

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie bitte die folgenden Terme

(a) $\frac{(2^5)^5 \cdot (2^2)^4}{(8^5)^5}$

Richtige Antwort: $\boxed{2}$.

(b) $\left(\frac{4a^{-2}x}{3a^5x^{-3}}\right)^2 : \frac{(3a^4x^2)^{-3}}{(2ax^{-3})^{-2}}$

(c) $\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2 + 1}{a^{m-2}}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie bitte x ohne Hilfsmittel:

(a) $x = \log_5 \frac{3125}{5}$

Richtige Antwort: $\boxed{4}$.

(b) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$

(c) $x = 81^{0,5 \cdot \log_3 7}$

(d) $x = 2 \cdot 10^{2 \cdot \log_{10} 2}$

(e) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\log_{10} 2 + \log_{10} 32)}}$

(f) $x = \sqrt{10^{\log_{10} 16}}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie bitte die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen

(a) $\frac{2x-4}{2} < \frac{2x-2}{-4}$

Richtige Antwort: $\boxed{(3 < x)(x < oo)}$.

(b) $\frac{2x-1}{2} \leq x+1$

(c) $|2x - 3| \leq 6$

(d) $-x^2 + |2x + 4| \geq 1$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (5, 1)^T$ und $\vec{b} = (1, 5)^T$. Berechnen Sie bitte $2\vec{a} - \vec{b}$ rechnerisch und zeichnerisch.

Richtige Antwort: $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie bitte die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit

(a) $\vec{a} = (1, 1, 1)^T, \vec{b} = (2, 4, 2)^T, \vec{c} = (6, 6, 6)^T$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $\vec{a} = (1, 0, 1)^T, \vec{b} = (1, 2, 0)^T, \vec{c} = (0, 5, 3)^T$

Aufgabe 6

1. Bestimmen Sie bitte alle Vektoren vom Betrag 3, die auf dem Vektor $\vec{a} = (-4, 3)^T$ senkrecht stehen.
2. Der Vektor $\vec{a} = (-3, 2, -4)^T$ wird auf den Vektor $\vec{b} = (1, 1, 1)^T$ orthogonal projiziert. Welche Länge hat dann seine Projektion?
3. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (2, y, z)^T, \vec{b} = (-1, 4, 2)^T$ und $\vec{c} = (3, -3, -1)^T$. Bestimmen Sie bitte y und z so, dass der Vektor \vec{a} auf \vec{b} und \vec{c} senkrecht steht. Welchen Betrag hat \vec{a} , und welchen Winkel bildet er mit den Vektoren $\vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

Aufgabe 7

Berechnen Sie bitte das Matrizenprodukt $C = AB$ der folgenden Matrizen:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Richtige Antwort: $\begin{pmatrix} 20 & 28 & 22 \\ 22 & 33 & 24 \end{pmatrix}$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie bitte die Inversen der folgenden Matrizen:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Richtige Antwort: $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Beurteilen Sie bitte anhand des freien Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} a-2 & 3 & 3 \\ 3 & a-2 & 3 \\ 3 & 3 & a-2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Richtige Antwort:

Aufgabe 10

Bestimmen Sie bitte das Symmetrieverhalten und den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = 3x^2 - 9$

Richtige Antwort: .

(b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

(c) $f(x) = \sin(x) \cos(x)$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

Aufgabe 11

Berechnen Sie von den folgenden Funktionen die Umkehrfunktion f^{-1}

(a) $f(x) = \frac{4}{8x}$ mit $x > 0$

Richtige Antwort: .

(b) $f(x) = \sqrt{3x}$ mit $x > 0$

(c) $f(x) = 2e^{x-0,5}$

Aufgabe 12

Berechnen Sie bitte den Grenzwert der folgenden Funktionen

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot \cos(x)}{x^2 + 1}$$

Richtige Antwort:

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(2x-1)}{x^2 + 3x - 2}$$

$$(e) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Aufgabe 13

Berechnen Sie bitte die Ableitung der Funktion $f(x)$

$$(a) f(x) = 4x^1 - 1x^4 + 5x^5 + 3$$

Richtige Antwort:

$$(b) f(x) = 2 + \frac{3}{x^4}$$

$$(c) f(x) = \frac{x+8}{x-8}$$

$$(d) f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{(3x-4)^2}\right)$$

$$(e) f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie von der Funktion $f(x)$ bitte die Extremstellen

$$(a) f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 9x + 9$$

Richtige Antwort:

$$(b) f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie bitte von der Funktion $f(x)$ die Wendepunkte

(a) $f(x) = 7x + (x + 3)^{\frac{1}{4}}$

Richtige Antwort:

(b) $f(x) = (1 - 2x)^3$

Aufgabe 16

Berechnen Sie bitte die Grenzwerte folgender Funktionen mit Hilfe der Regel von L'Hospital

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}x^4 \left(-\frac{3}{2} + \ln(x)\right)}{(x-1)^4}$

Richtige Antwort:

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{3x^2 - 6x + 3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$

Aufgabe 17

Lösen Sie folgende *unbestimmte* Integrale:

a) $\int \sqrt[4]{x^2} dx$

Richtige Antwort:

c) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

b) $\int (2x^4 + 3x^2 - 4x + 7) dx$

d) $\int (\cos(2x + 5) - e^{-2x}) dx$

Tipps:

- a) - c) Potenzfunktionen, Summenregel
- d) Summenregel, inv. Kettenregel

Aufgabe 18

Berechnen Sie bitte die folgenden Integrale mit *partieller Integration*

a) $\int x^{5 \ln(x)} dx$

Richtige Antwort:

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

b) $\int x^2 e^{2x} dx$

d) $\int x^2 \sin(\ln(x)) dx$

Tipps:

b) 2x partiell integrieren; d) 2x partiell integrieren und Gleichung umstellen

Aufgabe 19

Berechnen Sie bitte die folgenden Integrale mit geeigneter *Substitution*

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| a) $\int 56x(7x^2 - 3)^3 dx$ | d) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ |
| b) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3} dx$ | e) $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ |
| c) $\int x\sqrt{1-2x^2} dx$ | f) $\int x^2 e^{x^3-2} dx$ |

Aufgabe 20

Berechnen Sie bitte die folgenden *bestimmten* Integrale

- | | |
|---|--|
| a) $\int_1^2 \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx$ | c) $\int_0^{2\pi} (\sin(\frac{\pi}{2}) - e^{3x}) dx$ |
| b) $\int_0^1 (1-x)\sqrt{x} dx$ | |

Aufgabe 21

Berechnen Sie bitte die folgenden *Mehrfachintegrale*:

- | | |
|---|---|
| a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx$ | c) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 x e^{x^2} dx dy$ |
| b) $\int_0^1 \int_0^{x^2} 2x e^y dy dx$ | d) $\int_1^2 \int_1^2 \sqrt{1+x+y} dy dx$ |

Aufgabe 22

- a) Ein Rechteck in der x-y-Ebene ist durch die Ungleichungen $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 1$ begrenzt. Berechne das Volumen des Körpers, der über dem Rechteck und unter der Funktion $z = 1 + xy$ liegt.
- b) Berechnen Sie bitte die Fläche, die von der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2 - 2x$ eingeschlossen wird.
- c) Berechnen Sie bitte die von den Kurven $y^2 = 2 - x$ und $y = x$ eingeschlossene Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals.
- d) Berechnen Sie bitte das Volumen des Körpers, der von den Koordinatenebenen und der Ebene $x + y + z = 1$ begrenzt wird mit Hilfe eines Doppelintegrals.

Aufgabe 23

- a) Wo liegt der Schwerpunkt der von den Funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = 3x + 1$ eingeschlossenen Fläche?
- b) Berechnen Sie bitte den Schwerpunkt der von den Kurven $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = 0.1x - 0.1$ und $x = 5$ begrenzten Fläche.

Aufgabe 24

Geben Sie die bitte die trigonometrische und kartesische Form der folgenden komplexen Zahlen an

- (a) $3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (b) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- (c) $e^{i\pi}$ (d) $4e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- (e) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$

Aufgabe 25

Es seien $z_1 = -4i$, $z_2 = 3 - 2i$ und $z_3 = -1 + i$. Berechnen Sie bitte die folgenden Ausdrücke

- (a) $z_1 - 2z_2 + 3z_3$ (b) $2z_1 \cdot \bar{z}_2$
- (c) $\frac{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{z_3}$ (d) $\frac{z_1 - \bar{z}_2}{3\bar{z}_3}$

Aufgabe 26

Lösen Sie bitte die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.

- (a) $2x^2y' = y^2$ (c) $y'(1 + x^3) = 3x^2y$
- (b) $y' = (y + 2)^2$

Aufgabe 27

Lösen Sie bitte die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' + y \sin(x) = 0$, $y(\pi) = \frac{1}{e}$

c) $(x-1)(x+1)y' = y$, $y(2) = 1$

b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$, $y(1) = 1$

d) $y' = 3x^2y + e^{x^3} \cos(x)$, $y(0) = 2$