DCA 0118 – Procesamento Digital de Sinais
Tópico 7.1: Transformada discreta de Fourier

Tiago Barros [1]

[1]⟨tbarros@dca.ufrn.br⟩

Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)
Centro de Tecnologia (CT)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

2022.1

Programa

Conteúdo

1. Introdução;
2. Transformada discreta de Fourier;
3. Extensão periódica;
4. Propriedades;
5. Convolução linear usando DFT;
6. Implementação de SLIT com DFT;

Bibliografia

Livro texto

Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W., 2012. Processamento em tempo discreto de sinais. Tradução Daniel Vieira. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil.

- Capítulo 8:
  - Seções 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7

Transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD)

- $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
- $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$

- Fórmula fechada só para funções específicas, como seno.
  - Como calcular para um sinal de áudio?
  - Numericamente impossível, teria que calcular para todo ω.

- Alternativa: Transformada Discreta de Fourier (TDF ou DFT, do inglês *discrete Fourier transform*).

Transformada discreta de Fourier (DFT): definição

- Computadores e processadores trabalham com sequências finitas de dados:
  - $x[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$;
  - Exemplo: arquivo de áudio (MP3, WAV);
- DTFT: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$
  - Exagero: representa N valores de $x[n]$ com infinitos valores de $X(e^{j\omega})$;
  - Como representar com N valores?
- DFT: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$
  - $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
  - Amostragem em frequência.

Interpretação: mudança de base

Exemplo: $N = 4$

$$\begin{aligned}
X[0] &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \\
X[1] &= x[0] - jx[1] - x[2] + jx[3] \\
X[2] &= x[0] - x[1] + x[2] - x[3] \\
X[3] &= x[0] + jx[1] - x[2] - jx[3]
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

Interpretação: mudança de base

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

- $\mathbf{X}$ é vetor que contém amostras da DFT:
  - Dimensão $N \times 1$;
  - Complexo;
- $\mathbf{F}$ é matriz da DFT:
  - Dimensão $N \times N$;
  - Complexa;
- $\mathbf{x}$ é vetor que contém amostras da sequência discreta:
  - Dimensão $N \times 1$;
  - Pode ser real ou complexo;

DFT inversa

Transformada inversa (forma matricial):

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}$$

Transformada direta:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Transformada inversa

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N},\ n = 0, 1, \ldots, N-1$$

DFT definição

Podemos simplificar as equações, definindo o termo:

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

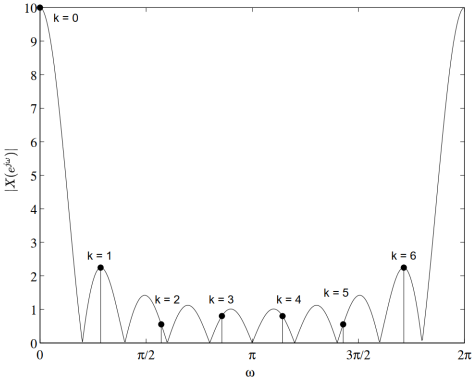
Transformada direta:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn},\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Transformada inversa

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn},\ n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Interpretação: amostragem em frequência

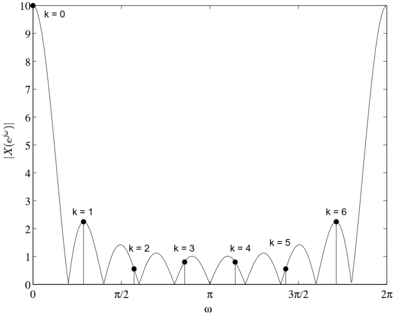


$$\boxed{X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}},\ k = 0, 1, \ldots, N-1}$$

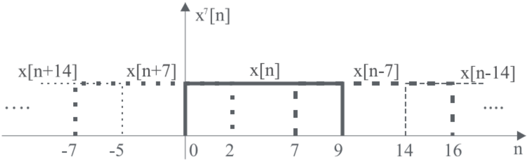
Exemplo: $N = 7$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

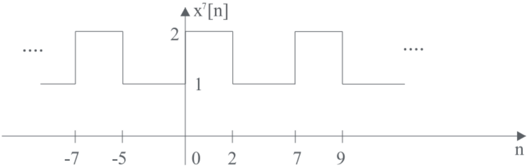
$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 9/2} \frac{\text{sen}(10\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$



Exemplo: $N = 7$

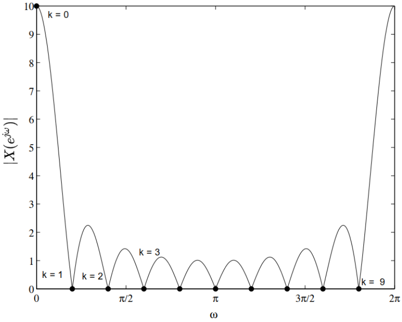


(a)

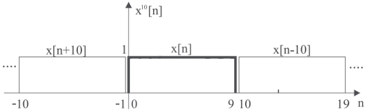


(b)

Exemplo: $N = 10$

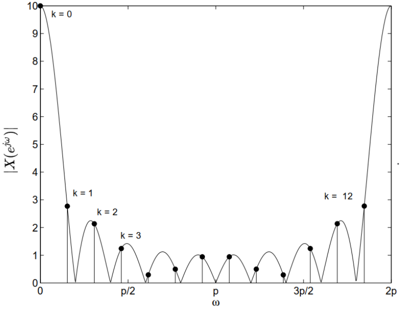


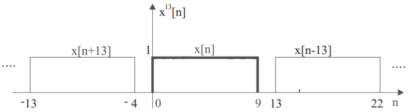
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
k = 0
k = 1
k = 2
k = 3
k = 9
$|X(e^{j\omega})|$
0
π/2
π
3π/2
2π
ω



$x^{10}[n]$
x[n+10]
x[n]
x[n-10]
1
....
....
-10
-1
0
9
10
19
n

Exemplo: $N = 13$


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
k = 0
k = 1
k = 2
k = 3
k = 12
0
p/2
p
3p/2
2p
ω
|X(e^{jω})|


x^{13}[n]
x[n+13]
x[n]
x[n-13]
1
....
....
-13
- 4
0
9
13
22
n

Extensão periódica

$$\begin{aligned} \text{DTFT: } X(e^{j\omega}) &\longleftrightarrow x[n] \\ \text{DFT: } X[k] &\longleftrightarrow x_s[n] \end{aligned}$$

- $x[n]$ não necessariamente é de duração finita;
- A qual sinal corresponde a DFT?

Extensão periódica

$$\boxed{x_s[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN] = x[((n))_N] = x^N[n]}$$

Função módulo: $n \bmod N = n - N\lfloor n/N \rfloor$

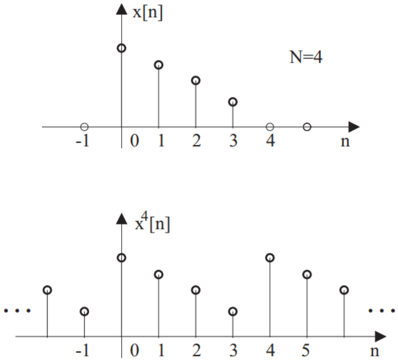
$x_s[n]$ é a extensão periódica de $x[n]$:

$$x_s[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN]$$

Em outras palavras

$$x[n] = \begin{cases} x_s[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Extensão periódica: exemplo



Extensão periódica

$\Longrightarrow$ Seja DFT de comprimento M;

$\Longrightarrow$ Seja sequência discreta $x[n]$ de comprimento N;

$\Longrightarrow$ Seja $X[k]$ a DFT de $x[n]$. Para obtermos $x[n]$ novamente, a partir da DFT inversa de $X[k]$, sem gerar sobreposição de $x[n]$, devemos escolher $M \geq N$;

$\Longrightarrow$ Considerando os casos em que $M \geq N$, calculamos a DFT de $x[n]$ com comprimento M, adicionando $(M - N)$ zeros à direita da sequência $x[n]$:

- *Zero padding*.

$X(e^{j\omega})$ a partir de $X[k]$

Dado $X[k]$, como calcular $X(e^{j\omega})$ para um ω qualquer?

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N} \right) e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} e^{-j\omega n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left(\frac{1 - e^{-jN(\omega - 2\pi k/N)}}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}} \right)}$$

Periodicidade no tempo

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \\
x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} X[k] e^{j2\pi kn/N}
\end{aligned}
$$

Periodicidade com período N

$$
\begin{aligned}
x[n+N] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k(n+N)/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} e^{j2\pi k} \\
&= x[n]
\end{aligned}
$$

Simetrias

- $x[n]$ real $\Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
  - Magnitude é par: $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - Fase é ímpar: $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

- $x[n]$ real $\Rightarrow X[k] = X^*[-k]$
  - Magnitude é par: $|X[k]| = |X[-k]|$
  - Fase é ímpar: $\angle X[k] = -\angle X[-k]$

Periodicidade em frequência

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \\
x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}
\end{aligned}
$$

Periodicidade com período N

$$
\begin{aligned}
X[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k+N)n/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}e^{-j2\pi n} \\
&= X[k]
\end{aligned}
$$

Deslocamento circular

Seja uma sequência $x[n]$ com comprimento N e sua transformada discreta com N pontos.

$$x[n],\, 0 \leq n \leq N-1 \longleftrightarrow X[k],\, 0 \leq k \leq N-1$$

A propriedade do deslocamento no eixo n pode ser expressa como

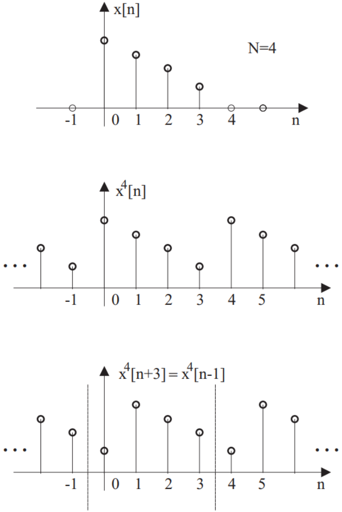
$$x_d^{-m}[n] \longleftrightarrow X[k]e^{-j2\pi km/N},\, 0 \leq k \leq N-1,$$

onde

$$x_d^{-m}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-m-lN]r_N[n] = x[((n-m))_N]$$

e $r_N[n]$ é o pulso retangular de comprimento N.

Deslocamento circular



Convolução circular

Sejam as sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$, ambas de comprimento N:

$$x_1[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k]$$
$$x_2[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_2[k]$$

Qual a sequência $x_3[n]$, tal que $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$?

Pode-se mostrar que

$$x_3[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N]\right] r_N[n]$$

Convolução circular

A operação $((m))_N$ é definida como m mod N (como $0 \leq m < N$, temos $m \bmod N = m$). Logo:

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N] x_2[((n-m))_N]\right] r_N[n] \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N]\right] r_N[n] \end{aligned}$$

$x_3[n]$ é definida como a convolução circular entre $x_1[n]$ e $x_2[n]$:

$$x_3[n] = x_1[n] \; (N) \; x_2[n]$$

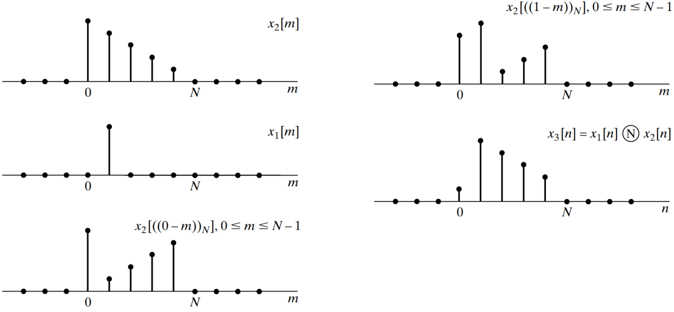
O símbolo (N) denota o comprimento da convolução circular.

Convolução circular - Exemplo 1

$\Longrightarrow$ Exemplo: Convolução circular com uma sequência de impulso atrasada:

- $x_2[n]$ é uma sequência qualquer com comprimento $N = 5$.
- $x_1[n] = \delta[n-1]$;
- Comprimento da convolução circular é $N = 5$.

Convolução circular - Exemplo 1

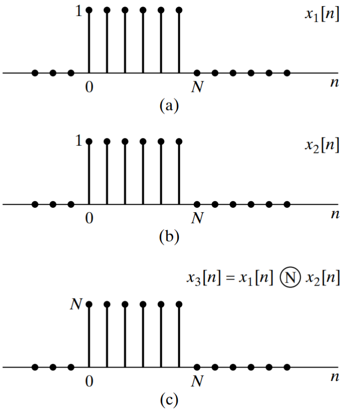


Convolução circular - Exemplo 2

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- O comprimento das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é $L = 6$.
- Comprimento da convolução circular é $N = 6$.

Convolução circular - Exemplo 2

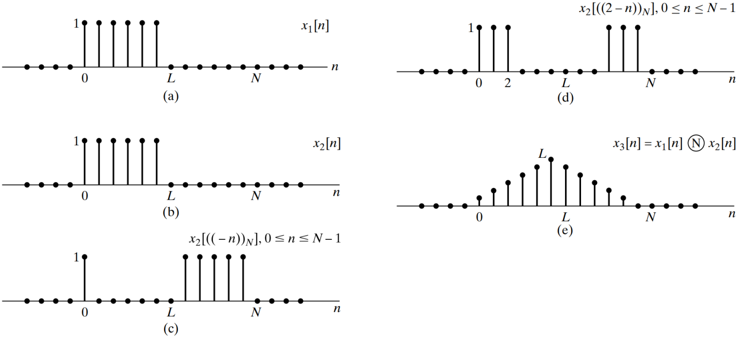


Convolução circular - Exemplo 3

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- O comprimento das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é $L = 6$.
- Comprimento da convolução circular é $N = 2L$.

Convolução circular - Exemplo 3



Convolução circular - dualidade

Se $x_3[n] = x_1[n]x_2[n]$, então:

$$X_3[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[l]X_2[((k-l))_N]$$

$$x_1[n]x_2[n] \overset{\mathscr{DFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}X_1[k] \; Ⓝ \; X_2[k]$$

Convolução linear usando DFT

$\Longrightarrow$ Algoritmos eficientes para calcular DFT (FFT).

$\Longrightarrow$ Eficiente maneira para calcular convolução circular:

(a) Obter $X_1[k]$ e $X_2[k]$ pelas DFTs de N pontos das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$.
(b) Computar o produto $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ para $0 \leq k \leq N-1$.
(c) Computar a sequência $x_3[n] = x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n]$ como a DFT inversa de $X_3[k]$.

Convolução linear usando DFT

Convolução linear de duas sequências de comprimento finito.

Seja

- $x_1[n]$ sequência de L pontos.
- $x_2[n]$ sequência de P pontos.

A convolução linear das duas sequências é

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] x_2[n-m].$$

$\Longrightarrow x_3[n] \neq 0$ se $0 \leq n \leq L + P - 2$.

$\Longrightarrow$ Maior comprimento de $x_3[n]$ é $L + P - 1$.

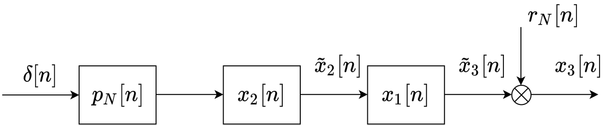
Convolução linear usando DFT

Convolução circular como convolução linear com aliasing.

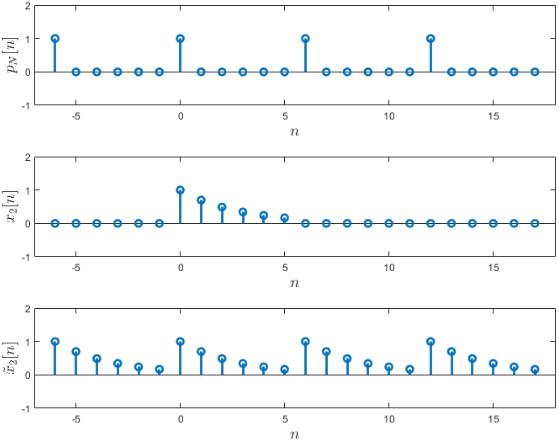
Relembrando a convolução circular:

$$x_3[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]\right] r_N[n]$$

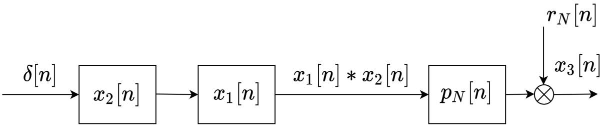
Diagrama de blocos de convolução circular:



Convolução linear usando DFT



Convolução linear usando DFT



$\Longrightarrow$ "Convolução circular pode ser formada por convoulção linear mais *aliasing*".

Seja

$$\begin{aligned} \hat{x}_3[n] &= x_1[n] * x_2[n] \\ x_3[n] &= x_1[n] \; \text{Ⓝ} \; x_2[n] \end{aligned}$$

Podemos escrever

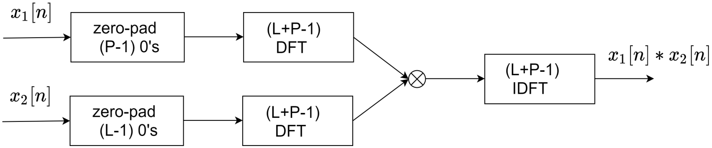
$$x_3[n] = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{x}_3[n + lN] \right] r_N[n]$$

Convolução linear usando DFT

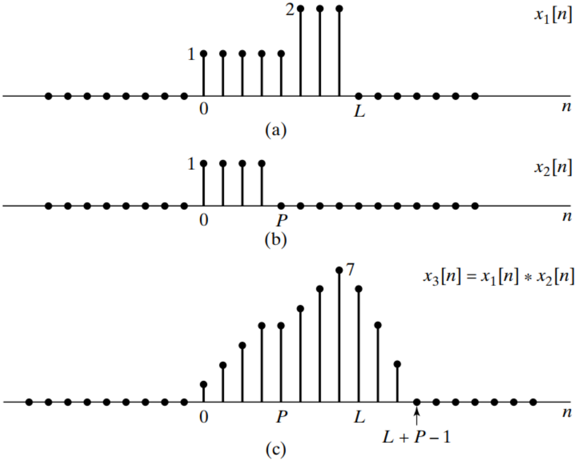
Abordagem prática para evitar *aliasing*: *zero padding*.

Sejam as mesmas sequências

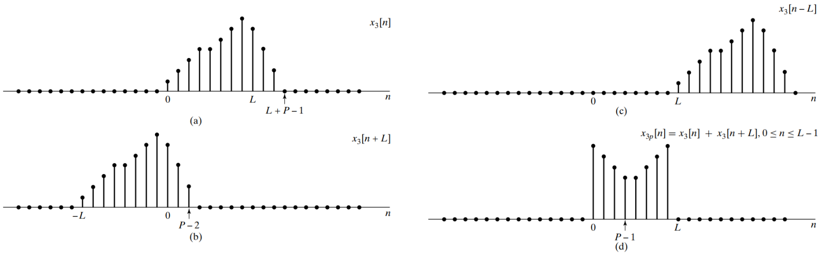
- $x_1[n]$ sequência de L pontos.
- $x_2[n]$ sequência de P pontos.



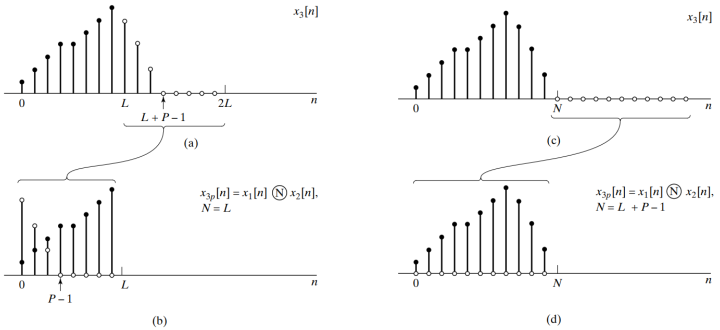
Convolução linear usando DFT



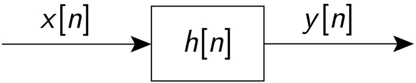
Convolução linear usando DFT



Convolução linear usando DFT



Implementação de SLIT com DFT



$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- $x[n]$ sinal de entrada de comprimento muito grande.
- $h[n]$ SLIT (*e.g.*, filtro FIR)

$\Longrightarrow$ É possível implementar filtragem de forma computacionalmente eficiente com DFTs e IDFTs (FFTs e IFFTs).

- *Zero padding* – impraticável se comprimento de $x[n]$ for muito grande.
- Alternativa: convolução em blocos;

Implementação de SLIT com DFT

1) Método da sobreposição e soma (*overlap-add*):

$\Longrightarrow$ Seja $h[n]$ de comprimento P.

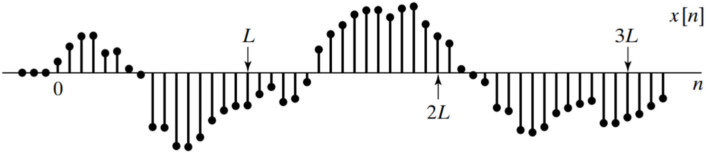
$\Longrightarrow$ Seja $x[n]$ dividido em blocos $x_r[n]$ de comprimento L, de forma que

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL],$$

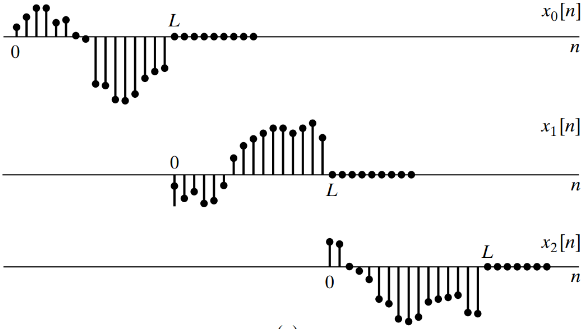
onde

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Implementação de SLIT com DFT



Implementação de SLIT com DFT



(a)

Implementação de SLIT com DFT

Convolução é linear e invariante no tempo, então

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL],$$

onde

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n].$$

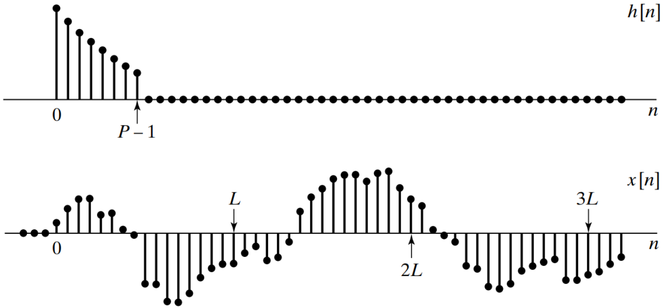
- $x_r[n]$ possui L pontos diferentes de zero.
- $h[n]$ possui P pontos.
- $y_r[n]$ possui $P + L - 1$ pontos.

Implementação de SLIT com DFT

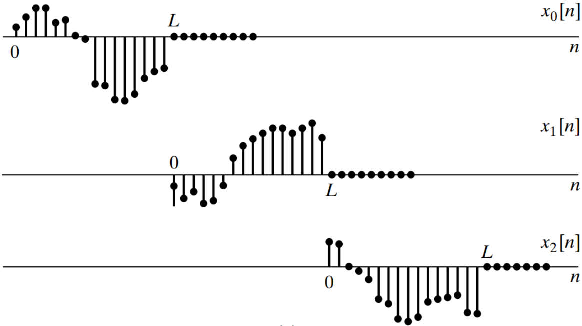
$\Longrightarrow$ Algoritmo: Método da sobreposição e soma (*overlap-add*):

a) Obtém-se $y_r[n]$ com DFTs e IDFTs de $N \geq L + P - 1$ pontos.
b) Resultados das convoluções possuem sobreposição de $(P - 1)$ pontos nos transitórios.
c) Deve-se somar as parcelas $y_r[n]$, somando-se os pontos que se sobrepõem.

Implementação de SLIT com DFT

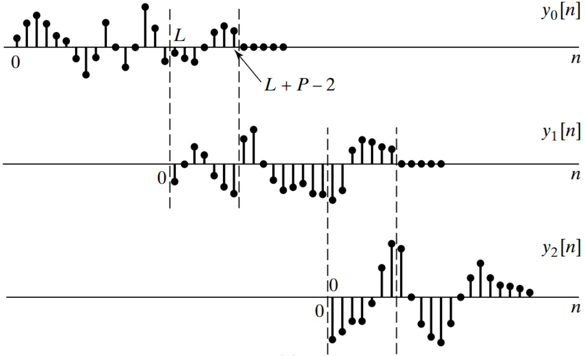


Implementação de SLIT com DFT



(a)

Implementação de SLIT com DFT



(b)

Implementação de SLIT com DFT

2) Método da sobreposição e armazenamento (*overlap-save*):
   - Corresponde a implementar convolução circular de L pontos entre $x_r[n]$ (L pontos) e $h[n]$ (P pontos) e identificar parte do resultado que corresponde à convolução linear.

a) Resultados são agrupados em cada convolução circular.

b) Se $P < L$, somente os $(P-1)$ primeiros pontos são incorretos devido ao *aliasing* no tempo.

c) Início de cada bloco de L pontos sobrepõe bloco anterior nos $(P-1)$ primeiros pontos:

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P - 1],\ 0 \leq n \leq L - 1.$$

Implementação de SLIT com DFT

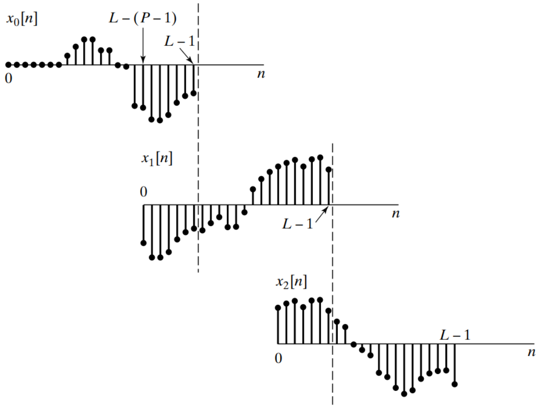
Convolução circular de cada bloco em que ocorre *aliasing* é $y_{rp}[n]$.

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L - P - 1) + P - 1]$$

onde

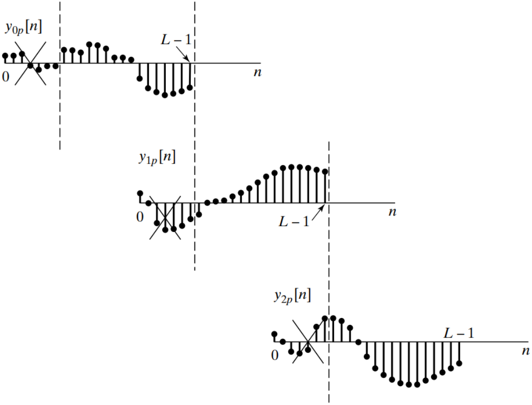
$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P - 1 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Implementação de SLIT com DFT



(a)

Implementação de SLIT com DFT



(b)