El problema de la clepsidra

Por Roberto Fermín (@TeoremaPi)

Basado de un problema de Marcelo Rodríguez Danta

1. Enunciado

Una clepsidra es un instrumento para medir el tiempo consistente en un recipiente con un orificio en la parte inferior. Su funcionamiento es sencillo, basta con llenar el recipiente con líquido hasta un nivel determinado y, siempre que se llene hasta el mismo nivel, el tiempo que tardará en vaciarse del todo será siempre el mismo. No obstante, esto no quiere decir que la velocidad a la que baja el líquido sea constante durante todo este periodo ya que esto depende de la geometría del recipiente. Por esto, se pide calcular la geometría de una clepsidra de revolución que hace que la velocidad a la que baja el líquido sea constante.

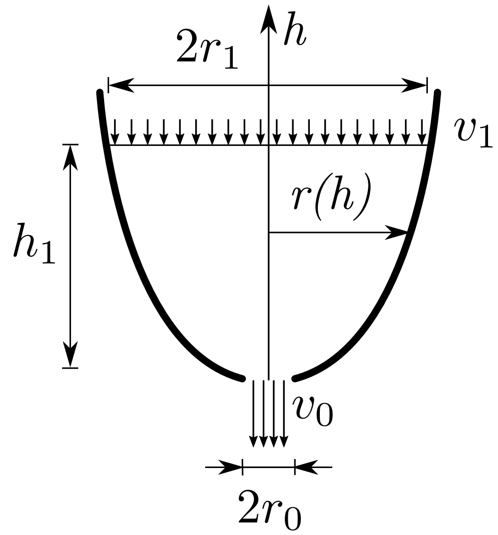

Figura 1: Esquema de una clepsidra.

Datos:

- Radio del orificio de salida: r_0
- Velocidad de bajada del líquido: v_1
- Gravedad: g
- Presión atmosférica: P_a
- Densidad del líquido: ρ

2. Pistas

El problema puede ser un poco abrumador en un principio así que, si no sabes ni por donde empezar, en esta sección encontrarás las herramientas necesarias para resolver el problema. Concretamente hacen falta dos principios básicos de la mecánica de fluidos: la ecuación de continuidad y la ecuación de Bernoulli.

2.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad no es más que la ecuación de conservación de la masa muy simplificada. La ecuación tiene esta forma:

$$\rho_0 S_0 v_0 = \rho_1 S_1 v_1$$

Donde S es el área de cada una de las superficies atravesadas por el fluido. Además, como los líquidos normalmente se suponen incompresibles, la densidad ρ no varía, así que se puede dividir en los dos lados de la igualdad y simplificar aún más:

$$S_0 v_0 = S_1 v_1 \tag{1}$$

2.2. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es otra de las clásicas. Básicamente es la ecuación de conservación de la energía también muy simplificada. Si recuerdas las definiciones de energía potencial y cinética del instituto encontrarás en esta ecuación términos que te resultarán muy familiares:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$

Aquí se ha supuesto directamente que la densidad es constante en todo el fluido.

2.2.1. Simplificación de la ecuación de Bernoulli

Este puede ser un buen momento para parar e intentarlo por ti mismo. No obstante, si aún no te ves con fuerzas para seguir, aquí va la simplificación.

Lo primero es que la presión de las superficies expuestas es la presión atmosférica, es decir, $p_0 = p_1 = P_a$ por lo que podemos restar el termino en ambos lados

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_0 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$

Haciendo que la superficie inferior esté a altura cero nos quitamos otro termino $h_0 = 0$

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$

Al igual que en la ecuación de continuidad, se pueden dividir ambos miembros entre la densidad

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v_1^2 + g h_1$$

Por último, multiplicando por 2 queda algo más sencillo de escribir

$$v_0^2 = v_1^2 + 2gh_1 \tag{2}$$

3. Solución

A partir de aquí ya no hay marcha atrás. La parte de física ya ha concluido y lo que queda es operar con las ecuaciones de forma matemática.

Lo primero, es volver a leer el enunciado para recordar lo que pide. Escrito formalmente sería $r(h)$ o, con palabras, una función que nos diga como de ancha es la clepsidra (que radio tiene) según vamos subiendo (en cada punto de la altura).

Si te fijas en la ecuación (2) verás que hay una relación entre la velocidad con la que sale el líquido por el orificio inferior v_0 y la altura del líquido h_1. Además tiene sentido, dado que la velocidad a la que baja el líquido v_1 es constante porque es lo que estamos buscando y la gravedad g la consideramos constante a estas escalas, esto implica que cuanto mayor es la altura del líquido, mayor es la velocidad con la que sale por debajo.

Para resolver el problema solo falta una forma de relacionar la velocidad v_o con el radio de la superficie superior. Esta relación se ve rápidamente sustituyendo en la ecuación de continuidad (1) el área de un círculo $S = \pi r^2$

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r_1^2 v_1$$

dividiendo entre π

$$r_0^2 v_0 = r_1^2 v_1$$

y, por último, despejando v_0

$$v_0 = \frac{r_1^2}{r_0^2} v_1$$

Ahora se sustituye este resultado en la ecuación de Bernoulli (2)

$$\left(\frac{r_1^2}{r_0^2}v_1\right)^2 = v_1^2 + 2gh_1$$

Y ya casi está. Esta ecuación relaciona únicamente r_1 y h_1 que es lo que estamos buscando. Fíjate que todo lo demás son constantes y datos del problema (r_0, v_1 y g). Ya solo queda despejar r_1. Puede parecer un poco complejo pero esto ya es álgebra básica. Primero se desarrolla el cuadrado

$$\frac{r_1^4}{r_0^4}v_1^2 = v_1^2 + 2gh_1$$

se multiplica por $\frac{r_0^4}{v_1^2}$

$$r_1^4 = \frac{r_0^4}{v_1^2}\left(v_1^2 + 2gh_1\right)$$

y se toman raíces cuartas

$$r_1 = \sqrt[4]{\frac{r_0^4}{v_1^2}\left(v_1^2 + 2gh_1\right)}$$

Aunque no es obligatorio, se puede operar un poco para darle un poco más de sentido físico y poder comprender mejor lo que representa

$$r_1 = r_0\sqrt[4]{1 + \frac{2gh_1}{v_1^2}}$$

o, escrito de forma general para cualquier valor de h

$$r\left(h\right) = r_0\sqrt[4]{1 + \frac{2gh}{v_1^2}} \tag{3}$$

4. Resultados

Para comprobar que el resultado es correcto se ha optado por hacer una simulación por ordenador, quizás no sea lo más preciso pero sí será más versátil. Para los cálculos se han supuesto los siguientes datos:

- Altura inicial: $h_i = 1\text{m}$
- Radio del orificio de salida: $r_0 = 0{,}03\text{m}$

- Velocidad de bajada del líquido: $v_1 = 0{,}01 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Gravedad: $g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

De esta manera se obtiene que la forma de la clepsidra será la que se muestra en la figura 2.

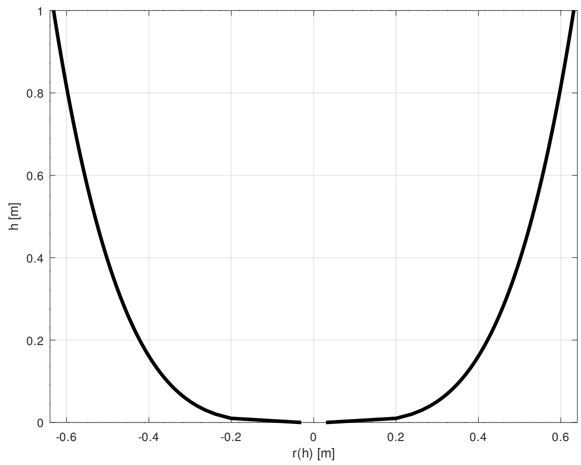

Figura 2: Forma de la clepsidra.

Por su parte, en la figura 3 se puede ver como la altura del nivel del líquido desciende de forma lineal, tal como pedía el enunciado.

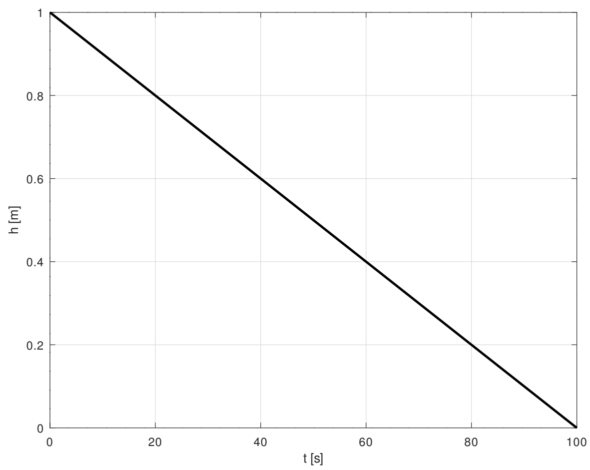

Figura 3: Evolución del nivel de líquido.

4.1. El programa

Para realizar la simulación se ha usado un programa escrito en Matlab, aunque funciona también en la alternativa libre Octave. Toda la información puede encontrarse en el siguiente repositorio de Github: https://github.com/TeoremaPi/clepsidra

Antes de empezar hay que dejar claro una idea importante. **Este programa no pretende resolver el problema propuesto al comienzo**. Con este programa lo que se pretende es ver como se va vaciando una clepsidra (o un depósito en general) cuya forma es conocida. La idea es, al final, meterle la geometría que se ha obtenido en el apartado anterior y comprobar que efectivamente el líquido baja a velocidad constante. No obstante, se le puede meter cualquier otra geometría (por ejemplo un cilindro recto) y ver como esta afecta a la velocidad con la que baja el nivel del líquido.

Para que el programa sirva para cualquier geometría, en este apartado, no se podrá considerar que la velocidad v_1 sea constante sino que tendrá que podre variar con la altura $v_1(h)$. Calcular el nivel del líquido de esta forma es relativamente sencillo, solo hay que resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -v_1(h) \tag{4}$$

En función de lo compleja que sea la expresión de $v_1(h)$ este problema puede complicarse bastante si se pretende hacer de forma algebraica pero, dado que aquí se va a resolver de forma numérica, no es algo de lo que preocuparse. Para hacerlo, el proceso es similar al realizado en los apartados anteriores. Primero hay que despejar v_0 de la ecuación (1). En este caso, para que sea más genera, no se asumirá que el recipiente es de revolución por lo que habrá que trabajar directamente con las superficies. De esta forma queda

$$v_0 = \frac{S_1}{S_0} v_1$$

Es importante remarcar que en esta ecuación todos los términos dependen de h a excepción de S_0 que, lógicamente, es constante. Ahora se sustituye en la ecuación de Bernoulli (2)

$$\left(\frac{S_1}{S_0} v_1\right)^2 = v_1^2 + 2gh_1$$

Se aplica el cuadrado

$$\frac{S_1^2}{S_0^2} v_1^2 = v_1^2 + 2gh_1$$

Se despeja v_1^2

$$\left(\frac{S_1^2}{S_0^2} - 1\right) v_1^2 = 2gh_1$$

$$v_1^2 = \frac{2gh_1}{\frac{S_1^2}{S_0^2} - 1}$$

Por último se aplica la raíz cuadrada

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh_1}{\frac{S_1^2}{S_0^2} - 1}}$$

Ahora ya se puede sustituir en (4) haciendo explicitas las dependencias de h

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2gh}{\frac{S(h)^2}{S_0^2} - 1}} \tag{5}$$

Ya solo faltaría definir una función que defina la superficie superior para cada altura $S(h)$ e integrar. Por suerte la parte de integración se puede hacer numéricamente usando la función *ode45* (no es la única pero si la más usual y funciona de forma similar tanto en Matlab como en Octave).

4.2. Aplicación al problema propuesto

Ahora sí, para comprobar el resultado calculado anteriormente hay que particularizar la $S(h)$. Como se planteó una clepsidra de revolución, cada sección tendrá la superficie de un círculo.

$$S(h) = \pi r(h)^2$$

Aquí hay que sustituir la expresión (3) que define el radio

$$S(h) = \pi \left(r_0 \sqrt[4]{1 + \frac{2gh}{v_1^2}} \right)^2$$

o lo que es lo mismo

$$S(h) = \pi r_0^2 \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_1^2}}$$

Para obtener el resultado de la figura 3 solo habría que sustituir en la ecuación 5 e integrar.

4.3. Aplicación a un depósito cilíndrico

Ya que se ha resuelto lo complicado, es posible jugar un poco con el programa y resolver el clásico ejemplo del depósito cilíndrico con una salida en la parte inferior. Para ello solo hay que definir una nueva función de superficie que sea una constante, por ejemplo

$$S\left(h\right) = 0{,}5\mathrm{m}$$

Si se mantienen el resto de valores como en los apartados anteriores, el resultado obtenido es el de la figura 4

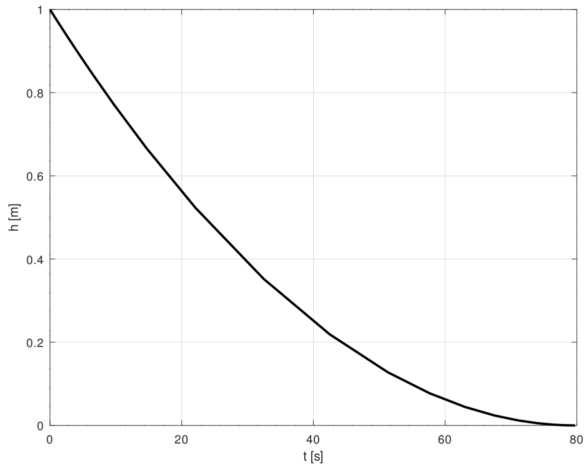

Figura 4: Evolución del nivel de líquido.

En este caso se puede apreciar el comportamiento típico de un depósito cilíndrico. Mientras mayor sea el nivel del líquido más rápido saldrá el agua y, según se va vaciando, cada vez saldrá más despacio.