Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die bitte die folgenden Terme

(a)
$$\frac{(8^3)^5 \cdot (2^2)^5}{(4^4)^4}$$

Richtige Antwort: 8

(b)
$$(\frac{4a^{-2}x}{3a^5x^{-3}})^2 : \frac{(3a^4x^2)^{-3}}{(2ax^{-3})^{-2}}$$

(c)
$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2 + 1}{a^{m-2}}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie bitte x ohne Hilfsmittel:

(a)
$$x = \log_4 \frac{16}{16}$$

Richtige Antwort: 0

(b)
$$\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$$

(c)
$$x = 81^{0.5 \cdot \log_3 7}$$

(d)
$$x = 2 \cdot 10^{2 \cdot \log_{10} 2}$$

(e)
$$x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\log_{10} 2 + \log_{10} 32)}}$$

(f)
$$x = \sqrt{10^{\log_{10} 16}}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie bitte die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen

(a)
$$\frac{5x-3}{5} < \frac{5x-2}{-3}$$

Richtige

Antwort: (b)
$$\frac{2x-1}{2} \le x+1$$

$$(-oo < x)(x < 1/10)$$

(c)
$$|2x - 3| \le 6$$

(d)
$$-x^2 + |2x + 4| \ge 1$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=(4,1)^T$ und $\vec{b}=(2,4)^T$. Berechnen Sie bitte $2\vec{a}-\vec{b}$ rechnerisch und zeichnerisch.

Richtige Antwort:

$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie bitte die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit

(a)
$$\vec{a} = (2, 2, 2)^T$$
, $\vec{b} = (3, 2, 3)^T$, $\vec{c} = (5, 6, 5)^T$
Richtige Antwort: ???

(b)
$$\vec{a} = (1, 0, 1)^T, \vec{b} = (1, 2, 0)^T, \vec{c} = (0, 5, 3)^T$$

Aufgabe 6

- 1. Bestimmen Sie bitte alle Vektoren vom Betrag 3, die auf dem Vektor $\vec{a} = (-4,3)^T$ senkrecht stehen.
- 2. Der Vektor $\vec{a} = (-3, 2, -4)^T$ wird auf den Vektor $\vec{b} = (1, 1, 1)^T$ orthogonal projiziert. Welche Länge hat dann seine Projektion?
- 3. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=(2,y,z)^T, \vec{b}=(-1,4,2)^T$ und $\vec{c}=(3,-3,-1)^T$. Bestimmen Sie bitte y und z so, dass der Vektor \vec{a} auf \vec{b} und \vec{c} senkrecht steht. Welchen Betrag hat \vec{a} , und welchen Winkel bildet er mit den Vektoren $\vec{b}+\vec{c}$ und $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$?

Aufgabe 7

Berechnen Sie bitte das Matrizenprodukt ${\cal C}=AB$ der folgenden Matrizen:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
Richtige Antwort:
$$\begin{pmatrix} 42 & 48 & 39 \\ 34 & 35 & 29 \end{pmatrix}$$
(b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Richtige Antwort:
$$\begin{pmatrix} 42 & 48 & 39 \\ 34 & 35 & 29 \end{pmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie bitte die Inversen der folgenden Matrizen:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Beurteilen Sie bitte anhand des freien Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 & 3 \\ 3 & a-4 & 3 \\ 3 & 3 & a-4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Richtige Antwort: ???

Aufgabe 10

Bestimmen Sie bitte das Symmetrieverhalten und den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ der folgenden Funktionen

(a)
$$f(x) = 5x^2 - 25$$

Richtige Antwort: ???.

(b)
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

(c)
$$f(x) = \sin(x)\cos(x)$$

(d)
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$$

Aufgabe 11

Berechnen Sie von den folgenden Funktionen die Umkehrfunktion f^{-1}

(a)
$$f(x) = \frac{3}{6x} \text{ mit } x > 0$$

Richtige Antwort: ???.

(b)
$$f(x) = \sqrt{3x} \text{ mit } x > 0$$

(c)
$$f(x) = 2e^{x-0.5}$$

Aufgabe 12

Berechnen Sie bitte den Grenzwert der folgenden Funktionen

(a)
$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{x \cdot \sin(x)}{x^2 - 1}$$

Richtige Antwort: ???

(b)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

(c)
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

(d)
$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+3)(2x-1)}{x^2+3x-2}$$

(e)
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Aufgabe 13

Berechnen Sie bitte die Ableitung der Funktion f(x)

(a)
$$f(x) = 3x^5 - 1x^3 + 4x^4 - 1$$

Richtige Antwort: ???.

(b)
$$f(x) = 2 + \frac{3}{x^4}$$

(c)
$$f(x) = \frac{x+8}{x-8}$$

(d)
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{(3x-4)^2}\right)$$

(e)
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie von der Funktion f(x) bitte die Extremstellen

(a)
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^3 - 10x + 7$$

Richtige Antwort: ???.

(b)
$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie bitte von der Funktion f(x) die Wendepunkte

(a)
$$f(x) = 4x + (x-6)^{\frac{1}{3}}$$

Richtige Antwort: ???

(b)
$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

Aufgabe 16

Berechnen Sie bitte die Grenzwerte folgender Funktionen mit Hilfe der Regel von L'Hospital

(a)
$$\lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}x^3 \left(-\frac{3}{2} + \ln(x)\right)}{(x-1)^3}$$

Richtige Antwort: [???]

Richtige Antwort: |???|

(b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

(c)
$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2}x)}{3x^2 - 6x + 3}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$$

Aufgabe 17

Lösen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a)
$$\int \sqrt[2]{x^5} dx$$

Richtige Antwort: ????

c)
$$\int \sqrt{x\sqrt{x}}$$

b)
$$\int (2x^4 + 3x^2 - 4x + 7) dx$$

d)
$$\int (\cos(2x+5) - e^{-2x}) dx$$

Tipps:

- a) c) Potenzfunktionen, Summenregel
- d) Summenregel, inv. Kettenregel

Aufgabe 18

Berechnen Sie bitte die folgenden Integrale mit partieller Integration

a) $\int x^5 \ln(x) dx$ Richtige Antwort: |???|

c)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

b)
$$\int x^2 e^{2x} dx$$

d)
$$\int x^2 \sin(\ln(x)) dx$$

Tipps:

b) 2x partiell integrieren; d) 2x partiell integrieren und Gleichung umstellen

Aufgabe 19

Berechnen Sie bitte die folgenden Integrale mit geeigneter Substitution

a)
$$\int 81x(9x^4-4)^4 dx$$

Richtige Antwort: ????.

d)
$$\int \frac{x}{x^2+1} dx$$

b)
$$\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3} dx$$

e)
$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$$

c)
$$\int x\sqrt{1-2x^2}dx$$

f)
$$\int x^2 e^{x^3-2} dx$$

Aufgabe 20

Berechnen Sie bitte die folgenden bestimmten Integrale

a)
$$\int_{2}^{3} \frac{1x^{5} + 2x^{4} + 2}{x^{4}} dx$$
Richtige Antwort: ????

b)
$$\int_0^1 (1-x)\sqrt{x} \, dx$$

c)
$$\int_0^{2\pi} (\sin(\frac{\pi}{2}) - e^{3x}) dx$$

Aufgabe 21

Berechnen Sie bitte die folgenden Mehrfachintegrale:

a)
$$\int_{1}^{2} \int_{1}^{2-x} (x+y) dy dx$$

Richtige Antwort: ????

c)
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 x e^{x^2} dx dy$$

b)
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} 2x e^y dy dx$$

d)
$$\int_{1}^{2} \int_{1}^{2} \sqrt{1+x+y} \, dy dx$$

Aufgabe 22

- a) Ein Rechteck in der x-y-Ebene ist durch die Ungleichungen $0 \le x \le 3$ und $0 \le y \le 1.5$ begrenzt. Berechne das Volumen des Körpers, der über dem Rechteck und unter der Funktion z = 1.5 + xy liegt. Richtige Antwort: ????
- b) Berechnen Sie bitte die Fläche, die von der Geraden y=x und der Parabel $y=x^2-2x$ eingeschlossen wird.
- c) Berechnen Sie bitte die von den Kurven $y^2 = 2 x$ und y = x eingeschlossene Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals.

d) Berechnen Sie bitte das Volumen des Körpers, der von den Koordinatenebenen und der Ebene x+y+z=1 begrenzt wird mit Hilfe eines Doppelintegrals.

Aufgabe 23

- a) Wo liegt der Schwerpunkt der von den Funktionen $f(x) = 4x^2 + 4x + 2$ und g(x) = 3x + 1 eingeschlossenen Fläche? Richtige Antwort: $\boxed{???}$.
- b) Berechnen Sie bitte den Schwerpunkt der von den Kurven f(x) = ln(x), g(x) = 0.1x 0.1 und x = 5 begrenzten Fläche.

Aufgabe 24

Geben Sie die bitte die trigonometrische und kartesische Form der folgenden komplexen Zahlen an

(a) $3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$

Richtige Antwort: ???.

(b) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(c) $e^{i\pi}$

(d) $4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

(e) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$

Aufgabe 25

Es seien $z_1=3i, z_2=3-1i$ und $z_3=3-2i.$ Berechnen Sie bitte die folgenden Ausdrücke

(a) $z_1 - 2z_2 + 3z_3$

Richtige Antwort: ???.

(b) $2z_1 \cdot \bar{z}_2$

(c) $\frac{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{z_3}$

(d) $\frac{z_1 - \bar{z}_2}{3\bar{z}_3}$

Aufgabe 26

Lösen Sie bitte die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.

(a)
$$4x^2y' = y^2$$

Richtige Antwort: ???.

(b)
$$y' = (y+2)^2$$

(c)
$$y'(1+x^3) = 3x^2y$$

Aufgabe 27

Lösen Sie bitte die folgenden Anfangswertprobleme.

a)
$$y' + y \cos(x) = 0$$
 , $y(\pi) = \frac{1}{e}$ b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$, $y(1) = 1$ Richtige Antwort: $\boxed{???}$.

b)
$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$$
, $y(1) = 1$

c)
$$(x-1)(x+1)y' = y$$
, $y(2) = 1$

d)
$$y' = 3x^2y + e^{x^3}\cos(x)$$
 , $y(0) = 2$