao impulso de filtro passa-baixas

Se resposta em frequência de FPB ideal é dada por

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

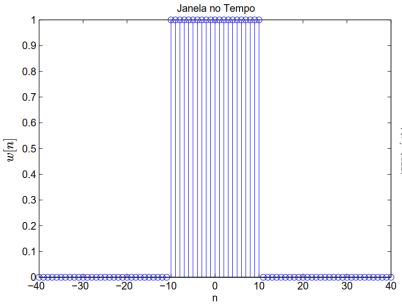
Obtém-se

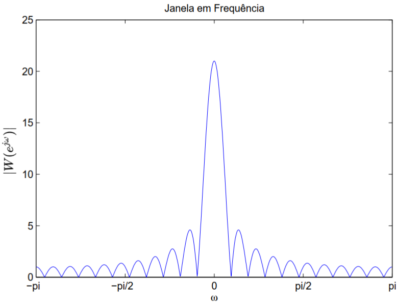
$$h_d[n] = \frac{\text{sen}[\omega_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)}.$$

Explicando transição e oscilações

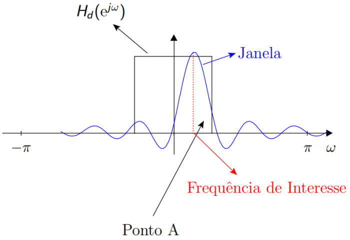
$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$



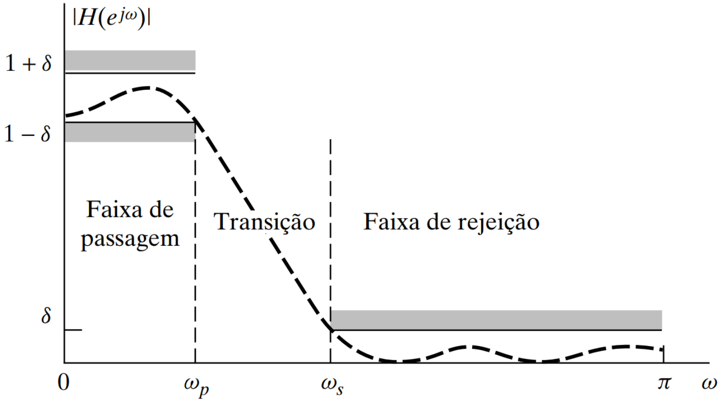


Explicando transição



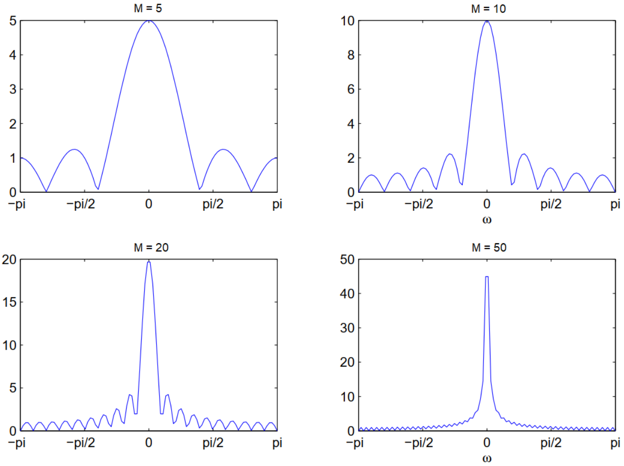
- Ponto A: área começa a diminuir
  - Começo da transição.
- Ponto B: área termina de diminuir
  - Fim da transição.
- Largura da faixa de transição depende da largura do lóbulo central ($\approx 4\pi/M$ para janela retangular);
- $H(e^{j\omega_c}) \approx 1/2$
  - Em geral, usa-se $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$.

Técnicas de projeto de filtros de tempo discreto

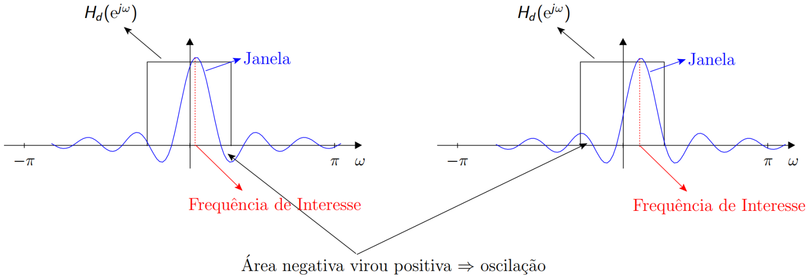


Melhorando transição

Aumenta tamanho da janela, diminui transição



Explicando oscilações



- Amplitude das oscilações depende da área dos lóbulos laterais
  - Igual nas faixas de passagem e rejeição.
- Para janela retangular, não depende de M
- Solução: outras janelas

Outras janelas: definição

$$\text{Barlett (triangular)} \;\; w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \le n \le M/2,\ M \text{ par} \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

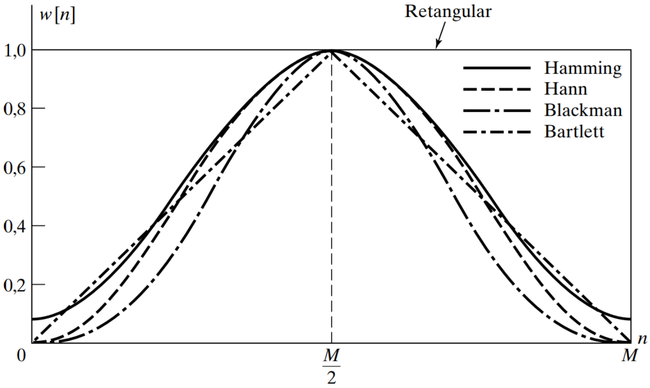
$$\text{Hanning} \;\; w[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Hamming} \;\; w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

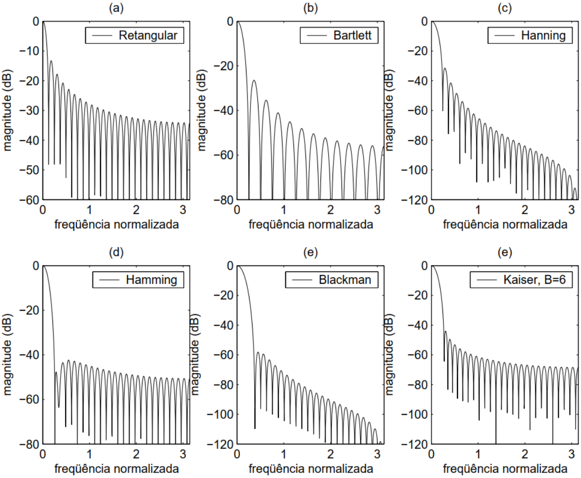
Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos(2\pi n/M) + 0,08\cos(4\pi n/M), & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outras janelas: tempo



Outras janelas: frequência



Outras janelas: características

Tipo de janela	Amplitude do lóbulo lateral (dB)	Largura aproximada do lóbulo central	Oscilação máxima aprox. (dB)
Retangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74

Exemplo

Projetar um filtro passa-baixas com:

- Frequência de corte $\omega_c = \pi/2$;
- Largura da região de transição $\Delta\omega \leq 0,2\pi$;
- Erro máximo na faixa de passagem de $0,02$;
- Erro máximo na faixa de rejeição de $0,01$;

Faixa de passagem $\Longrightarrow$ oscilação $< 20\log_{10}(0,02) = -34$ dB;

Faixa de rejeição $\Longrightarrow$ oscilação $< 20\log_{10}(0,01) = -40$ dB;

Janela com menor transição que melhor satisfaz oscilação: **Hamming**;

$$8\pi/M \leq 0,2\pi \Longrightarrow M \geq 40$$

Exemplo

Coeficientes do filtro são dados por

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\text{sen}[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} w[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $w[n]$ são os coeficientes da janela de Hamming;
- $\alpha = M/2 = 20$;

Janela de Kaiser

Projeto com janelas tradicionais envolve tentativa e erro.

Alternativa: Janela de Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left\{\beta\left[1-\left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Parâmetros:

- $\alpha = M/2$;
- $I_0(x)$: função de Bessel modificada de 1^a espécie e ordem zero;
- M: largura do filtro;
- β: altera a forma da janela, podendo até aproximar outras janelas;

Janela de Kaiser: características

β escolhido para a mesma oscilação

Tipo de janela	Amplitude do lóbulo lateral (dB)	Largura aprox. do lóbulo central	Osc. máxima aprox. (dB)	Janela de Kaiser equiv. β	Transição janela Kaiser equiv.
Retangular	-13	$\frac{4\pi}{M+1}$	-21	0	$1{,}81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1,33	$2{,}37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3,86	$5{,}01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4,86	$6{,}27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7,04	$9{,}19\pi/M$

$\boxed{\text{Kaiser tem transição menor}}$

Projeto com a janela de Kaiser

Sejam $A = -20\log_{10}\delta$ e $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7), & A > 50 \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A - 8}{2,285\Delta\omega}$$

Exemplo

Projetar um filtro passa-baixas com:

- Faixa de passagem até $\omega_p = 0,4\pi$;
- Frequência de rejeição $\omega_s = 0,6\pi$;
    - Largura da região de transição $\Delta\omega \leq 0,2\pi$;
- erro máximo na faixa de passagem de $0,01$;
- erro máximo na faixa de rejeição de $0,001$;

Menor oscilação: $20\log_{10}(0,001) = -60$ dB.

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0,2\pi$$

$\Longrightarrow \beta = 5,653;\ M = 37.$

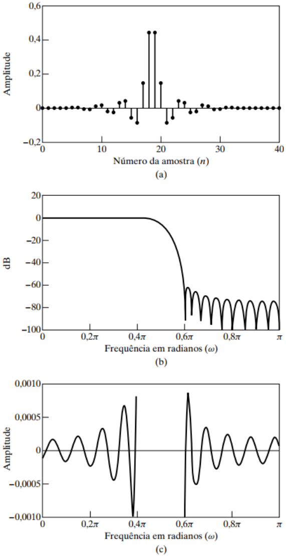
Exemplo

Coeficientes do filtro são dados por

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\text{sen}[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} w[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $w[n]$ são os coeficientes da janela de Kaiser;
- $\alpha = M/2 = 18,5$;

Resultado

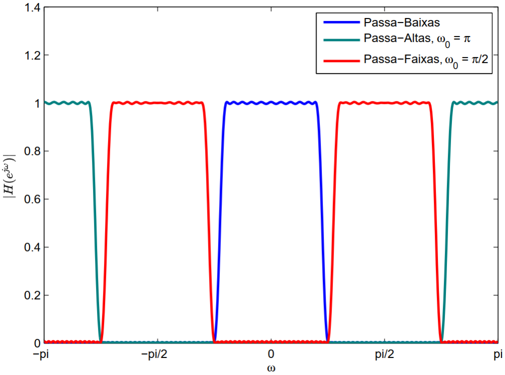

0,6
0,4
0,2
0
−0,2
Amplitude
0
10
20
30
40
Número da amostra (n)
(a)
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
dB
0
0,2π
0,4π
0,6π
0,8π
π
Frequência em radianos (ω)
(b)
0,0010
0,0005
0
−0,0005
−0,0010
Amplitude
0
0,2π
0,4π
0,6π
0,8π
π
Frequência em radianos (ω)
(c)

Outros filtros

Deslocamento em frequência: $h[n]e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow H\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$;

$$\Longrightarrow 2h[n]\cos(\omega_0 n) \longleftrightarrow H\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + H\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right);$$

Para passa-faixas ou passa-altas, escolhe-se ω_0 adequado:



Projeto de filtros IIR de tempo discreto por mapeamento TC-TD

- Baseado no projeto de um filtro de tempo contínuo;
- Especificações de filtro de tempo discreto são obtidas através de especificações de filtro de tempo contínuo por alguma transformação;

$$\begin{aligned} H_c(s) &\longrightarrow H(z) \\ h_c(t) &\longrightarrow h[n] \end{aligned}$$

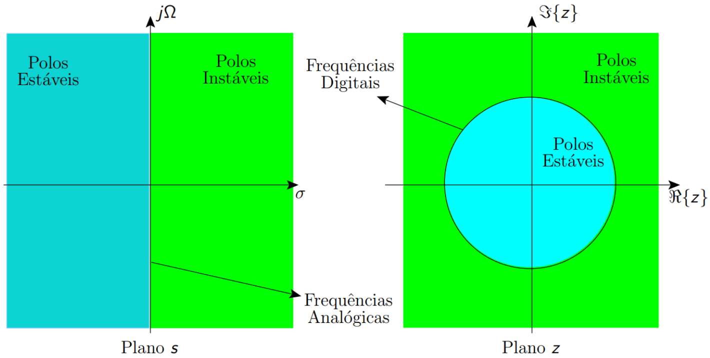
Requisitos desejados em transformações de TC para TD:

1. Mapeamento de frequências:
   - Eixo-$j\Omega$ (plano-s) $\Longrightarrow$ CRU (plano-z).
2. Preservar estabilidade:
   - $H_c(s)$ estável $\Longrightarrow$ $H(z)$ estável.

Projeto de filtros IIR de tempo discreto por mapeamento TC-TD

Objetivo: mapear polos e zeros analógicos em polos e zeros digitais de forma que

- Polos estáveis, $\Re\{s\} < 0$, virem polos estáveis, $|z| < 1$;
- Frequências analógicas, $s = j\Omega$, virem frequências digitais, $z = e^{j\omega}$;



Projeto de filtros IIR de tempo discreto por mapeamento TC-TD

Tipos de transformação:

- Invariância da resposta impulsiva:
  - Frequências são apenas escalonadas (há presença de *aliasing*);
  - Polos estáveis de $H_c(s)$ são mapeados em polos estáveis de $H(z)$;
- Transformação bilinear:
  - Eixo-$j\Omega$ do plano-s é inteiramente mapeado na CRU do plano-z (não há *aliasing*);
  - Polos estáveis de $H_c(s)$ são mapeados em polos estáveis de $H(z)$;

Invariância da resposta impulsiva

Resposta ao impulso do filtro discreto escolhida é proporcional a amostras igualmente espaçadas da resposta ao impulso do filtro de tempo contínuo:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d).$$

Relação entre respostas em frequência:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right).$$

Se o filtro de tempo contínuo for limitado em banda, de modo que

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T_d$$

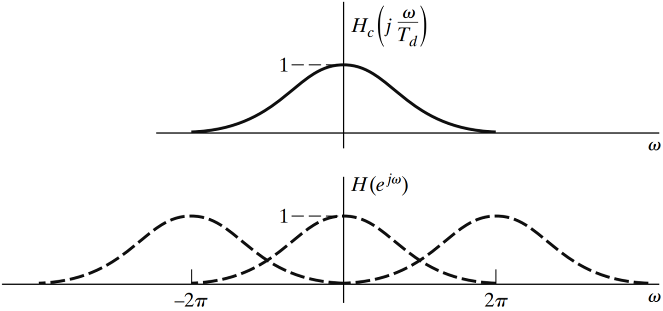
então

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \quad |\omega| \leq \pi.$$

Invariância da resposta impulsiva

Nenhum filtro em TC é limitado em frequência:

- Invariância da resposta impulsiva apresenta *aliasing*;
- Se *aliasing* for pequeno é desprezado;



Invariância da resposta impulsiva

Relação entre frequências contínua e discreta:

$$\Omega = \omega / T_d.$$

Parte-se de um filtro em tempo contínuo com função de sistema:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

e resposta ao impulso

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Invariância da resposta impulsiva

A resposta ao impulso do filtro de tempo discreto causal obtido pela amostragem de $T_d h_c(t)$ é

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n].$$

A função de sistema do filtro de tempo discreto causal é, portanto, dada por

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}.$$

Invariância da resposta impulsiva

Consequências:

- Pólos em $s = s_k$ são mapeados em pólos em $z = e^{s_k T_d}$;
  - Em geral, zeros não são mapeados;
- Filtros de tempo contínuo estáveis resultam em filtro de tempo discreto estáveis:

$$\begin{cases} s_k = \sigma_k + j\Omega_k \\ z_k = e^{\sigma_k T_d} e^{j\Omega_k T_d} \end{cases}$$

  - $\sigma < 0$: mapeamento $|z| < 1$ (interior do círculo de raio unitário)

Invariância da resposta impulsiva

Algoritmo

1. Escolher T_d e determinar as frequências de corte Ω_p da faixa de passagem e Ω_s da faixa de rejeição, ambas dada pela relação $\omega = \Omega T_d$;
2. Projetar um filtro analógico $H_c(s)$ usando as especificações Ω_p, Ω_s, δ_{p1}, δ_{p2} e δ_s.
    - δ_{p1} e δ_{p2} são os *ripples* da faixa de passagem e δ_s é a atenuação na faixa de rejeição;
    - Para projetar $H_c(s)$ é utilizada uma técnica de projetos de filtros analógicos: Butterworth, Chebyshev, elípticos, etc;
3. Usando expansão em frações parciais, obter $H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k}$;
4. Obter a função de sistema do filtro digital pela relação $H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}$

Transformação bilinear: definição

Transformação entre os planos z (discreto) e s (analógico) dada por:

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right); \quad z = \frac{1 + (sT_d/2)}{1 - (sT_d/2)}.$$

Dessa forma:

$$H(z) = H_c\left[\frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\right]$$

Transformação bilinear: propriedades

Fazendo $s = j\Omega$ ($\sigma = 0$):

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1 + (sT_d/2)}{1 - (sT_d/2)} \\
&= \frac{1 + (j\Omega T_d/2)}{1 - (j\Omega T_d/2)}.
\end{aligned}
$$

De onde concluímos que:

$$|z| = 1.$$

- O eixo-$j\Omega$ é mapeado na CRU.

Transformação bilinear: propriedades

Seja $z = e^{j\omega}$ (CRU):

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T_d}\left[\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right] = \frac{2}{T_d}\left[\frac{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2})}\right] \\ &= \frac{2}{T_d} j\,\mathrm{tg}(\omega/2) = \sigma + j\Omega. \end{aligned}$$

Se $\sigma = 0$:

$$\Omega = \frac{2}{T_d}\,\mathrm{tg}(\omega/2) \longrightarrow \omega = 2\,\mathrm{arctg}(\Omega T_d/2).$$

- Todo o eixo-$j\Omega$ ($-\infty < \Omega < \infty$) é mapeado em $-\pi < \omega < \pi$. Com isto, a resposta em frequência contínua será toda concentrada em um período do eixo-$j\omega$.

Transformação bilinear: propriedades

Seja $s = \sigma + j\Omega$,

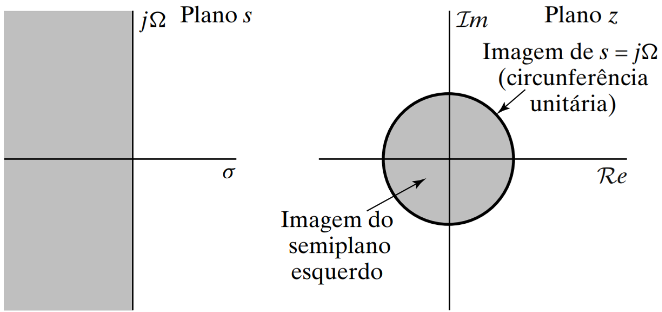
$$z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}.$$

Se $\sigma < 0 \longrightarrow |z| < 1, \ \forall\Omega.$
Se $\sigma > 0 \longrightarrow |z| > 1, \ \forall\Omega.$

- O semi-plano esquerdo (SPE) do plano-s é mapeado no interior da CRU, enquanto que o SPD é mapeado no exterior da CRU. Isto implica que um filtro analógico estável gera um filtro discreto estável.

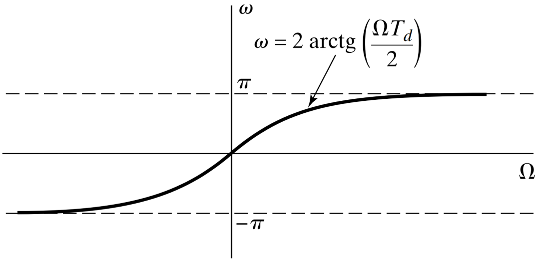
Transformação bilinear: propriedades

Mapeamento do plano s no plano z usando a transformação bilinear.



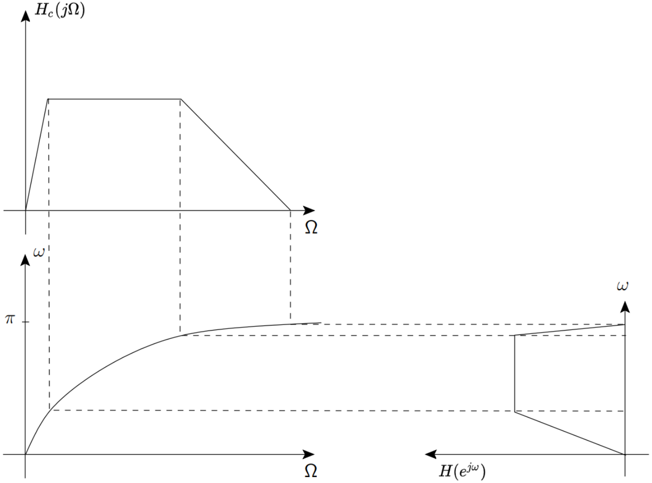
Transformação bilinear: propriedades

- A relação entre $H_c(j\Omega)$ e $H(e^{j\omega})$ é não-linear. Portanto, ocorre distorção de formato de curva.
- Para $|\Omega| \ll 1$ temos $|\omega| \approx \Omega/T_d$, ou seja, a relação entre as curvas é aproximadamente linear.



Mapeamento do eixo das frequências de tempo contínuo no eixo das frequências de tempo discreto pela transformação linear.

Transformação bilinear: propriedades



Transformação bilinear

Algoritmo:

1. Comece com uma máscara em frequências discretas.
2. Obtenha máscara analógica fazendo $\Omega = (2/T_d)\text{tg}(\omega/2)$:
   - Para filtro passa-baixas, frequências de passagem e corte:
   - $\Omega_p = (2/T_d)\,\text{tg}(\omega_p/2)$ e $\Omega_s = (2/T_d)\,\text{tg}(\omega_s/2)$;
3. Projete $H_c(s)$ (técnicas de projetos de filtros analógicos: Butterworth, Chebyshev, elípticos, etc);
4. Faça $H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

Obtidos via mapeamento de filtros passa-baixas em tempo contínuo Butterworth:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}},$$

- $H_c(s)$ é maximamente plano em $s = 0$:
  - Muitas derivadas nulas na origem;
- $|H_c(j\Omega)|$ diminui quando Ω aumenta.
- Ω_c é a frequência de corte do FPB;
- N é a ordem do filtro.

Fazendo $j\Omega = s$:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}.$$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

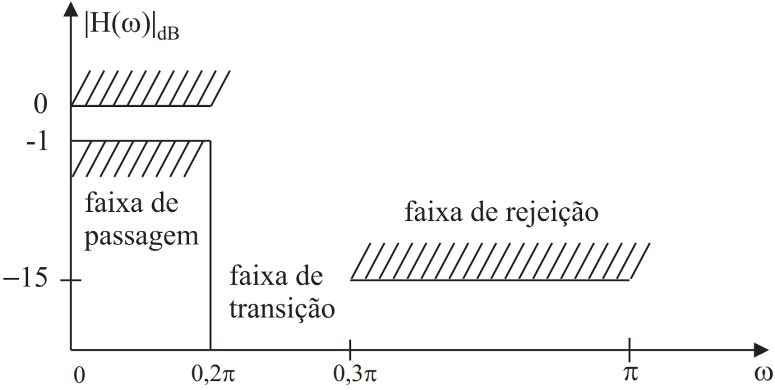
Função de sistema pode ser reescrita como

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)}$$

onde os N pólos são:

$$s_k = \Omega_c e^{\left(j\frac{2k+1}{2N}\pi + j\frac{\pi}{2}\right)}, \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, N-1.$$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth



Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

Especificações de projeto (filtro em tempo discreto):

- Ganho na faixa de passagem entre 0 dB e −1 dB;
- Atenuação na faixa de rejeição de pelo menos −15 dB;
- $\omega_p = 0,2\pi$ rad e $\omega_s = 0,3\pi$ rad;

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

1) Projeto pela invariância da resposta impulsiva

- Deve-se converter especificações em TD para TC;
- Como ao final do projeto o filtro deverá ser mapeado novamente para TD, pode-se mostrar que parâmetro T_d desaparece (podemos usar $T_d = 1$ nos cálculos $\Omega = \omega T_d$);

Das especificações, tem-se:

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j0,2\pi})| &\geq -1, \\ \text{ou } |H(e^{j0,2\pi})| &\geq 10^{-0,5} = 0,89125. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j0,3\pi})| &\leq -15, \\ \text{ou } |H(e^{j0,3\pi})| &\leq 10^{-0,75} = 0,17783. \end{aligned}$$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

Da definição da função de magnitude ao quadrado de um filtro Butterworth, obtém-se:

$$1 + \left(\frac{0,2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,89125}\right)^2, \tag{1}$$

$$1 + \left(\frac{0,3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,17783}\right)^2 \tag{2}$$

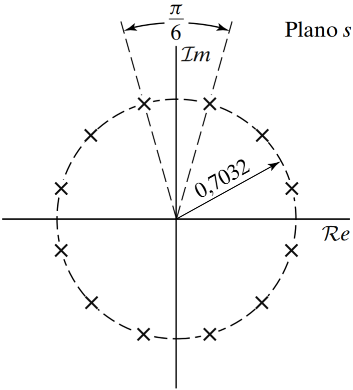
Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

- A solução simultânea dessas duas equações é $N = 5,8858$ e $\Omega_c = 0,70474$;
- N deve ser inteiro, logo, escolhe-se $N = 6$, o que faz com que (1) e (2) não sejam satisfeitas simultaneamente. É possível satisfazer apenas (1) ou (2);
- Devido ao *aliasing*, escolhe-se satisfazer (1). A especificação da banda de rejeição acaba sendo excedida, pois $6 > 5,8858$;
- Fazendo $N = 6$ em (1), obtém-se $\Omega_c = 0,7032$;

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

- Obtém-se os polos do filtro em TC (usando relação para obtenção de polos de um filtro Butterworth, dada por $s_k = \Omega_c e^{\left(j\frac{2k+1}{2N}\pi + j\frac{\pi}{2}\right)}, k = 0, 1, \cdots, N-1.$):
  - Par de polos 1: $-0,182 \pm j(0,679)$,
  - Par de polos 2: $-0,497 \pm j(0,497)$,
  - Par de polos 3: $-0,679 \pm j(0,182)$.
- A partir dos polos do SPE, obtém-se $H_c(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}$.
  - Usando expansão em frações parciais, obtém-se $H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k}$;
- Por fim, mapeia-se TC para TD, usando a relação do método de invariância da resposta impulsiva, para se obter $H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}$.

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth



Localizações no plano-s dos polos de $H_c(s)H_c(-s)$.

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

2) Projeto pela transformação bilinear

A função de sistema do filtro discreto Butterworth, usando a transformação bilinear, é dada por:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\
&= \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}\left(\frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - s_k\right)} \\
&= \frac{\Omega_c^N (1+z^{-1})^N}{\prod_{k=0}^{N-1}\left[\frac{2}{T_d} - s_k - \left(\frac{2}{T_d} + s_k\right) z^{-1}\right]}
\end{aligned}
$$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

- Mapeia-se as frequências para o campo analógico, usando $\Omega = 2/T_d \operatorname{tg}(\omega/2)$ (lembrando que T_d desaparece),

Aplica-se as especificações do filtro em TD para o filtro em TC, convertendo-se as frequências:

$$
\begin{aligned}
20\log_{10}|H(e^{j2\operatorname{tg}(0{,}1\pi)})| &\geq -1, \\
20\log_{10}|H(e^{j2\operatorname{tg}(0{,}15\pi)})| &\leq -15.
\end{aligned}
$$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

De onde obtém-se:

$$1 + \left(\frac{2\,\mathrm{tg}(0,1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,89125}\right)^2, \tag{3}$$

$$1 + \left(\frac{2\,\mathrm{tg}(0,15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0,17783}\right)^2 \tag{4}$$

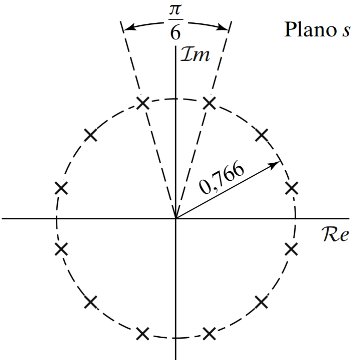
Resolve-se:

$$\begin{aligned} N &= \log \frac{\left[\left(\left(\frac{1}{0,17783}\right)^2 - 1\right) \Big/ \left(\left(\frac{1}{0,89125}\right)^2 - 1\right)\right]}{2\log[\mathrm{tg}(0,15\pi)/\,\mathrm{tg}(0,1\pi)]} \\ &= 5,30466. \end{aligned}$$

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

- N deve ser inteiro. Escolhe-se $N = 6$;
- Decide-se obter Ω_c de (4) (não há *aliasing*):
  - Satisfaz banda de rejeição;
  - Excede banda de passagem;
- Fazendo $N = 6$ em (4), obtém-se $\Omega_c = 0,76622$;
- Escolhe-se os 6 pólos do SPE do plano-s;
- A partir dos pólos, obtém-se $H_c(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}$.
- Por fim, mapeia-se TC para TD, usando a transformação bilinear (com $T_d = 1$), para se obter $H(z)$.

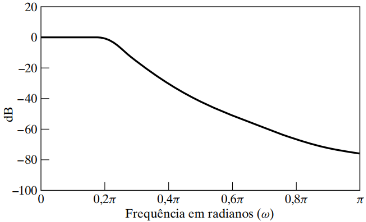
Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth



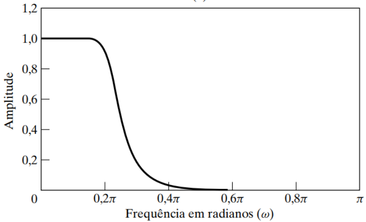
Localizações no plano-s dos polos de $H_c(s)H_c(-s)$.

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

Resposta em frequência do fltro Butterworth de ordem 6 projetado pela invariância da resposta ao impulso. (a) Magnitude logarítmica em dB; (b) Magnitude.



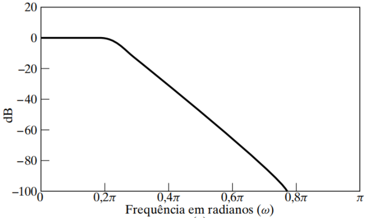
(a)



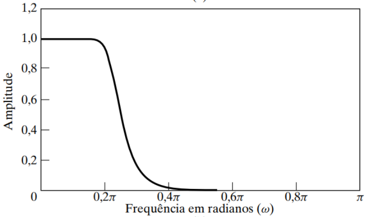
(b)

Exemplo: FPB em tempo discreto Butterworth

Resposta em frequência do fltro Butterworth de ordem 6 projetado pela transformação bilinear. (a) Magnitude logarítmica em dB; (b) Magnitude.



(a)



(b)

Filtros IIR

Outros filtros IIR com projeto por invariância da resposta impulsiva e transformação bilinear:

- Chebyshev I;
- Chebyshev II;
- Elípticos;