

## Лабораторная работа 4

**Тема:** Цифровая обработка сигналов. Моделирование и графическое отображение типовых детерминированных и случайных цифровых сигналов. Фурье-преобразование непрерывных и дискретных сигналов. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрое преобразование Фурье (БПФ). Расчет элементарных статистик цифровых сигналов. Корреляционно-спектральный анализ случайных сигналов.

**Цель работы:** получить некоторые минимальные навыки работы с цифровыми сигналами (ввод, моделирование, визуализация, анализ), представляющими собой один из наиболее распространенных видов первичной информации об объектах и явлениях, которые должны быть классифицированы системой распознавания образов.

**Примечание:** задания к работе 4 начинаются со страницы 28, все предшествующее суть некоторые разъяснения по отдельным разделам теории цифровой обработки сигналов (ЦОС), которые можно пропустить.

### Немного начальных сведений

**Сигнал** – некоторый физический процесс или информационное сообщение.

Это наиболее широкое определение. Мы будем иметь дело с более узким *математическим определением сигнала*, как некоторой функции  $x(t)$ . Аргумент  $t$  - чаще всего время, но также может иметь смысл пространственной координаты. Он может быть не только скалярным, но и векторным, например, если  $t \in R^2$ , то такой двумерный сигнал можно рассматривать как изображение. Значения сигнала  $x(t)$  также могут быть как скалярными, так и векторными. Часто в ходе эксперимента для каждого момента времени фиксируются значения сразу с нескольких датчиков - каналов, в результате приходится иметь дело с т.н. *многоканальными* сигналами. Далее мы в основном будем говорить о сигналах как скалярных функциях скалярного аргумента-времени -  $x(t)$ .

### Классификация сигналов с точки зрения детерминированности/случайности

*Детерминированный сигнал* - функция  $x(t)$ , точно определенная для любого момента времени  $t$ . Детерминированные сигналы подразделяют на *периодические* и *переходные* сигналы. *Периодические* сигналы делятся на *гармонические* и *полигармонические*.

*Гармонические* сигналы описываются функцией времени вида

$$x(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta),$$

где  $X$  - амплитуда,  $f_0$  - циклическая частота [цикл/сек],  $\theta$  - начальная фаза.

Интервал времени, в течение которого происходит одно полное колебание сигнала, называется периодом  $T_p$ , он связан с частотой соотношением

$$T_p = \frac{1}{f_0}.$$

Помимо циклической частоты используют круговую частоту  $\omega_0 = 2\pi f_0$  [радиан/сек].

Частотный спектр (преобразование Фурье, о котором будет сказано чуть ниже) гармонического сигнала состоит из одной составляющей с амплитудой  $X$  на частоте  $f_0$ , остальные составляющие спектра имеют нулевую амплитуду.

*Полигармонические* сигналы – сигналы, удовлетворяющие соотношению

$$x(t) = x(t \pm nT_p), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

т.е. они периодически повторяются через некоторый интервал времени  $T_p$ . Частота  $f_1 = \frac{1}{T_p}$  называется основной частотой, гармонический сигнал есть частный случай полигармонического, для которого  $f_1 = f_0$ .

Полигармонический периодический сигнал всегда может быть разложен в ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n),$$
 т.е. он может быть составлен из бесконечного числа гармонических сигналов с частотами, кратными основной частоте -  $f_n = n f_1$ . Частотный спектр этого сигнала «линейчатый», он состоит из бесконечного числа составляющих, следующих по оси частот с шагом  $f_1$ .

NB. Вопрос: к какому типу следует отнести сигнал

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi f_2 t + \theta_2)$$

при произвольном выборе пары  $f_1, f_2$  ?

Ответ: если отношение  $\frac{f_1}{f_2}$  является рациональным числом, т.е. представимо в виде

отношения некоторых целых чисел  $\frac{p}{q}$ , то сигнал  $x(t)$  будет периодическим с периодом

$T_p = \frac{q}{f_2} = \frac{p}{f_1}$ , а, следовательно, полигармоническим. Если  $\frac{f_1}{f_2}$  - иррациональное число, то

сигнал не будет периодическим. NB. Такие сигналы иногда называют «почти периодическими».

*Переходные сигналы* удовлетворяют соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

NB. Периодические сигналы этому соотношению не удовлетворяют, т.к. интеграл обязательно разойдется.

Чтобы интеграл сходил, переходные процессы должны достаточно быстро стремиться к нулю при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Пример переходного процесса :

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-at} \cos bt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Частотный спектр переходного процесса

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i 2\pi f t} dt$$

в отличие от «линейчатого» спектра периодического сигнала является непрерывной функцией частоты  $f$ .

*Случайные сигналы* – случайные функции, т.е. функции, которые при неоднократном воспроизведении условий эксперимента всякий раз ведут себя по-разному. Функция, наблюдаемая в конкретном эксперименте, – выборочная реализация случайной функции. Для описания случайных функций используют математический аппарат теории случайных процессов. Разделяют стационарные и нестационарные случайные процессы. Для стационарных случайных процессов важнейшими характеристиками являются корреляционная функция и спектральная плотность мощности. Задача оценивания этих характеристик по конечной реализации случайного процесса называют задачей корреляционно-спектрального анализа.

На практике существует проблема различения *детерминированных* и *случайных* сигналов. Как правило, в распоряжении исследователя имеется запись сигнала  $x(t)$ , определенная на конечном интервале времени  $t \in [t_1, t_2]$ . Если специально не оговаривается, что это выборочная реализация некоторого случайного процесса, то следует считать, что это детерминированная функция. Но даже и в этом случае остается проблема интерпретации – это один период некоторой периодической полигармонической функции или это переходный процесс, который вне интервала  $t \in [t_1, t_2]$  всюду равен нулю. Вообще говоря, оба предположения о характере продолжения функции за область определения слишком жесткие и мало соответствуют реальным ситуациям. Поэтому при интерпретации результатов анализа таких «детерминированных» функций надо быть осторожным.

Безусловно, практически все реализации, полученные в ходе некоторого реального эксперимента, следует рассматривать как конечные реализации некоторого случайного процесса. Если воспроизвести условия эксперимента и получить новую реализацию  $x(t)$ , то она практически всегда хоть чуть-чуть, но будет отличаться от предыдущей реализации. Если эти отличия невелики, то с некоторым приближением можно считать реализацию детерминированной функцией и применять соответствующий математический аппарат для ее анализа. Если же отличия реализаций от опыта к опыту существенны, то следует применять математический аппарат теории случайных процессов.

### **Классификация сигналов с точки зрения непрерывности/дискретности**

1) *Аналоговый сигнал* ( $t$  - непрерывно,  $x$  - непрерывно)

2) *Дискретный сигнал* ( $t$  - дискретно,  $x$  - непрерывно)

$$x(n) = x(nT), \text{ где } T - \text{ шаг дискретизации по времени, } n = 0, 1, 2, \dots$$

3) *Цифровой сигнал* ( $t$  - дискретно,  $x$  - дискретно)

$x_q(n) = x_q(nT)$  могут принимать значения из фиксированного множества значений  $x_1, x_2, \dots, x_K$ . Чаще всего шаг «квантования»  $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ . Цифровые сигналы получают на выходе т.н. аналогово-цифровых преобразователей (АЦП). АЦП через каждый временной интервал  $T$  производит измерение значения аналогового сигнала  $x(t)$  и его кодирование одним из  $K = 2^m$  заранее predeterminedных возможных значений из некоторого интервала  $[x_{\min}, x_{\max}]$ . Целое число  $m$  – разрядность АЦП, чем она больше, тем точнее кодирование. Характерные значения разрядностей АЦП – 8, 10, 12, 14, 16, 20, 24, 32.

**Цифровая обработка сигналов** – раздел технической кибернетики, изучающий теоретические основы и практические аспекты аппаратно-программной реализации систем обработки цифровых сигналов.

### **Два основных класса задач ЦОС**

1. Преобразования цифровых сигналов  $y(n) = A[x(n)]$ , осуществляемые с целью удаления различных видов помех, для подготовки сигналов к передаче по каналам связи с ограниченной пропускной способностью и т.д..
2. Анализ цифровых сигналов с целью получения сжатого количественного описания их основных свойств, отличающих одни сигналы от других

## Два типа устройств, реализующих цифровую обработку

1. Специализированные устройства ЦОС
2. Универсальные компьютеры

Отличия – первые более быстрые, но менее точные и гибкие в программировании. Вторые медленнее, но более гибкие и более точные вследствие использования для хранения значений цифрового сигнала и арифметических операций многоразрядного представления ( $m=32, 64, 100$ ). При обработке цифровых сигналов в компьютере менее существенны ошибки, связанные с ограниченной точностью представления дискретных сигналов, поэтому цифровые сигналы можно считать практически дискретными и пользоваться для их описания теорией дискретных систем.

## Моделирование детерминированных и случайных цифровых сигналов

Еще один способ получения цифровых сигналов – моделирование на ЭВМ.

Различают следующие способы моделирования:

- расчет аналитически заданных детерминированных последовательностей, пример – геометрическая последовательность:  $x_k = x_{k-1} \cdot q$ , где  $x_0 = 1, k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- дискретизация аналитически заданных непрерывных функций времени, пример – дискретизация синусоиды частоты  $\omega$  с шагом по времени  $T$ :  $x_k = \sin(\omega k T)$
- моделирование выборочных реализаций дискретных случайных процессов (например, «белого шума», процессов авторегрессии-скользящего среднего – АРСС и т.д.)

### Зачем нужно моделирование ?

Свойства модельных сигналов часто заранее известны, поэтому такие сигналы можно использовать для проверки правильности работы разрабатываемых вами алгоритмов цифровой обработки сигналов, для сравнения точности и вычислительной эффективности разных алгоритмов. Другое важное приложение – имитации каких-либо реальных явлений, например, синтез речи в робототехнике, синтез изображений в тренажерах, компьютерных играх.

## Фурье-анализ цифровых сигналов

В теории обработки сигналов важную роль играют различные интегральные преобразования, среди которых важнейшим с точки зрения практического использования является Фурье преобразование. Следует отметить, что обычно как сам сигнал, так и его Фурье-преобразование являются непрерывными функциями своих аргументов (временного и частотного). В теории *цифровой* обработки сигналов важным является вопрос о возможности замены этих непрерывных функций конечными дискретными последовательностями, условиях корректности такой замены, эффективных способах расчета прямого и обратного дискретных преобразований Фурье, их использования для решения важных задач теории обработки сигналов – интерполяции, фильтрации, корреляционно-спектрального анализа сигналов.

Далее рассматриваются некоторые важные для понимания проблемы понятия и определения, которые, впрочем, можно пропустить и переходить к следующим разделам.

## Теоретические предпосылки

### *Спектр Фурье непрерывных сигналов.*

Пусть  $x(t)$  - непрерывный сигнал, удовлетворяющий условию  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$  (сигнал с интегрируемым модулем). На практике такими сигналами могут быть либо т.н. переходные процессы, возникающие в некоторый момент времени и затем постепенно сходящиеся при  $t \rightarrow \infty$  к нулевому уровню, либо подлежащие обработке экспериментальные сигналы, заданные на некотором конечном интервале наблюдения  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ , вне которого неявно предполагаются нулевыми.

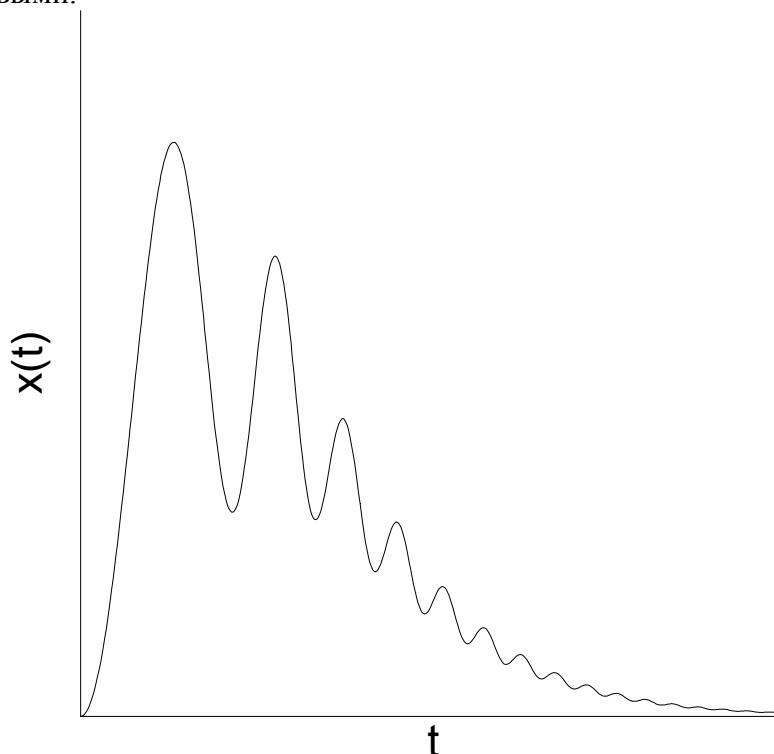


Рис.1. Пример непрерывного сигнала

Сигнал  $x(t)$  в этом случае может быть представлен в виде интегрального разложения по системе комплексных синусоидальных функций - интеграла Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (1)$$

Здесь  $X(\omega)$  - комплекснозначная функция, определяющая амплитуду и фазовую задержку комплексной синусоиды с частотой  $\omega$ :  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ , участвующей в формировании сигнала  $x(t)$ . В общем случае эта функция определена на всей оси частот  $\omega \in [-\infty, \infty]$  и называется Фурье-спектром сигнала  $x(t)$ . Функция  $X(f)$  тоже спектр, но определенный не на круговых частотах  $\omega$ , измеряемых в [радиан/сек], а на циклических частотах  $f$ , измеряемых в [число периодов / сек]. (Эти виды частот связаны известным соотношением  $\omega = 2\pi f$ ).

В свою очередь Фурье-спектр  $X(\omega)$  может быть получен из исходного сигнала  $x(t)$  с помощью соотношения:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

Соотношения (1),(2) представляют собой пару интегральных преобразований Фурье, причем 2 – прямое преобразование Фурье, 1 – обратное преобразование Фурье.

Отметим, что сигнал  $x(t)$  и фурье-спектр  $X(\omega)$  – две взаимнооднозначные характеристики, первая есть временное представление сигнала, вторая – частотное представление. Временное представление более наглядно и привычно для обыденного восприятия, второе – менее наглядно, но исключительно полезно при математическом описании преобразований сигналов в т.н. линейных системах с постоянными параметрами (ЛПП-системах).

Перечислим основные свойства Фурье-спектра  $X(\omega)$  действительных сигналов:

1. Функция  $X(\omega)$  в общем случае комплекснозначная :

$$X(\omega) = \operatorname{Re} X(\omega) + i \operatorname{Im} X(\omega) = |X(\omega)| e^{i \arg X(\omega)} = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}.$$

Функцию  $A(\omega) = |X(\omega)|$  называют амплитудным спектром (иногда магнитудой спектра), она определяет действительную амплитуду синусоиды с частотой  $\omega$ , участвующей в формировании сигнала. Функцию  $\Phi(\omega) = \arg X(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} X(\omega)}{\operatorname{Re} X(\omega)}\right)$  называют фазовым спектром, она показывает фазовый сдвиг, которому следует подвергнуть комплексную синусоиду частоты  $\omega$  перед суммированием при восстановлении исходного сигнала.

2. Вследствие действительности сигнала  $x(t)$  функция  $X(\omega)$  имеет комплексно-сопряженную симметрию

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X^*(-\omega) \\ \operatorname{Re} X(\omega) &= \operatorname{Re} X(-\omega), & \operatorname{Im} X(\omega) &= -\operatorname{Im} X(-\omega) \\ |X(\omega)| &= |X(-\omega)|, & \operatorname{Arg} X(\omega) &= -\operatorname{Arg} X(-\omega) \end{aligned}$$

3. Энергия спектра Фурье ограничена и равна энергии исходного сигнала (равенство Парсеваля):

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty \quad (3)$$

Для этого, очевидно, Фурье-спектр с ростом частоты должен достаточно быстро убывать.

На рис.2 изображен модуль Фурье-спектра непрерывного сигнала

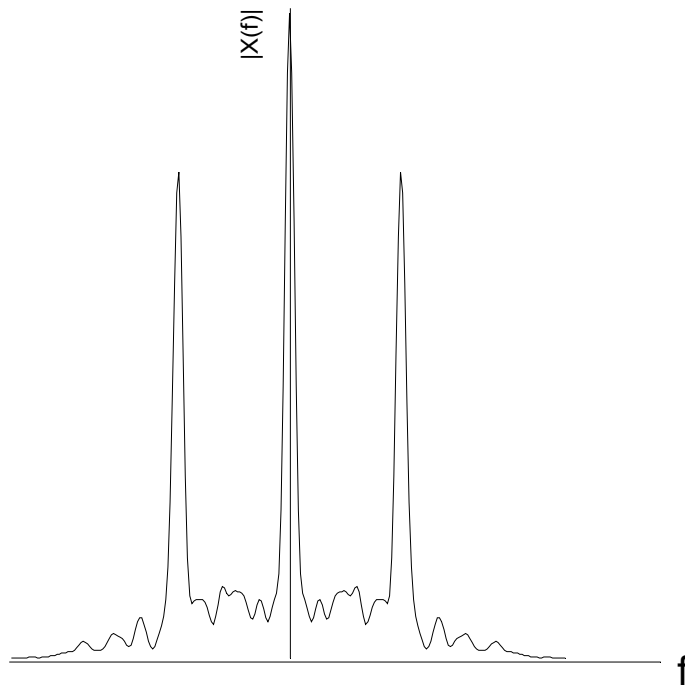


Рис.2 Модуль Фурье-спектра  $X(f)$  (ось Y должна быть в центральной точке графика)

NB. Для тех, кто пока еще не может примириться с необходимостью рассмотрения в разложении (1) отрицательных частот и самим понятием комплексной синусоиды, можно дать следующие разъяснения. С преобразованием Фурье в комплексной форме (1) оказалось очень удобно работать, причем при анализе как действительных сигналов, так и комплексных. Если же рассматривать только действительные сигналы, то с учетом свойств симметрии Фурье-спектра  $X(\omega)$ , попарно группируя компоненты с положительными и отрицательными частотами, преобразование (1) можно переписать в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (X(\omega) e^{j\omega t} + X(-\omega) e^{-j\omega t}) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)| \left( \frac{e^{j(\omega t + \arg X(\omega))} + e^{-j(\omega t + \arg X(\omega))}}{2} \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)| \cos(\omega t + \arg X(\omega)) d\omega \quad (4)$$

В преобразовании (4) сигнал  $x(t)$  составляется в виде суперпозиции обычных косинусоид, определенных на обычных положительных (!!!) частотах  $\omega$ . Для каждой частоты  $\omega$  амплитуда косинусоиды равна  $|X(\omega)|$ , а сама косинусоида сдвинута по фазе на величину  $\arg X(\omega)$ . Обратите внимание, что для точного восстановления действительного сигнала недостаточно регулировать только амплитуду синусоидальных компонент, нужно еще их определенным образом сдвигать по фазе.

#### *Важное замечание (преобразование Лапласа и Z-преобразование)*

В теории непрерывных линейных систем с постоянными параметрами широко и плодотворно используется понятие преобразования Лапласа (s-преобразования):

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad (5)$$

функции, определенной на комплексной s-плоскости:  $s = \nu + j\omega$ .

При этом прямое преобразование Фурье (2) может рассматриваться как преобразование Лапласа, вычисленное на мнимой оси в s-плоскости:

$$X(\omega) = X(s = j\omega).$$

В связи с этим, в литературе часто можно встретить обозначение для Фурье-спектра -  $X(j\omega)$ , в котором содержится неявное указание на то, что это спектр именно *непрерывного* сигнала.

### Z-преобразование дискретных сигналов

Дискретные сигналы представляют собой последовательности действительных чисел  $x(n)$ , в общем случае определенные при отрицательных и положительных целочисленных значениях аргумента  $n$ . На практике чаще всего дискретные сигналы задаются на неотрицательных  $n$ , т.е.  $n=0,1,2,3,\dots$ , и кроме того имеют ограниченное число отсчетов  $N$ , при этом последний отсчет –  $(N-1)$ -й.

В системах анализа данных дискретные сигналы обычно получаются дискретизацией с помощью аналогово-цифровых преобразователей (АЦП) исходных непрерывных сигналов:

$$x(n) = x(t = nT).$$

Здесь  $T$  – шаг дискретизации (здесь и далее будем следовать традициям теории цифровой обработки сигналов, где такому обозначению временного интервала дискретизации отдается предпочтение по сравнению с более «привычным» -  $\Delta$ ).

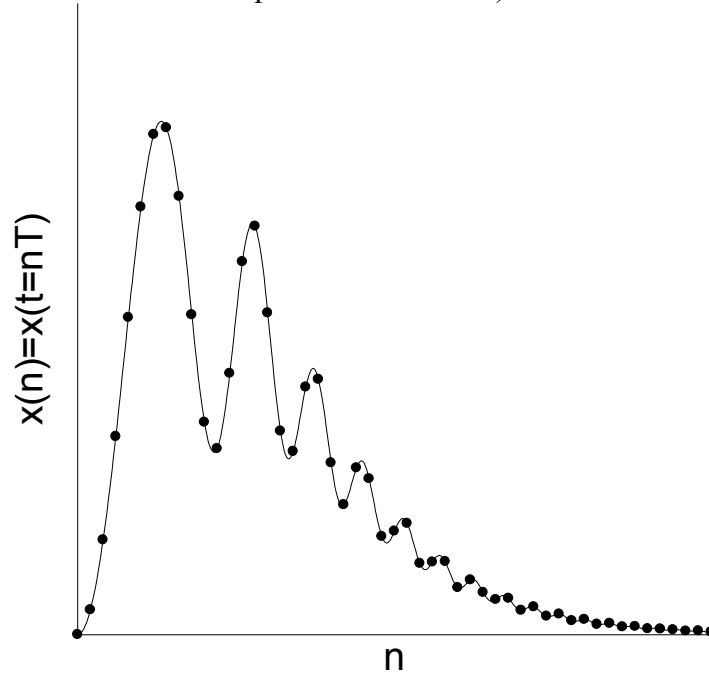


Рис. 3 Дискретизация непрерывного сигнала по времени

В этих случаях, чтобы подчеркнуть непрерывную «природу» сигнала и не потерять при преобразованиях размерность аргумента отсчеты дискретного сигнала обозначают в виде -  $x(nT)$ . Если используется традиционное обозначение  $x(n)$ , то предполагается что шаг дискретизации  $T=1$ .

В теории *дискретных* линейных систем вместо s-преобразования Лапласа широко используется понятие Z-преобразования дискретного сигнала

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (6)$$



Z-преобразование имеет смысл, для тех значений комплексной переменной  $z$ , где ряд (6) сходится.

Z-преобразование линейно и обладает еще рядом «полезных» свойств, благодаря чему оно успешно используется при описании линейных дискретных систем. Исходная последовательность может быть восстановлена с помощью обратного Z-преобразования :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (7)$$

где  $C$  – замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции  $X(z)z^{n-1}$ .

### Спектр Фурье дискретных сигналов

Спектром Фурье последовательности  $x(n)$  называют комплексную функцию  $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (8)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (9)$$

Формулы (8), (9) представляют собой пару преобразований Фурье. Выражение (9) показывает, как исходная последовательность может быть собрана из дискретизированных комплексных синусоид различных частот, взятых с весами  $X(e^{j\omega})$ . Сравнение (8) с (6) показывает, что спектр Фурье  $X(e^{j\omega})$  - есть просто Z-преобразование, вычисленное на единичной окружности  $Z = e^{j\omega}$  в комплексной Z-плоскости. NB. Отметим, что использование в записи аргумента ПФ дискретных сигналов  $X(e^{j\omega})$  не частоты  $\omega$ , а конструкции  $e^{j\omega}$ , применяется для неявного указания на то, что это спектр именно *дискретного* сигнала, а также на его связь с Z-преобразованием. Свойства спектра Фурье дискретных сигналов подобны свойствам спектра Фурье непрерывных сигналов. Однако есть принципиальное отличие. Спектр  $X(e^{j\omega})$  *периодичен* по частоте с периодом  $2\pi$ . Поэтому его значения рассматривают на одном периоде - либо  $[-\pi, \pi]$ , либо  $[0, 2\pi]$ .

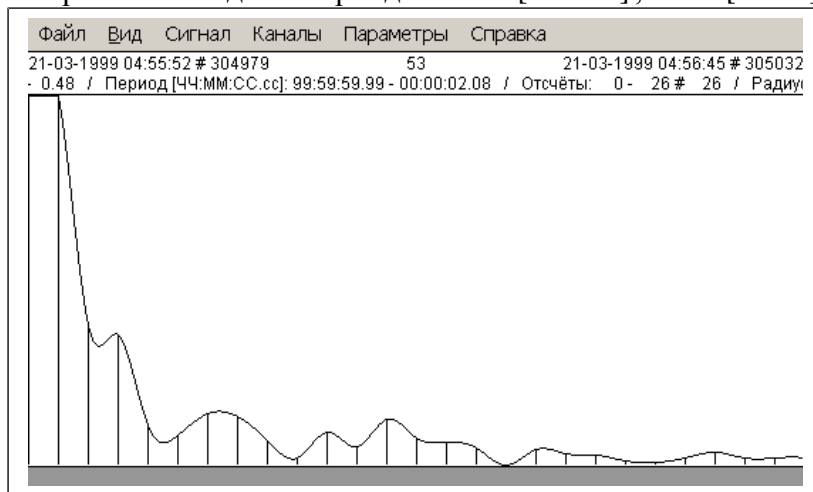


Рис. 4 Модуль Фурье-спектра дискретного сигнала  
(непрерывная кривая, отображена половина спектра –  $\omega \in [0, \pi]$ )

Если дискретный сигнал был получен дискретизацией с некоторым шагом  $T$  непрерывного сигнала  $x(nT)$ , то соотношения (8,9) переопределяют следующим образом

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T} \quad (8')$$

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (9')$$

Фурье-спектр  $X(e^{j\omega T})$  периодичен с периодом  $2\pi/T$ , поэтому рассматривается на интервале периодичности  $[-\pi/T, \pi/T]$ , либо  $[0, 2\pi/T]$ .

Принципиальным является вопрос о том, какова связь между Фурье-спектром исходного непрерывного сигнала  $X_{\text{непр}}(\omega) = X(j\omega)$  и спектром дискретного сигнала  $X(e^{j\omega T})$ . Можно показать, что связь такова:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{\text{непр}}\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10)$$

т.е. спектр дискретного сигнала есть результат наложения сдвинутых копий спектра непрерывного сигнала. Величина сдвига кратна  $\frac{2\pi}{T}$ . Отсюда следует вывод: если спектр непрерывного сигнала ограничен частотой  $\omega_{\max} \leq \frac{\pi}{T}$  (т.е. в исходном сигнале нет колебаний с частотами, большими, чем  $\frac{\pi}{T}$ ), то в спектре дискретного сигнала при всевозможных сдвигах копий непрерывного спектра не произойдет их наложения и на интервале  $[-\pi/T, \pi/T]$ , в спектре  $X(e^{j\omega T})$  просто будет неискаженная копия  $X_{\text{непр}}(\omega)$ .

NB. Последнее утверждение фактически означает, что всякий непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть без информационных потерь представлен набором своих дискретных отсчетов при соответствующем выборе шага дискретизации:  $T < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ . Действительно, если спектр дискретизированной последовательности (8) подставить в (1), где провести интегрирование в интервале  $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ , то получим известное выражение в виде теореме Котельникова

$$x(t) = \sum_n x(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}, \quad (11)$$

позволяющее однозначно восстановить значения исходного сигнала по его дискретным отсчетам при любых  $t$ .

### Дискретное преобразование Фурье

Тот факт, что спектр Фурье дискретного сигнала есть непрерывная функция, не очень хорошо с точки зрения задачи разработки устройств и программ цифровой обработки. Хотелось бы и в частотной области иметь дело с последовательностями. Для этого, мы подозреваем, надо бы дискретизировать по частоте с достаточно мелким шагом функцию  $X(e^{j\omega})$ . Но не будем торопиться ...

Далее будем вести речь о дискретных последовательностях конечной длины N:

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & \text{при } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{при } n < 0, n > N-1 \end{cases} \quad (12)$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности  $x(n)$  есть последовательность N частотных отсчетов, рассчитываемых по формуле:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k=0,1,2, \dots, N-1 \quad (13)$$

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) позволяет восстановить исходную последовательность

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n=0,1,2, \dots, N-1 \quad (14)$$

Закономерен вопрос - как связаны коэффициенты ДПФ  $X(k)$  с Z-преобразованием и преобразованием Фурье  $X(e^{j\omega})$  ?.

Сравнивая (13) с (6), заключаем, что отсчеты ДПФ  $X(k)$  для конечного сигнала длины  $N$  совпадают со значениями  $X(z)$ , взятыми в  $N$  точках, равномерно распределенных на единичной окружности

$$X(k) = X\left(z = e^{j \frac{2\pi}{N} k}\right). \quad (15)$$

и, следовательно, с отсчетами спектра Фурье  $X(e^{j\omega})$ , взятыми с шагом дискретизации  $\frac{2\pi}{N}$  по частоте. (NB. Т.е. все таки дискретизация в частотной области !!!).

Возникает вопрос: можно ли по отсчетам ДПФ (13) при необходимости восстановить весь непрерывный по частоте Фурье-спектр  $X(e^{j\omega})$ . По идее, такая возможность должна быть. Ведь ОДПФ (14) восстанавливает исходную последовательность  $x(n)$  длины  $N$ , а ей соответствует непрерывный Фурье-спектр (8). Действительно, можно вывести точную интерполяционную формулу, для восстановления непрерывного спектра из ДПФ:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_k \frac{X(k)}{N} \frac{e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{e^{j \frac{\pi k}{N}} \sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} \quad (16)$$

Формула (16) - аналог теоремы Котельникова для частотной области. Отметим, что для конечных сигналов естественным образом возник шаг частотной дискретизации  $\frac{2\pi}{N}$ . А что было бы, если бы мы не знали длину исходного сигнала  $x(n)$  -  $N$ , но знали бы его непрерывный Фурье-спектр  $X(e^{j\omega})$ . Мы бы задались некоторым достаточно мелким шагом  $\frac{2\pi}{L}$ , дискретизировав фурье-спектр  $X(e^{j\omega})$  на одном периоде и получили набор частотных отсчетов  $X(k)$  длины  $L$ , применили ОДПФ и восстановили конечный временной ряд  $\tilde{x}(l)$  длиной  $L$  отсчетов. Однако, следует иметь ввиду, что этот ряд являлся бы результатом суммирования сдвинутых на  $L$  отсчетов копий оригинального сигнала  $x(n)$  (можно получить формулу подобную формуле (10) для частотной области). При этом, если длина последнего  $N$  окажется больше чем  $L$ , то в  $\tilde{x}(l)$  будут присутствовать наложения от соседних копий.

Как бы то ни было, мы с вами установили принципиальную возможность замены непрерывных представлений исходного сигнала и преобразования Фурье конечными последовательностями без потери информации. Основные условия – ограниченность по частоте (финитность) спектра исходного непрерывного сигнала  $X_{непр}(\omega) = X(j\omega)$  и ограниченность во времени самого сигнала  $x(t)$ .

### Некоторые свойства ДПФ

Напоминаем общую формулу расчета ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

1. Все отсчеты ДПФ в общем случае комплексные, кроме отсчетов  $X(0)$  и  $X(N/2)$
2. Имеется комплексно-сопряженная симметрия относительно отсчета  $N/2$   
 $X(k) = X^*(N - k)$  и поэтому при графическом отображении часто ограничиваются рассмотрением первой половины ДПФ :  $k=0, 1, 2, \dots, N/2$ .

### Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

БПФ есть математически эквивалентный, но более быстрый алгоритм вычисления ДПФ. Основная идея – можно достичь экономии в расчетах по формуле (13) если сначала разбить исходный ряд на два более коротких, выполнить ДПФ для них, а потом определенным образом собрать полное ДПФ. Соответственно можно получить еще большую экономию, если при расчете ДПФ от половинок исходного сигнала, тоже разделить каждую половинку на две части. И т.д. Подробности алгоритма БПФ есть в различных источниках. Особенность БПФ – требования к длине реализации  $N$ . Для достижения максимальной эффективности требуется чтобы  $N$  было степенью двойки, т.е. 32, 64, 128, 256, 512, и т.д. Если в исходном сигнале число отсчетов  $N$  не кратно степени 2, то сигнал следует искусственно дополнить до ближайшей степени 2 нулями либо средним значением по имеющейся части.

### Применения ДПФ(БПФ)

Многочисленные. Обнаружение гармонических компонент и оценка их параметров (амплитуды, частоты). Статистический корреляционно-спектральный анализ. Вычисления свертки дискретных сигналов. И т.д.

Полезно знать приемы тригонометрической интерполяции на основе ДПФ:

1. Интерполяция дискретного сигнала.

Проблема. Имеем дискретную реализацию  $x(n)$  некоторого конечного непрерывного сигнала  $x(t)$  с финитным спектром, удовлетворяющую условию теоремы Котельникова (т.е. формально нет потери информации), но тем не менее зрительно воспринимаемую как весьма “дерганную”. Желаете представить ее в более густой сетке отсчетов для улучшения зрительного восприятия сигнала. Для этого очевидно необходимо интерполировать значения сигнала в промежуточных точках. Мы знаем, что есть точная интерполяционная формула (11), но не хотим ее использовать в явном виде, потому что интерполируемые значения будут весьма долго считаться.

Решение: Рассчитываем ДПФ от исходного сигнала длиной  $N$ , расширяем его за счет симметричной вставки в среднюю часть нулевых значений до длины  $L \gg N$ , выполняем ОДПФ и получаем новую, дискретную реализацию, в которой на той же исходной длине будет уже не  $N$ , а  $L \gg N$  отсчетов и при этом все они точные.

2. Интерполяция спектра Фурье.

Проблема: Как правило, при графическом представлении непрерывного спектра Фурье некоторого сигнала отсчетами его ДПФ получается излишне резкий, «дерганый» вид.

Хотелось бы интерполировать частотные отсчеты в более густую, подробную сетку, чтобы улучшить зрительное восприятие непрерывного Фурье-спектра.

Решение. Исходную реализацию дополняем справа нулями либо средним значением до новой длины  $L \gg N$ , рассчитываем ДПФ и отображаем в результате существенно большее число отсчетов Фурье-спектра, которые следуют друг за другом более плавным образом.

### Проблема анализа случайных сигналов

Как отмечалось ранее, строго детерминированных сигналов очень мало, практически все сигналы, которые необходимо анализировать, следует рассматривать как выборочные реализации некоторой случайной функции (случайного процесса, если аргумент  $t$  – время). Как правило, полное описание случайного процесса очень сложно, но часто базовые свойства процесса могут быть выражены в виде нескольких числовых характеристик либо функций. В этом случае анализ предъявленного для обработки сигнала (конечной реализации случайного процесса) должен закончиться получением оценок этих неизвестных характеристик случайного процесса, по возможности, более точных.

Прежде всего, определим понятие случайного процесса. В общем случае *случайный процесс*  $X(t), (-\infty < t < \infty)$  определяют путем указания бесконечной совокупности различающихся между собой функций  $\{x_k(t)\}, k = 1, 2, \dots, \infty$ , которые могли бы наблюдаться при неоднократном воспроизведении одних и тех же условий эксперимента. Такие функции называются выборочными реализациями случайного процесса, а их совокупность – ансамблем реализаций.

Говоря не об одной выборочной реализации, а о процессе в целом, в каждый момент времени  $t$  мы имеем дело с некоторой случайной величиной  $X(t)$ , которая может быть описана плотностью распределения вероятности  $f_1(x; t)$ . В любые два момента времени  $t_1$  и  $t_2$  мы уже имеем дело с системой двух случайных величин  $x_1 = X(t_1)$  и  $x_2 = X(t_2)$ , которая описывается соответствующей двумерной плотностью распределения  $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ . Далее можно произвольно увеличивать число моментов времени  $N$  и уточнять их положение на оси времени и при этом получать  $N$ -мерные случайные величины, для вероятностного описания которых требуется знание  $N$ -мерных совместных плотностей распределения  $f_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$ . Случайный процесс  $X(t)$  считается исчерпывающе описанным в вероятностном смысле только в том случае, если известны все такие конечномерные распределения при любых  $N$ .

Очевидно, что в общем случае задача получения такого исчерпывающего описания практически не может быть решена. Поэтому в теории случайных процессов, исходя из особенностей подлежащих анализу экспериментальных сигналов, вводятся некоторые упрощающие предположения относительно вероятностных свойств порождающего их случайного процесса. Одним наиболее часто используемых на практике предположений является предположение *стационарности* случайного процесса.

*Стационарный случайный процесс* (ССП) определяют как случайный процесс, для которого все совместные плотности распределения любого порядка инвариантны к произвольному одновременному сдвигу всех моментов времени, в которые берутся случайные отсчеты :

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau). \quad (1)$$

Другими словами, вероятностные свойства стационарного случайного процесса не меняются со временем.

## *Характеристики стационарного случайного процесса, основанные на плотности распределения первого порядка $f_1(x; t)$*

Для ССП плотность распределения  $f_1(x; t)$  не зависит от временного аргумента, т.е.  $f_1(x; t) \equiv f_1(x)$ . Соответственно, не зависят от времени и важные числовые характеристики, рассчитываемые на базе одномерной плотности  $f_1(x)$ .

1. Среднее значение процесса

$$\bar{x} = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx$$

2. Дисперсия

$$D_x = \sigma_x^2 = M[(X(t) - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot f_1(x) dx$$

3. Коэффициент асимметрии

$$\gamma_x = \frac{M[(X(t) - \bar{x})^3]}{\sigma_x^3} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^3 \cdot f_1(x) dx}{\sigma_x^3}$$

4. Коэффициент эксцесса

$$\kappa_x = \frac{M[(X(t) - \bar{x})^4]}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^4 \cdot f_1(x) dx}{\sigma_x^4} - 3$$

Перечисленные характеристики выражают существенные особенности одномерной функции распределения – среднее значение, относительно которого группируются значения отсчетов сигнала, параметры разброса значений сигнала относительно среднего, симметричность функции распределения и степень ее “островершинности”.

Учитывая тот факт, что эти характеристики основаны на ф.р. первого порядка, иногда их называют характеристиками 1-го порядка.

Свойство стационарности процесса позволяет реализовать очень простые методы оценивания характеристик первого порядка по единственной представленной реализации случайного процесса. Если в общем случае для оценки математических ожиданий в вышеприведенных формулах потребовалось бы проводить «усреднение по ансамблю выборочных реализаций», то в случае стационарности достаточно использовать усреднение по времени единственной реализации.

### ***Расчет элементарных статистик цифровых сигналов***

#### *Оценки*

*Сначала основная идея.* Анализируемый сигнал можно рассматривать как реализацию некоторого случайного процесса. Случайный процесс в самом общем случае описывается набором многомерных функций распределения своих случайных отсчетов, взятых в различные моменты времени : одномерными ф.р., двумерными, трехмерными и т.д. Информация об особенностях одномерной ф.р. хоть и недостаточна для полного описания всех свойств процесса, но тем не менее уже весьма полезна. В случае, если процесс является стационарным, его одномерная ф.р. не зависит от времени (номера отсчета в дискретном сигнале). Это дает возможность оценить числовые характеристики одномерной ф.р. (т.н. статистики первого порядка или элементарные статистики) путем соответствующего усреднения по совокупности всех отсчетов сигнала:

1. Среднее  $\hat{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum x(i)$

2. Дисперсия  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x(i) - \hat{\bar{x}})^2$
3. Среднеквадратичное отклонение  $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$
4. Коэффициент вариации  $\hat{r} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\bar{x}}}$
5. Коэффициент асимметрии  $\hat{\gamma} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x(i) - \hat{\bar{x}})^3}{\hat{\sigma}^3}$
6. Коэффициент эксцесса  $\hat{\kappa} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x(i) - \hat{\bar{x}})^4}{\hat{\sigma}^4} - 3$

Полезными также являются экстремальные статистики – максимум и минимум сигнала, медиана – порядковое среднее всей совокупности отсчетов, квантили (квантиль порядка  $p$  – есть значение  $x_p$ , такое, что примерно  $p*100\%$  отсчетов сигнала не превышают его; обычно используют квантили порядков  $p=0.05, 0.1, 0.9, 0.95$ ).

Другой важной характеристикой является гистограмма распределения отсчетов, которая фактически является приближенной оценкой одномерной плотности функции распределения. Гистограмма обычно отображается в виде столбцовой диаграммы. Каждый столбец показывает долю отсчетов сигнала, со значениями, лежащими в пределах интервала, соответствующего данному столбцу.

### ***Корреляционная функция и спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса***

Элементарные статистики дают некоторую важную информацию о статистических свойствах анализируемого процесса, однако существенно более информативными характеристиками являются корреляционная функция и спектральная плотность мощности. Задача получения их оценок по предоставленным в распоряжение исследователя конечным реализациям называется задачей *корреляционно-спектрального анализа*. Целью настоящего раздела лабораторной работы является знакомство с основными методами осуществления корреляционно-спектрального анализа в системах цифровой обработки сигналов.

Корреляционная функция, которая в общем случае является функцией двух временных аргументов

$$K(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - a(t_1)) \cdot (X(t_2) - a(t_2))] = \iint (x_1 - a(t_1)) \cdot (x_2 - a(t_2)) \cdot f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (3)$$

для стационарных процессов будет функцией только одного аргумента  $\tau = t_2 - t_1$ , т.е.  $K(t_1, t_1 + \tau) = K(\tau)$  при любых  $t_1$ .

Подобные ограничения накладываются и на моментные характеристики третьего и последующего порядков. На практике, однако, обычно ограничиваются рассмотрением характеристик не старше второго порядка. В связи с этим в 30-х годах советским математиком Я.Хинчиным был введен класс т.н. *стационарных в широком смысле* случайных процессов, т.е. процессов, для которых требование стационарности выполнено только для первых двух моментных характеристик – среднего и корреляционной функции. В этом смысле данный класс действительно шире, чем ранее определенный класс стационарных процессов. В связи с этим обычную стационарность еще иногда называют *стационарностью в узком смысле*.

NB. Введение понятия стационарности в широком смысле и рассмотрение только первых двух моментных характеристик оправдано еще следующими двумя важными

обстоятельствами. Многие шумоподобные экспериментальные сигналы можно с некоторым приближением считать нормальными, т.е. предполагать, что все их конечномерные законы распределения являются нормальными (гауссовыми). В качестве обоснования такого предположения часто просто ссылаются на центральную предельную теорему теории вероятностей, утверждающую, что закон распределения случайной величины, в формировании которой примерно в равной доле участвуют несколько случайных причин, стремится к нормальному. Справедливо утверждение о том, что стационарный в широком смысле нормальный случайный процесс является стационарным и в узком смысле. Более того, справедливо еще более сильное утверждение : знание среднего и корреляционной функции нормального стационарного случайного процесса позволяет однозначно восстановить все моментные функции более высоких порядков и в конечном итоге восстановить конечномерные распределения любого порядка. Иными словами, для нормального процесса среднее и корреляционная функция полностью определяют все его вероятностные свойства.

Несомненно, более содержательной статистической характеристикой стационарного случайного процесса является не среднее, а именно *корреляционная функция*

$$K(\tau) = M[(X(t_1) - a) \cdot (X(t_1 + \tau) - a)] = \\ = \iint (x_1 - a) \cdot (x_2 - a) \cdot f_2(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau) dx_1 dx_2. \quad (4)$$

Основные свойства корреляционной функции (КФ) стационарного случайного процесса:

1. КФ достигает максимума в точке  $\tau = 0$ , где она совпадает с дисперсией процесса:

$$K(0) = D[X(t)] = M[(X(t) - a)^2];$$

2. КФ симметрична :  $K(\tau) = K(-\tau)$ ;

3.  $K(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ .

Значение корреляционной функции при некотором  $\tau$  представляет собой корреляционный момент между двумя сечениями случайного процесса, отстоящими на расстояние  $\tau$ . Корреляционный момент учитывает степень выраженности линейной статистической зависимости двух случайных величин. Эта зависимость может быть положительной и тогда превышение над средним уровнем в первом сечении  $t$  влечет с большой вероятностью превышение уровня и в другом сечении  $t + \tau$ . В случае значительной отрицательной корреляционной связи при превышении в первом сечении среднего уровня значение случайной реализации в другом сечении скорее всего будет ниже среднего уровня.

Проведенные выше рассуждения приводят к следующей полезной интерпретации корреляционной функции в целом при анализе случайных сигналов. Предположим, в реализациях исследуемого случайного процесса в силу тех или иных причин присутствует значительная квазигармоническая компонента определенной частоты. Тогда отсчеты процесса, отстоящие по времени на половину периода квазигармонической компоненты, будут отрицательно коррелированы, отсчеты, отстоящие на полный период, снова положительно коррелированы и т.д. В целом корреляционная функция в этом случае будет знакопеременной. Ее абсолютные значения будут убывать вследствие того, что из-за случайности зависимость между отсчетами случайного сигнала в среднем ослабевает. Скорость убывания этих абсолютных значений будет определяться мощностью и частотной локализованностью квазигармонической компоненты. Квазигармонический процесс с другим основным периодом породит также знакопеременную корреляционную функцию, но с другой частотой осцилляций. Корреляционная функция может не содержать вообще отрицательных значений, что свидетельствует об отсутствии в сигнале каких-либо значительных квазигармонических компонент. Таким образом, корреляционная функция



“чувствует” частотную структуру случайного сигнала, что бывает очень важно для исследователя. Однако, хотелось бы иметь характеристику, более прямо дающую представление о частотном составе случайного сигнала.

Такая характеристика - *спектральная плотность мощности* (СПМ) стационарного случайного процесса - была введена Я.Хинчиным. Она может быть получена как Фурье-преобразование от корреляционной функции

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau . \quad (5)$$

В свою очередь, корреляционная функция может быть восстановлена из спектральной плотности с помощью обратного преобразования Фурье :

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega . \quad (6)$$

Пара преобразований (5, 6) носит название теоремы Винера-Хинчина. Название и содержательный смысл спектральной плотности мощности следует из последнего выражения при подстановке  $\tau = 0$ . Как отмечалось ранее, в этом случае мы получим выражение для дисперсии (полной мощности) случайного процесса :

$$D = K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega . \quad (7)$$

Таким образом, функция  $P(\omega)$  фактически описывает, как полная мощность случайного процесса распределена по частотам. NB. Есть еще одно полезное определение СПМ  $P(\omega)$ . Всякий стационарный случайный процесс может быть представлен в виде интегральной суперпозиции синусоид всех возможных частот  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , при этом каждая синусоида имеет случайную амплитуду  $A(\omega)$  и случайную фазу  $\varphi(\omega)$ . Математическое ожидание квадрата амплитуды синусоиды некоторой частоты  $\omega$  есть средняя мощность данной синусоиды в случайном процессе  $P(\omega) = M|A(\omega)|^2$ . Суммируя мощности всех синусоидальных составляющих мы получаем полную мощность (дисперсию) случайного процесса  $D = K(0)$ .

СПМ  $P(\omega)$  симметрична :  $P(-\omega) = P(\omega)$ , поэтому ее обычно рассматривают только на положительных частотах. При этом, если в случайном процессе присутствует мощная квазигармоническая компонента, то она проявится в СПМ в виде заметного пика на основной частоте квазигармонической компоненты. Площадь под пиком определяет мощность этой компоненты, ширина пика характеризует степень монохромности (частотной локализованности) данной квазигармонической компоненты. Если в сигнале присутствуют несколько квазигармонических компонент различных частот, то все они проявятся в СПМ. Таким образом, СПМ, будучи взаимно-однозначно связанной с корреляционной функцией (5,6), более наглядно описывает частотный состав случайных сигналов. Поэтому в системах анализа сигналов приоритет отдается именно спектральной плотности мощности.

### ***Корреляционная функция и спектральная плотность мощности стационарной случайной последовательности***

Случайная последовательность (случайный процесс с дискретным временем)  $X(n)$  легко может быть определен подобно тому, как выше был определен случайный процесс с непрерывным временем  $X(t)$ . Также без особых проблем можно ввести понятие стационарности случайных последовательностей в узком и широком смыслах.

Следует отметить, что при обработке случайных сигналов в компьютере либо в цифровом устройстве мы всегда имеем дело именно со случайными последовательностями. Наиболее часто случайные последовательности получают в результате временной

дискретизация непрерывного случайного процесса :  $X(n) = X(t)|_{t=nT}$ , где  $T$  – шаг дискретизации. При этом результаты анализа некоторой выборочной реализации  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  случайной последовательности  $X(n)$  желательности распространить и на свойства процесса  $X(t)$ .

Для стационарной случайной последовательности  $X(n)$  корреляционная функция (автокорреляционная последовательность - АКП) определяется следующим образом

$$K(m) = M[(X(n) - \bar{x})(X(n+m) - \bar{x})] . \quad (8)$$

Здесь  $M$  - знак математического ожидания,  $\bar{x} = M[X(n)]$  - среднее значение (мат. ожидание) случайной последовательности .

Сравнивая (8) и (4), отмечаем, что  $K(m) = K(\tau)|_{\tau=mT}$ . Вопрос о восстановлении корреляционной функции  $K(\tau)$  по ее дискретной версии  $K(m)$  аналогичен вопросу о восстановлении непрерывного сигнала  $x(t)$  из дискретного сигнала  $x(nT)$ . Ответ: если СПМ  $P(\omega)$  процесса  $X(t)$  финитна (тождественно равна нулю сверх некоторой конечной частоты  $\omega_{\max}$ ), то при достаточно малом шаге дискретизации  $T < \frac{2\pi}{\omega_{\max}}$  функция  $K(\tau)$  может быть безошибочно восстановлена из  $K(m)$  при любом  $\tau$  .

Теорема Винера-Хинчина для случайных последовательностей определяется следующими двумя выражениями

$$P(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(m) e^{-j\omega mT} . \quad (9)$$

$$K(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} P(\omega) e^{j\omega mT} d\omega . \quad (10)$$

СПМ  $P(\omega)$  периодична по  $\omega$  с периодом  $\frac{2\pi}{T}$ , поэтому рассматривается на одном периоде  $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$  либо  $\left[0, \frac{2\pi}{T}\right]$ . Как она связана с СПМ  $P_{\text{непр}}(\omega)$  непрерывного процесса  $X(t)$ ? Ответ:  $P(\omega)$  есть результат наложения всех копий  $P_{\text{непр}}(\omega)$ , сдвинутых по частоте  $\omega$  на интервалы, кратные  $\frac{2\pi}{T}$ . Если выполняется условие  $T < \frac{2\pi}{\omega_{\max}}$ , то  $P(\omega) \equiv P_{\text{непр}}(\omega)$  на интервале  $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ .

### **Задача корреляционно-спектрального анализа случайных сигналов**

Задача корреляционно-спектрального анализа случайных сигналов состоит в получении оценок корреляционной функции  $\hat{K}(m)$  и спектральной плотности мощности  $\hat{P}(\omega)$  стационарной случайной последовательности  $X(n)$  на основе обработки единственной реализации этого процесса конечной длительности  $N$ :  $\{x(n), n = \overline{0, N-1}\}$ .

Отметим, что, если бы в нашем распоряжении было несколько реализаций  $\{x_k(n), k = \overline{1, M}, n = \overline{0, N-1}\}$  (ансамбль реализаций), то мы могли бы использовать формулу (8) для получения оценки  $\hat{K}(m)$ , заменив операцию математического ожидания усреднением по ансамблю реализаций

$$\hat{K}(m) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (x_k(n) - \bar{x})(x_k(n+m) - \bar{x}), \text{ где } \bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k(n) \quad (11)$$

После этого мы бы применили (9) для получения оценки СПМ  $\hat{P}(\omega)$ , подставив вместо  $K(m)$  ее оценку  $\hat{K}(m)$ . Но, увы, в нашем распоряжении только одна реализация.

Выход из этого положения возможен, если исследуемая стационарная последовательность относится к классу т.н. эргодических последовательностей. В этом случае возможно замена операции усреднения по ансамблю реализаций усреднением по времени одной достаточно длинной реализации. В результате оценка корреляционной функции может быть рассчитана по следующей формуле:

$$\hat{K}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} (x(n) - \bar{x})(x(n+m) - \bar{x}) & m \geq 0 \\ \hat{K}(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (11')$$

$$\text{где оценка среднего } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n).$$

Общая длина оценки корреляционной функции  $\hat{K}(m)$  -  $(2N-1)$  отсчетов:  $m = -(N-1), -(N-2), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (N-2), (N-1)$ .

В качестве оценки СПМ  $\hat{P}(\omega)$  с учетом теоремы Винера-Хинчина логично взять следующую функцию:

$$\hat{P}(\omega) = I_N(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{K}(m) e^{-j\omega n} \quad (12)$$

Функция  $I_N(\omega)$  называется периодограммой. Впервые периодограмма, как средства анализа частотных свойств сигнала, была введена английским математиком А.Шустером в 1898 году в следующем виде.

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2 \quad (13)$$

где  $X(e^{j\omega})$  - Фурье-преобразование сигнала  $\{x(n), n = \overline{0, N-1}\}$ . Позднее было показано, что соотношения (12), (13) полностью эквивалентны.

Отметим, что периодограммная оценка СПМ  $\hat{P}(\omega)$  (12-13), как и всякая другая оценка, является случайной функцией частоты, т.е. для каждой новой реализации стационарной случайной последовательности  $X(n) - \{x(n), n = \overline{0, N-1}\}$  она ведет себя несколько по иному. Вероятностные свойства периодограммной оценки были исследованы и, в частности, установлены следующие два важных свойства. Математическое ожидание

этой оценки равно свертке истинной СПМ  $P(\omega)$  с функцией окна  $W(\omega) = \frac{1}{N} \left[ \frac{\sin^2\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]$ .

При  $N \rightarrow \infty$  оценка становится несмещенной, но при конечных  $N$  смещение  $b(\omega) = |M(\hat{P}(\omega)) - P(\omega)|$  всегда присутствует: оно достаточно велико в местах быстрого изменения  $P(\omega)$  и мало на частотах, где  $P(\omega)$  изменяется плавно. Можно представить ситуацию, когда при анализе суперпозиции двух синусоид с близкими частотами  $x(n) = \sin(\omega_1 n) + \sin((\omega_1 + \Delta \omega) n)$  вследствие упомянутого свойства сглаживания периодограммная оценка принципиально не позволит обнаружить обе частотные компоненты. В связи с этим говорят о проблеме частотного разрешения спектральных оценок  $\hat{P}(\omega)$  при конечных выборках. Частотное разрешение определяют путем задания

минимальной разности частот  $\Delta \omega$ , такой, что математическое ожидание спектральной оценки  $\hat{P}(\omega)$ , полученной при анализе тестового сигнала  $x(n) = \sin(\omega_1 n) + \sin((\omega_1 + \Delta \omega)n)$ , позволит обнаружить обе частотные компоненты. Чем меньше  $\Delta \omega$ , тем лучше частотное разрешение. Для периодограммных оценок частотное разрешение  $\Delta \omega \approx \frac{2\pi}{N}$ , т.е. улучшается с ростом длины выборочной реализации -  $N$ .

Но проблема смещенности не единственная для периодограммных спектральных оценок. Более существенной проблемой является то, что оценка  $\hat{P}(\omega)$  для всякой частоты  $\omega$  имеет очень большую дисперсию  $D[\hat{P}(\omega)] = M[(\hat{P}(\omega) - M[\hat{P}(\omega)])^2] \approx P^2(\omega)$  (иными словами, среднеквадратическое отклонение оценки равняется самому оцениваемому значению СПМ), которая не уменьшается с ростом  $N$ . В результате оценка СПМ (12) в целом не является состоятельной, поскольку ее среднеквадратическая ошибка, складывающаяся из квадрата смещения  $b(\omega)$  и дисперсии  $D[\hat{P}(\omega)]$

$$\varepsilon(\omega) = M[(\hat{P}(\omega) - P(\omega))^2] = b^2(\omega) + D[\hat{P}(\omega)] \quad (15)$$

с ростом  $N$  не стремится к нулю.

Еще один важный теоретический результат состоит в том, что значения периодограммы, разнесенные по частоте на величину  $\Delta \omega$ , кратную  $\frac{2\pi}{N}$ , являются некоррелированными. Это согласуется с ранее упомянутым частотным разрешением периодограммной оценки. В связи с этими обстоятельствами периодограммную оценку  $\hat{P}(\omega)$  (12,13) от реализации длины  $N$  рекомендуется рассчитывать для  $N$  частот, кратных  $\frac{2\pi}{N}$ :

$$\hat{P}\left(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{K}(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}, \quad k = \overline{0, (N-1)} \quad (16)$$

$$\hat{P}\left(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right|^2 = \frac{1}{N} \left| X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) \right|^2, \quad k = \overline{0, (N-1)} \quad (17)$$

Учитывая симметрию  $\hat{P}(\omega)$  для анализа частотных свойств случайной последовательности достаточно рассматривать только половину частотных отсчетов периодограммной оценки (16,17)), вернее, чуть больше половины:  $k=0,1,2, \dots, (N/2)$ , всего  $(N/2+1)$  отсчетов. Отметим, что выражения (16), (17) могут быть эффективно рассчитаны с применением процедуры ДПФ-БПФ, далее мы рассмотрим эту возможность подробнее.

Резюмируем текущие результаты. Пусть в нашем распоряжении имеется одна реализация стационарной случайной последовательности процесса длительности  $N$ :  $\{x(n), n = \overline{0, N-1}\}$ , и нам необходимо найти оценки

- 1) корреляционной функции  $\hat{K}(m), m = \overline{-(N-1), (N-1)}$ ;
- 2) спектральной плотности мощности  $\hat{P}\left(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k\right), k = \overline{0, N-1}$ .

Очевидно, есть два возможных подхода к проведению корреляционно-спектрального анализа, определяемых порядком расчета оценок  $\hat{K}(m)$  и  $\hat{P}(\omega_k)$ .

*Первый подход.* Сначала рассчитываем оценку корреляционной функции согласно (11')  $\hat{K}(m)$ . Затем строим оценку СПМ с помощью формулы (16).

*Второй подход.* Сначала рассчитываем оценку СПМ согласно (17) с использованием процедуры БПФ. Здесь есть тонкий момент, если нам не нужна будет корреляционная функция, то достаточно будет СПМ рассчитать в  $N$  точках  $\hat{P}\left(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k\right)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ . Если  $N$  не является степенью двойки, то надо дополнить исходную реализацию до ближайшей степени двойки. Дополнять нужно либо средним значением по информативной части реализации, либо нулями – желательно обеспечить возможность выбора нужного варианта дополнения. Если нужна будет оценка корреляционной функции, то СПМ нужно рассчитать в два раза более густой сетке отсчетов:  $\hat{P}\left(\omega_k = \frac{2\pi}{L}k\right)$ ,  $k = \overline{0, L-1}$ , где  $L=2N$ . Чтобы использовать БПФ, исходную реализацию нужно дополнить средним значением (не нулевым !!!) до степени двойки, ближайшей к  $(L=2N)$ . (Пример: было  $N=100$ , стало  $L=256$ ). После расчета оценки СПМ рассчитываем оценку корреляционной функции с помощью процедуры ОДПФ:

$$\hat{K}(m) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \hat{P}(k) e^{j\frac{2\pi}{L}mk}, \quad k = \overline{0, L-1} \quad (18)$$

В силу специфики процедуры ДПФ-ОДПФ оценка  $\hat{K}(m)$  (18) определена при положительных значениях индекса  $m$ . Ее первые  $N$  отсчетов ( $m = \overline{0, N-1}$ ) совпадают с неотрицательной половиной оценки (11'). Значений корреляционной оценки  $\hat{K}(m)$  (18), соответствующие отрицательным сдвигам ( $m < 0$ ), находятся во второй половине рассчитанного массива  $\hat{K}(-m) = \hat{K}(L-m)$ .

Отметим, что все современные программные пакеты анализа данных (MATLAB, SCILAB, MATHCAD и другие) реализуют второй подход.

### *Повышение статистической устойчивости периодограммных спектральных оценок*

Как отмечалось, корреляционная функция и спектральная плотность мощности – две взаимнооднозначно связанные характеристики стационарных случайных процессов, однако на практике в последние годы приоритет отдается задаче получения оценок СПМ, как более наглядно описывающих частотные свойства процесса. Поэтому будем считать проблему корреляционного оценивания решенной (см. соотношения (11'), (18)) и далее сосредоточимся на проблеме улучшения оценок СПМ (17).

Чем плоха эта оценка? Она не состоятельна, иными словами статистически неустойчива. Сколь бы длинные реализации мы не брали, дисперсия оценки (17) на каждой частоте  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$  остается очень большой (равной квадрату самой СПМ на этой частоте), соответственно общая среднеквадратическая ошибка оценивания не стремится к нулю. Как повысить статистическую устойчивость? Есть два подхода;

Первый подход. Разбить реализацию длиной  $N$ , на  $M$  секций длины  $L$ :  $N = M * L$ . Далее рассчитать  $M$  периодограмм от каждой секции

$$\hat{P}_m\left(\omega_k = \frac{2\pi}{L}k\right) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_m(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}nk} \right|^2 = \frac{1}{L} \left| X_m\left(e^{j\frac{2\pi}{L}k}\right) \right|^2, \quad k = \overline{0, L-1}, m = \overline{0, M-1} \quad (19)$$

и затем рассчитать окончательную оценку как среднее арифметическое:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{P}_m(k), \quad k = \overline{0, L-1}. \quad (20)$$

Отметим, что дисперсия этой оценки будет примерно в  $M$  раз меньше, чем дисперсия несглаженной периодограммной оценки (17) :

$D[\bar{P}(k)] = M \left[ \left( \bar{P}(k) - M[\bar{P}(k)] \right)^2 \right] \approx \frac{P^2(k)}{M}$ . Это очень хорошо. Если жестко зафиксировать длину секции  $L$ , то при  $N \rightarrow \infty$ , число секций  $M \rightarrow \infty$  и следовательно дисперсия оценки стремится к нулю  $D[\bar{P}(k)] \rightarrow 0$ , т.е. оценка СПМ становится статистически устойчивой.

Но ! Не может быть все очень хорошо, в чем-то мы должны потерять. Действительно, для несглаженной оценки (17) частотное разрешение было  $\Delta \omega_{\text{несгл}} = \frac{2\pi}{N}$ , для оценки (20) оно

ухудшается в  $M$  раз:  $\Delta \omega_{\text{сгл}} = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{N} M = M \Delta \omega_{\text{несгл}}$ . Соответственно, увеличивается систематическое смещение оценки  $b(k) = |M(\bar{P}(k)) - P(k)|$ . Для того, чтобы при  $N \rightarrow \infty$  оценка СПМ стала состоятельной ( $\varepsilon(k) = M \left[ \left( \bar{P}(k) - P(k) \right)^2 \right] = b^2(k) + D[\bar{P}(k)] \rightarrow 0$ ), необходимо увеличивать не только число секций  $M$ , но и размер секции  $L$ . Это можно сделать, установив, например, закон роста для размера секции  $L \sim \sqrt{N}$  (закон роста количества секций автоматически будет  $M \sim \sqrt{N}$ ).

Но как же все таки действовать в ситуации, когда  $N$  – фиксировано. Выбор числа секций  $L$  должен определяться компромиссом между желанием повысить статистическую устойчивость оценки и не слишком ухудшить частотное разрешение оценки. Как правило, процесс оценивания осуществляется путем проведения нескольких вариантов оценивания при различных  $L$  и  $M$  и внимательного визуального просмотра всех оценок. Поэтому программное обеспечение процедуры спектрального оценивания (19-20) должно обязательно включать параметры настройки: либо  $L$ , либо  $M$ . В профессиональных системах цифровой обработки сигналов для контроля статистической устойчивости спектральной оценки отображается не только график самой оценки СПМ, но и доверительный интервал, внутри которого с заданным уровнем доверия полностью находится истинная СПМ, а для контроля частотного разрешения на графике отображается горизонтальный отрезок, соответствующий минимальному “разрешенному” интервалу частот  $\Delta \omega_{\text{сгл}} = \frac{2\pi}{L}$ .

Описанная выше методика повышения статистической устойчивости приписывается американскому специалисту Бартлетту, соответственно спектральные оценки (20) называются сглаженными периодограммными оценкам Бартлетта. Позднее этот подход был развит американским специалистом Уэлчем. Его две основные идеи: 1 - секции брать не примыкающими друг к другу, а с некоторым «нахлестом»; 2 – каждую секцию  $x_m(n)$  взвешивать окном  $w(n)$ , максимальным в центре и плавно спадающим к краям. Это приводит к оценке в виде :

$$\bar{P}_m \left( \omega_k = \frac{2\pi}{L} k \right) = \frac{1}{LU} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_m(n) w(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} nk} \right|^2, \quad m = \overline{0, M-1}, \quad U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} w^2(n)$$

$$\bar{P}_{\text{Уэлч}}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \bar{P}_m(k), \quad k = \overline{0, L-1}. \quad (21)$$

Оценки Уэлча наиболее часто применяются в системах обработки сигналов. При этом обеспечивается возможность управлять величиной перекрытия секций и выбирать различные взвешивающие окна. В качестве начального приближения рекомендуется использовать перекрытие на 50 процентов и взвешивающее косинус окно :

$$w(n) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{L} \left( n - \frac{L-1}{2} \right) \right) \right), \quad n = \overline{0, L-1}. \quad (22)$$

Еще одна популярная методика повышения устойчивости оценок СПМ основана на сглаживании периодограммной оценки непосредственно в частотной области. Основания для применения этой методики следующие. Можно строго показать, что методики Бартлета и Уэлча эквивалентны тому, что в частотной области производится свертка несглаженной периодограммной оценки  $\hat{P}(\omega)$  (12-13) с некоторой оконной функцией  $W(\omega)$ , имеющей центральный лепесток некоторой ширины и убывающие боковые лепестки.

$$\hat{P}_{сгл}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{несгл}(\theta) W(\omega - \theta) d\theta. \quad (23)$$

Конкретный вид и особенности поведения функции  $W(\omega)$  определяются типом оценки и ее параметрами. В частности, чем меньше размер секции  $L$  (соответственно, чем больше число таких секций  $M$ ), тем шире основной лепесток и тем более сильное сглаживание производится. Учитывая (22) представляется разумным задавать сразу оконную функцию  $W(\omega)$  и производить свертку несглаженной периодограммы непосредственно в частотной области. Первым это предложил делать Даньелл, причем, в наиболее тривиальной форме. Сначала надо рассчитать несглаженную периодограммную оценку (17) от всей реализации длины  $N$ , затем каждый отсчет сглаженной оценки получить простым арифметическим усреднением ближайших  $(2L+1)$  отсчетов несглаженной оценки:

$$\hat{P}_{Дан}(k) = \frac{1}{2L+1} \sum_{l=-L}^L \hat{P}_{несгл}(k+l), \quad (24)$$

где  $L$  – полуширина сглаживающего спектрального окна.

Фактически, оценка Даньелла (24) соответствует оценке (23) при выборе прямоугольного сглаживающего спектрального окна (в его дискретной версии):

$$W(k) = \begin{cases} \frac{1}{2L+1}, & |k| \leq L \\ 0, & |k| > L \end{cases}. \quad (25)$$

В общем случае можно брать любое окно, удовлетворяющее условию нормировки  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} W(k) = 1$ , но для обеспечения неотрицательности спектральной оценки лучше брать строго неотрицательные окна ( $W(k) \geq 0, \forall k$ ), например, косинус-окно, подобное (22).

## **О задаче взаимного корреляционно-спектрального оценивания**

### *Взаимная корреляционная функция*

Пусть даны выборочные реализации  $\{x(n), y(n)\}, n = 0, 1, \dots, N-1$  двух случайных процессов с дискретным временем (случайных последовательностей)  $\{X(n), Y(n)\}, -\infty < n < \infty$ . Если процессы являются стационарными и стационарно-связанными, то их важной количественной характеристикой является взаимная корреляционная функция

$$K_{xy}(m) = M[(X(n) - \bar{x})(Y(n+m) - \bar{y})^*], \quad m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty \quad (26)$$

Здесь  $M$  - знак математического ожидания,

$\bar{x} = M[X(n)]$  - среднее значение первого процесса (отметим, что оно постоянно в случае стационарно-связанных процессов при всех  $n$ ),

$\bar{y} = M[Y(n)]$  - среднее значение второго процесса,

\* - знак комплексного сопряжения (для действительных процессов на него просто можно не обращать внимания).

Оценка этой важной характеристики по имеющимся конечным выборкам может быть вычислена в виде :

$$\hat{K}_{xy}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} (\hat{x}(n) - \bar{x})(\hat{y}(n+m) - \bar{y}) & m \geq 0 \\ \hat{R}_{yx}(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (27)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)$  - оценки средних значений по выборкам.

Обратите внимание, что общая длина корреляционной функции –  $(2N - 1)$  - отсчетов, т.е. в два раза больше длин исходных реализаций.

*Примечание 1:* Как быть, если длины реализаций разные, например,  $N_1, N_2$ .

Можно дополнить короткую реализацию своими средними значениями до большей длины и применить (27). При этом слева или справа несколько отсчетов оценки корреляционной функции будут нулевыми. Ну и пусть будут. А можно ничего не дополнять, а просто аккуратно реализовать вычисления в (1), подставляя в верхнем пределе суммы в случае расчета  $\hat{K}_{xy}(m)$  вместо  $N - N_2$ , а при расчете  $\hat{K}_{yx}(m)$  -  $N_1$ .

При больших  $N$  целесообразно использовать более быстрый способ вычисления оценки корреляционной функции (27) на основе процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ). При этом обычно возрастают требования к размеру оперативной памяти.

Шаг 1. Центрируем исходные реализации (вычитаем из каждой свое среднее значение)

Шаг 2. Дополняем центрированные реализации нулями до ближайшей к удвоенной длине  $(2N)$  степени двойки, например было  $N = 100$ , а стало  $N = 256 = 2^8 > (2 * 100) = 200$ . Это требование метода расчета процедуры БПФ по основанию 2.

Шаг 3. Находим с помощью БПФ дискретные преобразования Фурье (ДПФ) обеих расширенных последовательностей:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad \text{и} \quad Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

!!! Используем именно БПФ, иначе ничего не выиграем, а только проиграем.

Шаг 4. Составляем новый комплексный массив :

$$\{Z(k) = X(k)Y^*(k)\}, k = 0, \dots, N-1$$

Шаг 5. Выполняем обратное преобразование Фурье с помощью БПФ

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

Шаг 6. Получаем оценку взаимной корреляционной функции :

$$\hat{K}_{xy}(m) = \begin{cases} |z(m)| & , \quad 0 \leq m < N/2 \\ |z(N - |m|)| & , \quad N/2 < m < N \end{cases} \quad (28)$$



### Взаимная спектральная плотность мощности

Взаимная спектральная плотность мощности двух стационарно-связанных случайных процессов определяется как Фурье преобразование от взаимной корреляционной функции:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{xy}(n) e^{-j\omega n} \quad (29).$$

Для ее оценивания используют два подхода:

- а) **корреляционный**, когда предварительно строят оценку (27), а потом с помощью обратного БПФ получают оценку спектральной плотности
- б) **периодограммный**, который применяется чаще и на котором мы остановимся.

Шаг 1. Расширяем исходные реализации вправо дополнением их среднего значения до ближайшей степени двойки. Т.е. было  $N = 100$ , а стало  $N = 128 = 2^7 > 100$ .

Шаг 2. Находим с помощью БПФ дискретные преобразования Фурье (ДПФ) обеих расширенных последовательностей:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{и} \quad Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Шаг 3. Формируем «несглаженную» оценку взаимной спектральной плотности

$$\overset{\sqcup}{G}_{\text{несгл}}(k) = X^*(k) \times Y(k)$$

Шаг 4. Формируем сглаженную оценку

$$\overset{\square}{G}_{\text{сгл}}(k) = \frac{1}{2L+1} \sum_{l=-L}^L G(k+l) \quad (30)$$

NB. На краях суммирование производится в предположении периодического продолжения области определения оценки  $G(k)$  по индексу  $k - [0, N-1]$ .

Шаг 5. Отображение.

Замечание 1. В силу свойств симметрии оценки  $\overset{\sqcup}{G}(k)$  достаточно отображать лишь первую половину отсчетов ( $k = 0, 1, 2, \dots, N/2$ ).

Замечание 2. Оценка  $\overset{\sqcup}{G}(k)$  - комплекснозначная, для отображения же нужны некие действительные функции. В системах обработки сигналов при проведении взаимного спектрального анализа обычно предоставляется возможность отображения следующих шести действительных функций:

1.  $C(k) = \text{Real}(\tilde{G}_{xy}(k))$  - т.н. “синфазная” составляющая спектра (реальная часть)
2.  $S(k) = \text{Imag}(\tilde{G}_{xy}(k))$  - “квадратурная” составляющая спектра (мнимая часть)
3.  $A(k) = |G_{xy}(k)|$  - модуль взаимного спектра
4.  $\Phi(k) = \arctg \left| \frac{\text{Imag}(G_{xy}(k))}{\text{Real}(G_{xy}(k))} \right|$  - фаза взаимного спектра

5.  $\Gamma(k) = \frac{|\tilde{G}_{xy}(k)|^2}{\tilde{G}_x(k)\tilde{G}_y(k)}$  - оценка функции когерентности
6.  $ACH(k) = \frac{|\tilde{G}_{xy}(k)|}{\tilde{G}_x(k)}$  - оценка амплитудно-частотной характеристики фильтра, преобразующего процесс  $X(n)$  в  $Y(n)$ .

Примечание: в последних двух случаях нужны сглаженные периодограммные оценки спектральных плотностей исходных процессов :

$$\hat{G}_x(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \right|^2$$

а затем проводится сглаживание с тем же параметром  $L$  (см. выше).

## Задания к л/р № 4

### I. Моделирование и графическое отображение типовых цифровых сигналов

Написать программу, генерирующую и отображающую в виде графика следующие дискретные сигналы :

- 1) задержанный единичный импульс

$$u_0(n - n_0) = \begin{cases} 0, & n \neq n_0 \\ 1, & n = n_0 \end{cases}, \quad (\text{параметр } n_0 - \text{задержка})$$

- 2) задержанный единичный скачок

$$u_{-1}(n) = \begin{cases} 0, & n < n_0 \\ 1, & n \geq n_0 \end{cases} \quad (\text{параметр } n_0 - \text{задержка})$$

- 3) дискретизированная убывающая экспонента

$$g(n) = a^n, \quad n \geq 0, \quad 0 < a < 1$$

- 4) дискретизированная синусоида с заданными амплитудой  $a$ , частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi$  :

$$g(n) = a \sin(n\omega + \varphi)$$

- 5) «меандр» (прямоугольная решетка) с периодом  $L$  :

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{mod}(n, L) < L/2 \\ -1, & \text{mod}(n, L) \geq L/2 \end{cases}$$

- 6) “пила” с периодом  $L$ :

$$g(n) = \frac{\text{mod}(n, L)}{L}$$

Цифровые сигналы, полученные дискретизацией с шагом  $\Delta = 1$  сек непрерывных по времени аналоговых сигналов  $x(t)$  :  $x(n) = x(t = n\Delta)$

- 7) сигнал с экспоненциальной огибающей - амплитудная модуляция

$$x(t) = a \exp(-t/\tau) \cos(\omega t + \varphi)$$

$a$  - амплитуда сигнала,  $\tau$  - параметр ширины огибающей,  $\omega$  - частота несущей,  $\varphi$  - начальная фаза несущей.

- 8) сигнал с балансной огибающей - амплитудная модуляция

$$x(t) = a \cos(ut) \cos(\omega t + \varphi)$$

$a$  - амплитуда сигнала,  $u$  - частота огибающей,  $\omega$  - частота несущей,  $\varphi$  - начальная фаза несущей.

- 9) сигнал с тональной огибающей. - амплитудная модуляция

$$x(t) = a(1 + m \cos(ut)) \cos(\omega t + \varphi)$$

$m$  - индекс глубины модуляции (изменяется от 0 до 1)

# *I. Цифровые сигналы – выборочные реализации стационарных случайных процессов*

10) сигнал белого шума, равномерно распределенного в интервале [a,b] :

$$g(n) \sim R(a, b)$$

11) сигнал белого шума, распределенного по нормальному закону с заданными средним  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$

$$g(n) \sim N(a, \sigma^2)$$

12) случайный сигнал авторегрессии-скользящего среднего порядка (p,q) – ARCC (p,q)

$$y(n) = x(n) + \sum_{i=1}^Q b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^P a_i y(n-i),$$

где  $x(n) \sim N(0, \sigma^2)$  - процесс белого шума с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

Проверить работоспособность на следующих моделях (везде полагать  $\sigma^2=1$ )

ARCC (2,0) ,  $a=\{0.68, 0.088\}$ ;

ARCC (2,0) ,  $a=\{1.656, -0.888\}$ ;

ARCC (2,0) ,  $a=\{1.944, -0.976\}$ ;

ARCC (2,0) ,  $a=\{-0.744, -0.96\}$ ;

ARCC (0,2) ,  $b=\{1.613, 0.787\}$ ;

ARCC (4,2) ,  $a=\{2.34, -2.733, 2.148, -0.863\}$ ;  $b=\{-1.12, 0.592\}$ ;

ARCC (6,3) ,  $a=\{4.167, -7.940, 9.397, -7.515, 3.752, -0.862\}$ ;  $b=\{-2.28, 1.77, -0.472\}$ ;

## *Примечания :*

- 1) процедуры моделирования сигналов оформить отдельными подпрограммами, в которые передавать первым входным параметром количество отсчетов в моделируемом сигнале  $N$ , последующими параметрами – параметры настройки конкретной модели; результат моделирования – вектор длины  $N - \{x(0), x(1), x(2), x(3), \dots, x(N-1)\}$ ;
- 2) интерфейс программы должен позволять свободно выбирать любую модель из предложенного списка, задавать ее параметры и длину выходной реализации ;
- 3) при отображение графиков сигналов предусмотреть возможность выбора пользователем двух базовых режимов: а) классическое отображения дискретных сигналов в виде последовательности вертикальных отрезков, длины которых пропорциональны значениям сигнала; б) отображение дискретного сигнала в виде ломаной кривой с линейной интерполяцией между соседними отсчетами.
- 4) предусмотреть возможность автомасштабирования графика сигнала в окне просмотра;
- 5) предусмотреть возможность сохранения модельных цифровых сигналов в файлы данных. Файл должен иметь расширение \*.dat

Все данные сохранять в текстовом режиме в соответствии со следующим соглашением:

1-я строка – тип сигнала (пока записывать 1 – признак действительного сигнала)

2-я строка – текстовая информация о данных в произвольной форме (может быть просто пустая строка)

3-я строка – а) количество каналов (в данной работе пока только 1 канал), б) количество отсчетов сигнала –  $N$ , в) частота дискретизации сигнала в Герцах (если нет явной информации о частоте дискретизации, то указывать нормированную частоту дискретизации - 1 Гц );

последующие  $N$  строк – отсчеты сигнала, в каждой записывается строке столько чисел, сколько каналов в сигнале (в данной работе – 1 число в строке)

**Пример:** файл *primer.dat* (тип 1, 5 отсчетов, 1 канал, частота дискретизации – 1 Гц)

```
1
задержанный единичный импульс, параметр задержки 3
1 5 1
0
0
0
1
0
```

## **II. Расчет элементарных статистик цифровых сигналов. Моделирование и графическое отображение типовых цифровых сигналов**

Реализовать процедуры расчета перечисленных в теоретическом обзоре элементарных статистик и применить их к анализу моделируемых в лабораторной работе цифровых сигналов, а также сигналов, считываемых из файлов данных описанного в предыдущем разделе формата.

## **III. Дискретное преобразование Фурье, и быстрое преобразование Фурье**

1. Написать функцию реализующую, вычисления ДПФ  $F(k)$  сигнала  $x(n)$  , заданного в  $N$  точках

$$DFT(x, F, N)$$

по формуле (13) и функцию ОДПФ:

$$IDFT(F, x, N)$$

по формуле (14)

Сформировать также функцию  $TotalDFT(x1, x2, N, ind)$ , выполняющую ДПФ при  $ind=0$  и ОДПФ при  $ind=1$ . (NB. Можно реализовать версии процедур с одним указателем на массив, в котором будет и входной сигнал и результат преобразования на выходе, например  $DFT(x, N, ind)$  . Не забывайте, что спектр Фурье – комплекснозначный, рекомендую сразу реализовать и использовать комплексный тип и для входного и для выходного массивов в процедурах )

2. Написать функцию  $FFT(x, N, ind)$ , реализующую алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ, или по-английски FFT - Fast Fourier Transform) для длин сигналов, кратных степени двойки. (NB. В папках `FFT_1` и `FFT_2` приведены два варианта реализации алгоритма БПФ на языке C для системы Borland C++ 3.1, разберитесь и используйте их, либо найдите где-либо другие реализации БПФ)
3. Написать процедуру для графического отображения коэффициентов ДПФ :  
предусмотреть варианты:

- а) отображение амплитудного  $|F(n)|$  и фазового спектра  $ArgF(n) = \arctan \frac{\text{Im } F(n)}{\text{Re } F(n)}$  сразу в двух окнах
- б) отображение отдельно амплитудного и фазового спектра

NB. Для амплитуды предусмотреть возможность отображения в логарифмическом масштабе:  $20\text{Log}_{10}|F(n)|$  и в обычном линейном

4. Проверить правильность работы процедур ДПФ двумя способами :
  - а) проводя прямое и обратное ДПФ какого-нибудь тестового сигнала (исходный сигнал должен быть точно восстановлен)
  - б) проводя анализ синусоидального сигнала известной частоты и амплитуды и наблюдая его амплитудный спектр
5. Придумать методику и сравнить с ее помощью быстродействие ваших процедур и «фирменной» процедуры БПФ. Сравнение провести для длительностей сигнала N, равных степени 2. (Можно, например, большое число раз выполнить ДПФ и ОДПФ некоего сигнала и сравнить суммарное затраченное на эти манипуляции время для случаев N=32, 64, 128, 256, 512, 1024)
6. Придумать и реализовать тесты, наглядно иллюстрирующие применение ДПФ для тригонометрической интерполяции сигнала (10) и спектра (16).
7. Оформить пользовательский интерфейс программы в виде : 1) выбор модели либо чтение сигнала из файла данных; 2) отображение анализируемого сигнала; 3) расчет + отображение спектральных характеристик сигнала – амплитуды и фазы спектра в различных видах.

#### IV. Корреляционно-спектральный анализ

8. Написать процедуру оценивания автокорреляционной функции стационарного случайного процесса с дискретным временем (случайной последовательности) по его реализации длительности N

`void x_corr(x,N,K,ind) ,`

где  $x(N)$  – входная реализация, N – ее длина, K – указатель на массив со значениями рассчитанной оценки корреляционной функции, ind – индикатор метода оценивания (1 – по прямой формуле (11'), по алгоритму “второго подхода” (18) с использованием БПФ)

9. Написать процедуру расчета сглаженной периодограммной оценки спектральной плотности мощности случайного процесса по его реализации длительности N

`void x_SPM(x,N,P,L) ,`

где  $x(N)$  – входная реализация, N – ее длина, P – указатель на массив со значениями рассчитанной периодограммной оценки СПМ Даньелла (формулы 17, 24) , L – полуширина сглаживающего спектрального окна.

10. Написать процедуру оценивания взаимной корреляционной функции двух стационарно-связанных случайных процессов с дискретным временем по их реализациям длительности  $N$

`void xy_corr(x,N1,y,N2,K,ind) ,`

где  $x(N1)$  – реализация процесса  $X$ ,  $N1$  – ее длина,  $y(N2)$  – реализация процесса  $Y$ ,  $N2$  – ее длина,  $K$  – указатель на массив со значениями рассчитанной оценки взаимной корреляционной функции,  $ind$  – индикатор метода оценивания (1 – по прямой формуле (27), 2 - по алгоритму с использованием БПФ, заканчивающемуся формулой (28))

11. Написать процедуру оценивания взаимной спектральной плотности мощности двух стационарно-связанных случайных процессов с дискретным временем по их реализациям длительности  $N$

`void xy_SPM (x,N1,y,N2,Pxy,L) ,`

где  $x(N1)$  – реализация процесса  $X$ ,  $N1$  – ее длина,  $y(N2)$  – реализация процесса  $Y$ ,  $N2$  – ее длина,  $Pxy$  – указатель на комплекснозначный массив со значениями рассчитанной оценки взаимной СПМ (использовать алгоритм (30)),  $L$  – полуширина сглаживающего окна.

12. Написать процедуру расчета шести действительных характеристик на базе комплекснозначной оценки взаимной спектральной плотности

`void SPM_to_Real (Pxy,Sxy,N,ind) ,`

где  $Pxy(N)$  – комплексный массив со значениями оценки взаимной СПМ,  $N$  – длина массива,  $Sxy(N)$  – вещественный массив с рассчитанной характеристикой,  $ind$  – индикатор типа рассчитываемой вещественной характеристики (1 -  $C(k)$ , 2 -  $S(k)$ , 3 -  $A(k)$ , 4 -  $\Phi(k)$ , 5 -  $\Gamma(k)$ , 6 -  $AЧХ(k)$ , ).

13. Оформить пользовательский интерфейс программы в виде : 1 - выбор одной или двух реализаций (путем моделирования либо выбора нужных фрагментов из файлов данных); уточнение параметров корреляционно-спектрального анализа, расчет и графическое отображение по требованию пользователя нужных оценок автокорреляционной функции и спектральной плотности мощности, либо одного из шести возможных видов отображения взаимной спектральной плотности.

14. Оформить отчет в виде файла формата Word.

### Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.:Мир,1978. -848с.
2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976 - 496 с.

3. <http://dsp-book.narod.ru/books.html>