Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Гимназия
Новый Уренгой

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА
ФПМИ – СЕКЦИЯ ИНФОРМАТИКИ

# Создание постквантового протокола KEM на LWR

Исполнитель:
Учащийся 10 класса Брылёв Альберт
Руководитель работы:
Оборин Дмитрий Евгеньевич

*г. Новый Уренгой 2025*

# РЕФЕРАТ

ПОСТКВАНТОВАЯ КРИПТОГРАФИЯ, КЕМ, РЕШЁТКИ, КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ, БЕЗОПАСНОСТЬ ДАННЫХ

Цель работы: Разработка постквантового криптографического протокола КЕМ на основе решёток.

В работе проведён обзор современных алгоритмов (Kyber, ML-KEM), изучены математические основы решёточной криптографии, рассмотрены угрозы квантовых вычислений.
Результат включает выбор инструментов для реализации прототипа протокола и его теоретическое обоснование.
Работа актуальна для обеспечения цифрового суверенитета и защиты данных в условиях развития квантовых технологий.

## Содержание

# 1. Термины, определения и сокращения

- KEM (Key Encapsulation Mechanism) — механизм инкапсуляции ключей, используемый для безопасной передачи криптографических ключей между участниками коммуникации.

- Кубит — квантовый бит, основная единица информации в квантовых вычислениях, которая может находиться в суперпозиции состояний.

- NIST (National Institute of Standards and Technology) — Национальный институт стандартов и технологий США, занимающийся стандартизацией в области криптографии.

- FIPS (Federal Information Processing Standards) — федеральные стандарты обработки информации, разрабатываемые NIST.

- ML-KEM (Module Lattice Key Encapsulation Mechanism) — механизм инкапсуляции ключей на основе модульных решёток, стандартизированный как FIPS 203.

- ML-DSA (Module Lattice Digital Signature Algorithm) — алгоритм цифровой подписи на основе модульных решёток, стандартизированный как FIPS 204.

- SLH-DSA (Stateless Hash-Based Digital Signature Algorithm) — алгоритм цифровой подписи на основе хэш-функций, стандартизированный как FIPS 205.

- LWE (Learning With Errors) — задача обучения с ошибками, используемая в криптографии на решётках.

- Module-LWE — модульная версия задачи LWE, используемая в протоколе Kyber.

- SVP (Shortest Vector Problem) — задача нахождения кратчайшего вектора в решётке.

- CVP (Closest Vector Problem) — задача нахождения ближайшего вектора в решётке.

- Центроцентрически симметричные распределение – распределение, у которого плотность вероятности симметрична относительно центральной точки (математического ожидания).

- Алгоритм Шора — квантовый алгоритм для факторизации чисел и решения задачи дискретного логарифма.

- Алгоритм Гровера — квантовый алгоритм для ускорения перебора в задачах поиска.

- QFT (Quantum Fourier Transform) — квантовое преобразование Фурье, используемое в алгоритме Шора.

- MPC-in-the-head — криптографический метод, используемый в протоколе Picnic.

- NTT (Number Theoretic Transform) — числовое теоретическое преобразование, используемое для оптимизации умножения многочленов.

- $R_q = Z_q[X]/(X^n + 1)$ — кольцо многочленов, используемое в протоколе Kyber.

- ECC (Elliptic Curve Cryptography) — криптография на эллиптических кривых.

- Pybind11 — библиотека для связывания C++ и Python.

- NumPy — библиотека для работы с массивами и матрицами в Python.

- SymPy — библиотека для символьных вычислений в Python.

- Git — система контроля версий.

- GitHub — платформа для хостинга кода и совместной работы.

- venv — инструмент для создания виртуальных окружений в Python.

- cProfile — модуль для профилирования производительности в Python.

- IDE (Integrated Development Environment) — интегрированная среда разработки.

- PyCharm — IDE для разработки на Python.

## 2. Выбор, обоснование и актуальность

На сегодняшний день криптографические протоколы обеспечивают безопасность передаваемой информации за счёт сложности современных алгоритмов шифрования. Однако, с появлением квантовых компьютеров ситуация может кардинально измениться. В настоящее время данные могут быть перехвачены, но расшифровать их без знания секретного ключа практически невозможно. При этом, как только квантовые компьютеры достигнут мощности в 3–4 тысячи кубит, они смогут эффективно взламывать существующие криптографические алгоритмы.

К примеру, по расчетам экспертов, RSA-2048 может быть успешно атакован квантовым компьютером, обладающим около 4000 кубит. Уже сегодня создан квантовый компьютер с 1000 кубитами. Предполагается, что к 2030 году появятся машины с необходимой мощностью для решения подобных задач.

Стоит также отметить недавние достижения компаний, таких как Google, которые разработали технологию компактных квантовых компьютеров, способных разместить 105 кубит на плате размером 4×4 см. Классические схемы обычно занимают десятки квадратных метров и высотой около 4х метром. Такой технологический скачок может ускорить развитие квантовых вычислений ещё больше, что в свою очередь подчеркивает необходимость своевременного перехода на постквантовые криптографические протоколы.

Почему нельзя откладывать разработку новых систем шифрования? Если ждать дальнейшего развития квантовых технологий, может наступить момент, когда будут недостаточно времени и ресурсов для создания и внедрения новых протоколов. Стандартизация первых постквантовых протоколов уже заняла около 6 лет (2016–2022), и в условиях стремительно меняющейся технологической среды задержки могут привести к тому, что обмен информацией останется уязвимым до тех пор, пока не будут разработаны и приняты новые стандарты безопасности.

Так же есть опасность «получи сейчас — расшифруй потом». То есть, злоумышленники могут перехватить информацию сейчас, а расшифровать потом. Это крайне опасно для государственной безопасности.

Переход на постквантовую криптографию является не только актуальной, но и крайне необходимой мерой для обеспечения безопасности данных в условиях стремительного развития квантовых вычислительных технологий, особенно в государственных и критически важных секторах.

## 3. Цели и задачи

Цель: разработка, анализ и реализация постквантового криптографического протокола типа KEM (Key Encapsulation Mechanism). В рамках работы предполагается:

1. **Исследование протоколов и математических основ:**
   Анализ существующих протоколов и их математических основ. Выбор оптимального метода шифрования и его глубокое изучение для последующей реализации.
2. **Исследование алгоритмов взлома и защиты от них:**
   Анализ существующих алгоритмов взлома, их потенциал и возможные опасности. Как протоколы защищаются от них.
3. **Разработка эффективного механизма инкапсуляции ключей:**
   Разработка математических основ протокола KEM, который обеспечит надёжный обмен ключами, позволяя безопасно передавать криптографические ключи между участниками коммуникации.
4. **Практическая реализация и оценка протокола**
   Реализация прототипа предложенного решения с последующим проведением тестирования на устойчивость к атакам, а также сравнительный анализ с существующими постквантовыми решениями, такими как Kyber или Saber. Оценка будет проводиться по критериям, подобных NIST: безопасность, скорость и возможность внедрения.

Реализация протокола позволит не только повысить устойчивость обмена ключами, но и обеспечить практическую возможность перехода на постквантовые методы шифрования в государственных, коммерческих и других критически важных сферах.

# 4. Анализ современных протоколов

Для начала нужно разобраться с существующими протоколами.
На данный момент стандартизацией постквантовых протоколов занимается NIST, с 2016 года.
В 2022 году был проведён 3й раунд. Рассмотрим финалистов:
Для стандартизации были выбраны 4 протокола и 3 новых стандарта:

**Crystals-Kyber** (KEM на решётках) → **FIPS 203 — ML-KEM**

**Crystals-Dilithium** (подпись на решётках) → **FIPS 204 — ML-DSA**

**Falcon** (подпись на решётках)

**SPHINCS+** (подпись на хэш-деревьях) → **FIPS 205 — SLH-DSA**

Все сравнения будут проходить с эталонами в своих категориях.
Конец третьего раунда:

- KEM:
  - Финалисты
    - Kyber (решётки) — эталон
    - NTRU (решётки) — медленней, не прошёл дальше
    - Saber (решётки) — проблема с доказательством, не прошёл дальше
    - Classic McEliece (коды) — безопасней, но медленней
  - Альтернативы
    - FrodoKEM (решётки) — медленней, не прошёл дальше
    - BIKE (коды) — быстрей, менее безопасный
    - HQC (коды) — немного уступает по безопасности и скорости
    - NTRUPrime (решётки) — медленней, не прошёл дальше
    - SIKE (изогении) — был взломан, не прошёл дальше
- Подписи
  - Финалисты
    - Dilithium (решётки) — эталон
    - Falcon (решётки) — эталон
    - Rainbow (многочлены) — был взломан, дальше не прошёл
  - Альтернативы
    - GeMSS (многочлены) — был взломан, дальше не прошёл
    - Picnic (MPC-in-the-head) — проблема с доказательством, не прошёл
    - SPHINCS+ (хэши) - эталон

## Российские постквантовые протоколы

На данный момент у нас есть два сильных протокола:

- Шиповник — подпись на кодах
- Гиперикум — подпись на хэшах

Их разработка и стандартизация в рамках Технического комитета о стандартизации «Криптографическая защита информации» (ТК 26) Госстандарт.
Они активно внедряются в различные сферы и сотрудничают со множеством компаний, например МЦСТ (разработчик процессоров «Эльбрус»).

И есть 2 разрабатываемых KEM

- Кодиеум – коды, исправляющие ошибки
  - Пока открытый ключ занимает сотни килобайт, а время генерации ключа в сотни раз превышает существующие аналоги
- KEM на основе решёток
  - Разработка на ранней стадии, пока нет даже названия

## 5. Изучение математических методов шифрования

По порядку разберём основные направления:

### **Методы шифрования на изогениях**

Основная концепция:

- Используются эллиптические кривые и изогении между ними.
- Задача состоит в нахождении изогении между двумя заданными эллиптическими кривыми A и B.
- Основное преимущество метода: вычислительная сложность нахождения изогении при известных кривых.

Задача, лежащая в основе

- Поиск изогении (Isogeny problem):
- Даны две эллиптические кривые A и B.
- Необходимо найти изогению $\phi : A \rightarrow B$, которая является сложной задачей.

Основные работы:

- Схема Ростовцева и Столбунова
- Схема Куввеня
- Схема SIDH

SIDH уже взломана, но используется основой в данной категории криптографии.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "\phi_B"'] & E/\langle S_A \rangle \arrow[d, "\phi'_B"] \\ E/\langle S_B \rangle \arrow[r, "\phi'_A"] & E/\langle S_A, S_B \rangle \end{tikzcd}$$

SIDH

Эллиптическая кривая – гладка алгебраическая кривая, заданная уравнением

Где a и b – коэффициенты, удовлетворяющие условию

Эллиптические кривые обладают групповой структурой, то есть на них можно определить операцию сложения точек, которая удовлетворяют условию группы.

Изогении – специальный вид отображения между двумя эллиптическими кривыми, которое является гомоморфизмом групп и сохраняет структуру кривых, то есть это морфизм эллиптических кривых, который переводит нейтральный элемент (бесконечно удалённую точку) одной кривой в нейтральный элемент другой кривой.

# Методы шифрования на кодах, исправляющих ошибки

При использовании помехоустойчивого кодирования мы изменяем или добавляем данные к сообщению таким образом, чтобы оно стало устойчивым к ошибкам в канале связи. Это позволяет получателю восстановить исходное сообщение, несмотря на помехи.

Проблема декодирования случайного кода:

- Структура кодов:

Коды строятся на основе определенной структуры, что позволяет корректно их декодировать.

- Случайная генерация:

Если код сгенерирован случайно, его декодирование становится невозможным, так как отсутствуют правила для его расшифровки.

Применение в криптографии:

Сообщение маскируется под случайно сгенерированный код, к которому добавляется специально созданная ошибка. Это делает расшифровку невозможной для злоумышленника, так как:

- Отсутствует структура: злоумышленник не может определить схему декодирования.
- Добавленная ошибка: усложняет процесс расшифровки.

Криптосистема Мак-Элиса использует помехоустойчивые коды для шифрования. Сообщение кодируется через порождающую матрицу $G' = SGP$, где:

- $G$ — порождающая матрица.
- $S$ и $P$ — матрицы для добавления "шума".

Зашифрованное сообщение (шифротекст) $c$ формируется как: $c = mG' + e$
где $e$ — вектор ошибки.
Основные работы:

- Криптосхема Мак-Элиса
- Криптосхема Нидеррайтера
- ID-схема Штерна

Криптосистема Мак-Элиса

# Методы шифрования на многочленах

1. Основная идея:
   - В основе криптографических схем лежат многочлены от многих переменных с коэффициентами из конечных полей.
   - Используются нелинейные системы уравнений, решение которых является вычислительно сложной задачей.

2. Сложные задачи в основе:
   - Задача MQ (Multivariate Quadratic problem):
   - Найти решение для системы квадратичных многочленов над конечным полем.
   - Задача доказана как NP-трудная, что делает её идеальной для криптографии.

3. Применение:
   - Такие криптосистемы часто используются для:
   - Электронных подписей.
   - Аутентификации.
   - Генерации ключей.

4. Алгебраическая основа:
   - Применяется сложная алгебра над конечными полями.
   - Обеспечение безопасности зависит от невозможности эффективно решать системы квадратичных уравнений с большим количеством переменных.

Основные работы:
- Подпись Матсумото-Имаи

# Методы шифрования на решётках

1. Геометрия решёток и аналогия с кодами:
   - Решётка в геометрическом смысле — это множество точек, равномерно распределённых в пространстве.
   - Она задаётся базисом, и от его качества зависит сложность работы с решёткой.
   - Если базис плохой (например, с большими коэффициентами), найти близкую к заданной точку решётки или работать с ней сложно.

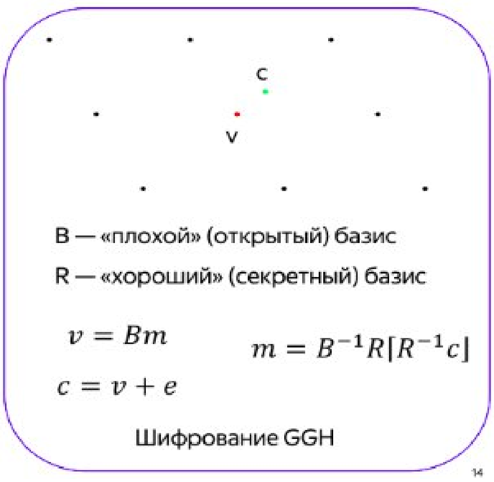
2. Задача декодирования:
   - Сообщение кодируется вектором v = Bm, где B— базис решётки, а m — сообщение.
   - Добавляется ошибка e, и результатом шифрования становится

     c = v + e.
   - Для дешифровки используется "хороший" (секретный) базис R, который позволяет корректно восстановить сообщение.
   - Если у злоумышленника есть только "плохой" базис, то без знания секретного базиса декодирование практически невозможно.

3. Основные задачи на решётках:
   - Нахождение кратчайшего вектора (Shortest Vector Problem, SVP): Задача нахождения минимального ненулевого вектора в решётке.
   - Нахождение ближайшего вектора (Closest Vector Problem, CVP):Определить ближайшую точку решётки к заданной.
   - Эти задачи сложны с вычислительной точки зрения и служат основой криптографии.

4. Особенности решёточных криптосистем:
   - "Зашумлённый" базис делает невозможным решение CVP без дополнительной информации.

Основные работы:
- Односторонняя функций Айтая
- Схема NTRU
- Схема шифрования LWE Регева
- Подпись Любашеввского



# Методы шифрования на хэш-функциях

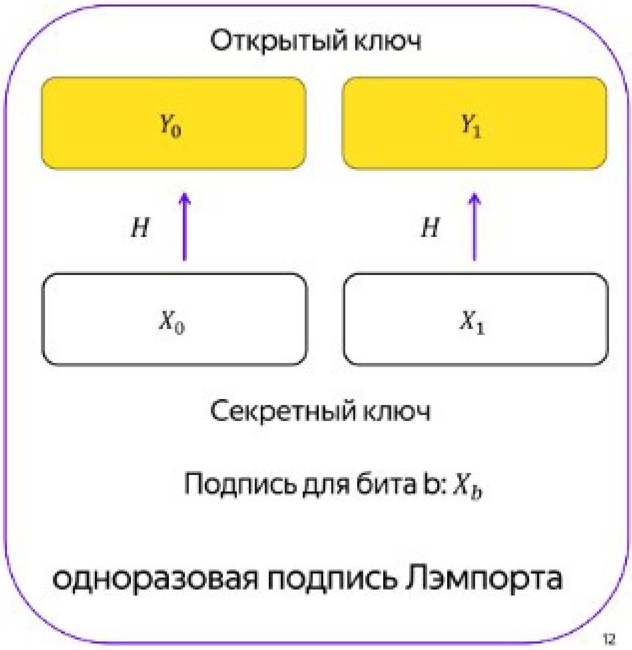
Одноразовая подпись Лэмпорта

- Секретный ключ - случайные значения
- Открытый ключ - хэш секретного ключа

Когда нам нужно подписать какой-то бит мы публикуем прообраз соответствующего хэша

Остальные подходы:

Случайно генерируем  случайные значения и хешируем n раз. Что бы подписать сообщение b мы хэшируем log2 b до n.
Что бы проверить мы дохэшируем и проверяем, что действительно так и было.




Так же существуют «**экзотические**» решения, например MPC-it-the-Head, но здесь мы не будем его рассматривать, так как будут большие проблемы с доказательством.

## 6. Выбор и обоснование математической основы

Проанализировав существующие протоколы, их плюсы и недостатки я остановился на решётках.

Моё предпочтение в пользу криптографии на решётках обусловлено не только теоретической надёжностью, но и прагматичными соображениями, связанными с технологическим суверенитетом и долгосрочной безопасностью

1. Теоретическая фундаментальность и проверенная стойкость

Криптография на решётках — одна из наиболее популярных и перспективных направлений. Сейчас лидирующие протоколы в основном на решётках.

- Увеличить точность доказательства криптостойкости:
- Опираться на готовые стандарты

2. Импортозамещение и технологическая независимость

В России сегодня доминируют постквантовые протоколы-подписи, а KEM только остаётся в разработках

- Уникальность разработки

Создание отечественного KEM на решётках позволит закрыть недостающее звено в линейке российских постквантовых криптографических протоколов.

- Минимизация внешних рисков

Зарубежные решения, даже с открытым кодом, могут нести риски преднамеренного вмешательства и усложнения или даже запрет на внедрения в наши системы.

3. Будущая адаптивность и экосистемный вклад

Решётки обладают гибкостью для модификаций и всё время дорабатываются, что критично в условиях быстро меняющихся угроз. Кроме того, разработка российского стандарта KEM:

- Стимулирует развитие отрасли
- Укрепит экспортный потенциал

Выбор решёток — это не просто следование глобальным трендам, а осознанная стратегия, сочетающая научную обоснованность с национальными интересами. Разрабатывая KEM мы не только защищаем данные от квантовых угроз, но и создадим инфраструктуру, свободную от внешних рисков, что соответствует курсу на цифровой суверенитет.

## 7. Изучение квантовых алгоритмов взлома

Наиболее известными являются алгоритмы Шора и Гровера, которые способны подорвать безопасность асимметричных и симметричных протоколов соответственно. Рассмотрим их подробно.

1. **Алгоритм Шора**: угроза асимметричной криптографии
**Цель:** факторизация больших чисел и решение задачи дискретного логарифма, что ставит под угрозу RSA, ECC и другие системы с открытым ключом.

### Принцип работы:

1. Классическая часть

- Задача факторизации сводится к поиску периода функции $f(x) = a^x \bmod N$, где N — число для разложения, a — случайное число, взаимно простое с N.
- Позволяет факторизовать число N за полиномиальное время ($O(\log^3 N)$), используя O(log N) кубит.
- Если период r найден и чётен, то делители N вычисляются как $\gcd(a^{r/2} \pm 1, N)$

### 2. Квантовая часть

- Используются два квантовых регистра. Первый создаёт суперпозицию всех возможных значений *x*, второй вычисляет *f*(*x*).
- Применяется квантовое преобразование Фурье (QFT) к первому регистру, что позволяет выделить период *r* из суперпозиции состояний.
- Измерение регистра даёт значение, связанное с периодом *r*, который затем используется для факторизации.

Пример угрозы:

- Для взлома RSA-2048 потребуется около 4000 логических кубит и не на много больше времени, чем создание ключа, то есть около секунды. [Расчёт для 20млн зашумлённых кубит https://arxiv.org/abs/1905.09749]

Улучшения:

- В 2023 году Одед Регев предложил модификацию алгоритма, сокращающую количество квантовых вентилей за счёт использования многомерной геометрии.

- Исследователи MIT оптимизировали подход Регева, применяя числа Фибоначчи для расчёта экспонент, что снизило требования к памяти.

## 2. Алгоритм Гровера: угроза симметричной криптографии

**Цель:** ускорение перебора в задача поиска, что снижает безопасность симметричных алгоритмов (AES, DES).

### Принцип работы:

- Для поиска элемента в неупорядоченной базе данных из $N$ элементов классический алгоритм требует $O(2^N)$ операций, а алгоритм Гровера — $O(2^{\frac{N}{2}})$
- Использует квантовую амплитудную интерференцию: многократное применение оператора оракула и диффузии для усиления амплитуды искомого состояния.

Пример угрозы:

- Для AES-256 время взлома сокращается с $2^{256}$ до $2^{128}$ операций

Улучшения:

- Был предложен алгоритм BHT, что ускоряет перебор до $O(2^{\frac{N}{3}})$.

## 3. Другие алгоритмы и направления

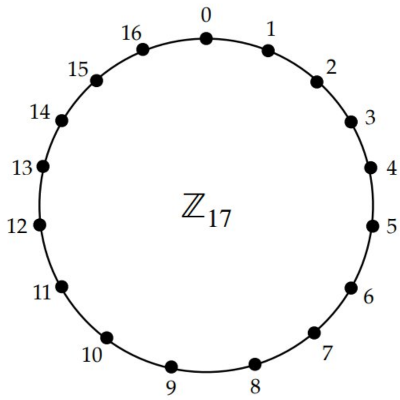
- Алгоритм Регева (2023): Улучшение Шора за счёт обобщения на многомерные решётки, что снижает сложность вычисления.
- Атака на эллиптические кривые: Алгоритм Шора адаптирован для решения задачи дискретного логарифма на эллиптических кривых (ECC) что угрожает ГОСТ 34.10-2018 и аналогичным стандартам.

То есть асимметричные протоколы может эффективно взламывать только алгоритм Шора и его модификации. Значит доказательство криптостойкости должно основываться на алгоритме Шора.

# 8. Углубленное изучение криптографии на решётках

Для начала изучим как именно работают алгоритмы у других протоколов. Для примера возьмём Kyber:

## 1. Основные компоненты и параметры




- **Параметры:**
  Кольцо многочленов:
  Работает с кольцом $R_q$=Zq[X] / ($X^n$+1). Обычно выбирают
  n = 256 — степень многочленов.
  q = 3329 — модуль (простое число).

- **Матрица A:**
  Фиксированная (или генерируемая по seed) матрица многочленов размером k×k где k зависит от выбранного уровня безопасности, например, для Kyber-512 используется k=2, для Kyber-768 — k=3, для Kyber-1024 — k=4). Каждый элемент матрицы — многочлен из $R_q$.

$$\begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & C_{0,3} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix}$$

- **Секреты и шум:**
  Секретные вектора и ошибки задаются как векторы многочленов, коэффициенты которых выбираются согласно небольшому дискретному распределению (например, центроцентрически симметричное распределение с малой дисперсией, близкое к биномиальному).

## Идея протокола:

Основная сложность, на которой базируется безопасность, — задача Module Learning With Errors (Module-LWE). Она сводится к поиску секрета s по уравнению

$$b = A \cdot s + e \text{ (в } R_q\text{)},$$

где e — шум, выбранный случайно из распределения с малыми значениями. Из-за наличия шума восстановить s из A и b практически невозможно.

## 2. Фазы алгоритма

### 2.1 Генерация ключей (KeyGen)

**Цель: Сгенерировать пару ключей:**

- Открытый ключ pk — используется для шифрования (инкапсуляции).
- Секретный ключ sk — используется для дешифровки (деинкапсуляции).

**Пошаговое описание:**

1. Генерация секретного вектора s и шумового вектора e:

Для каждого из k элементов генерируются многочлены с малыми коэффициентами, выбранными из фиксированного распределения например, биномиального распределения).

2. Формирование матрицы A:

Матрица A может быть определена фиксированным seed, от которого затем псевдослучайно генерируются её коэффициенты, либо может передаваться как часть системных параметров.

3. Вычисление вектора b:

Для открытого ключа вычисляется

$$b = A \cdot s + e$$

Операция умножения и сложения выполняется в кольце $R_q$ (то есть все коэффициенты приводятся по модулю q).

4. Формирование ключей:

- Открытый ключ: pk = (A, b).
- Секретный ключ: sk = s (часто в реальной реализации дополнительно сохраняют информацию для защиты от атак с адаптивным выбором сообщений или побочных каналов).

### 2.2 Инкапсуляция (Encaps)

**Цель: Отправитель генерирует зашифрованную капсулу, которая содержит зашифрованный симметричный ключ, и отправляет её получателю.**

## Пошаговое описание:

1. Генерация случайного ключа и выбор шумовых многочленов:
   - Выбирается случайное сообщение m (например, бинарный вектор фиксированной длины, который потом может использоваться как симметричный ключ или служить для генерации ключа).

   - Генерируются новые шумовые векторы r, $e_1$ и $e_2$ (каждый из них — вектор из k многочленов с малыми коэффициентами).

2. Вычисление промежуточных значений:
   - Вычисляется $u = A^T \cdot r + e_1$. Здесь $A^T$ - транспонированная матрица A.
   - Вычисляется $v = b^T \cdot r + e_2$. Затем к v добавляется сообщение m с применением процедур квантования или кодирования, чтобы обеспечить корректное восстановление m при деинкапсуляции.

3. Формирование капсулы:

   Капсула c состоит из двух частей: $c = (u, v)$

### 2.3 Декапсуляция (Decaps)

**Цель: Получатель, обладая секретным ключом s, извлекает исходное сообщение m из капсулы $c = (u, v)$.**

## Пошаговое описание:

1. Вычисление промежуточного значения:

   Используя свой секрет s, получатель вычисляет

$$v' = u^T \cdot s$$

где $u^T$ — транспонированное представление вектора u (если u представлен в виде вектора многочленов, операция сводится к поэлементному умножению с последующим суммированием).

2. Извлечение сообщения:

   После вычисления v′ происходит операция обратного квантования (decoding) с

$$m' = \mathrm{decode}(v - v')$$

Если ошибок не слишком много (что гарантируется корректно выбранными параметрами распределения шума), то m′ совпадёт с исходным m.

## 3. Пример работы на упрощённом варианте

Для иллюстрации рассмотрим упрощённый пример (с меньшими размерами параметров):

Предположения:

- Пусть $n = 4$ и $q = 17$ (для простоты примера; в реальности $n = 256$ и $q=3329$).
- Пусть $k = 2$.

### Генерация ключей

1. Выбираем секрет s и ошибку e:

Например, пусть:

- $s_1(X) = 1 + 0X + 2X^2 + 0X^3$
- $s_2(X) = 0 + 1X + 0X^2 + 1X^3$

(коэффициенты выбираются из маленького множества, скажем, $\{-2,-1,0,1,2\}$).

2. Матрица A:

Пусть для простоты:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(X) & a_{12}(X) \\ a_{21}(X) & a_{22}(X) \end{pmatrix}$$

где, например,

- $a_{11}(X) = 3 + 5X + 0X^2 + 2X^3$
- $a_{12}(X) = 1 + 2X + 4X^2 + 0X^3$
- $a_{21}(X) = 2 + 1X + 3X^2 + 3X^3$
- $a_{22}(X) = 0 + 4X + 1X^2 + 2X^3$

3. Вычисляем $b = A \cdot s + e$:

Пусть шум e также состоит из двух многочленов с малыми коэффициентами, например:

- $e_1(X) = 1 + 0X + (-1)X^2 + 0X^3$
- $e_2(X) = 0 + 1X + 0X^2 + (-1)X^3$

Для первого элемента $b_1(X)$:

- Вычисляем $a_{11} * s_1(X)$ и $a_{12} * s_2(X)$ по модулю 17 с учётом свёртки по $X^4 + 1$.

  Аналогично для $b_2(X)$.

  (Подробные вычисления выполняются по правилам умножения многочленов в кольце $R_q$.)

4. Получаем открытый ключ:
   $pk = (A, b)$.

## Инкапсуляция

Предположим, отправитель выбирает сообщение $m$ (например, 4-битное представление, закодированное в многочлене).
Пусть:

- $m$ после кодирования даёт многочлен $m(X) = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Отправитель генерирует шумовые многочлены $r$, $e_1$ (вектор длины 2) и $e_2$ (один многочлен). Затем:

1. Вычисляет $u = A^T * r + e_1$
   Если $r = (r1(X), r2(X))$, то
   $$u_1(X) = a_{11}(X) * r_1(X) + a_{21}(X) * r_2(X) + e_{1,1}(X)$$
   и
   $$u_2(X) = a_{12}(X) * r_1(X) + a_{22}(X) * r_2(X) + e_{1,2}(X)$$

2. Вычисляет $v = b^T * r + e_2 + \mathrm{encode}(m)$.
   Например,
   $$v(X) = b_1(X) * r_1(X) + b_2(X) * r_2 + e_2(X) + \mathrm{encode}(m(X))$$

Капсула $c = (u, v)$ отправляется получателю.

## Декапсуляция

Получатель, зная секрет $s = (s_1, s_2)$ выполняет следующие шаги:

1. Вычисляет $v' = u_1(X) * s_1(X) + u_2(X) * s_2(X)$

Вычисляет разность $v(X) - v'(X)$, которая должна приблизительно равняться $\mathrm{encode}(m(X))$ (так как шумы, внесённые на этапах, малы).

Применяет функцию декодирования $\mathrm{decode}(\cdot)$, чтобы восстановить исходное сообщение $m$.

Если параметры и распределения шума выбраны корректно, вероятность ошибки декодирования очень мала.

## 4. Заключительные замечания

### Кодирование и декодирование:

Для того чтобы сообщение m было корректно восстановлено, Kyber применяет процедуры квантования. Часть коэффициентов многочлена делят на фиксированный делитель и сравнивают с пороговыми значениями для определения битов m. Эти процедуры могут быть довольно детализированы в спецификации.

### Оптимизации:

Реальные реализации Kyber используют оптимизированные алгоритмы для умножения многочленов (например, с использованием Number Theoretic Transform, NTT) для повышения производительности.

### Безопасность:

Защита основана на сложности задачи MLWE. Даже при наличии квантовых компьютеров, эффективное решение этой задачи остаётся маловероятным при корректном выборе параметров.

## 9. Выбор инструментов для разработки проекта

1. Язык программирование
   - Python 3.12
     - Причины выбора:
       - Быстрая разработка
       - Богатая экосистема
       - Сообщество и документация
   - C++ (планируется)
     - Цели перехода:
       - Увеличение производительности
       - Управление памятью
       - Интеграция с аппаратным обеспечением
2. Библиотеки
   - NumPy
   - Gostcrypto (Стрибог)
   - Matpotlib
   - Random
   - Socket
   - Struct
3. Инструменты разработки:
   - IDE - PyCharm
   - Система контроля версий — Git + GitHub
4. Инфраструктура и окружение
   - Виртуальное окружение venv

## 10. Создание протокола

LWR и LWE — два тесно связанных криптографических предположения, но LWR предлагает ряд улучшений в эффективности и практичности. Вот основные преимущества протоколов на LWR:

1. Проще в работе
   - В LWE генерируется шум, а в LWR используется округление. Это ускоряет вычисления
2. Меньше ‘лишних’ данных
   - LWR сжимает информацию за счёт округления. Это экономит память и трафик, что важно для микропроцессоров
3. Стабильность
   - В LWE шум может накапливать и ломать алгоритм
4. Безопасней против некоторых атак
   - Некоторые атаки, например анализ шума, не работают против LWR из за детерминированного округления

Разработка криптографического протокола включала в себя несколько ключевых этапов:

- Выбор параметров
- Построение механизмов округления и восстановления ключа
- Тестирование корректности работы схемы

Основой послужили принципы постквантовой криптографии, в частности, механизмы, используемые в Saber.

Главная идея – оптимизация вычислений для применения NNT.

### Формирование ключей

Генерация ключей в протоколе осуществляется следующим образом:

Открытый ключ – многочлен A, выбранный случайно из $\frac{Zq[x]}{x^n+1}$

Секретный ключ – многочлен s, выбираемый из ограниченного множества например, $\{0, 1\}^n$

Секретный ключ используется для вычисления зашифрованного сообщения и его последующей расшифровки.

### Механизм округления и восстановления ключа

В основе схемы лежит округление значений, которое позволяет корректно восстанавливать общий ключ у обеих сторон
Для этого:

- В процессе шифрования данные масштабируются и округляются по формуле [x / d] mod p, где d = q / p
- На стороне расшифровки применяется механизм коррекции ошибок, позволяющий компенсировать отклонения, вызванными округлением

### Операции с многочленами

Протокол использует операции умножения многочленов по модулю $x^n + 1$. В текущей реализации применяется наивный метод умножения, который, несмотря на корректность, требует оптимизации.
Например можно использовать быстрое преобразование Фурье (NTT), что позволит работать с большими числами без значительной задержки

## Математическая запись

### Параметры системы

$q = 2^7$ – модуль для арифметики в кольце

$p = 2^3$ – новая точность после округления

$n = 2^4$ – степень полиномов

$d = q / p + 1 = 2^4 + 1$ – фактор деления для округления

offset – смещение, равен d / 2

threshold – пороговое значение, используемое при вычислении подсказки

Сейчас выбраны маленькие коэффициенты для прототипа

Мы работает в кольце $R = \frac{Zq[x]}{x^n + 1}$

То есть с многочленами вида $a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i,\ a_i \in \mathbf{Z}_q$

При этом выполняется условие $x^n = -1$

## Умножение многочленов

Для двух многочленов

$a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ И $b(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$

Их произведение вычисляется по формуле

c(x) = a(x) * b(x) mod ($x^n$ + 1)

То есть коэффициенты $c_k$ задаются так

$$c_k = \sum_{\substack{i,j \\ i+j \equiv k \ (mod\ n)}} (-1)^{\left\lfloor \frac{i+j}{n} \right\rfloor} a_i b_j$$

На практике для каждого коэффициента $c_k$ справедливо:

Если i + j < n: $c_{i+j}$ += $a_i b_j$

Если i + j ≥ n: $c_{i+j}$ -= $a_i b_j$

Так как $x^n \equiv -1$ mod ($x^n$ + 1) все операции (сложение, вычитание) берутся по модулю.

## Округление коэффициентов

Для каждого коэффициента x ∈ $\boldsymbol{Z_q}$, выводится функция округления с параметром смещения offset

Round(x) = $\left\lfloor \frac{x + offset}{d} \right\rfloor \ mod\ p$

Так как offset = d / 2 (или ближайшее целое), это обеспечивает симметричное округление.

Применяя округление к каждому коэффициенту многочлена
a(x) = ($a_0$, $a_1$, ..., $a_{n-1}$)

Получаем:

$$\widetilde{a_i} = Round(a_i) = \left\lfloor \frac{\tilde{a}_i + offset}{d} \right\rfloor mod\ p,\ i = 0, ..., n-1$$

### Вычисление hint (подсказки)

Для каждого коэффициента x из некоторого многочлена вычисляется значение подсказки:

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \bmod d \geq threshold \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

То есть берётся остаток от деления x на d, и если он не меньше порога threshold, устанавливается единица.

### Корректировка на стороне декодирования

При декодировании используется функция «reconcile», которая сдвигает коэффициент на ±1 в зависимости от подсказки. Обозначим $w_i = \mathrm{Round}(u_i \cdot s_i) w_i$ и hint = $h_i$. Тогда:

$$w_i' = \begin{cases} w_i + 1, \text{ если } h_i = 1 \text{ и } w_i < p - 1, \\ w_i - 1, \text{ если } h_i = 0 \text{ и } w_i > 0, \\ w_i, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Это даёт более точное значение $w_i'$

### Кодирование и декодирование сообщения

Задаём сообщение $m = (m_0, m_1, ..., m_{n-1})$, где $m_i \in \{0, 1\}$.

**Кодирование**

$$m_i^{enc} = m_i * \frac{p}{2}$$

То есть, если $m_i = 1$, коэффициент равен p / 2, а если $m_i = 0$, то 0.

**Декодирование**

$$m_i' = \begin{cases} 1, \text{ если } y \geq \frac{p}{2} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Где $y_i$ – коэффициент из расшифрованного полинома.

### Генерация ключей

1. Выбор случайного многочлена a(x):
   Генерируется $a(x) \in \frac{Zq[x]}{x^n + 1}$ с коэффициентами, равномерно распределёнными по $Zq$
2. Секретный многочлен s(x)
   Выбирается s(x) с коэффициентами из {0, 1}
3. Вычисление произведения $c(x) = a(x) * s(x) \bmod (x^n + 1)$
4. Округление: b(x) = Round(c(x)), то есть округляем покоэффициентно и берём результат в $Z_p$.

Pk = (a(x), b(x)), sk = s(x)

## Инкапсуляция

Пусть pk=(a(x),b(x))pk=($a$($x$),$b$($x$)).

1. Случайное сообщение m из $\{0,1\}^n$.
2. Кодируем: $m^{enc}(x)$ = encode(m).
3. Эфемерный секрет s′(x), где коэффициенты $s_i' \in \{0,1\}$.
4. Вычисляем
   u′(x) = a(x) s′(x) mod($x^n$+1),
   u(x)= Round(u′(x)).
5. Подсчитываем b′(x) = b(x) · s′(x). Затем
   h(x)=hint(b′(x)) и $v^{round}(x)$ = Round(b′(x)).
6. Формируем
   v(x) = $v^{round}(x) + m^{enc}(x) \mod p$.
7. Шифротекст
   ct = (u(x),v(x),h(x)).
8. Общий ключ:
   K = Hash(Serialize(m))
   (Serialize(m) — это преобразование в двоичную/байтовую строку.)

## Декапсуляция

Пусть получатель имеет sk = s(x) и получает ct = (u(x), v(x), h(x)).

1. **Промежуточное произведение**
   w′(x)=u(x) s(x) mod ($x^n$+1), w(x)=Round(w′(x)).
2. **Корректировка** с помощью hint:
   $w_i'$ = reconcile($w_i$, $h_i$),
   где $h_i$ – соответствующий коэффициент hint(x).
3. **Извлечение сообщения**:
   $m_i^{enc(recovered)} = v_i - w_i' \mod p$.
4. **Декодирование**:

$$\widehat{m}_i = \begin{cases} 1, \text{ если } m_i^{enc(recovered)} \geq \frac{p}{2}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

5. **Общий ключ:**
   K′ = Hash(Serialize($\widehat{m}$))

Если ошибок округления нет(или они компенсированы подсказками),то K′ = K

## Анализ результатов экспериментов

### 1. Зависимость успешных итераций от порога округления (Threshold)

На первом графике (см. рис. 1) приведена зависимость доли успешных итераций (Success Rate) от значения порога threshold, используемого в функции compute_hint. В ходе эксперимента threshold изменялся от 0 до 32, а остальные параметры (q, p, n) были зафиксированы.

- **Рост при малых threshold**
  При threshold = 0 наблюдается низкая доля успешных итераций (0.14%), что объясняется тем, что подсказка (hint) практически не даёт информации о корректировке. С увеличением threshold\ вплоть до 16 доля успешных итераций возрастает (с 0.14% до 16.18%).
  Это говорит о том, что при слишком низком пороге мы «слишком часто» не корректируем значение, а при слишком высоком – корректируем избыточно. Между этими крайностями формируется оптимальный диапазон, где подсказка даёт наилучший эффект.
- **Поведение при threshold > 16**
  Начиная примерно с threshold=16, кривая выходит на «плато» в районе 15–16% успеха, но при этом продолжает колебаться. Самая высокая точка (глобальный максимум) зафиксирована при threshold = 27, где Success Rate достигает 16.50%. Это указывает на то, что даже при значениях порога, больших d/2, можно получить небольшой выигрыш, но в целом после 16 эффект уже не столь выраженный, и кривая колеблется около одной и той же области значений.
- **Суммарные наблюдения**
  - **Наибольшее значение успеха (экстремум)**:
    16.50% threshold = 27.
  - **Локальный максимум** в точке threshold = 16 равен 16.18%.
  - При слишком малых значениях порога (threshold < 5)
    успех не превышает 1%.
  - Наиболее «выгодная» зона threshold лежит примерно в диапазоне 15–20, где Success Rate стабильно находится в районе 15–16%.

Таким образом, из графика видно, что выбор порога напрямую влияет на качество восстановления ключа. Слишком низкие значения дают недостаточную коррекцию, а слишком высокие – перенасыщенную. Оптимальное значение threshold в рамках данных параметров находится в районе d/2 или немного выше.

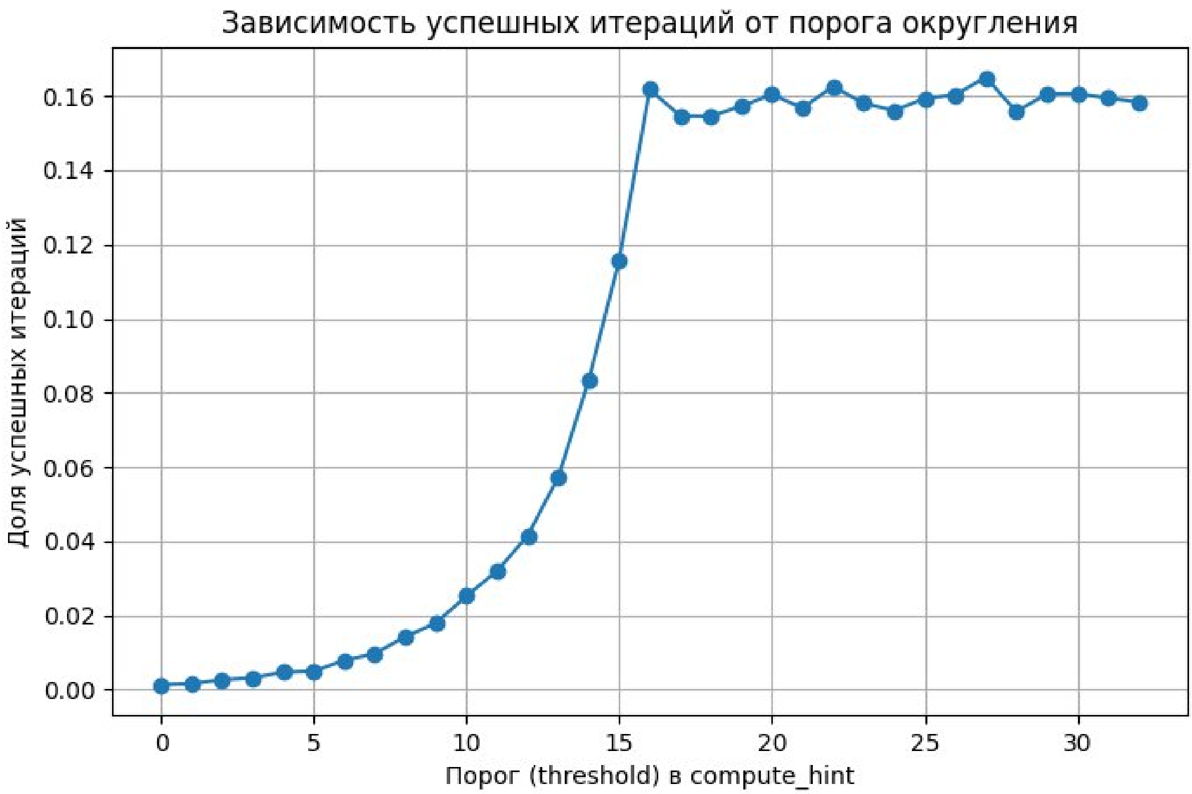



Рис. 1

**2. Влияние параметров q, p и n**

На втором наборе графиков (см. рис. 2) исследуется, как изменение основных параметров протокола отражается на доле успешных итераций:

1. **Влияние q**
   - На графике видно, что при увеличении q (например, с 128 до 1000 и выше) доля успешных итераций снижается.
   - Низкое q (например, 128) даёт более высокий успех (по сравнению с большими q), так как «зона» для шума меньше, и округление происходит более предсказуемо. Однако это упрощает схему и может ухудшать криптографическую стойкость.
1. **Влияние p**
   - Аналогично, при увеличении p (например, от 8 до 64) наблюдается снижение доли успешных итераций.
   - При маленьком p (например, 8) округление даёт более грубую квантизацию, и, парадоксально, в тестовых условиях это может повысить вероятность совпадения у обеих сторон. Однако в реальных условиях такое уменьшение p может затруднить надёжное восстановление сообщения при большом шуме.
1. **Влияние n**
   - Чем больше n, тем сложнее обеспечить высокую точность восстановления (увеличивается число коэффициентов, суммарная ошибка растёт). На графике видно, что при увеличении n доля успешных итераций падает.

- При маленьком n (например, 16) меньше коэффициентов, и восстановление ключа проще. Но при этом криптографическая стойкость такой схемы тоже снижается.

**Лучшие результаты** в серии экспериментов показала комбинация q=128, p=8, n=16, при которой доля успешных итераций достигла 35.10%.
Это говорит о том, что в данных условиях (с минимальным размером полинома и относительно небольшими модулями) система может работать с высокой вероятностью корректного восстановления, хотя, разумеется, такие параметры не обеспечивают реальную криптостойкость.

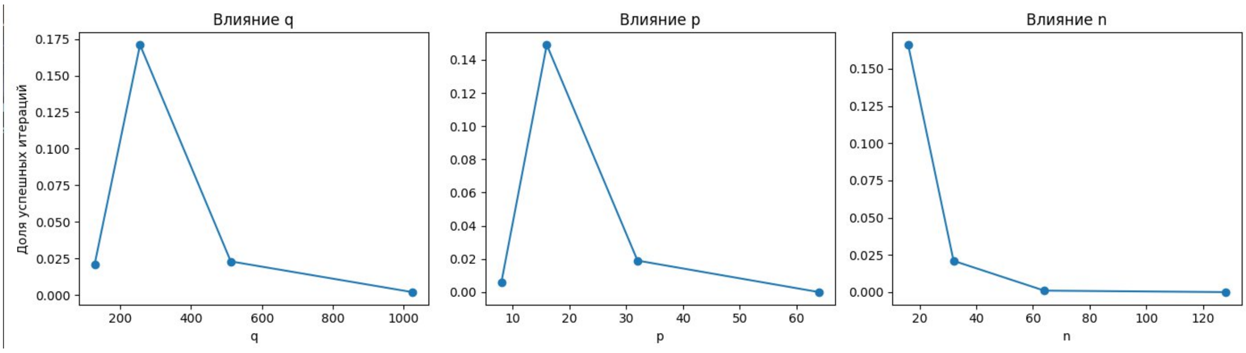



Рис. 2

**Выводы**

1. **Выбор порога**
График зависимости от threshold демонстрирует, что существует «золотая середина»: слишком маленький или слишком большой порог даёт низкую точность восстановления, а оптимальный диапазон лежит около d/2. Максимальное значение (16.50%) получено при threshold = 27, однако уже при threshold=16 успех достигает 16.18%, что ненамного меньше.
Новый ключевой результат: При увеличенных параметрах (q = 4096, p = 32, n = 8, threshold = 126) и улучшенном алгоритмедостигнута успешность 67%.
2. **Зависимость от q, p, n**
- С увеличением q и p доля успеха уменьшается, так как возрастает пространство для шума и сложнее добиться точного совпадения.
- Увеличение n также ухудшает результат, поскольку увеличивается число коэффициентов и суммарная ошибка
1. **Практическая значимость**
Полученные результаты свидетельствуют, что при выборе параметров нужно искать компромисс между криптографической стойкостью (требует больших q и n) и корректностью восстановления (которая выше при меньших значениях). В реальных схемах, таких как Saber, параметры значительно больше, а механизм округления и распределение секретных коэффициентов тонко настраиваются для обеспечения и высокой безопасности, и надёжного восстановления ключа.

Таким образом, проведённые эксперименты дают наглядное представление о том, как основные параметры и порог подсказки влияют на точность (Success Rate) протокола. Для практического применения необходимо дальнейшее масштабирование и более сложные методы оптимизации, однако полученные данные позволяют выявить основные тенденции и подобрать разумные тестовые настройки.

**Какие значения параметров q, n нужны?**

1. **Параметр q** — это модуль для арифметики в кольце, в котором выполняются операции над полиномами. Он должен быть достаточно большим, чтобы обеспечить криптографическую стойкость, но не слишком большим, чтобы не создавать чрезмерные вычислительные затраты. Обычно для устойчивости к квантовым атакам q выбирают значения от $2^{12}$ до $2^{16}$, а для сильной защиты — от $2^{16}$ до $2^{32}$.
2. **Параметр n** — это степень полинома, то есть количество коэффициентов в многочлене. Для обеспечения хорошей безопасности следует выбирать n не менее 512 или 1024. Маленькие значения n, такие как 8 или 16, делают систему уязвимой для атак методом полного перебора или использования ошибок округления.
3. **Параметр p** — это точность после округления. Обычно выбирается относительно небольшим значением, например, 32 или 64, в зависимости от требований к точности и вычислительной сложности. Большие значения p увеличивают сложность, но при этом затрудняют правильную декодировку сообщения.

**Как зависит криптостойкость от этих параметров?**

1. **Зависимость от q**: Чем больше значение q, тем больше возможных значений для коэффициентов полиномов, что усложняет атакующим задачу восстановления секретного ключа с помощью подбора. Это также увеличивает сложность атак с ошибками, таких как атаки на основе ошибок округления или атак методом полного перебора.
2. **Зависимость от n**: Увеличение n увеличивает размер пространства возможных полиномов, что значительно усложняет задачу для атакующего, поскольку увеличение n требует экспоненциального роста вычислительных мощностей для атаки.
3. **Зависимость от p**: Значение p определяет точность вычислений и влияние ошибок округления. Малые значения p делают алгоритм более уязвимым к атакам, связанным с ошибками округления, а также ускоряют вычисления. Однако, чем больше p, тем выше криптографическая стойкость, но и возрастает вычислительная сложность.

**Оценка времени работы:**

- Время работы алгоритма зависит от операций с полиномами (умножение, округление, вычисление подсказок), что ведет к повышенной вычислительной сложности с ростом n и q.
- С увеличением размера n или *q*, время работы растет экспоненциально, поскольку количество операций умножения полиномов и их округления увеличивается. Примерно, сложность для вычислений с полиномами может быть оценена как $O(n^2)$, так как операция умножения полиномов требует $O(n^2)$ операций.

На выполнение 1000 итераций алгоритма в среднем занимает 1.988 секунд.

## 11. Реализация

Для прототипа был выбран язык программирования Python. В данном случае выбран для удобства разработки и наглядности.
Для высокопроизводительных решений на практике могут использоваться более быстрые языки (C/C++/Rust) и оптимизированные библиотеки, в том числе с реализацией быстрых преобразований Фурье (NTT).

**Основная структура кода**

1. **Объявление параметров**
   В начале программы задаются основные параметры: q, p, n а также вычисляется вспомогательный коэффициент d=q / p. Эти параметры определяют размерность кольца многочленов и масштаб округления.
2. **Функции для работы с многочленами**
   - **Умножение** в кольце $\frac{Zq[x]}{x^n+1}$.
   - **Округление** коэффициентов и вычисление **hint**.
   - **Кодирование/декодирование** сообщения.
1. **Генерация ключей (KeyGen)**
   Функция генерирует случайный многочлен a(x) и секретный многочлен s(x), после чего вычисляет b(x) путём умножения a(x) · s(x) и последующего округления.
2. **Инкапсуляция (Encapsulation)**
   - Выбирается случайное сообщение и кодируется в полином $m_{enc}(x)$.
   - Генерируется эфемерный секрет s′(x), с помощью которого вычисляются u(x) и v(x), а также подсказка hint.
   - Результат ct=(u,v,hint) возвращается как шифротекст, а общий ключ K получается из хэша сериализованного сообщения.
1. **Декапсуляция (Decapsulation)**
- На стороне получателя, используя секретный ключ s(x), вычисляется w(x) из u(x) · s(x).
- Применяется функция **reconcile** с учётом подсказки hint, что помогает корректно восстановить menc(x).
- После декодирования получается исходное сообщение, из которого берётся общий ключ K′.
- Если схема работает корректно, K′ совпадает с K

**Тестирование и экспериментальная проверка**

Для оценки корректности и изучения характеристик протокола проводились эксперименты с различными параметрами:

**1. Запуск на локальном компьютере**

- Проверка базовой функциональности (генерация ключей, шифрование и расшифрование).
- Небольшие тестовые прогоны, в ходе которых сравнивали совпадение общего ключа на стороне отправителя и получателя.

**2. Использование суперкомпьютера РАН**

- Для более масштабных экспериментов, включая варьирование параметров q, p, n и порога threshold, и проверки связи программа была запущена на суперкомпьютере Российской академии наук.

**3. Сбор и визуализация данных**

- По итогам каждого эксперимента собирались метрики: доля успешных итераций, время выполнения, ошибки декодирования.
- Данные обрабатывались с помощью библиотеки matplotlib для построения графиков и последующего анализа.
- Результаты были сопоставлены с теоретическими ожиданиями, а также с аналогичными схемами (например, Saber).

**Особенности и рекомендации**

- **Оптимизация**: текущая реализация на Python подходит для прототипирования, однако для реального использования потребуются оптимизированные алгоритмы умножения многочленов (NTT) и более эффективные операции округления.
- **Безопасность**: выбранные тестовые параметры (q, p, ) не обеспечивают постквантовую стойкость; они нужны лишь для иллюстрации. В практических схемах (например, Saber) применяются существенно большие значения и более сложные распределения шума.
- **Масштабируемость**: благодаря тому, что код разбит на функции, расширение протокола под более крупные параметры или другие механизмы распределения секретов (например, гауссовское) не требует кардинальной переработки структуры.

## 12. Заключение

В ходе работы был разработан и протестирован прототип криптографического протокола, основанного на идеях схемы LWR с заимствованиями из Saber. В рамках исследования были выполнены следующие этапы:

- **Математическое обоснование протокола:**
  Представлены основные алгоритмические и теоретические моменты, связанные с операциями в кольце многочленов, механизмами округления и восстановлением общего ключа. Детально описаны формулы, лежащие в основе схемы, а также методы вычисления подсказки (hint) для коррекции ошибок.
- **Реализация прототипа:**
  Протокол был реализован на языке Python с использованием стандартных библиотек для генерации случайных чисел, работы с матрицами и визуализации данных. Проведённое тестирование, включая запуск на суперкомпьютере Российской академии наук, позволило собрать статистику по успешности восстановления ключа и изучить влияние различных параметров.
- **Экспериментальное исследование:**
  Были проведены эксперименты, позволяющие установить зависимость успешности восстановления общего ключа от значений порога округления и основных параметров q, p и n. Результаты показали, что даже при тестовых, упрощённых параметрах прототип демонстрирует корректное функционирование, хотя для практической криптостойкости необходимо масштабирование и оптимизация.

Разработанный прототип является доказательством концепции, подтверждающим возможность создания постквантового протокола на базе LWR-подхода. Полученные результаты демонстрируют основные тенденции: правильный выбор параметров и механизма округления существенно влияет на корректность восстановления ключа. Однако, текущая реализация использует тестовые параметры, что обеспечивает лишь работоспособность, а не реальную криптографическую стойкость.
В дальнейшем планируется:

- Увеличение значений q и n для обеспечения надежной постквантовой защиты;
- Оптимизация алгоритмов умножения многочленов (например, с использованием NTT);
- Доработка механизмов округления и восстановления с целью повышения устойчивости к ошибкам и атакам.

Таким образом, проделанная работа закладывает фундамент для дальнейших исследований и развития постквантовых протоколов, способных обеспечить высокую безопасность и эффективность в реальных условиях.

## 13. Ссылки и список литературы

Видео-лекции:

- https://cryptography101.ca/kyber-dilithium/
- https://ricktube.ru/video?q=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fplaylist%3Flist%3DPLA1qgQLL41SSUOHlq8ADraKKzv47v2yrF
- https://www.youtube.com/watch?v=3RdkAQ43eYU
- https://yandex.ru/video/preview/9278484075604101220

Теория о алгоритмах взлома:

- https://arxiv.org/pdf/2212.12372
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Шора
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Регев,_Одед
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Гровера
- https://en.wikipedia.org/wiki/BHT_algorithm

Русские разработчики и теория:

- https://qapp.tech/help/post-quantum
- https://qapp.tech/help/post-quantum
- https://qapp.tech/help/comparison-pqc-qkd
- https://rqc.ru/
- https://qapp.tech/
- https://qboard.tech/

- https://pki-forum.ru/files/files/2024/19_09_24_Alekseev.pdf?utm_source=chatgpt.com

- https://ruscrypto.ru/resource/archive/rc2024/files/05_vysotskaya_chizhov.pdf

- https://drive.google.com/file/d/1YPtwtpFZitQOs1k2C8NGjogW9YfAWdb1/view

## Документация и теория по Kyber:

- https://pq-crystals.org/kyber/software.shtml

- https://github.com/pq-crystals/kyber

- https://cryptopedia.dev/posts/kyber/