**Тема**: Использование и анализ информационных моделей (таблицы, диаграммы, графики).

**Что проверяется**:

Умение представлять и считывать данные в разных типах информационных моделей (схемы,

карты, таблицы, графики и формулы).

*2.10.* *Модели и моделирование. Цели моделирования. Адекватность модели моделируемому объекту или процессу. Формализация прикладных задач. Представление результатов моделирования в виде, удобном для восприятия человеком. Графическое представление данных (схемы, таблицы, графики.*

*2.1. Умение использовать компьютерно-математические модели для анализа объектов и процессов: формулировать цель моделирования, выполнять анализ результатов, полученных в ходе моделирования; оценивать адекватность модели моделируемому объекту или процессу; представлять результаты моделирования в наглядном виде.*

**Что нужно знать**:

* **граф** – это набор вершин и соединяющих их ребер; он описывается в виде таблицы (матрицы смежности или весовой матрицы)
* чаще всего используется **взвешенный граф**, где с каждым ребром связано некоторое число (вес), оно может обозначать, например, расстояние между городами или стоимость перевозки
* рассмотрим граф (рисунок слева), в котором 5 вершин (A, B, C, D и E); он описывается таблицей, расположенной в центре; в ней, например, число 4 на пересечении строки В и столбца С означает, что, во-первых, есть ребро, соединяющее В и С, и во-вторых, вес этого ребра равен 4; пустая клетка на пересечении строки А и столбца В означает, что ребра из А в В нет

1

2

4

2

3

1

2

4

2

3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | Е |
| A |  |  | 3 | 1 |  |
| B |  |  | 4 |  | 2 |
| C | 3 | 4 |  |  | 2 |
| D | 1 |  |  |  |  |
| Е |  | 2 | 2 |  |  |

* обратите внимание, что граф по заданной таблице (она еще называется *весовой матрицей*) может быть нарисован по-разному; например, той же таблице соответствует граф, показанный на рисунке справа от нее
* в приведенном примере матрица симметрична относительно главной диагонали; это может означать, например, что стоимости перевозки из В в С и обратно равны (это не всегда так)
* во многих задачах вес – это длина дороги из одного пункта в другой; для рассмотренного примера длина дороги из А в С равна 3, дороги из А в Е нет
* **степень вершины** – это количество рёбер, которые соединены с этой вершиной; при определении степени вершины по таблице нужно считать число непустых ячеек весовой матрицы в соответствующей строке (или столбце); в примере степень вершины А равна 2 (в первой строке две непустых ячейки со значениями 3 и 1)

### Пример задания:

**Р-10 (демо-2021).** *На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Г в пункт Ж. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 |  |  |  | 9 |  |  | 7 |
| 2 |  |  |  | 5 |  | 11 |  |
| 3 |  |  |  |  |  | 12 |  |
| 4 | 9 | 5 |  |  | 4 | 13 | 15 |
| 5 |  |  |  | 4 |  | 10 | 8 |
| 6 |  | 11 | 12 | 13 | 10 |  |  |
| 7 | 7 |  |  | 15 | 8 |  |  |

В

А

Е

Д

Г

Ж

Б

**Решение:**

1. определим для каждой вершины её степень, то есть, количество рёбер, в которыми она связана; в таблице степень вершины – это количество заполненных клеток в строке (или в столбце)

3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | А | Ж |  | Б |  |
| степень |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 |  | 1 |  |  |  | 9 |  |  | 7 |
| 2 |  | 2 |  |  |  | 5 |  | 11 |  |
| 1 | A | 3 |  |  |  |  |  | 12 |  |
| 5 | Ж | 4 | 9 | 5 |  |  | 4 | 13 | 15 |
| 3 |  | 5 |  |  |  | 4 |  | 10 | 8 |
| 4 | Б | 6 |  | 11 | 12 | 13 | 10 |  |  |
| 3 |  | 7 | 7 |  |  | 15 | 8 |  |  |

В

А

Е

Д

Г

Ж

Б

1

4

2

2

5

3

1. сопоставление степеней вершин в таблице и на рисунке позволяет сразу обнаружить в таблице вершины А (она имеет № 3), Ж (№ 4) и Б (№ 6)
2. нас интересуют вершины Г и Ж; вершину Ж мы нашли, вершина Г имеет степень 2 и связана, кроме вершины Ж, с вершиной Д степени 3;
3. степень 2 имеют вершины № 1 и 2, но только вершина № 1 связана, кроме Ж, с вершиной степени 3 (№ 7), поэтому вершина № 1 – это Г
4. по таблице определяем протяжённость дороги из пункта Г в пункт Ж, она равна 9.
5. Ответ: 9.

**Решение с помощью программы (PRO100-ЕГЭ):**

1. с помощью программу определяем соответствие между номерами вершин и их буквенными обозначениями:

from itertools import permutations

table = "14 17 24 26 36 41 42 45 46 47 54 56 57 62 63 64 65 71 74 75"

graph = "аб ба бв вб бж жб бе еб вж жв еж же ед де жг гж жд дж гд дг"

for per in permutations("абвгдеж"):

new\_graph = table

for i in range(1,8):

new\_graph = new\_graph.replace( str(i), per[i-1] )

if set(graph.split()) == set(new\_graph.split()):

print( \*enumerate(per, start=1) )

Результат работы программы:

(1, 'г') (2, 'в') (3, 'а') (4, 'ж') (5, 'е') (6, 'б') (7, 'д')

это значит, что вершина Г имеет номер 1, а вершина Ж – номер 4.

1. находим значение на пересечении строки 1 и столбца 4 – там стоит число 9.
2. Ответ: 9.

### Ещё пример задания:

**Р-09.** *На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе.* ***Известно, что длина кратчайшего пути из пункта А в пункт Ж не больше 15.*** *Определите, какова длина кратчайшего пути из пункта Д в пункт В. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 |
| П1 |  | 11 | 7 | 5 |  |  | 12 |
| П2 | 11 |  |  |  | 13 | 8 | 14 |
| П3 | 7 |  |  | 15 |  | 10 |  |
| П4 | 5 |  | 15 |  |  | 9 |  |
| П5 |  | 13 |  |  |  | 6 |  |
| П6 |  | 8 | 10 | 9 | 6 |  |  |
| П7 | 12 | 14 |  |  |  |  |  |

В

А

Е

Д

Г

Ж

Б

**Решение:**

1. сложность этой задачи в том, что схема симметрична; легко понять, что без дополнительных данных (используя только **степени вершин** – количество связанных с ними ребёр) мы не сможем различить вершины А и В, Г и Е, Д и Ж
2. определим степени вершин:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 |  |
| Г, Е | П1 |  | 11 | 7 | 5 |  |  | 12 | 4 |
| Б | П2 | 11 |  |  |  | 13 | 8 | 14 | 4 |
| Д, Ж | П3 | 7 |  |  | 15 |  | 10 |  | 3 |
| Д, Ж | П4 | 5 |  | 15 |  |  | 9 |  | 3 |
| А, В | П5 |  | 13 |  |  |  | 6 |  | 2 |
| Г, Е | П6 |  | 8 | 10 | 9 | 6 |  |  | 4 |
| А, В | П7 | 12 | 14 |  |  |  |  |  | 2 |

1. как и видно из рисунка, у нас две вершины степени 2 (А и В), две вершины степени 3 (Д и Ж) и три вершины степени 4 (Б, Г и Е), причем вершина Б однозначно определяется как вершина степени 4, которая связана с двумя вершинами степени 2
2. для того, чтобы различить оставшиеся вершины, определим длины путей ЖГА, ЖЕВ, ДГА и ДЕВ; мы не знаем, где какой маршрут, но точно знаем, что эти четыре маршрута

П3 → П1 → П7 = 7 + 12 = 19

П3 → П6 → П5 = 10 + 6 = 16

П4 → П1 → П7 = 5 + 12 = 17

П4 → П6 → П5 = 9 + 6 = 15

1. из дополнительного условия (***Известно, что длина кратчайшего пути из пункта А в пункт Ж не больше 15.***) находим, что маршрут ЖГА – последний, так что П4 = Ж, П6 = Г и П5 = А; в итоге получается

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Е | Б | Д | Ж | А | Г | В |
| Е |  | 11 | 7 | 5 |  |  | 12 |
| Б | 11 |  |  |  | 13 | 8 | 14 |
| Д | 7 |  |  | 15 |  | 10 |  |
| Ж | 5 |  | 15 |  |  | 9 |  |
| А |  | 13 |  |  |  | 6 |  |
| Г |  | 8 | 10 | 9 | 6 |  |  |
| В | 12 | 14 |  |  |  |  |  |

1. кратчайший путь из Д в В можно найти с помощью дерева возможных маршрутов – это будет путь ДЕВ длиной 19
2. Ответ: 19.

### Ещё пример задания:

**Р-08.** *На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта В в пункт Е. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 |
| П1 |  | 45 |  | 10 |  |  |  |
| П2 | 45 |  |  | 40 |  | 55 |  |
| П3 |  |  |  |  | 15 | 60 |  |
| П4 | 10 | 40 |  |  |  | 20 | 35 |
| П5 |  |  | 15 |  |  | 55 |  |
| П6 |  | 55 | 60 | 20 | 55 |  | 45 |
| П7 |  |  |  | 35 |  | 45 |  |

А

Б

В

Г

Д

Е

К

**Решение:**

1. для того чтобы определить нужные нам вершины В и Е в весовой матрице, легче всего подсчитать степени вершин, то есть для каждой вершины найти количество рёбер, с которыми она связана (петля – ребро, которое соединяет вершину саму с собой, как кольцевая дорога, считается дважды)
2. в весовой матрице степень вершины – это количество непустых клеток в соответствующей строке (показаны справа от таблицы на жёлтом фоне), а для изображения графа- количество пересечений небольшой окружности, проведённой около вершины, со всеми рёбрами:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 |  |
| П1 |  | 45 |  | 10 |  |  |  | 2 |
| П2 | 45 |  |  | 40 |  | 55 |  | 3 |
| П3 |  |  |  |  | 15 | 60 |  | 2 |
| П4 | 10 | 40 |  |  |  | 20 | 35 | 4 |
| П5 |  |  | 15 |  |  | 55 |  | 2 |
| П6 |  | 55 | 60 | 20 | 55 |  | 45 | 5 |
| П7 |  |  |  | 35 |  | 45 |  | 2 |

А

Б

В

Г

Д

Е

К

4

5

2

2

2

3

2

1. по изображению графа находим, что вершина В имеет степень 5, а вершина Е – степень 4
2. в таблице есть ровно одна вершина, степень которой 5 (это П6) и одна вершина, степень которой – 4 (П4), их соединяет ребро длиной 20 (эти ячейки выделены в весовой матрице фиолетовым фоном).
3. Ответ: 20.
4. Бонус: попытаемся теперь определить, как обозначены остальные вершины в таблице. Каждая из вершин Д (степени 2) и Г (степени 3) соединена с уже известными вершинами В и Е, по таблице находим, что вершина Д – это П7, а вершина Г – это П2. Тогда вершина К соединяется с Е (П4) и Г (П2), то есть К – это П1. А вот различить вершины А и Б по этим данным не удаётся.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | К | Г | А/Б | е | А/Б | В | д |  |
| К |  | 45 |  | 10 |  |  |  | 2 |
| Г | 45 |  |  | 40 |  | 55 |  | 3 |
| А/Б |  |  |  |  | 15 | 60 |  | 2 |
| Е | 10 | 40 |  |  |  | 20 | 35 | 4 |
| А/Б |  |  | 15 |  |  | 55 |  | 2 |
| В |  | 55 | 60 | 20 | 55 |  | 45 | 5 |
| Д |  |  |  | 35 |  | 45 |  | 2 |

А

Б

В

Г

Д

Е

К

4

5

2

2

2

3

2

### Ещё пример задания:

**Р-07.** *На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта А в пункт Д. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 |
| П1 |  |  | 30 |  | 25 |  | 18 |
| П2 |  |  | 17 | 12 |  |  |  |
| П3 | 30 | 17 |  | 23 |  | 34 | 15 |
| П4 |  | 12 | 23 |  |  | 46 |  |
| П5 | 25 |  |  |  |  |  | 37 |
| П6 |  |  | 34 | 46 |  |  | 18 |
| П7 | 18 |  | 15 |  | 37 | 18 |  |

А

Б

В

Г

Д

Е

К

**Решение:**

1. определим степени вершин по весовой матрице и по изображению графа (как в предыдущей задаче):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 | П5 | П6 | П7 |  |
| П1 |  |  | 30 |  | 25 |  | 18 | 3 |
| П2 |  |  | 17 | 12 |  |  |  | 2 |
| П3 | 30 | 17 |  | 23 |  | 34 | 15 | 5 |
| П4 |  | 12 | 23 |  |  | 46 |  | 3 |
| П5 | 25 |  |  |  |  |  | 37 | 2 |
| П6 |  |  | 34 | 46 |  |  | 18 | 3 |
| П7 | 18 |  | 15 |  | 37 | 18 |  | 4 |

А

Б

В

Г

Д

Е

К

3

3

3

1. по изображению графа находим, что обе интересующих нас вершины, А и Д, имеют степени 3; кроме того, степень 3 имеет еще и вершина Г
2. в таблице тоже есть три вершины со степенью 3 (это П1, П4 и П6), но вершина П1 (это вершина Г на рисунке!) не имеет общих ребёр с вершинами П4 и П6 (а это А и Д!);
3. таким образом, ответ – это длина ребра между вершинами П4 и П6 (эти ячейки выделены в весовой матрице фиолетовым фоном).
4. Ответ: 46.
5. Бонус: вершины В и Е, имеющие степени 5 и 4, это П3 и П7; с вершиной Г (П1) связана ещё вершина К, имеющая степень 2 – это П5; с Е связана ещё вершина Д – это П6; тогда П4 – это А, а П2 – это Б.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Г | Б | В | А | К | Д | Е |  |
| Г |  |  | 30 |  | 25 |  | 18 | 3 |
| Б |  |  | 17 | 12 |  |  |  | 2 |
| В | 30 | 17 |  | 23 |  | 34 | 15 | 5 |
| А |  | 12 | 23 |  |  | 46 |  | 3 |
| К | 25 |  |  |  |  |  | 37 | 2 |
| Д |  |  | 34 | 46 |  |  | 18 | 3 |
| Е | 18 |  | 15 |  | 37 | 18 |  | 4 |

А

Б

В

Г

Д

Е

К

3

3

3