DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 1: Sinais e sistemas discretos

Tiago Barros [1]

[1] ⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Tópico 1 – Programa

Conteúdo

1. Sinais de tempo discreto;
2. Sistemas de tempo discreto;
   - 2.1 Sistemas sem memória;
   - 2.2 Sistemas lineares;
   - 2.3 Sistemas invariantes no tempo;
   - 2.4 Sistemas causais;
   - 2.5 Sistemas estáveis;
3. Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT);
4. Propriedades de SLIT;
5. Equações a diferenças lineares de coeficientes constantes (EDLCC);

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. e Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 2:
  - Seções 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5.

Material complementar

- Lathi, B. P., Sinais e Sistemas Lineares.
- Oppenheim, A.V. e Willsky, A. S., Sinais e Sistemas.

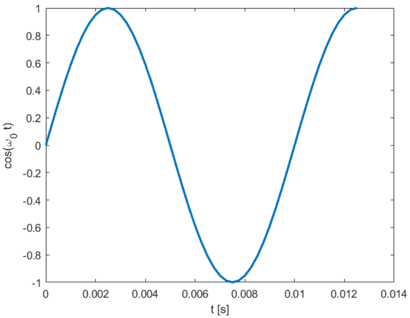
Sinais

Sinais:

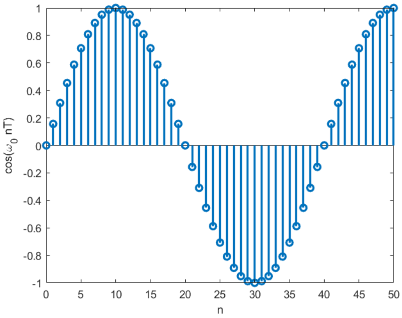
- Transmitem informação;
- Captados por sensores;
- Representados matematicamente:
    - funções de uma ou mais variáveis independentes;
- Variável independente (por exemplo, tempo):
    - contínua;
    - discreta;
- Sinal discreto no tempo:
    - sequências discretas;
- Amplitudes contínuas ou discretas:
    - sinais digitais possuem amplitudes e variáveis livres discretas;

Sinais

Sinal contínuo no tempo:



Sinal discreto no tempo:



Sinais

Sinais discretos $\longrightarrow$ sequências

Sequências discretas

Sequência de números em x, n-ésimo número é representado por $x[n]$:

$$x = \{x[n]\}, \ -\infty < n < \infty, \ n \, \text{inteiro}.$$

Sinais

Amostragem periódica de sinal analógico $x_a(t)$:

$$x[n] = x_a(nT), \; -\infty < n < \infty$$

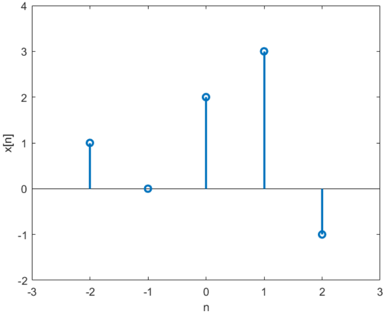
- T é período de amostragem;
- f_s é frequência de amostragem:

$$f_s = \frac{1}{T}.$$

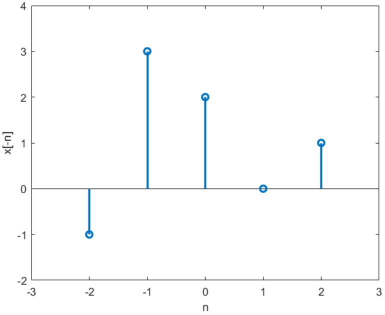
- $x[n]$ é definido apenas para números inteiros (indefinido para valores não inteiros de n).

Operações com sinais: Reflexão em torno do eixo-y (*flipping*)

$x[n]$

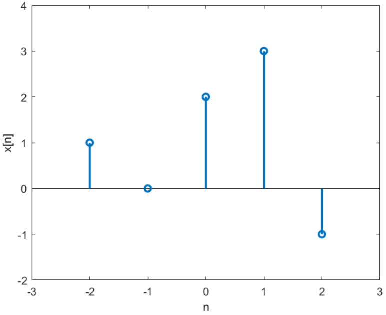


$x[-n]$

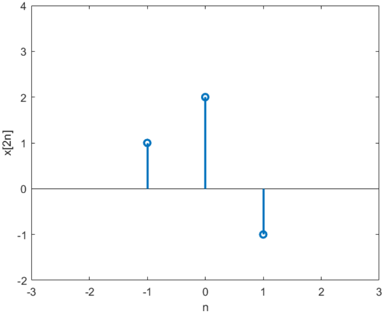


Operações com sinais: Escalonamento (*scaling*)

$x[n]$

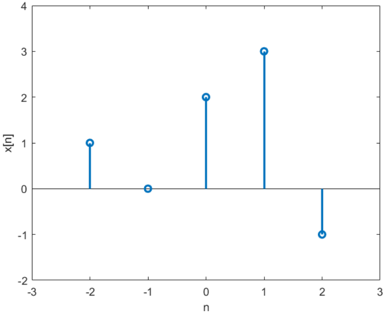


$x[2n]$ (compressão – amostras são perdidas)

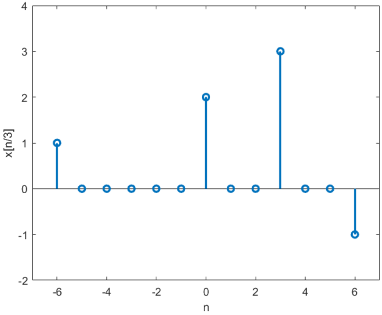


Operações com sinais: Escalonamento (*scaling*)

$x[n]$



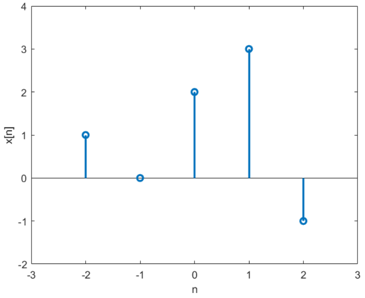
$x[n/3]$ (expansão – sinal é expandido)



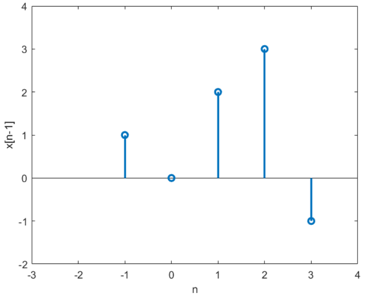
Operações com sinais: Deslocamento (*shifting*)

$x[n - n_0]$ ($n_0 > 0$: atraso – desloca para direita; $n_0 < 0$: avanço – desloca para esquerda)

$x[n]$



$x[n-1]$



Operações com sinais: exemplo

$$x[-2n+3]?$$

Desloca, reflete, escala.

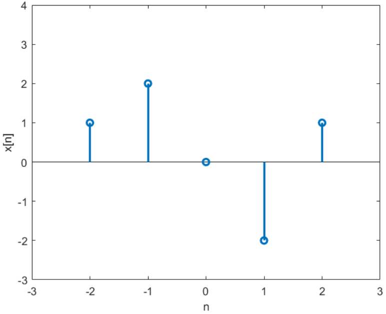
$$\begin{aligned} z[n] &= x[n+3], \\ w[n] &= z[-n], \\ y[n] &= w[2n]. \end{aligned}$$

Caminho contrário:

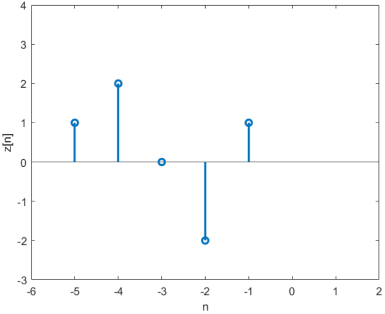
$$\begin{aligned} y[n] &= w[2n] \\ &= z[-2n] \\ &= x[-2n+3]. \end{aligned}$$

Operações com sinais: exemplo

$$x[n]$$

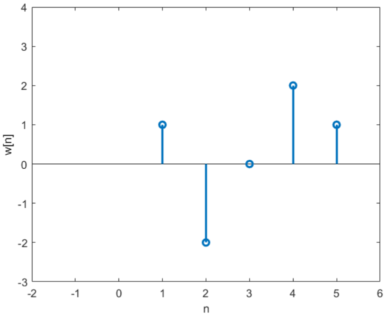


$$z[n] = x[n+3]$$

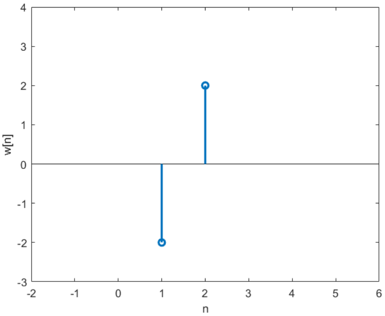


Operações com sinais: exemplo

$$w[n] = z[-n]$$



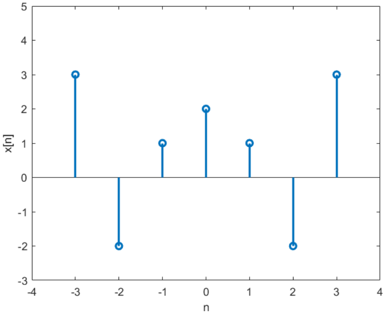
$$y[n] = w[2n] = x[-2n+3]$$

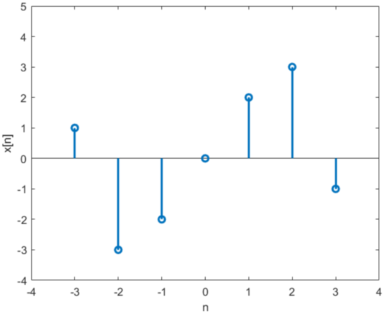


Propriedade da simetria – sinais pares e ímpares

Par:
$x[n] = x[-n]$

Ímpar:
$x[n] = -x[-n]$ $(x[0] = -x[0] = 0)$





Propriedade da simetria – sinais pares e ímpares

Todo sinal possui uma parte par e uma parte ímpar:

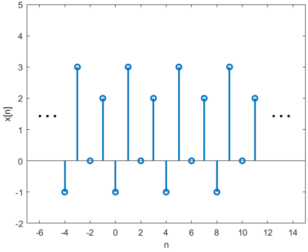
$$\begin{aligned} x_{\mathrm{e}}[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right); \\ x_{\mathrm{o}}[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right); \end{aligned}$$

$$x[n] = x_{\mathrm{e}}[n] + x_{\mathrm{o}}[n].$$

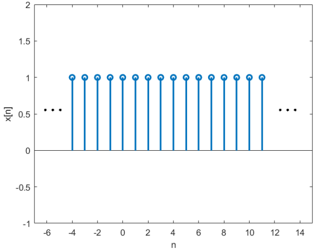
Propriedade da periodicidade

$$x[n] = x[n+N]$$

$N = 4$

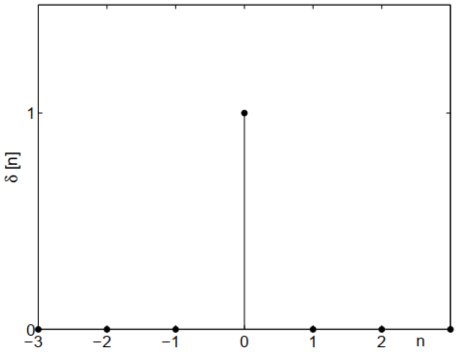


$N = 1$



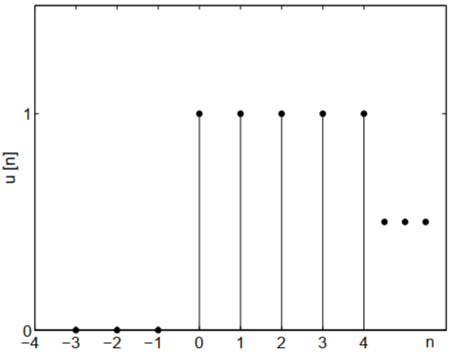
Sinais especiais – Sequência amostra unitária (função delta)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$



Sinais especiais – Sequência degrau unitária

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$



Sinais especiais – Relação entre $u[n]$ e $\delta[n]$

- Tempo contínuo:
  - $u(t)$ e $\delta(t)$ se relacionam por meio de integrais e derivadas;
- Tempo discreto:
  - $u[n]$ e $\delta[n]$ se relacionam por meio de somas e diferenças;

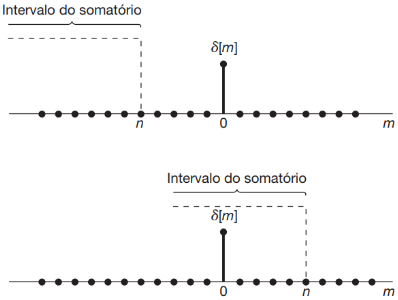
De forma intuitiva:

$$\begin{aligned} u[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \end{aligned}$$

Sinais especiais – Relação entre $u[n]$ e $\delta[n]$

Pode-se relacionar $u[n]$ e $\delta[n]$ de outra maneira:

$$\begin{aligned} u[n] &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]. \end{aligned}$$



Sinais especiais – Relação entre $u[n]$ e $\delta[n]$

Relembrando, para o caso contínuo (integral):

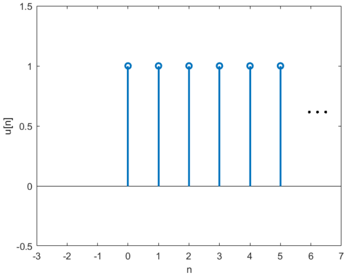
$$u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Analogia, para o caso discreto (somatório):

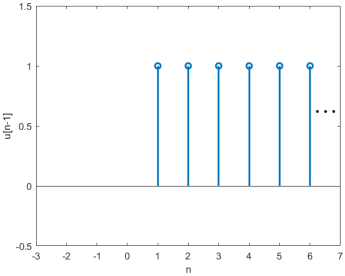
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m].$$

Sinais especiais – Relação entre $u[n]$ e $\delta[n]$

$u[n]$



$u[n-1]$



$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Sinais especiais – Relação entre $u[n]$ e $\delta[n]$

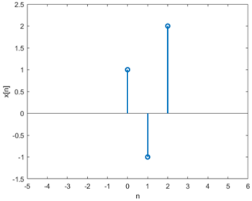
Relembrando, para o caso contínuo (derivada):

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t).$$

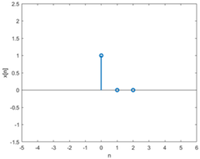
Analogia, para o caso discreto (equação a diferenças):

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

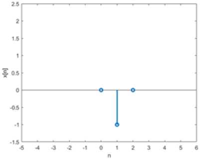
Construindo sequências a partir de sequências amostra unitária



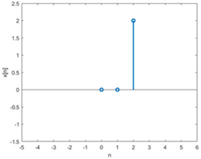
=



+



+



Construindo sequências a partir de sequências amostra unitária

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-1] + 2\delta[n-2].$$

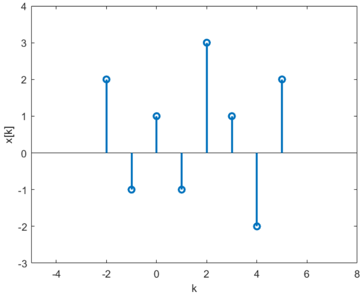
Generalizando:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

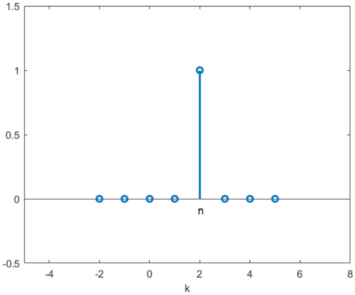
Propriedade de amostragem da função $\delta[n]$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[k-n] = x[n].$$

$x[k]$



$\delta[k-n]$



Revisão de números complexos

Coordenadas cartesianas (ou retangulares):

$$z = x + jy;$$

- $j = \sqrt{-1}$;
- Parte real: $\mathrm{Re}(z) = x$;
- Parte imaginária: $\mathrm{Im}(z) = y$;

Revisão de números complexos

Coordenadas polares:

$$z = re^{\theta};$$

- $r = |z|$: módulo ou magnitude de z;
- $\theta = \angle z$: fase ou ângulo de z;

Revisão de números complexos

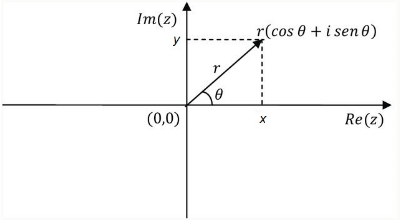
Relação entre diferentes representações: identidade de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta.$$

De onde obtém-se:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \\ \text{sen}\theta &= \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right) \end{aligned}$$

Revisão de números complexos – Representação geométrica



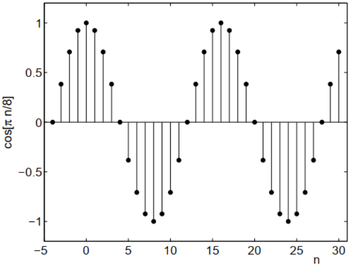
$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x);$$
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\text{sen}\theta.$$

Sinais especiais – Sequência senoidal

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi), \text{ para todo } n,$$

- A e $\phi \in \mathbb{R}$ representam a amplitude e fase;
- $\omega_0 \in \mathbb{R}$ representa a frequência (digital);



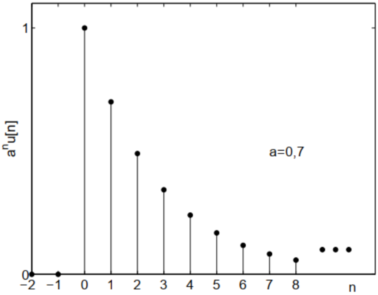
Sequência para $A = 1$; $\omega_0 = \pi/8$ e $\phi = 0$.

Sinais especiais – Sequência exponencial

Sequência exponencial real:

$$x[n] = a^n u[n],$$

para a constante real e $|a| < 1$.



Sinais especiais – Sequência exponencial complexa

Sequência exponencial complexa:

$$\begin{aligned} x[n] &= \beta e^{(\alpha + j\omega_0)n}, \text{ para todo } n, \\ \beta &= Ae^{j\phi}. \end{aligned}$$

- β: amplitude complexa;
  - A: amplitude real;
  - ϕ: fase da exponencial;
- α: fator de amortecimento;
  - $\alpha \neq 0$: fator exponencial de alteração de amplitudes;
  - $\alpha = 0$: sequência exponencial complexa periódica;
- ω_0: frequência;

Sinais especiais – Sequência exponencial complexa

Pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x[n] &= Ae^{\alpha n}\left[e^{j(\omega_0 n+\phi)}\right] \\ &= Ae^{\alpha n}\left[\cos(\omega_0 n+\phi)+j\mathrm{sen}(\omega_0 n+\phi)\right]. \end{aligned}$$

Sequências senoidais:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0+\phi) &= \frac{1}{2}\left(e^{j(\omega_0+\phi)}+e^{-j(\omega_0+\phi)}\right) \\ \mathrm{sen}(\omega_0+\phi) &= \frac{1}{2j}\left(e^{j(\omega_0+\phi)}-e^{-j(\omega_0+\phi)}\right) \end{aligned}$$

Periodicidade em sinais discretos – Sequência senoidal

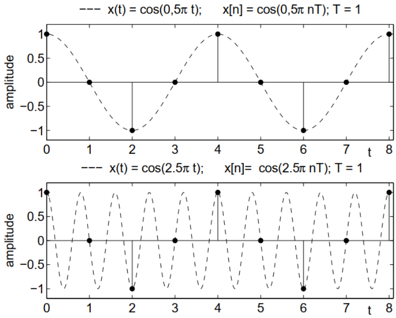
Diferenças entre sequências senoidais e sinais senoidais contínuos no tempo

- ω_0 (frequência digital): tem dimensão de radiano, pois n é adimensional (alguns autores utilizam radiano/amostra);
- Sequências senoidais com frequências ω_0 e $\omega_0 + 2\pi k$ (para k inteiro) são indistinguíveis entre si;

Periodicidade em sinais discretos – Sequência senoidal

Característica de sequência senoidal (discreta):

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos[(\omega_0 + 2\pi k)n + \phi],\ k \text{ inteiro} \\ &= A\cos(\omega_0 n + \phi). \end{aligned}$$



Periodicidade em sinais discretos – Sequência senoidal

Sequências senoidais

Sequências senoidais não necessariamente são periódicas;

Lembrando que sequência é periódica com período N se

$$x[n] = x[n+N], \text{ para qualquer } n.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos[\omega_0 n + \phi] \\ &= A\cos[\omega_0 (n+N) + \phi] \end{aligned}$$

somente se $N\omega_0 = 2\pi l$, para $l = kn$ inteiro, ou seja, $N = 2\pi l/\omega_0$.

Periodicidade em sinais discretos – Sequência senoidal

Exemplo

Determine o menor período N para a sequência abaixo ser periódica

$$x[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

$$N\frac{4\pi}{5} = 2\pi l \longrightarrow N = \frac{5}{2}l.$$

Resposta: N deve ser inteiro, logo $x[n]$ é periódico para $l = 2$ com $N = 5$.

Periodicidade em sinais discretos – Sequência exponencial

O que acontece quando somamos 2π à ω_0?

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n}.$$

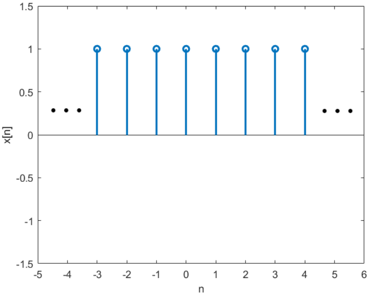
Como n é inteiro, $e^{j2\pi n} = 1$. Logo

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}.$$

Significado: sinais de tempo discreto possuem variações de frequência apenas entre 0 e 2π.

Periodicidade em sinais discretos – Sequência exponencial

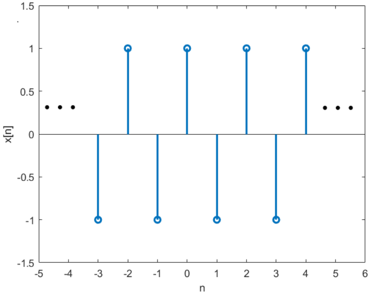
$$\omega_0 = 0,$$
$$e^{j0n} = 1.$$



Baixa frequência.

Periodicidade em sinais discretos – Sequência exponencial

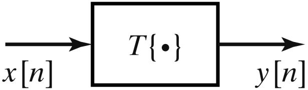
$$\omega_0 = \pi \longrightarrow \; e^{j\pi n} = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \\ -1, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$



Alta frequência.

Sistemas de tempo discreto

Sistemas: processam sinais para criar outros sinais;



$$
\begin{aligned}
x[n] &\longrightarrow y[n], \\
y[n] &= \mathsf{T}\left\{x[n]\right\},
\end{aligned}
$$

Exemplo: sistema média-móvel

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{5}\sum_{k=-2}^{2} x[n-k] \\
&= \frac{1}{5}\left(x[n+2]+x[n+1]+x[n]+x[n-1]+x[n-2]\right).
\end{aligned}
$$

Tempo contínuo (equações diferenciais)

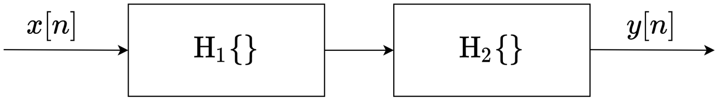
$$y'(t) + ay(t) = bx(t).$$

Tempo discreto (equações a diferenças)

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n].$$

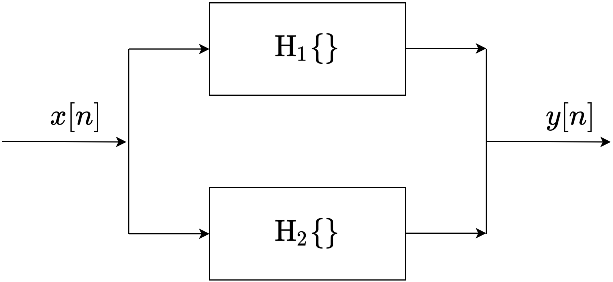
Conectando sistemas discretos

Serial/cascata



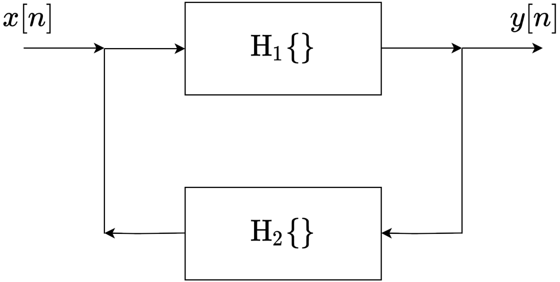
Conectando sistemas discretos

Paralelo



Conectando sistemas discretos

Realimentação (*feedback*)



Propriedades de sistemas discretos

2.1) Sistemas sem memória:

Um sistema é sem memória se saída $y[n]$ para cada valor de n depender apenas da entrada $x[n]$ no mesmo valor de n.

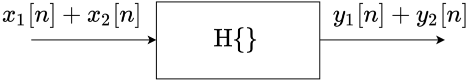
- $y[n] = (x[n])^2 \Longrightarrow$ sem memória;
- $y[n] = x[n - n_0] \Longrightarrow$ com memória se $n_0 > 0$ (atraso) ou $n_0 < 0$ (avanço);

Propriedades de sistemas discretos

2.2) Sistemas lineares:

Definidos pelas propriedades da aditividade e homogeneidade.

Propriedade da aditividade:

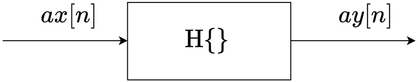


Para quaisquer entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\longrightarrow y_1[n], \\ x_2[n] &\longrightarrow y_2[n], \\ x_1[n] + x_2[n] &\longrightarrow y_1[n] + y_2[n]. \end{aligned}$$

Propriedades de sistemas discretos

Propriedade da homogeneidade:



Se saída do sistema é da forma:

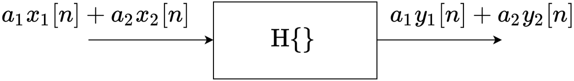
$$x[n] \quad \longrightarrow \quad y[n].$$

Sistema é homogêneo se, para qualquer constante a:

$$ax[n] \quad \longrightarrow \quad ay[n].$$

Propriedades de sistemas discretos

Sistemas lineares – aditividade e homogeneidade (princípio da superposição).



$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \quad \longrightarrow \quad a_1y_1[n] + a_2y_2[n].$$

Propriedade deve ser verdade para quaisquer entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$.

Generalizando:

$$\sum_k a_k x_k[n] \quad \longrightarrow \quad \sum_k a_k y_k[n].$$

Propriedades de sistemas discretos

Exemplo

Determine se o sistema cuja saída é $\mathrm{H}\{x[n]\} = y[n] = x[n] - 2x[n-1]$ é linear.

Sejam $x_1[n]$ e $x_2[n]$:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\longrightarrow & y_1[n] = x_1[n] - 2x_1[n-1], \\ x_2[n] &\longrightarrow & y_2[n] = x_2[n] - 2x_2[n-1], \end{aligned}$$

Propriedades de sistemas discretos

1) Aditividade – Analisar a resposta a entrada $z[n] = x_1[n] + x_2[n]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\{z[n]\} &= z[n] - 2z[n-1] \\ &= x_1[n] + x_2[n] - 2x_1[n-1] - 2x_2[n-1] \\ &= (x_1[n] - 2x_1[n-1]) + (x_2[n] - 2x_2[n-1]) \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

Aditividade OK.

Propriedades de sistemas discretos

2) Homogeneidade – Analisar a resposta a entrada $z[n] = ax_1[n]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\{z[n]\} &= z[n] - 2z[n-1] \\
&= ax_1[n] - 2ax_1[n-1] \\
&= a(x_1[n] - 2x_1[n-1]) \\
&= ay_1[n]
\end{aligned}$$

Homogeneidade OK.

Propriedades de sistemas discretos

3) Linearidade (pelo teorema da superposição) – Analisar a resposta a entrada $z[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\{z[n]\} &= z[n] - 2z[n-1] \\
&= a_1x_1[n] + a_2x_2[n] - 2a_1x_1[n-1] - 2a_2x_2[n-1] \\
&= a_1(x_1[n] - 2x_1[n-1]) + a_2(x_2[n] - 2x_2[n-1]) \\
&= a_1y_1[n] + a_2y_2[n].
\end{aligned}$$

O sistema é linear.

Propriedades de sistemas discretos

Exemplo

Determine se o sistema cuja saída é $y[n] = 3x[n] + 5$ é linear.

Propriedades de sistemas discretos

Exemplo

Determine se o sistema cuja saída é $y[n] = 3x[n] + 5$ é linear.

Aditividade

$$\begin{aligned} x_1[n] &\longrightarrow y_1[n] = 3x_1[n] + 5, \\ x_2[n] &\longrightarrow y_2[n] = 3x_2[n] + 5, \end{aligned}$$

Testando propriedade da aditividade:

$$\begin{aligned} z[n] = x_1[n] + x_2[n] &\longrightarrow \mathrm{H}\{z[n]\} = 3z[n] + 5 \\ &\longrightarrow 3(x_1[n] + x_2[n]) + 5 \end{aligned}$$

Propriedades de sistemas discretos

$$\begin{aligned} y_1[n] + y_2[n] &= 3x_1[n] + 3x_2[n] + 10 \\ &\neq \mathrm{H}\{z[n]\} \end{aligned}$$

O sistema não é linear (pela propriedade da aditividade).

Formas de provar não linearidade – contraexemplo (basta falhar para um caso):

$$\begin{aligned} x_1[n] = 1 &\longrightarrow y_1[n] = 8, \\ x_2[n] = 2 &\longrightarrow y_2[n] = 11, \\ z[n] = x_1[n] + x_2[n] = 3 &\longrightarrow \mathrm{H}\{z[n]\} = 14 \neq y_1[n] + y_2[n]. \end{aligned}$$

Propriedades de sistemas discretos

2.3) Sistemas invariantes no tempo (ou invariantes no deslocamento):

São sistemas se comportam da mesma maneira, independente do instante de tempo em que a entrada é aplicada.

$$
\begin{aligned}
x[n] &\longrightarrow y[n], \\
x[n - n_0] &\longrightarrow y[n - n_0]
\end{aligned}
$$

Propriedades de sistemas discretos

Exemplo

Verificar se $y[n] = x[n] - 2x[n-1]$ descreve um sistema invariante no tempo.

Fazendo $z[n] = x[n - n_0]$, o que acontece ao aplicarmos $z[n]$ ao sistema?

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\{z[n]\} &= z[n] - 2z[n-1] \\ &= x[n-n_0] - 2x[n-1-n_0]. \end{aligned}$$

Propriedades de sistemas discretos

Para o sistema ser invariante no tempo, devemos ter $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$. Calculando para o sistema do exemplo ($y[n] = x[n] - 2x[n-1]$):

$$
\begin{aligned}
y[n-n_0] &= x[n-n_0] - 2x[n-n_0-1] \\
&= z[n] - 2z[n-1] \\
&= \mathrm{H}\{z[n]\}.
\end{aligned}
$$

Logo, o sistema é invariante no tempo.

Propriedades de sistemas discretos

Exemplo

Verificar se $y[n] = x[n^2]$ descreve um sistema invariante no tempo.

Fazendo $z[n] = x[n - n_0]$, o que acontece ao aplicarmos $z[n]$ ao sistema?

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}\{z[n]\} &= z[n^2] \\
&= x[n^2 - n_0].
\end{aligned}
$$

Propriedades de sistemas discretos

Verificando se $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$. Como $y[n]=x[n^2]$, temos:

$$
\begin{aligned}
y[n-n_0] &= x[(n-n_0)^2] \\
&= x[n^2-2nn_0+n_0^2].
\end{aligned}
$$

Logo, o sistema não é invariante no tempo.

Propriedades de sistemas discretos

2.4) Sistemas causais:

Um sistema é causal se sua saída para um instante n depende apenas de sua entrada até o instante n.

- $y[n] = x[n] - 2x[n-1]$ é causal;
- $y[n] = x[n+3]$ não é causal;

Reflexão:

- Todo sistema "real" é causal?

Propriedades de sistemas discretos

2.5) Sistemas estáveis:

Um sistema é estável no sentido entrada limitada saída limitada (BIBO, do inglês *bouded-input, bounded-output*) se toda sequência limitada de entrada produzir uma sequência limitada de saída.

$x[n]$ é entrada limitada se houver um valor fixo positivo e finito B_x tal que

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \text{ para todo } n.$$

Sistema é estável se para toda entrada limitada houver um valor fixo positivo e finito B_y tal que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \text{ para todo } n.$$

Propriedades de sistemas discretos

Exemplo

Sistema $y[n] = (x[n])^2$.

Se $|x[n]| \leq B_x$ para todo n, então $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$ para todo n. $\Longrightarrow$ sistema é estável.

Exemplo

Sistema $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$.

$y[n] = \log_{10}(|x[n]|) = -\infty$ para todo n em que $|x[n]| = 0$. $\Longrightarrow$ sistema é instável.

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

Sistemas do mundo real são frequentemente modelados como SLIT:

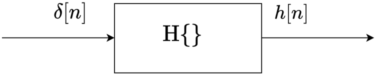
- Boa aproximação;
- Análise é simples e poderosa;

Conceito chave: Superposição para SLIT.

$$a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + \cdots \longrightarrow \boxed{\mathrm{H}\{\}} \longrightarrow a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + \cdots$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

Aplicando-se $\delta[n]$ à entrada de um SLIT definido pela transformação H$\{\}$, temos:



- $\delta[n]$: sequência amostra unitária (impulso);
- $h[n]$: resposta ao impulso do SLIT;

Relembrando que podemos escrever sequencias discretas $x[n]$ como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

Como obter a resposta do SLIT a uma sequência arbitrária $x[n]$?

$$\mathrm{H}\{x[n]\} = \mathrm{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

Propriedade da linearidade:

$$\mathrm{H}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathrm{H}\{\delta[n-k]\}$$

Propriedade da invariância ao tempo:

$$\mathrm{H}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

- Saída do SLIT é obtida pela convolução entre a entrada e sua resposta ao impulso, $h[n]$:
  - $h[n]$ é suficiente para caracterizar um SLIT;

Convolução é representada como:

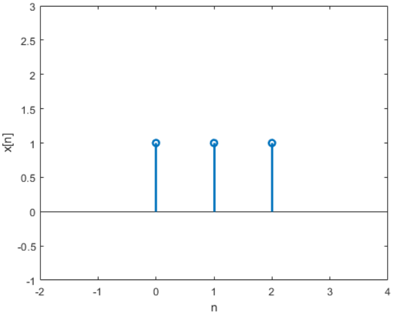
$$y[n] = x[n] * h[n],$$

ou

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

Considere o SLIT dado por $y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-2]$. Qual é a resposta à entrada $x[n]$ dada por



Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-2]$

1) Método direto:

- $y[n] = 0$ para $n < 0$,
- $y[0] = x[0] = 1$,
- $y[1] = x[1] - 2x[0] = 1 - 2 = -1$,
- $y[2] = x[2] - 2x[1] + 3x[0] = 1 - 2 + 3 = 2$,
- $y[3] = x[3] - 2x[2] + 3x[1] = 0 - 2 + 3 = 1$,
- $y[4] = x[4] - 2x[3] + 3x[2] = 0 + 0 + 3 = 3$,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-2]$

2) Usando somatório de convolução:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}$,
- $h[0] = \delta[0] = 1$,
- $h[1] = 0 - 2\delta[0] = -2$,
- $h[2] = 0 - 0 + 3\delta[0] = 3$,
- $h[3] = 0$,

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

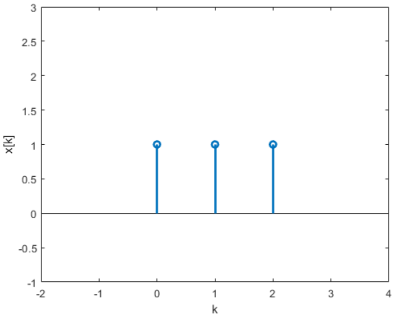
Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

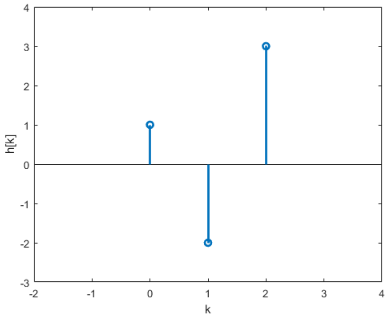
$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&= x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] \\
&= (1)\begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&+ (1)\begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&+ (1)\begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

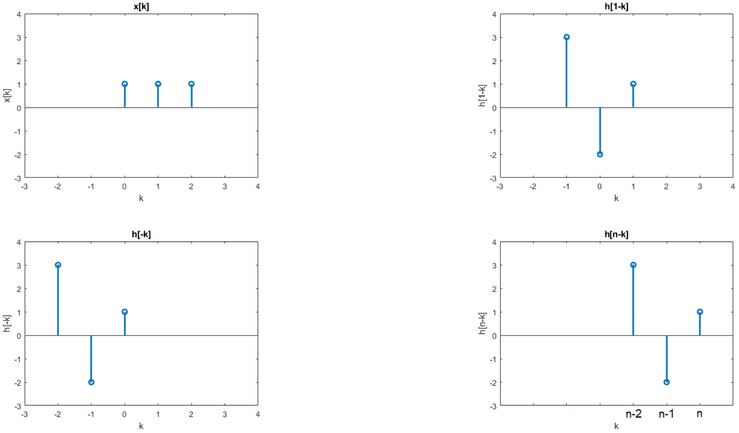
$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-2]$$

3) Reflete (em torno do eixo-y) e desloca: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$





Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)



Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- $y[0] = \sum_k x[k]h[0-k] = 1$
- $y[1] = \sum_k x[k]h[1-k] = 1-2 = -1$
- $y[2] = \sum_k x[k]h[2-k] = 3-2+1 = 2$
- $y[3] = \sum_k x[k]h[3-k] = 3-2 = 1$
- $y[4] = \sum_k x[k]h[4-k] = 3$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades de SLIT (convolução)

Propriedade 1

Um SLIT é inteiramente determinado por sua resposta ao impulso. (Não é válido para sistemas não LIT.)

Exemplo (sistema não é IT):

$$\begin{aligned} y[n] &= nx[n], \\ \delta[n] &\longrightarrow h[n] = 0. \end{aligned}$$

- Resposta ao impulso é zero, mesmo assim sistema pode produzir saídas não-negativas para outras entradas $x[n]$.
- Não é possível caracterizar sistema a partir do conhecimento de $h[n]$;

Propriedades de SLIT (convolução)

Propriedade 2

A convolução é comutativa.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Definindo $m = n - k \longrightarrow k = n - m$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m].$$

Consequência:

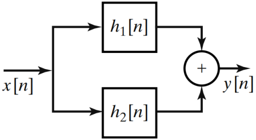
- Sinal refletido em torno do eixo-y pode ser tanto $h[n]$ quanto $x[n]$.

Propriedades de SLIT (convolução)

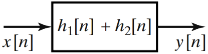
Propriedade 3

A convolução é distributiva.

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \quad = \quad x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



(a)



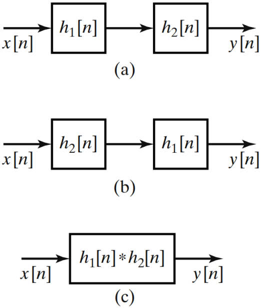
(b)

Propriedades de SLIT (convolução)

Propriedade 4

A convolução é associativa.

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad = \quad (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



Propriedades de SLIT (convolução)

Propriedade 5

Causalidade.

- Em um sistema causal, $y[n]$ não depende de $x[n+k]$ para $k > 0$.

Reescrevendo a convolução (para sistemas LIT):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

Para que um SLIT seja causal, devemos ter $h[k] = 0$ para $k < 0$.

Propriedades de SLIT (convolução)

Propriedade 6

Estabilidade.

Um SLIT é estável se sua resposta ao impulso for somável em valor absoluto:

$$B_h = \sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty.$$

Propriedades de SLIT (convolução)

Propriedade 7

Resposta ao degrau.

Aplicando-se $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ à entrada de um SLIT, obtemos $h[n] = s[n] - s[n-1]$, onde $s[n]$ é a resposta ao degrau:

$$s[n] = \mathrm{H}\{u[n]\} = u[n] * h[n].$$

Temos que

$$\begin{aligned} u[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \\ s[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \end{aligned}$$

A resposta ao degrau também caracteriza sistemas LIT.

EDLCC – Equações a diferenças lineares de coeficientes constante

EDLCC de N-ésima ordem:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

$$y[n] = y_{\mathrm{p}}[n] + y_{\mathrm{h}}[n].$$

- y_{h} solução homogênea;
- y_{p} solução particular;

Podemos resolver EDLCC's tratando-as como SLIT's.

EDLCC – Solução por SLIT

- Para $N = 0$ e $a_0 = 1$ (sistema FIR):

$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r].$$

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \cdots, M \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução é obtida pela convolução entre $x[n]$ e $h[n]$.

- Para $N \neq 0$ e $a_0 = 1$:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k].$$

EDLCC – Solução por SLIT

Exemplo

EDLCC de primeira-ordem:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n].$$

Suponha que $x[n] = \delta[n]$ e $y[n] = 0$, para $n < 0$ (causal).

$$y[n] = \delta[n] + ay[n-1] \quad \text{(solução é recursiva).}$$

- $y[-1] = 0$;
- $y[0] = \delta[0] + ay[-1] = 1$;
- $y[1] = \delta[1] + ay[0] = a$;
- $y[2] = \delta[2] + ay[1] = a^2; \cdots$

$$y[n] = a^n u[n].$$

EDLCC – Solução por SLIT

Exemplo

EDLCC de primeira-ordem:

$$y[n] - ay[n-1] = x[n].$$

Suponha que $x[n] = \delta[n]$ e $y[n] = 0$, para $n > 0$.

$$y[n-1] = a^{-1}\left(y[n] - \delta[n]\right).$$

- $y[0] = a^{-1}(y[1] - \delta[1]) = 0$
- $y[-1] = a^{-1}(y[0] - \delta[0]) = -a^{-1}$
- $y[-2] = a^{-1}(y[-1] - \delta[-1]) = -a^{-2}; \cdots$

$$y[n] = -a^{n}u[-n-1].$$