DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 5.2: Processamento multitaxa de sinais

Tiago Barros [1]

[1]⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Programa

Conteúdo

1. Mudança de taxa de amostragem via processamento discreto;
2. Processamento multitaxa de sinais;

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. Tradução Daniel Vieira. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 4:
  - Seções 4.6, 4.7.

Mudança de taxa de amostragem via processamento discreto

Frequentemente torna-se necessário alterar a taxa de amostragem de um sinal discreto por motivos tais quais:

- a redução da taxa para reduzir a quantidade de cálculo realizada pela CPU, gerando capacidade para novas tarefas;
- aumento e redução da taxa para com isto relaxar as especificações de sistemas como, por exemplo, os filtros de restrição de faixa de frequência para amostragem de sinais e de recuperação do sinal analógico;
- alterar a taxa de modo a alterar a fase com que o sinal analógico foi amostrado;

Mudança de taxa de amostragem via processamento discreto

Representa-se o sinal contínuo, $x_c(t)$, em tempo discreto como a sequência de amostras:

$$x[n] = x_c(nT).$$

Deseja-se mudar a taxa de amostragem (reamostragem) de T para T_1, de forma que $T \neq T_1$:

$$x_1[n] = x_c(nT_1).$$

Para obter $x_1[n]$, a partir de $x[n]$, pode-se reconstruir $x_c(t)$ fazendo uso de $x[n]$ e, depois, reamostrar $x_c(t)$ novamente, com período T_1.
Esta operação é muito custosa. Deseja-se fazer isso apenas no domínio discreto, de posse de $x[n]$.

Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

Pode-se reduzir a taxa de amostragem definindo-se uma nova sequência:

$$x_{\mathrm{d}}[n] = x[nM] = x_{\mathrm{c}}(nMT),$$

onde $x_{\mathrm{d}}[n]$ é idêntico à sequência que seria obtida de $x_{\mathrm{c}}(t)$ amostrando-se com $T_{\mathrm{d}} = MT$.

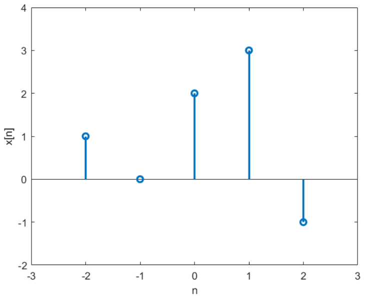
Além disso, se $X_{\mathrm{c}}(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_{\mathrm{N}}$, $x_{\mathrm{d}}[n]$ é uma representação exata de $x_{\mathrm{c}}(t)$ se $2\pi/T_{\mathrm{d}} = 2\pi/(MT) \geq 2\Omega_{\mathrm{N}} \Longrightarrow \Omega_s = 2\pi/T \geq M(2\Omega_N)$.

Subamostragem (ou *downsampling*):

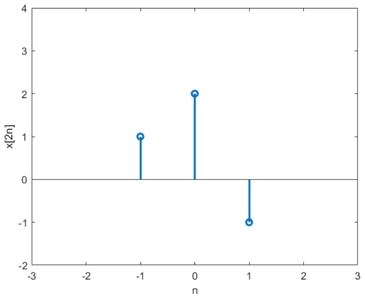
- Taxa de amostragem pode ser reduzida por um fator M sem *aliasing* se o sinal original foi amostrado a uma taxa M vezes superior a taxa de Nyquist.

Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

$x[n]$



$x[Mn]$, $M = 2$ (compressor)



Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

Relação no domínio da frequência (TFTD) entre entrada e saída de compressor.

Seja TFTD de $x[n] = x_{\mathrm{c}}(nT)$ dada por:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{c}}\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right).$$

Similarmente, TFTD de $x_{\mathrm{d}}[n] = x[nM] = x_{\mathrm{c}}(nT_{\mathrm{d}})$ é:

$$X_{\mathrm{d}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_{\mathrm{d}}}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{c}}\left(j\left(\frac{\omega}{T_{\mathrm{d}}} - \frac{2\pi r}{T_{\mathrm{d}}}\right)\right).$$

Reescrevendo para $T_{\mathrm{d}} = MT$:

$$X_{\mathrm{d}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{c}}\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right).$$

Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

Expressando-se o índice do somatório como $r = i + kM$, com k e i inteiros, de forma que $-\infty \leq k \leq \infty$ e $0 \leq i \leq M-1$:

$$X_{\mathrm{d}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{c}}\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT}\right)\right)\right].$$

Termo entre colchetes é reconhecido como:

$$X\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{c}}\left(j\left(\frac{\omega-2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right).$$

Logo

$$X_{\mathrm{d}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\omega/M-2\pi i/M}\right).$$

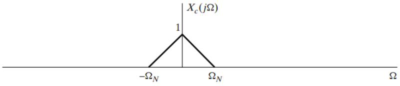
Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

$X_d(e^{j\omega})$ é formado por:

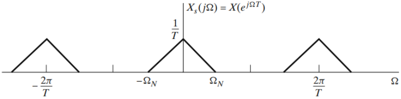
- Um conjunto infinito de cópias de $X_c(j\Omega)$, com frequências escaladas em $\omega = \Omega T_d$ e deslocadas por múltiplos inteiros de $2\pi/T_d$;
- Ou por M cópias de $X(e^{j\omega})$ escaladas em frequência por M e deslocadas por múltiplos inteiros de 2π;

Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

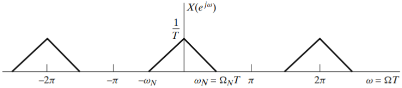
Subamostragem com $M = 2$:



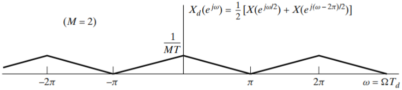
(a)



(b)



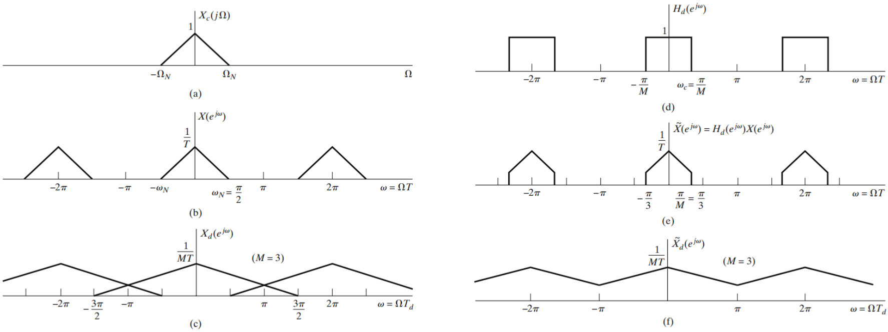
(c)



(d)

Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

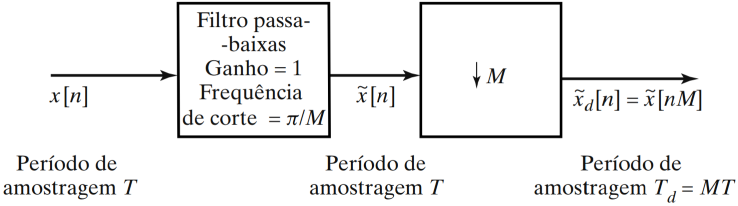
Subamostragem com $M = 3$ (presença de *aliasing*):



Evita-se *aliasing* se $X(e^{j\omega}) = 0$, para $\omega_N \leq |\omega| \leq \pi$ e $\pi/M \geq \omega_N$.

Redução da taxa de amostragem por um fator inteiro

Sistema genérico para redução da taxa de amostragem por M:



Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

Operação análoga à conversão D/C. Deseja-se aumentar taxa de $x[n]$ por fator L.

Seja $x_i[n] = x_c(nT_i)$, com $T_i = T/L$, obtido a partir da sequência:

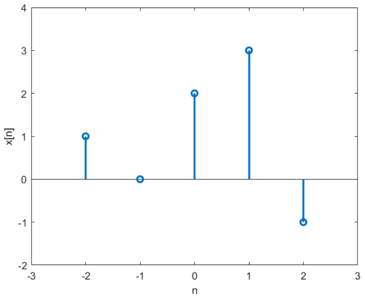
$$x[n] = x_c(nT).$$

Operação definida como superamostragem (ou *upsampling*):

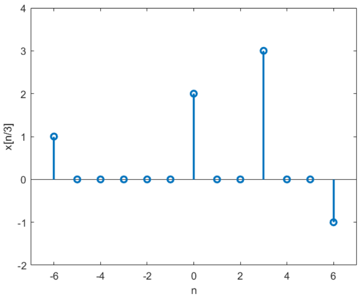
$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L) \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \cdots$$

Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

$x[n]$



$x[n/L]$, $L = 3$ (expansor)



Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

Sistema expansor:

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \cdots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Alternativamente

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL].$$

Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

TFTD de $x_e[n]$:

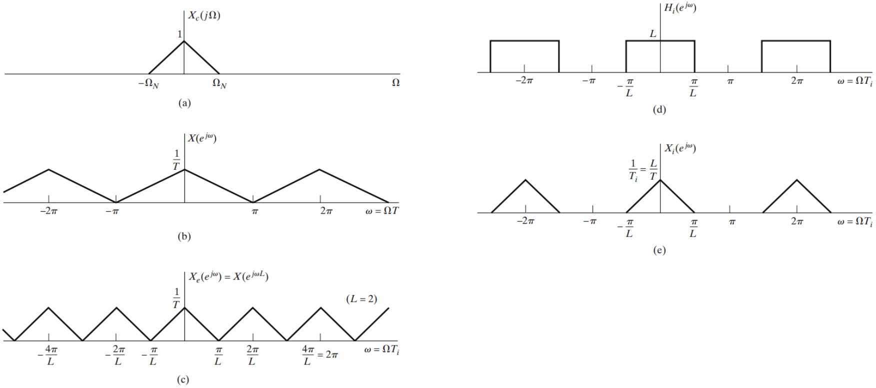
$$\begin{aligned}
X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]\right)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-kL]e^{-j\omega n}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L})
\end{aligned}$$

Saída do expansor é versão escalada da TFTD de $x[n]$ com ω substituído por ωL, ou seja, normalizado por:

$$\omega = \Omega T_i.$$

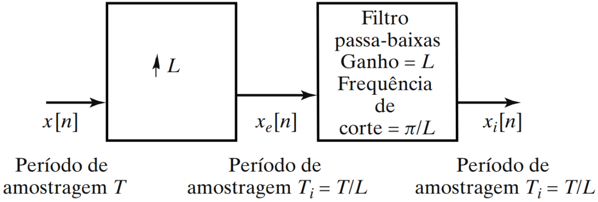
Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

Exemplo de interpolação por fator $L = 2$ no domínio da frequência:



Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

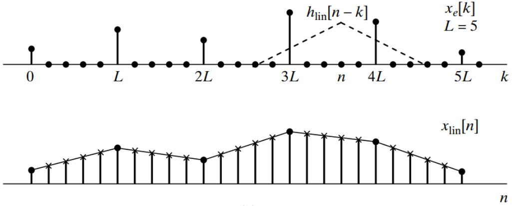
Sistema genérico para aumento da taxa de amostragem por L (sistema expansor de taxa de amostragem):



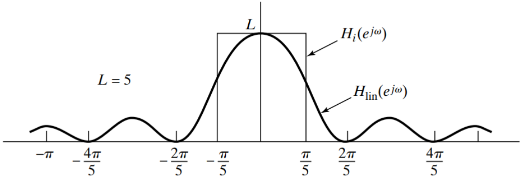
Primeiro cria-se $x_e[n]$ e depois usa-se FPB (com frequência de corte π/L e ganho L) para reconstruir a sequência.

Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

Interpolador no domínio do tempo:



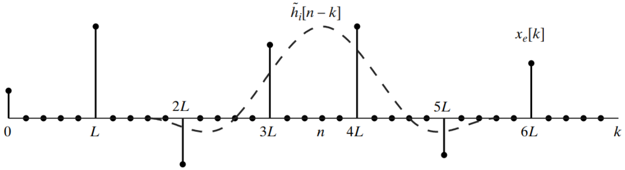
(a)



(b)

Aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro

Interpolador no domínio do tempo:



Operação de interpolação:

- *Upsampling*;
- Seguido de filtragem com FPB ideal;

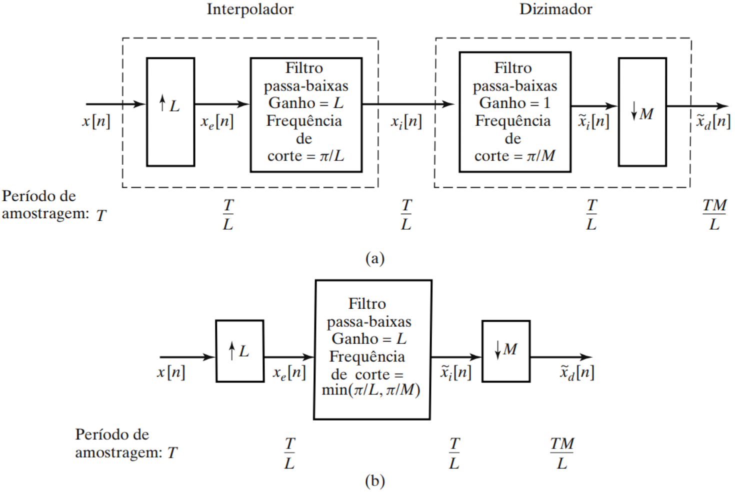
Mudança de taxa de amostragem por fator não-inteiro

Pode-se mudar a taxa de amostragem por um fator não-inteiro a partir das seguintes operações:

- Interpolador que diminui período de amostragem de T para T/L;
- Dizimador que aumenta período de amostragem por fator M;

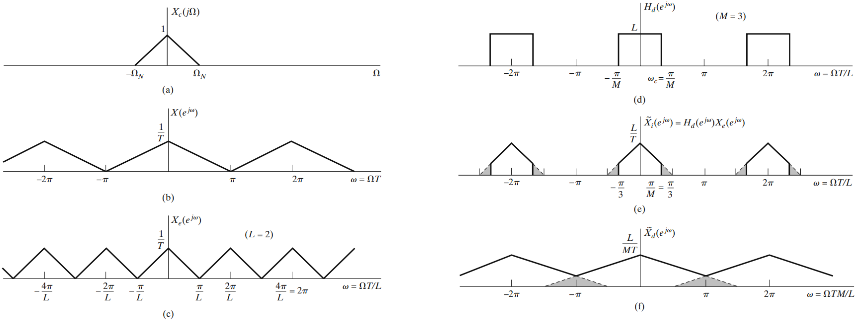
Cria-se a saída do sistema equivalente $\tilde{x}_{\mathrm{d}}[n]$ com período de amostragem $T^{'} = \frac{M}{L}T$.

Mudança de taxa de amostragem por fator não-inteiro



Mudança de taxa de amostragem por fator não-inteiro

Exemplo de interpolação por um fator não-inteiro ($L = 2$, $M = 3$):



Mudança de taxa de amostragem por fator não-inteiro

Interpolação por fator fracionário $\tau = M/L$:

$\Longrightarrow$ $M > L$, redução na taxa de amostragem:

- Precisamos de um pré-filtro para prevenir eventual *aliasing*;

$\Longrightarrow$ $M < L$, aumento na taxa de amostragem:

- Não precisamos de pré-filtro, não há *aliasing*;

$\Longrightarrow$ Eficiência computacional:

- Mesmo se $\tau \approx 1$ ($\tau = 1,01$), esta abordagem não é eficiente:
  - $L = 100$ (interpolar por $L = 100$);
  - $M = 101$ (decimar por $M = 101$);
- Processamento multitaxa é alternativa para este tipo de mudança de taxa de amostragem, evitando operações desnecessárias;

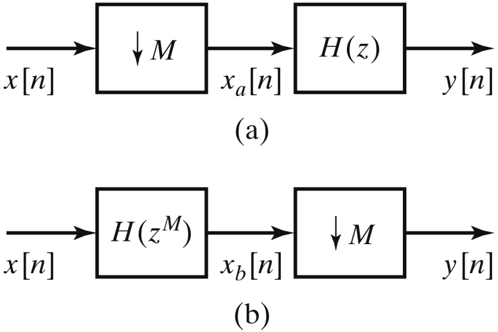
Processamento multitaxa de sinais

Processamento multitaxa:

- Pode melhorar eficiência da conversão da taxa de amostragem;
- Dois principais resultados de processamento multitaxa:
  - Comutação da filtragem e operações de subamostragem e superamostragem;
  - Decomposição polifásica;

Comutação da filtragem com compressor/expansor

Identidade nobre da subamostragem: sistemas equivalentes



(a) (b)

Comutação da filtragem com compressor/expansor

Seja sistema com resposta ao impulso $h[n]$ e função de sistema $H(z)$. Vamos definir $H(z^M)$.

Temos que a função de sistema é dada por

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}.$$

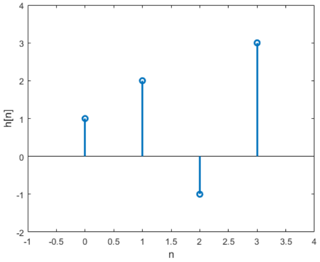
Logo,

$$\begin{aligned} H(z^M) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-Mn} \\ &= \mathcal{Z}\{h_e[n]\} \end{aligned}$$

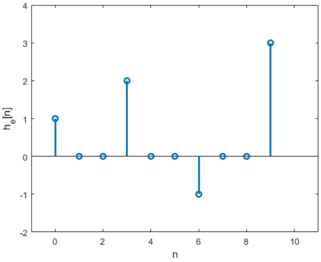
$\Longrightarrow$ Onde $h_e[n]$ é versão expandida de $h[n]$.

Comutação da filtragem com compressor/expansor

$h[n]$

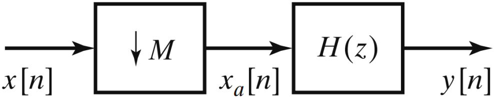


$h_e[n]$

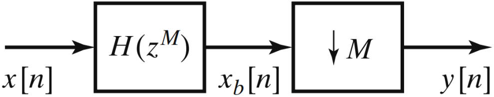


Comutação da filtragem com compressor/expansor

Identidade nobre da subamostragem: sistemas equivalentes



(a)



(b)

Comutação da filtragem com compressor/expansor

Seja (da figura inferior) $X_b(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega M})X(e^{j\omega})$, escreve-se:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X_b\left(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}\right).$$

De onde obtém-se

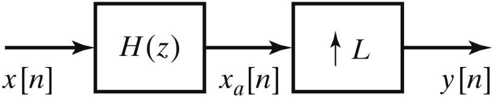
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}\right) H\left(e^{j(\omega - 2\pi i)}\right).$$

Como $H\left(e^{j(\omega-2\pi i)}\right) = H(e^{j\omega})$, escreve-se

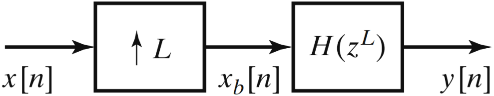
$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}\right) \\ &= H(e^{j\omega})X_a(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Comutação da filtragem com compressor/expansor

Identidade nobre da superamostragem: sistemas equivalentes



(a)



(b)

Comutação da filtragem com compressor/expansor

Da figura superior, tem-se que:

$$Y(e^{j\omega}) = X_a(e^{j\omega L}) = X(e^{j\omega L})H(e^{j\omega L}).$$

Como $X_b(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$, tem-se que:

$$Y(e^{j\omega}) = X_b(e^{j\omega})H(e^{j\omega L}).$$

Decomposições polifásicas

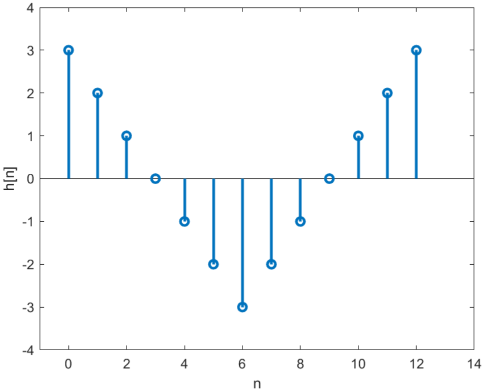
A decomposição polifásica de uma sequência é obtida pela sua representação como uma sobreposição de M subsequências, em que cada sequência consiste de todo M-ésimo valor de versões sucessivamente atrasadas da sequência.

Considere uma resposta ao impulso $h[n]$ decomposta em M subsequências $h_k[n]$ com $k = 0, 1, \cdots, M - 1$ da seguinte forma:

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n+k], & \text{se } n \text{ for inteiro e múltiplo de } M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

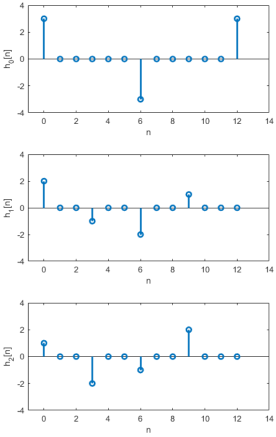
Decomposições polifásicas

Exemplo: Seja $h[n]$.

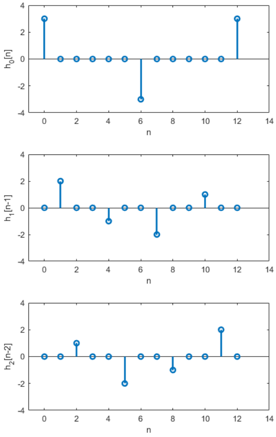


Decomposições polifásicas

$h_k[n](M=3)$



$h_k[n-k](M=3)$



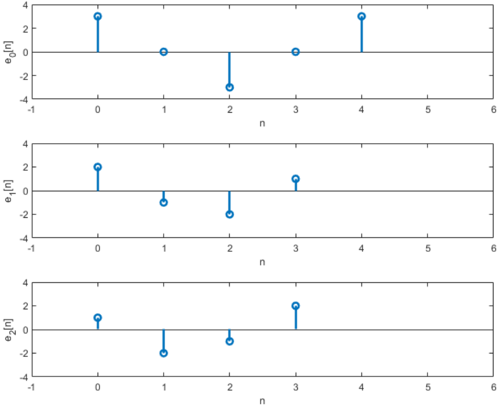
Decomposições polifásicas

Reconstrução da resposta ao impulso é obtida ao se atrasar estas subsequências sucessivamente:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k].$$

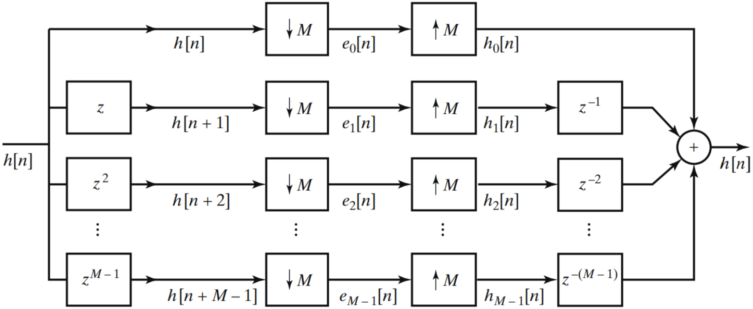
Define-se componentes polifásicos $e_k[n] = h[nM+k] = h_k[nM]$.

Decomposições polifásicas



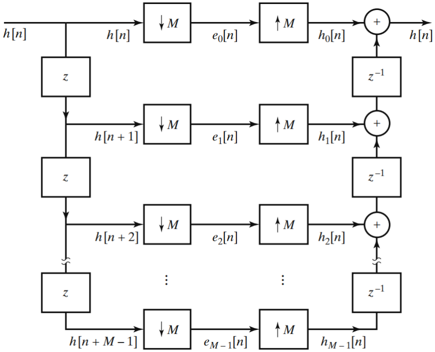
Decomposições polifásicas

Obtém-se representação da decomposição polifásica por diagrama de blocos.



Decomposições polifásicas

Representação equivalente com uma cadeia de elementos de avanço na entrada e uma cadeia de elementos de atraso na saída:



Decomposições polifásicas

Representação da função de sistema $H(z)$ em termos da decomposição polifásica (lembrando que $e_k[n] = h[nM + k] = h_k[nM]$):

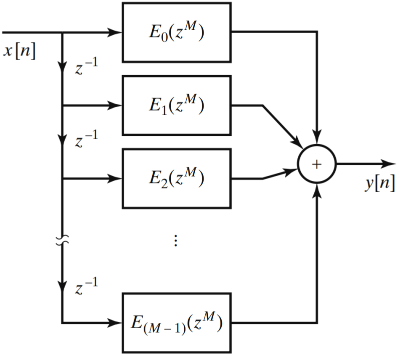
$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[lM] z^{-lM} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[lM+1] z^{-(lM+1)} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[lM+k] z^{-(lM+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[lM+k] z^{-lM} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} E_k(z^M)
\end{aligned}$$

Decomposições polifásicas

Representação polifásica corresponde a representar $H(z)$ como:

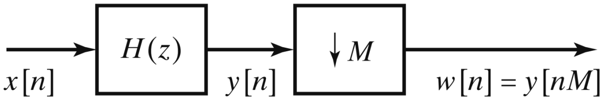
$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}.$$

Função de sistema $H(z)$ representa uma soma dos filtros componentes polifásicos atrasados.



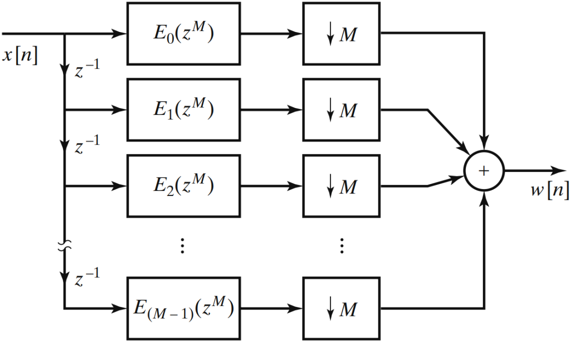
Implementação polifásica de filtros de dizimação

- Filtro de dizimação: calcula uma amostra de saída a cada valor de n, mas apenas uma de cada M amostras de saída é retida;
- Expressamos $h[n]$ na forma polifásica com componentes polifásicos $e_k[n] = h[nM + k] = h_k[nM]$;
- Função de sistema $H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}$;



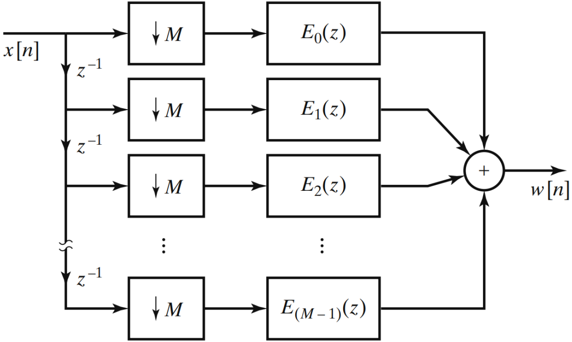
Implementação polifásica de filtros de dizimação

Representação polifásica:



Implementação polifásica de filtros de dizimação

Representação após uso da identidade nobre de subamostragem:



Implementação polifásica de filtros de dizimação

Seja um filtro FIR de N pontos:

Implementação direta de um decimador:

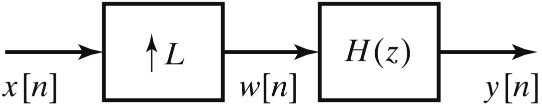
- Comprimento do filtro é de N amostras;
- Taxa de entrada de amostras (clock) de 1 amostra por unidade de tempo;
- N multiplicações por unidade de tempo (MPUs);

Decimador polifásico com identidade nobre:

- Cada filtro tem comprimento de N/M amostras (M filtros);
- Clock de $1/M$ amostras por unidade de tempo;
- $M(N/M)(1/M) = N/M$ MPUs;

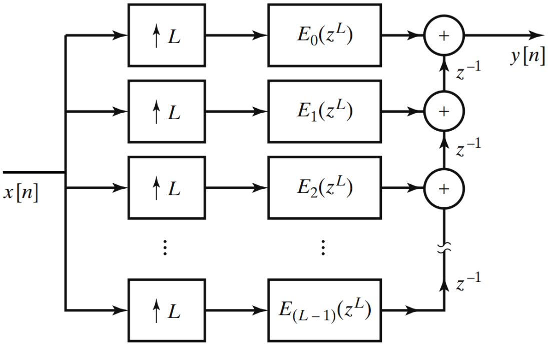
Implementação polifásica de filtros de interpolação

- Filtro de interpolação: filtro FIR precedido de sobreamostrador;
- Apenas cada L-ésima amostra de $w[n]$ é não nula;
- Implementação direta envolve multiplicar coeficientes de filtro por valores de sequência que sabe-se serem nulos.
- Deseja-se implementação mais eficiente;



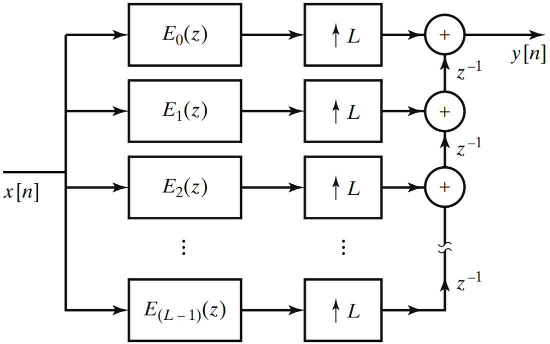
Implementação polifásica de filtros de interpolação

Representação polifásica:



Implementação polifásica de filtros de interpolação

Representação após uso da identidade nobre da sobreamostragem:



Implementação polifásica de filtros de interpolação

Se $x[n]$ tiver um *clock* na taxa de uma amostra por unidade de tempo, então $w[n]$ tem um *clock* em uma taxa de L amostras por unidade de tempo. Se $H(z)$ é um filtro FIR de comprimento N:

Implementação direta de um interpolador:

- NL MPUs;

Interpolador polifásico com identidade nobre (L filtros operando a uma taxa de N/L amostras por unidade de tempo):

- $L(N/L) = N$ MPUs;