

Тема: Использование и анализ информационных моделей (таблицы, диаграммы, графики).

Что проверяется:

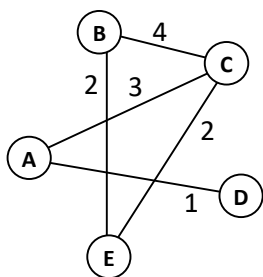
Умение представлять и считывать данные в разных типах информационных моделей (схемы, карты, таблицы, графики и формулы).

2.10. Модели и моделирование. Цели моделирования. Адекватность модели моделируемому объекту или процессу. Формализация прикладных задач. Представление результатов моделирования в виде, удобном для восприятия человеком. Графическое представление данных (схемы, таблицы, графики).

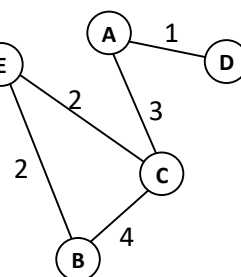
2.1. Умение использовать компьютерно-математические модели для анализа объектов и процессов: формулировать цель моделирования, выполнять анализ результатов, полученных в ходе моделирования; оценивать адекватность модели моделируемому объекту или процессу; представлять результаты моделирования в наглядном виде.

Что нужно знать:

- **граф** – это набор вершин и соединяющих их ребер; он описывается в виде таблицы (матрицы смежности или весовой матрицы)
- чаще всего используется **взвешенный граф**, где с каждым ребром связано некоторое число (вес), оно может обозначать, например, расстояние между городами или стоимость перевозки
- рассмотрим граф (рисунок слева), в котором 5 вершин (А, В, С, D и E); он описывается таблицей, расположенной в центре; в ней, например, число 4 на пересечении строки В и столбца С означает, что, во-первых, есть ребро, соединяющее В и С, и во-вторых, вес этого ребра равен 4; пустая клетка на пересечении строки А и столбца В означает, что ребра из А в В нет



	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

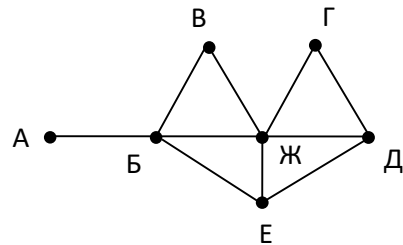


- обратите внимание, что граф по заданной таблице (она еще называется *весовой матрицей*) может быть нарисован по-разному; например, той же таблице соответствует граф, показанный на рисунке справа от нее
- в приведенном примере матрица симметрична относительно главной диагонали; это может означать, например, что стоимости перевозки из В в С и обратно равны (это не всегда так)
- во многих задачах вес – это длина дороги из одного пункта в другой; для рассмотренного примера длина дороги из А в С равна 3, дороги из А в Е нет
- **степень вершины** – это количество ребер, которые соединены с этой вершиной; при определении степени вершины по таблице нужно считать число непустых ячеек весовой матрицы в соответствующей строке (или столбце); в примере степень вершины А равна 2 (в первой строке две непустых ячейки со значениями 3 и 1)

Пример задания:

Р-10 (демо-2021). На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Г в пункт Ж. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

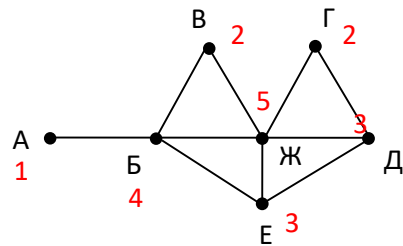
	1	2	3	4	5	6	7
1				9			7
2				5		11	
3						12	
4	9	5			4	13	15
5				4		10	8
6		11	12	13	10		
7	7			15	8		



Решение:

- определим для каждой вершины её степень, то есть, количество рёбер, в которых она связана; в таблице степень вершины – это количество заполненных клеток в строке (или в столбце)

		1	2	3	4	5	6	7
степень	2				9			7
2	2				5		11	
1	А						12	
5	Ж	9	5			4	13	15
3					4		10	8
4	Б		11	12	13	10		
3		7			15	8		



- сопоставление степеней вершин в таблице и на рисунке позволяет сразу обнаружить в таблице вершины А (она имеет № 3), Ж (№ 4) и Б (№ 6)
- нас интересуют вершины Г и Ж; вершину Ж мы нашли, вершина Г имеет степень 2 и связана, кроме вершины Ж, с вершиной Д степени 3;
- степень 2 имеют вершины № 1 и 2, но только вершина № 1 связана, кроме Ж, с вершиной степени 3 (№ 7), поэтому вершина № 1 – это Г
- по таблице определяем протяжённость дороги из пункта Г в пункт Ж, она равна 9.
- Ответ: 9.

Решение с помощью программы (PRO100-ЕГЭ):

- с помощью программы определяем соответствие между номерами вершин и их буквенными обозначениями:

```
from itertools import permutations
table = "14 17 24 26 36 41 42 45 46 47 54 56 57 62 63 64 65 71 74 75"
graph = "аб ба бв вб бж жб бе еб вж жв еж же ед де жг гж жд дж гд дг"
for per in permutations("абвгдеж"):
    new_graph = table
    for i in range(1,8):
        new_graph = new_graph.replace( str(i), per[i-1] )
    if set(graph.split()) == set(new_graph.split()):
        print( *enumerate(per, start=1) )
```

Результат работы программы:

(1, 'г') (2, 'в') (3, 'а') (4, 'ж') (5, 'е') (6, 'б') (7, 'д')

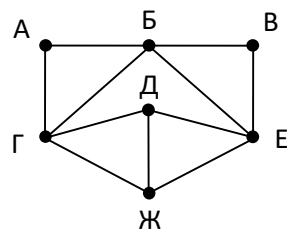
это значит, что вершина Г имеет номер 1, а вершина Ж – номер 4.

- находим значение на пересечении строки 1 и столбца 4 – там стоит число 9.
- Ответ: 9.

Ещё пример задания:

Р-09. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. **Известно, что длина кратчайшего пути из пункта А в пункт Ж не больше 15.** Определите, какова длина кратчайшего пути из пункта Д в пункт В. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		11	7	5			12
П2	11				13	8	14
П3	7			15		10	
П4	5		15			9	
П5		13				6	
П6		8	10	9	6		
П7	12	14					



Решение:

- сложность этой задачи в том, что схема симметрична; легко понять, что без дополнительных данных (используя только **степени вершин** – количество связанных с ними ребёр) мы не сможем различить вершины А и В, Г и Е, Д и Ж
- определим степени вершин:

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	
Г, Е	П1	11	7	5			12	4
Б	П2	11			13	8	14	4
Д, Ж	П3	7		15		10		3
Д, Ж	П4	5		15		9		3
А, В	П5		13			6		2
Г, Е	П6		8	10	9	6		4
А, В	П7	12	14					2

- как и видно из рисунка, у нас две вершины степени 2 (А и В), две вершины степени 3 (Д и Ж) и три вершины степени 4 (Б, Г и Е), причем вершина Б однозначно определяется как вершина степени 4, которая связана с двумя вершинами степени 2
- для того, чтобы различить оставшиеся вершины, определим длины путей ЖГА, ЖЕВ, ДГА и ДЕВ; мы не знаем, где какой маршрут, но точно знаем, что эти четыре маршрута

$$\begin{aligned} \text{П3} \rightarrow \text{П1} \rightarrow \text{П7} &= 7 + 12 = 19 \\ \text{П3} \rightarrow \text{П6} \rightarrow \text{П5} &= 10 + 6 = 16 \\ \text{П4} \rightarrow \text{П1} \rightarrow \text{П7} &= 5 + 12 = 17 \\ \text{П4} \rightarrow \text{П6} \rightarrow \text{П5} &= 9 + 6 = 15 \end{aligned}$$
- из дополнительного условия (**Известно, что длина кратчайшего пути из пункта А в пункт Ж не больше 15.**) находим, что маршрут ЖГА – последний, так что П4 = Ж, П6 = Г и П5 = А; в итоге получается

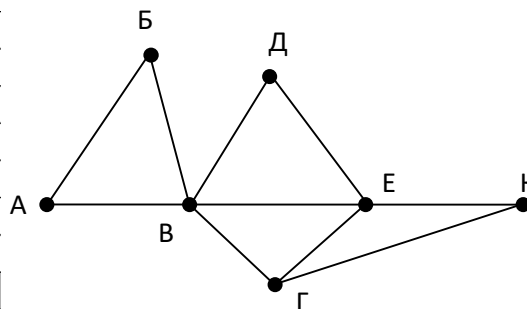
	Е	Б	Д	Ж	А	Г	В
Е		11	7	5			12
Б	11				13	8	14
Д	7			15		10	
Ж	5		15			9	
А		13				6	
Г		8	10	9	6		
В	12	14					

- 6) кратчайший путь из Д в В можно найти с помощью дерева возможных маршрутов – это будет путь ДЕВ длиной 19
- 7) Ответ: **19**.

Ещё пример задания:

Р-08. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта В в пункт Е. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

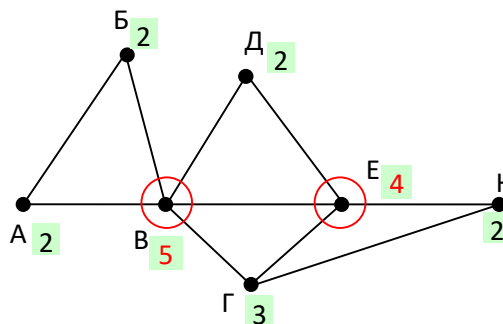
	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	



Решение:

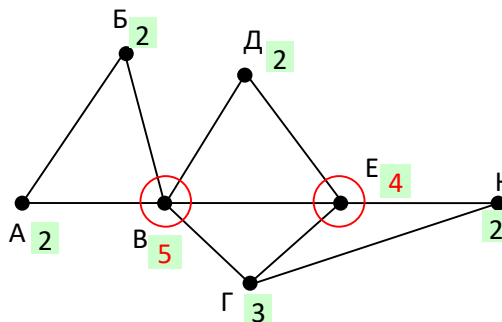
- для того чтобы определить нужные нам вершины В и Е в весовой матрице, легче всего подсчитать степени вершин, то есть для каждой вершины найти количество рёбер, с которыми она связана (петля – ребро, которое соединяет вершину саму с собой, как кольцевая дорога, считается дважды)
- в весовой матрице степень вершины – это количество непустых клеток в соответствующей строке (показаны справа от таблицы на жёлтом фоне), а для изображения графа- количество пересечений небольшой окружности, проведённой около вершины, со всеми рёбрами:

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	
П1		45		10				2
П2	45			40		55		3
П3					15	60		2
П4	10	40				20	35	4
П5			15			55		2
П6		55	60	20	55		45	5
П7				35		45		2



- по изображению графа находим, что вершина В имеет степень 5, а вершина Е – степень 4
- в таблице есть ровно одна вершина, степень которой 5 (это П6) и одна вершина, степень которой – 4 (П4), их соединяет ребро длиной 20 (эти ячейки выделены в весовой матрице фиолетовым фоном).
- Ответ: **20**.
- Бонус: попытаемся теперь определить, как обозначены остальные вершины в таблице. Каждая из вершин Д (степени 2) и Г (степени 3) соединена с уже известными вершинами В и Е, по таблице находим, что вершина Д – это П7, а вершина Г – это П2. Тогда вершина К соединяется с Е (П4) и Г (П2), то есть К – это П1. А вот различить вершины А и Б по этим данным не удаётся.

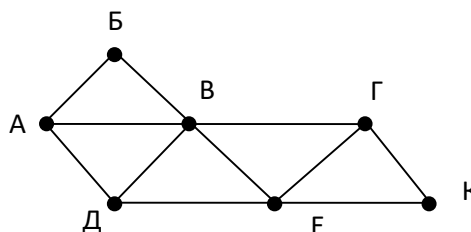
	К	Г	А/Б	Е	А/Б	В	Д	
К		45		10				2
Г	45			40		55		3
А/Б					15	60		2
Е	10	40				20	35	4
А/Б			15			55		2
В		55	60	20	55		45	5
Д				35		45		2



Ещё пример задания:

Р-07. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта А в пункт Д. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

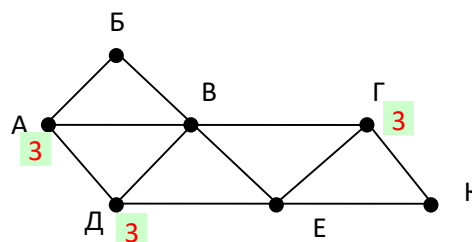
	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1			30		25		18
П2			17	12			
П3	30	17		23		34	15
П4		12	23			46	
П5	25						37
П6			34	46			18
П7	18		15		37	18	



Решение:

- 1) определим степени вершин по весовой матрице и по изображению графа (как в предыдущей задаче):

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	
П1			30		25		18	3
П2			17	12				2
П3	30	17		23		34	15	5
П4		12	23			46		3
П5	25						37	2
П6			34	46			18	3
П7	18		15		37	18		4



- 2) по изображению графа находим, что обе интересующих нас вершины, А и Д, имеют степени 3; кроме того, степень 3 имеет ещё и вершина Г
- 3) в таблице тоже есть три вершины со степенью 3 (это П1, П4 и П6), но вершина П1 (это вершина Г на рисунке!) не имеет общих ребёр с вершинами П4 и П6 (а это А и Д!);
- 4) таким образом, ответ – это длина ребра между вершинами П4 и П6 (эти ячейки выделены в весовой матрице фиолетовым фоном).
- 5) Ответ: **46**.
- 6) Бонус: вершины В и Е, имеющие степени 5 и 4, это П3 и П7; с вершиной Г (П1) связана ещё вершина К, имеющая степень 2 – это П5; с Е связана ещё вершина Д – это П6; тогда П4 – это А, а П2 – это Б.

	Г	Б	В	А	К	Д	Е	
Г			30		25		18	3
Б			17	12				2
В	30	17		23		34	15	5
А		12	23			46		3
К	25						37	2
Д			34	46			18	3
Е	18		15		37	18		4

