Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die bitte die folgenden Terme

(a) $\dfrac{(8^3)^5 \cdot (2^2)^5}{(4^4)^4}$

Richtige Antwort: $\boxed{8}$.

(b) $(\dfrac{4a^{-2}x}{3a^5x^{-3}})^2 : \dfrac{(3a^4x^2)^{-3}}{(2ax^{-3})^{-2}}$

(c) $\dfrac{3-a}{a^{m-4}} + \dfrac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \dfrac{2a^2+1}{a^{m-2}}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie bitte x ohne Hilfsmittel:

(a) $x = \log_4 \dfrac{16}{16}$

Richtige Antwort: $\boxed{0}$.

(b) $\log_x \sqrt{8} = \dfrac{3}{4}$

(c) $x = 81^{0,5 \cdot \log_3 7}$

(d) $x = 2 \cdot 10^{2 \cdot \log_{10} 2}$

(e) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\log_{10} 2 + \log_{10} 32)}}$

(f) $x = \sqrt{10^{\log_{10} 16}}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie bitte die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen

(a) $\dfrac{5x-3}{5} < \dfrac{5x-2}{-3}$

Richtige Antwort: $\boxed{(-oo < x)(x < 1/10)}$.

(b) $\dfrac{2x-1}{2} \leq x + 1$

(c) $|2x-3| \leq 6$

(d) $-x^2 + |2x+4| \geq 1$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (4,1)^T$ und $\vec{b} = (2,4)^T$. Berechnen Sie bitte $2\vec{a} - \vec{b}$ rechnerisch und zeichnerisch.

Richtige Antwort: $\boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie bitte die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit

(a) $\vec{a} = (2,2,2)^T, \vec{b} = (3,2,3)^T, \vec{c} = (5,6,5)^T$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $\vec{a} = (1,0,1)^T, \vec{b} = (1,2,0)^T, \vec{c} = (0,5,3)^T$

Aufgabe 6

1. Bestimmen Sie bitte alle Vektoren vom Betrag 3, die auf dem Vektor $\vec{a} = (-4,3)^T$ senkrecht stehen.

2. Der Vektor $\vec{a} = (-3,2,-4)^T$ wird auf den Vektor $\vec{b} = (1,1,1)^T$ orthogonal projiziert. Welche Länge hat dann seine Projektion?

3. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (2,y,z)^T, \vec{b} = (-1,4,2)^T$ und $\vec{c} = (3,-3,-1)^T$. Bestimmen Sie bitte y und z so, dass der Vektor $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht. Welchen Betrag hat $\vec{a}$, und welchen Winkel bildet er mit den Vektoren $\vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

Aufgabe 7

Berechnen Sie bitte das Matrizenprodukt $C = AB$ der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Richtige Antwort: $\boxed{\begin{pmatrix} 42 & 48 & 39 \\ 34 & 35 & 29 \end{pmatrix}}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie bitte die Inversen der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Richtige Antwort: $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 9

Beurteilen Sie bitte anhand des freien Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 & 3 \\ 3 & a-4 & 3 \\ 3 & 3 & a-4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie bitte das Symmetrieverhalten und den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = 5x^2 - 25$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

Aufgabe 11

Berechnen Sie von den folgenden Funktionen die Umkehrfunktion f^{-1}

(a) $f(x) = \dfrac{3}{6x}$ mit $x > 0$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $f(x) = \sqrt{3x}$ mit $x > 0$

(c) $f(x) = 2e^{x-0{,}5}$

Aufgabe 12

Berechnen Sie bitte den Grenzwert der folgenden Funktionen

(a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot \sin(x)}{x^2 - 1}$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

(d) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+3)(2x-1)}{x^2 + 3x - 2}$

(e) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

Aufgabe 13

Berechnen Sie bitte die Ableitung der Funktion $f(x)$

(a) $f(x) = 3x^5 - 1x^3 + 4x^4 - 1$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $f(x) = 2 + \frac{3}{x^4}$

(c) $f(x) = \frac{x+8}{x-8}$

(d) $f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{(3x-4)^2}\right)$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie von der Funktion $f(x)$ bitte die Extremstellen

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^3 - 10x + 7$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie bitte von der Funktion $f(x)$ die Wendepunkte

(a) $f(x) = 4x + (x-6)^{\frac{1}{3}}$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $f(x) = (1-2x)^3$

Aufgabe 16

Berechnen Sie bitte die Grenzwerte folgender Funktionen mit Hilfe der Regel von L'Hospital

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}x^3\left(-\frac{3}{2} + \ln(x)\right)}{(x-1)^3}$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{3x^2-6x+3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$

Aufgabe 17

Lösen Sie folgende *unbestimmte* Integrale:

a) $\int \sqrt[2]{x^5}\,dx$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) $\int (2x^4 + 3x^2 - 4x + 7)\,dx$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}$

d) $\int (cos(2x+5) - e^{-2x})\,dx$

Tipps:
a) - c) Potenzfunktionen, Summenregel
d) Summenregel, inv. Kettenregel

Aufgabe 18

Berechnen Sie bitte die folgenden Integrale mit *partieller Integration*

a) $\int x^5 ln(x)\,dx$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) $\int x^2 e^{2x}\,dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\int x^2 sin(ln(x))\,dx$

Tipps:

b) 2x partiell integrieren; d) 2x partiell integrieren und Gleichung umstellen

Aufgabe 19

Berechnen Sie bitte die folgenden Integrale mit geeigneter *Substitution*

a) $\int 81x(9x^4-4)^4 dx$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3} dx$

c) $\int x\sqrt{1-2x^2} dx$

d) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

e) $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$

f) $\int x^2 e^{x^3-2} dx$

Aufgabe 20

Berechnen Sie bitte die folgenden *bestimmten* Integrale

a) $\int_2^3 \frac{1x^5+2x^4+2}{x^4} dx$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) $\int_0^1 (1-x)\sqrt{x} dx$

c) $\int_0^{2\pi} (sin(\frac{\pi}{2}) - e^{3x}) dx$

Aufgabe 21

Berechnen Sie bitte die folgenden *Mehrfachintegrale*:

a) $\int_1^2 \int_1^{2-x} (x+y) dydx$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) $\int_0^1 \int_0^{x^2} 2xe^y dydx$

c) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 xe^{x^2} dxdy$

d) $\int_1^2 \int_1^2 \sqrt{1+x+y} dydx$

Aufgabe 22

a) Ein Rechteck in der x-y-Ebene ist durch die Ungleichungen $0 \leq x \leq 3$ und $0 \leq y \leq 1.5$ begrenzt. Berechne das Volumen des Körpers, der über dem Rechteck und unter der Funktion $z = 1.5 + xy$ liegt.
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) Berechnen Sie bitte die Fläche, die von der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2 - 2x$ eingeschlossen wird.

c) Berechnen Sie bitte die von den Kurven $y^2 = 2 - x$ und $y = x$ eingeschlossene Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals.

d) Berechnen Sie bitte das Volumen des Körpers, der von den Koordinatenebenen und der Ebene $x + y + z = 1$ begrenzt wird mit Hilfe eines Doppelintegrals.

Aufgabe 23

a) Wo liegt der Schwerpunkt der von den Funktionen $f(x) = 4x^2 + 4x + 2$ und $g(x) = 3x + 1$ eingeschlossenen Fläche?
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) Berechnen Sie bitte den Schwerpunkt der von den Kurven $f(x) = ln(x)$,$g(x) = 0.1x - 0.1$ und $x = 5$ begrenzten Fläche.

Aufgabe 24

Geben Sie die bitte die trigonometrische und kartesische Form der folgenden komplexen Zahlen an

(a) $3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(c) $e^{i\pi}$

(d) $4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

(e) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$

Aufgabe 25

Es seien $z_1 = 3i, z_2 = 3 - 1i$ und $z_3 = 3 - 2i$. Berechnen Sie bitte die folgenden Ausdrücke

(a) $z_1 - 2z_2 + 3z_3$

Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $2z_1 \cdot \bar{z}_2$

(c) $\dfrac{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{z_3}$

(d) $\dfrac{z_1 - \bar{z}_2}{3\bar{z}_3}$

Aufgabe 26

Lösen Sie bitte die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.

(a) $4x^2y' = y^2$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

(b) $y' = (y+2)^2$

(c) $y'(1+x^3) = 3x^2y$

Aufgabe 27

Lösen Sie bitte die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' + y\cos(x) = 0 \quad , y(\pi) = \frac{1}{e}$
Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x} \quad , y(1) = 1$

c) $(x-1)(x+1)y' = y \quad , y(2) = 1$

d) $y' = 3x^2y + e^{x^3}\cos(x) \quad , y(0) = 2$