UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

# OSNOVNE KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE ENAČB Z ORIGAMIJEM (BWO?)

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

## Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

# Kazalo

# Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

# Osnovna literatura


1. T. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

2. K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.


Podpis mentorja:

**Osnovne konstrukcije in reševanje enačb z origamijem (bwo?)**

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

**Angleški prevod slovenskega naslova dela**

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2020):** 74B05, 65N99

**Ključne besede:** integracija, kompleks, $C^*$-algebre

**Keywords:** integration, complex, $C^*$-algebras

# 1 Uvod

Začnimo z odzivom mojih prijateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le – že tako izjemno širokega – področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebre, diferencialne topologije ... Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [4, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, pred letom 1600 po Kr. ni). Oblikovanje oblik iz lista papirja se je do konca 20. stoletja hitro razširilo po vsem svetu [10]. Matematični vidik origamija je v ospredje prišel nekoliko kasneje. V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852) v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri poučevanju osnovne geometrije v vrtcu. Indijski matematik Tandalam Sundara Row je nato l. 1893 izdal obsežno knjigo *Geometric Exercises in Paper Folding* [13], v kateri popisuje konstrukcije raznolikih geometrijskih likov in celo krivulj. Velik prelom je dosegla italijanska matematičarka Margherita P. Beloch, ki je v 30-ih letih 20. st. odkrila, da lahko s prepogibanjem papirja rešujemo celo kubične enačbe. Vseeno je preteklo še pol stoletja, da je origami začel zanimati tudi širšo znanost, od takrat pa se je na tem področju odprlo veliko priložnosti za raziskovanje koncepta origamija in uporabo prepogibanja v najrazličnejših strokah [4, str. 10].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da lahko praktična izkušnja prepogibanja papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa vključuje neko motorično aktivnost in spretnost. Poleg fine motorike krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih nekaj člankov in seminarskih nalog ter diplomskih in magistrskih del, strokovnih knjig iz tega področja pa nisem našla. Ta naloga zajema predvsem uporabo origamija za namene raziskovanja geometrije ter reševanja enačb in vključuje veliko slik z orisanimi konstrukcijami. Zato je tudi daljša, vendar je tako tudi zaradi namena kasnejše uporabe pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih večinoma da predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe evklidskih orodij (neoznačeno ravnilo ter šestilo) raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali osnovne evklidske ter origami operacije in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo še kaj, česar z evklidskimi orodji ne moremo. V drugem poglavju se bomo ukvarjali s konstrukcijami tangent na stožnice. V tretjem poglavju sledi prepogibanje kvadratnega lista papirja, ki nam lahko stranice kvadrata razdeli v zanimivih razmerjih. Pogledali si bomo Hagove izreke in se naučili, kako stranico razdelimo na poljubno število enako dolgih delov. Poleg kvadrata je zanimiva tudi konstrukcija enakostraničnega trikotnika, ki ga lahko dobimo na več načinov, poleg teh pa si bomo v četrtem poglavju pogledali še konstrukcije tudi kakih drugih pravilnih $n$-kotnikov.

Po tej bolj osnovni geometriji se bomo v petem poglavju podali na vznemirljivo reševanje dveh starogrških problemov, ki ju z evklidskimi orodji – dokazano – ne znamo rešiti; to sta *podvojitev kocke* (oz. konstrukcija $\sqrt[3]{2}$) in *trisekcija kota*. Izkaže se, da se da vsakega od njiju rešiti celo na več kot en način!

Nazadnje pa se bomo posvetili še najbolj obsežnemu poglavju, ki deloma zapusti področje geometrije. Pogledali si bomo, kako lahko s pomočjo prepogibanja papirja rešujemo kvadratne in kubične enačbe, za bolj zahtevne pa bosta zanimivi podpoglavji o reševanju enačb 4. in 5. reda.

Zapustimo sedaj malo jezerce umetelno zloženih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

# 2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Verjetno so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga [10]. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja ("oru" – prepogibati, "kami" – papir) se je na Daljnem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvom, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [15]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastalo poimenovanje "*origamics*". V slovenščini uradnega prevoda še ni, Grahor pa v [8, str. 5] po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physics* – fizika itd.) predlaga termin "origamika".

## 2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida[1], ki je napisal zelo znano zbirko trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi*. V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij[2], aksiomov[3] in postulatov[4]. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definiral osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat ... ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic [3]. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov, iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

**Postulat P1.** Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

**Postulat P2.** Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

**Postulat P3.** Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

**Postulat P4.** Vsi pravi koti so med seboj skladni.

---

[1] O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [1, str. 61].

[2] *Definicija* je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

[3] *Aksiom* je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

[4] *Postulat* je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [3, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmoma ne ločujemo [9, str. 2].

**Postulat P5.** Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

**Opomba 2.1.** Vemo že, da je postulat P5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

**Definicija 2.2.** *Evklidske konstrukcije* so konstrukcije premic, kotov, krožnic in drugih geometrijskih figur, ki jih je mogoče konstruirati le z uporabo t. i. *evklidskih orodij*:

- neoznačeno in neskončno dolgo ravnilo (angl. *straightedge*)
- šestilo, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj)

**Opomba 2.3.** Da se pokazati, da lahko za konstrukcije ekvivalentno uporabimo tudi šestilo, ki prenaša razdalje [9, str. 6–7]. Zato imamo odslej z izrazom *šestilo* v mislih kar moderno šolsko šestilo.

Formalno so torej edine dovoljene operacije tiste iz postulatov P1–P3. Seveda privzamemo, da so konstruktibilne tudi točke, ki jih dobimo kot že dane ali kot presečišča dveh premic, dveh krožnic ali premice in krožnice. Vendar je to dovolj, da lahko le z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo premice, kote, simetrale kotov in daljic, krožnice in še mnogo drugega. V resnici se da skonstruirati toliko geometrijskih figur, da se matematiki raje vprašamo, česa pa se s tem orodjem *ne* da skonstruirati. In tu pridemo do motivacije za uvedbo origami konstrukcij, saj lahko z njimi npr. rešimo kar dva od treh znamenitih starogrških problemov, ki jih z evklidskim orodjem ne moremo (gl. poglavje 6).

## 2.2 Origami konstrukcije

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini. Za model evklidske ravnine vzamemo kvadraten list papirja, saj s prepogibanjem očitno v tej ravnini tudi ostanemo. Dogovorimo se, da pregibe konsktruiramo le po enega naenkrat ter v ravni črti, po vsakem prepogibu papir znova odgrnemo in prepovedana je uporaba kakršnegakoli orodja (npr. škarje in lepilo, izjemoma lahko za vidnejšo označbo *že konstruiranih* pregibov ali točk uporabimo pisalo). Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije praktično preizkusi tudi sam. Pri izbiri papirja je priporočljiv rahlo prosojen papir, skozi katerega se vidijo morebitne označbe točk in premic s svinčnikom (npr. navaden kuhinjski papir za peko).

Ker so pregibi torej ravne črte, nam služijo kot modeli premic. Na začetku, ko imamo pred seboj le kvadraten list papirja, so naše premice njegove stranice. Nove premice so pregibi skozi točke. Začetni modeli točk so ravno oglišča našega lista papirja, nadaljne točke pa dobimo kot presečišča premic, torej presečišča pregibov, ki gredo skozi dane ali že skonstruirane točke. Torej imamo le pet možnosti, kako prepogniti papir – tako, da zložimo (slikovni prikaz v [4, str. 25–26]):

- točko na drugo točko (en možen pregib),

- točko samo vase (neskončno možnih pregibov),
- točko na premico (neskončno možnih pregibov),
- premico na drugo premico (en ali dva možna pregiba) in
- premico samo vase (neskončno možnih pregibov).

**Definicija 2.4.** Vzemimo kvadraten list papirja. Začetne premice so njegove stranice, začetne točke pa njegova oglišča. Nove premice so pregibi papirja skozi dane ali že skonstruirane točke, nove točke pa so presečišča premic oz. pregibov. Konstrukcije, ki jih izvajamo z z zgoraj naštetimi ter ravnimi in enkratnimi pregibi, imenujemo *origami konstrukcije*.

### 2.2.1 Origami operacije

V zadnjem stoletju se je preko različnih matematikov (Jacques Justin, Peter Messer, Benedetto Scimemi, Humiaki Huzita, Koshiro Hatori, George E. Martin idr.; nekateri so med seboj sodelovali, drugi so delovali neodvisno) izoblikoval seznam operacij, ki nam jih omogočajo zgoraj naštete konstrukcije. Seznam se je med avtorji razlikoval v številu (gl. [4, str. 29–30]), skupno pa se je izoblikovalo osem – na prvi pogled različnih – operacij. Najprej jih naštejmo, potem pa si ob sledečih slikah poglejmo še prikaz opisanih konstrukcij. Videli bomo, da moramo pri nekaterih operacijah ločiti več primerov [11, 15].

**Operacija O1.** Za poljubni točki $A$ in $B$ obstaja natanko en pregib $p$, ki gre skoznju.

**Operacija O2.** Za poljubni premici lahko določimo njuno presečišče, če obstaja.

**Operacija O3.** Za poljubni točki $A$ in $B$ obstaja natanko en pregib $p$, da se točki pokrijeta.

**Operacija O4.** Za poljubni premici $a$ in $b$ obstaja pregib $p$, ki ju položi eno na drugo.

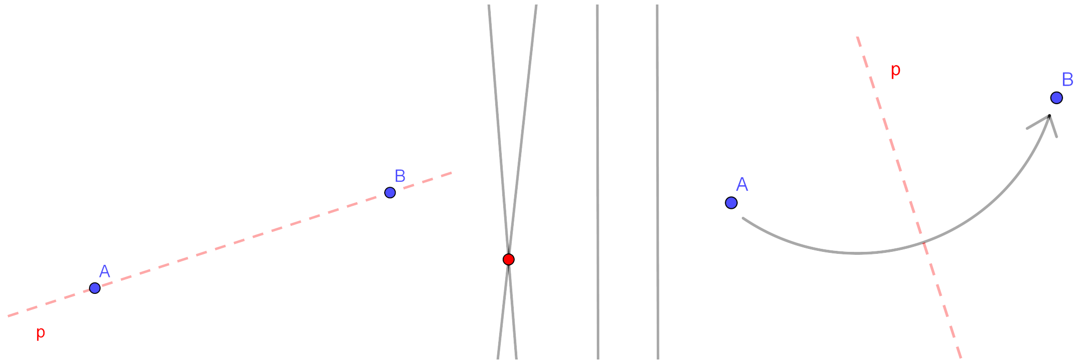
**Operacija O5.** Za poljubno točko $A$ in premico $a$ obstaja natanko en pregib $p$ skozi točko $A$, ki je pravokoten na premico $a$.

**Operacija O6.** Za primerno izbrani točki $A$ in $B$ ter premico $a$ obstaja pregib $p$ skozi točko $B$, ki točko $A$ položi na premico $a$.

**Operacija O7.** Za primerno izbrani točki $A$ in $B$ ter premici $a$ in $b$ obstaja pregib $p$, ki točko $A$ položi na premico $a$ in točko $B$ na premico $b$.

**Operacija O8.** Za poljubno točko $A$ ter nevzporedni premici $a$ in $b$ obstaja pregib $p$, ki je pravokoten na premico $b$ in točko $A$ položi na premico $a$.

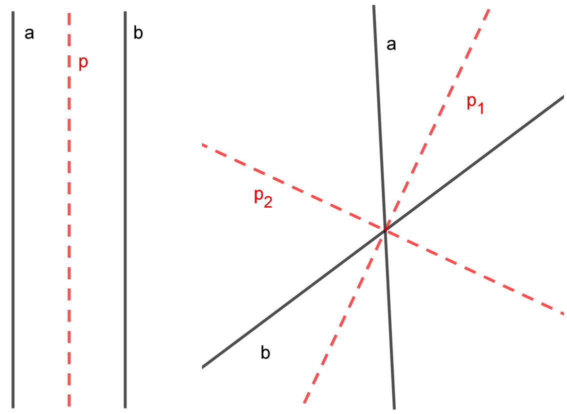
Sedaj za vsako operacijo posebej poglejmo njeno konstrukcijo. Takoj opazimo, da je operacija O1 ekvivalentna postulatu P1, kar nam lahko vzbudi zanimanje za povezavo med evklidskimi in origami konstrukcijami. Operacija O2 je izvedljiva v vsakem primeru nevzporednih pregibov in nam omogoča določitev novih točk v našem modelu ravnine. Operacija O3 pa nam poda konstrukcijo simetrale daljice




Slika 1: Operacije (od leve proti desni) O1, O2 in O3.

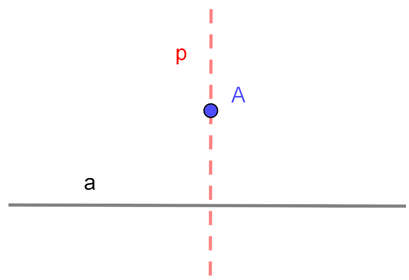
$AB$ (slika 1) – ko opravimo pregib in pustimo papir še zapognjen, je očitno, da so točke na pregibu enako oddaljene od točk $A$ in $B$.

Nadalje opazimo, da nam operacija O4 konstruira obe simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče, v primeru vzporednih premic pa dobimo tretjo vzporednico, ki leži na sredi med njima (slika 2). Zato sta tu možna po dva ali, v posebnem primeru, en pregib.



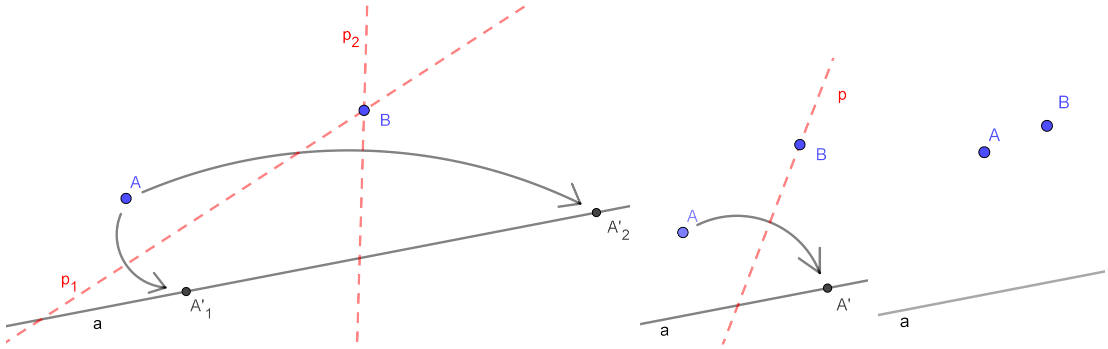

Slika 2: Operacija O4 v obeh možnih primerih.

Operacija O5 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko (slika 3). Pri tem je vseeno, ali točka leži na premici ali ne. Pregib opravimo tako, da premico položimo samo nase in pazimo, da je točka $A$ v pregibu. Zaradi simetrije je pregib res pravokoten na premico in tako tudi en sam.



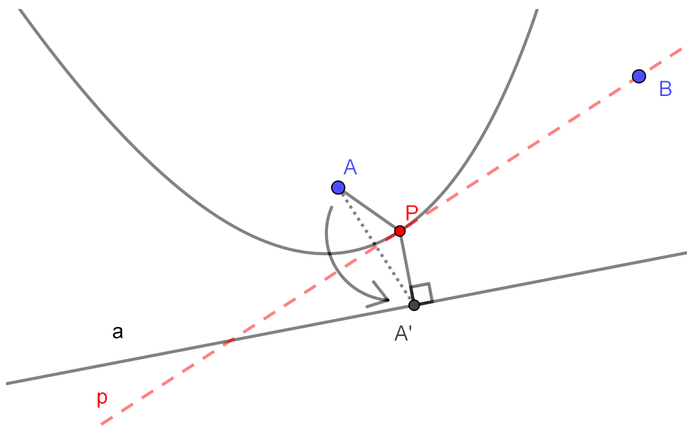

Slika 3: Operacija O5.

Operacija O6 je še posebej zanimiva. Najprej si poglejmo njeno konstrukcijo. Vzemimo točki $A$ in $B$ ter premico $a$. Iščemo pregib skozi $B$, ki $A$ položi na premico $a$. Ker točka $B$ leži na pregibu, je enako oddaljena tako od točke $A$ kot tudi njene slike $A'$ na premici $a$, torej je $A'$ ravno presečišče premice $a$ in krožnice s središčem v $B$ ter polmerom $AB$. Pregib je simetrala daljice $AA'$, ki po konstrukciji poteka skozi točko $B$. Če velja $d(A, B) > d(B, a)$, sta presečišči s premico $a$ dve (in s tem tudi dva možna pregiba, gl. sliko 4 levo), v primeru $d(A, B) = d(B, a)$ je presečišče eno samo (in s tem en možen pregib, gl. sliko 4 na sredi) in je premica $a$ takrat tangentna na omenjeno krožnico, v zadnjem primeru, ko velja $d(A, B) < d(B, a)$, pa presečišč ni (in s tem tudi pregiba, gl. sliko 4 desno).



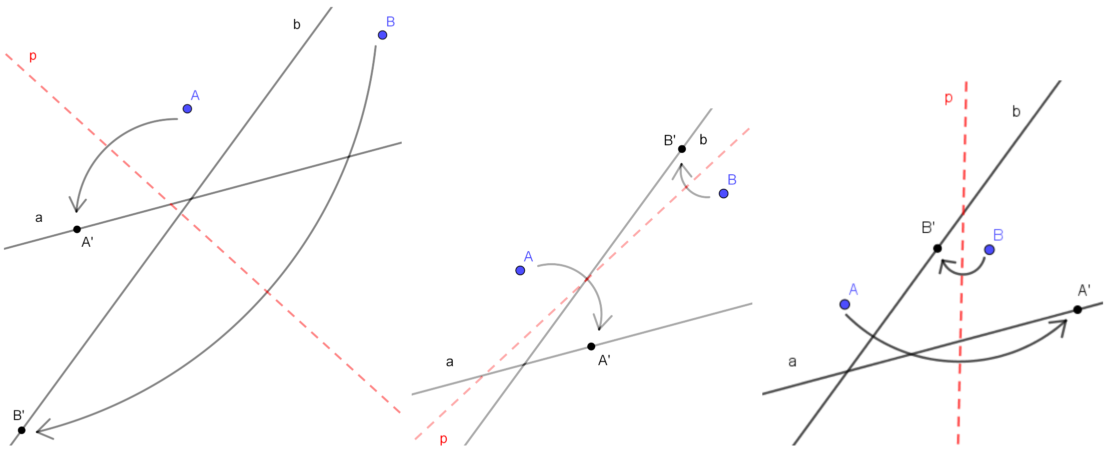

Slika 4: Operacija O6 v vseh treh primerih.

Zgodba operacije O6 se tu še ne zaključi. Ker na pregibu ležijo vse točke, ki so enako oddaljene od točke $A$ in $A'$, to velja tudi za točko $P$, ki jo dobimo kot presečišče pregiba in pravokotnice na premico $a$ skozi $A'$ (slika 5). Zanjo velja $d(A, P) = d(P, a)$ in je enolično določena (v srednjem primeru na sliki 4 je to kar točka $B$). Torej točka $P$ leži na paraboli z goriščem $A$ in premico vodnico $a$. Bralec lahko sam premisli, da je $P$ edina točka na pregibu, ki je enako oddaljena od gorišča in premice vodnice. Pregib torej seka parabolo le v eni točki, kar pomeni, da je to *tangenta na to parabolo.* V levem primeru na sliki 4 smo dobili dve tangenti.



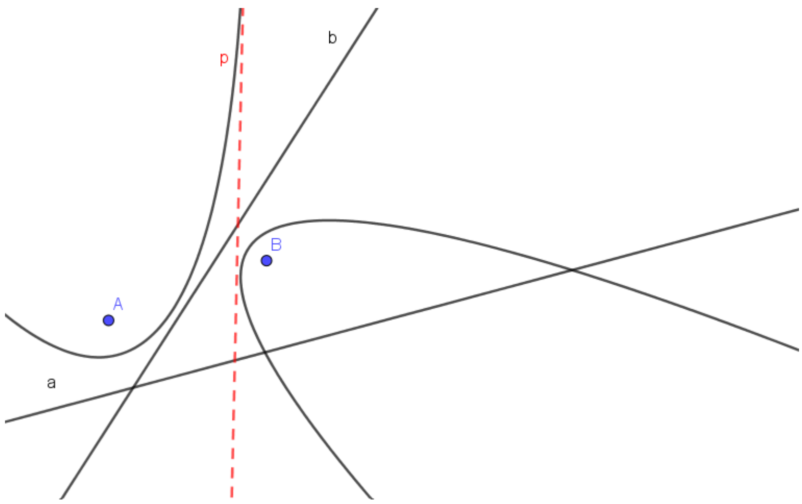

Slika 5: Operacija O6 kot konstrukcija tangente na parabolo z goriščem v $A$ in premico vodnico $a$.

Poglejmo si naslednjo operacijo. Konstrukcijo O7 začnemo z upogibom papirja, ki točko $A$ položi na premico $a$, potem pa točko premikamo po premici, dokler se tudi točka $B$ ne stakne s premico $b$. Takrat naredimo pregib. Za enako izbiro točk in premic je lahko možnih več pregibov ((baje največ trije [4, str. 38 spodaj]), gl. sliko 6), če pa sta premici vzporedni in je njuna medsebojna razdalja večja od razdalje med točkama, pregib sploh ne obstaja (to lahko bralec ugotovi ob preprostem razmisleku, kako se giba točka $B$ med premikanjem točke $A$ po premici $a$).




Slika 6: Operacija O7 (primer treh pregibov za isti točki in premici).

Kaj je geometrijski pomen te operacije? Če smo pri operaciji O6 dobili tangento na parabolo, potem lahko takoj vidimo, da pri operaciji O7 dobimo *skupno tangento na dve paraboli* – ena ima gorišče v točki $A$ in premico vodnico $a$, druga pa gorišče v točki $B$ ter premico vodnico $b$ (slika 7).

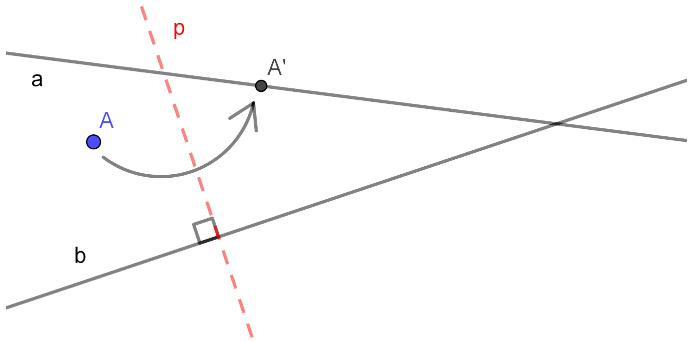



Slika 7: Operacija O7 kot konstrukcija skupne tangente na dve paraboli.

**Opomba 2.5.** O operaciji O7 naj bi prva pisala italijanski matematičarki Margherita P. Beloch, po kateri operacijo imenujemo tudi *Belochin pregib*.

Zadnja operacija O8 zahteva nevzporedni premici, saj v nasprotnem primeru ne moremo konstruirati pregiba, ki bi bil pravokoten na obe premici in točko $A$ položil na premico $a$ (razen če le-ta že leži na njej). Premislimo geometrijsko konstrukcijo:

ker mora biti pregib pravokoten na premico $b$, bo slika točke $A$ (označena z $A'$) ležala na vzporednici skozi točko $A$ k premici $b$. Prav tako mora točka $A'$ ležati na premici $a$, torej je slika ravno presečišče omenjene vzporednice in premice $a$. Iskan pregib je simetrala daljice $AA'$, ki je po konstrukciji pravokoten na premico $b$ (slika 8).




Slika 8: Operacija O8.

**Opomba 2.6.** Natančen bralec lahko opazi, da nam origami operacije ne podajajo konstrukcije slik točk, temveč samo pregibe, ki točke preslikajo na premice. Sliko točke konstruiramo šele po uporabi operacije O5 – skozi originalno točko naredimo pregib, pravokoten na prvi pregib (iz O6), in slika je potem presečišče pravokotnice in premice, na katero smo prepognili originalno točko.

### 2.2.2 Zadostne in potrebne origami operacije

Izkaže se, da je teh osem operacij zadostnih za katerokoli origami konstrukcijo.

**Izrek 2.7.** *Če dovolimo le enkratne in ravne pregibe, so edine možne operacije prepogibanja operacije O1–O8.*

Ideja dokaza je, da za vsak možen prepogib, ki prekrije točko ali premico s točko ali premico (gl. seznam na začetku podpoglavja 2.2) pogledamo vse možnosti. Izkaže se, da res dobimo prepogibe iz operacij O1–O8. Za natančen dokaz s slikovno ponazoritvijo gl. [4, str. 24–26 (izrek 1.1)].

Vendar ali so vse te operacije tudi potrebne ali lahko kakšno izpustimo? Operacija O2 je očitno potrebna, saj nam določa nove točke. Če podrobneje opazujemo ostale konstrukcije, pa opazimo, da so vse posebni primeri operacije O7 (t. j. konstrukcija pregiba, ki točko $A$ položi na premico $a$ in točko $B$ na premico $b$), ko premici $a$ in $b$ sovpadata ali ko ena ali obe izmed točk $A$ in $B$ ležita na premici:

- Operacija O1: Naj točka $A$ leži na premici $a$, točka $B$ pa na premici $b$. Pregib skozi točki $A$ in $B$ točko $A$ ohrani na premici $a$ in točko $B$ na premici $b$.
- Operacija O3: Naj točka $A$ leži na premici $b$, točka $B$ pa na premici $a$. Pregib, ki položi točki drugo na drugo, točko $A$ položi na premico $a$ in hkrati točko $B$ na premico $b$ .
- Operacija O4: Naj točka $A$ leži na premici $b$, točka $B$ pa na premici $a$. Simetrala kota v presečišču premic (ali vmesna vzporednica, če sta premici $a$ in $b$ vzporedni), točko $A$ položi na premico $a$ in hkrati točko $B$ na premico $b$.

- Operacija O5: Naj točka $A$ leži na premici $a$, točka $B$ pa na premici $b$. Pregib skozi točko $A$ (ali $B$), ki je pravokoten na premico $b$ (ali $a$), točko $A$ ohrani na premici $a$ in točko $B$ na premici $b$.
- Operacija O6: Naj točka $B$ leži na premici $b$. Pregib skozi točko $B$, ki točko $A$ preslika na premico $a$ (če tak pregib obstaja), točko $B$ ohrani na premici $b$.
- Operacija O8: Naj točka $B$ leži na premici $b$. Pregib, ki točko $A$ položi na premico $a$ in je pravokoten na premico $b$, točko $B$ ohrani na premici $b$.

Ker lahko vse konstrukcije po izreku 2.7 opišemo z operacijami O1–O8, smo s tem dokazali spodnji izrek:

**Izrek 2.8.** *Če imamo dani vsaj dve točki in dve nevzporedni (lahko tudi identični) premici, ki vsebujeta dane točke, potem lahko vse origami konstrukcije z enkratnimi in ravnimi pregibi opišemo s kombinacijo operacij O2 in O7.*

### 2.2.3 Zrcaljenje točke čez premico

Operacija O3 nam poda simetralo daljice $AB$. Torej je točka $B$ zrcalna slika točke $A$ čez to premico. Kaj pa, če imamo za neko točko $A$ že dano premico $a$ in iščemo njeno zrcalno sliko? Bralec bi lahko naivno predlagal, da naredimo pregib po premici in s svinčnikom označimo zrcalno sliko. A definicija 2.4 pravi, da lahko točke dobimo le kot presečišča pregibov, poleg tega pa je uporaba pisala dovoljena le za vidnejšo označbo že konstruiranih točk.

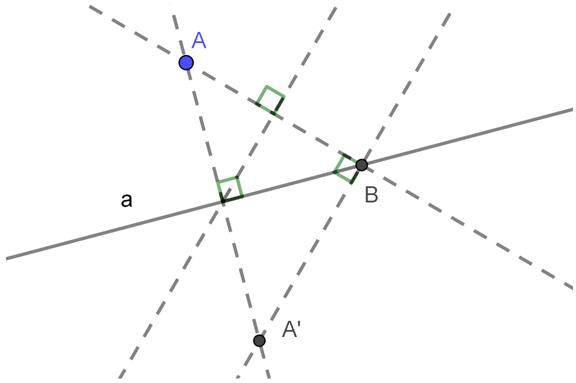
Zato moramo najti zaporedje pregibov, kjer na koncu kot presečišče nekih dveh premic dobimo želeno točko. Za dano premico $a$ in točki $A$, ki ne leži na tej premici (sicer je točka $A$ zrcalna slika sama sebi), lahko zrcalno sliko točke konstruiramo z naslednjimi koraki (prikazani na sliki 9, postopek vzet iz [4, str. 28]):

1. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na premico $a$ skozi točko $A$.
2. Z operacijo O4 prepognemo simetralo kota, ki ga oklepata premica $a$ in njena pravokotnica.
3. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na simetralo skozi točko $A$. Njeno presečišče s premico $a$ označimo z $B$.
4. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na pregib iz 3. koraka skozi točko $B$. Presečišče novega pregiba in pravokotnice iz 1. koraka označimo z $A'$.

**Trditev 2.9.** *Točka $A'$ iz opisane konstrukcije je zrcalna slika točke $A$.*

*Dokaz.* Trikotnik, ki ga dobimo po 3. koraku, je pravokoten in enakokrak, saj je simetrala (pravega kota) iz 2. koraka pravokotna na njegovo osnovnico. Zato kot ob točki $A$ znaša 45°. Ker je trikotnik $\triangle A'BA$ pravokoten, je zato tudi enakokrak, torej premica $a$ razpolavlja daljico $AA'$, torej je $A'$ res zrcalna slika točke $A$. □

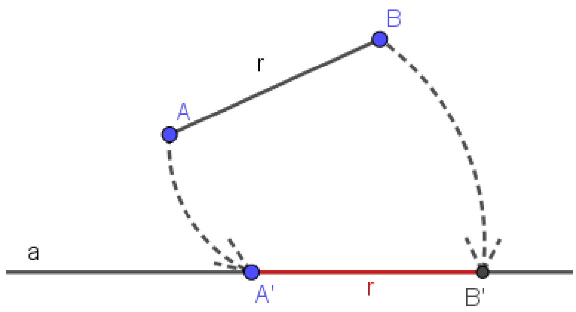
Ker lahko čez premico zrcalimo točke, lahko čeznjo zrcalimo tudi daljice oz. premice – to storimo tako, da zrcalimo dve točki z daljice in naredimo pregib čez njuni sliki. Zrcaljenje pa nam omogoča še nekaj več, kar nam pove naslednja trditev.




Slika 9: Zrcaljenje točke $A$ čez premico $a$ s prepogibanjem papirja.

**Trditev 2.10.** *Z upoštevanjem pravil iz 2.2 in origami operacij lahko s prepogibanjem papirja prenašamo razdalje.*

*Dokaz.* V ravnini si izberimo poljubni točki $A$ in $B$, ki določata daljico z neko dolžino $r$. Naj bo $a$ poljubna premica in $A'$ poljubna točka na njej. Trditev pravi, da lahko z origami operacijami konstruiramo točko $B' \in a$, da je $d(A', B') = r$ (slika 10). Pri tem ni pomembno, na kateri strani točke $A'$ leži točka $B'$, saj jo lahko vedno zrcalimo čeznjo.




Slika 10: Prenos dolžine daljice $AB$ na premico $a$ k izbrani točki $A'$.

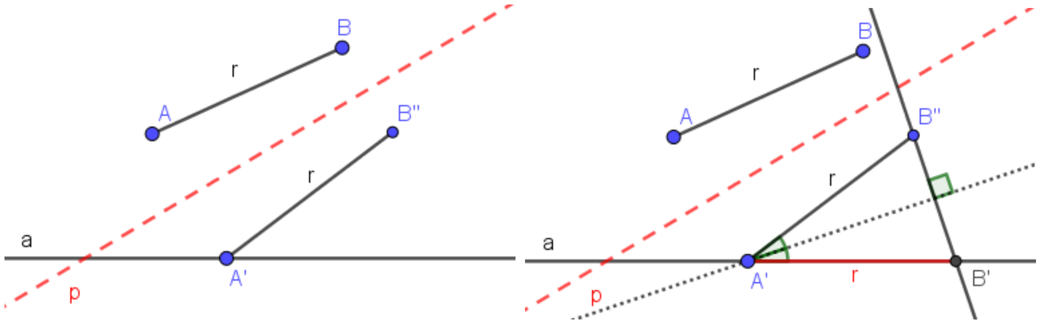
Prenos razdalje razdelimo na dva koraka:

1. Če $A \neq A'$, daljico $AB$ zrcalimo čez tisto premico $p$, ki točko $A$ preslika v točko $A'$ (po O3 je tak pregib oz. premica ena sama). Zrcalno sliko točke $B$ označimo z $B''$ (slika 11 levo). V posebnem primeru, ko daljica $AB$ leži na premici $a$, je to že konec konstrukcije.

2. Daljico $A'B''$ rotiramo okoli točke $A'$, da se točka $B''$ preslika na premico $a$. To storimo tako, da z operacijo O4 konstruiramo simetralo kota med daljico $A'B''$ in premico $a$ in čeznjo zrcalimo točko $B''$ (slika 11 desno). S tem dobimo točko $B' \in a$, ki je po konstrukciji od točke $A'$ oddaljena za dolžino $r$.

S tem smo razdaljo $r$ prenesli na poljubno mesto v ravnini. $\square$

Tako lahko s prepogibanjem papirja zrcalimo točke (in premice), prenašamo razdalje pa tudi – po 2. koraku iz zgornjega dokaza – točke (in premice) rotiramo. To novo znanje bomo uporabili v podpoglavju 2.3.2.




Slika 11: Zrcaljenje daljice $AB$ (levo) in rotacija daljice čez eno krajišče (desno).

## 2.3 Kje origami konstrukcije nadvladajo evklidske

Prišli smo do ključnega dela poglavja – reševanje vprašanja, zakaj se nam z origami konstrukcijami sploh splača ukvarjati.

Za začetek naj bralec ob zgornjih opisih posamezne operacije premisli, da je mogoče operacije O1, O3, O4, O5, O6 in O8 opraviti tudi z evklidskim orodjem (operacija O2 le določa nove točke, zato tu o konstrukciji ne moremo govoriti). Do tu nam torej origami konstrukcije niso dale ničesar novega.

Ključna je sedma operacija. Izkaže se namreč, da operacije O7 oz. Belochinega pregiba ne moremo opraviti z evklidskim orodjem. Prefinjen način, kako to dokazati, je preko rešitve starogrškega problema o trisekciji kota. V poglavju 6 bomo spoznali več origami postopkov, ki nam poljuben kot razdelijo na tri skladne dele, pri tem pa uporabimo pregib iz operacije O7. Ker *trisekcija kota z evklidskim orodjem ni mogoča* (dokaz v [6, str. 77–78]), posledično tudi konstrukcija operacije O7 s tem orodjem ne obstaja.

Tako z evklidskim orodjem kot s prepogibanjem papirja lahko torej konstruiramo premice in točke ter prenašamo razdalje. Le evklidskim orodjem lahko konstruiramo tudi krožne loke, le s prepogibanjem papirja pa lahko tretjinimo poljuben kot. Origami nam ponuja še več rešitev, kjer je evklidsko orodje nemočno, npr. uporaba Belochinega pregiba je ključna za enega (ali več???) od postopkov reševanja kubičnih enačb, ki jih v splošnem z evklidskim orodjem ne moremo reševati (gl. poglavje 7).

Prednost origamija pred evklidskim orodjem se v skriva tudi v količini števil, ki jih lahko konstruiramo.

### 2.3.1 Algebrski pogled na evklidske konstrukcije

**Definicija 2.11.** Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine $\mathbb{R}^2$, imejmo dano abscisno os, izhodišče $(0, 0)$ in razdaljo 1. Če lahko le z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo točko $(x, 0)$, rečemo, da je $x$ *evklidsko-konstruktibilno* število. Pri tem upoštevamo tri pravila, ki izhajajo iz Evklidovih aksiomov in postulatov:

- nove točke določimo kot presečišča kombinacij premic in krožnic,
- skozi dani točki lahko z ravnilom potegnemo ravno črto ter
- za dano točko in razdaljo $r$ lahko s šestilom zarišemo krožnico, ki ima središče v tej točki in polmer $r$.

**Opomba 2.12.** Ker lahko ekvivalentno uporabimo šestilo, ki prenaša razdalje, je dovolj *kjerkoli* v ravnini konstruirati točki z medsebojno razdaljo $x$.

Jerman bralca v [6] na zelo strukturiran in nazoren način popelje čez dokaz, da lahko z evklidskim orodjem konstruiramo natanko vsa racionalna števila, njihove vsote, razlike, zmnožke, količnike, kvadratne korene ter linearne kombinacije vsega naštetega. To je množica

$$\mathbb{Q}(r) = \{a + b\sqrt{r}; a, b, r \in \mathbb{Q}; r > 0 \text{ in } \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}\},$$

ki je komutativen obseg oz. polje in hkrati tudi dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$ z bazo $\{1, \sqrt{r}\}$.

Da pokažemo, da so to vsa možna evklidsko-konstruktibilna števila, je potrebna natančna obravnava vseh možnih enačb, ki jih dobimo pri iskanju presečišč dveh krožnic, dveh premic ter krožnice in premice, potem pa je potrebno še dokazati, da nam vse nadaljne rabe konstruiranih presečišč podajo najmanjšo razširitev polja racionalnih števil, ki je zaprta za operacijo kvadratnega korenjenja. Jerman s tem dokaže naslednji izrek.

**Izrek 2.13.** *Število $r \in \mathbb{R}$ se da narisati le s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom $\mathbb{Q}$, enaka nenegativni potenci števila 2.*

**Opomba 2.14.** Razsežnosti obsega $\mathbb{Q}(r)$ pravimo tudi *stopnja razširitve obsega* $\mathbb{Q}$. Izkaže se, da je enaka stopnji minimalnega polinoma števila $r$ [6, str. 77].

Izreku takoj sledita dokaza, da trisekcija kota v splošnem ter konstrukcija števila $\sqrt[3]{2}$ z evklidskim orodjem nista mogoči [6, str. 77–78].

Iz izreka sledi tudi, da lahko vsa evklidsko-konstruktibilna števila analitično zapišemo kot rešitve kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti. O reševanju enačb se bomo natančneje ukvarjali v poglavju 7.

### 2.3.2 Števila, konstruktibilna z origamijem

Poiščimo še množico števil, ki jih lahko konstruiramo z origamijem.

**Definicija 2.15.** Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine $\mathbb{R}^2$, imejmo dano abscisno os, izhodišče $(0, 0)$ in točko $(1, 0)$. Če lahko le z enkratnimi ravnimi prepogibi iz operacij O1–O8 konstruiramo točko $(x, 0)$, rečemo, da je $x$ *origami-konstruktibilno* število. Pri tem upoštevamo pet pravil iz 2.2.

**Opomba 2.16.** Definicija izpolnjuje predpostavke izreka 2.8, zato se lahko ekvivalentno poslužujemo le operacij O2 in O7.

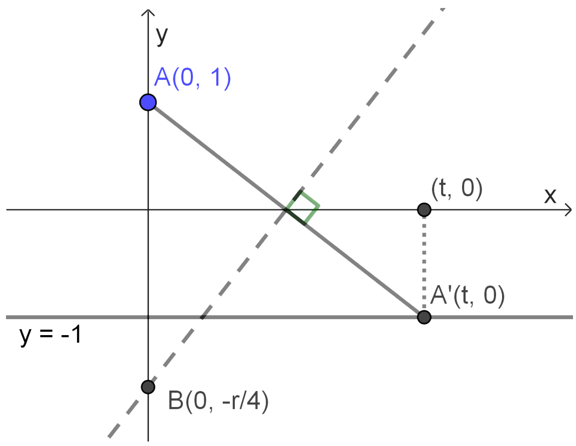
**Opomba 2.17.** Ker lahko s prepogibanjem prenašamo razdalje (trditev 2.10), je dovolj *kjerkoli* v ravnini konstruirati točki z medsebojno razdaljo $x$.

**Izrek 2.18.** *Za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+, \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$, so origami-konstruktibilna vsa števila iz množice $\mathbb{Q}(r) = \{a + b\sqrt{r}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.*

*Dokaz.* Ekvivalentno to pomeni, da lahko konstruiramo realne rešitve poljubne kvadratne enačbe, saj je njena splošna rešitev ravno oblike $a + b\sqrt{r}$ za neke $a, b \in \mathbb{Q}$ in $r \in \mathbb{Q}^+$. Torej moramo dokazati, da znamo s prepogibanjem seštevati, odštevati, množiti, deliti in koreniti dana oz. že konstruirana števila.

Na začetku imamo dani točki $(0, 0)$ in $(1, 0)$, ki predstavljata števili 0 in 1. Brez težav lahko za poljuben $x \in \mathbb{Z}$ konstruiramo točko $(x, 0)$, saj znamo s pomočjo v definiciji dane abscisne osi in dveh točk konstruirati vertikalne premice ter zrcaliti točke čeznje. Ker lahko z origamijem prenašamo razdalje, je tudi seštevanje in odštevanje že konstruiranih števil enostavno. Deljenje je podrobneje obravnavano v poglavju 4, kjer bomo spoznali, kako neko dolžino s prepogibanjem razdeliti na $n$ delov za poljubni $n \in \mathbb{N}$. S tem znanjem in uporabo množenja (ki je poseben primer seštevanja) lahko torej konstruiramo poljuben $x \in \mathbb{Q}$ oz. poljubno točko $(x, y)$ z racionalnima koordinatama v ravnini.

Manjka nam samo še konstrukcija kvadratnega korena poljubnega racionalnega števila. V ta namen si poglejmo naslednjo konstrukcijo (vzeto iz [5, str. 58]): Imejmo točko $A(0, 1)$, premico $y = -1$ in poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$ (po zgornjem premisleku jih znamo konstruirati). Na ordinatni osi označimo točko $B(0, -\frac{r}{4})$ in naredimo pregib skoznjo, ki točko $A$ položi na premico $y = -1$. Njena zrcalna slika je $A'(t, 0)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 12).




Slika 12: Konstrukcija števila $\sqrt{r}$ za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$.

Pregib poteka skozi točko $B$ in razpolovišče daljice $AA'$, torej je njegov koeficient $k_B = \frac{r}{2t}$ (izpeljavo prepuščamo bralcu). Ker je pregib simetrala daljice $AA'$, njena nosilka pa ima koeficient $k_A = -\frac{2}{t}$, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} k_B &= -\frac{1}{k_A} \\ \frac{r}{2t} &= \frac{t}{2} \\ r &= t^2 \text{ oz. } t = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Na koncu le še prepognemo pravokotnico na abscisno os skozi točko $A'$ in tako dobimo točko $(\sqrt{r}, 0)$. Torej smo konstruirali število $\sqrt{r}$ za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$. $\square$

**Posledica 2.19.** *Vsa evklidsko-konstruktibilna števila so origami-konstruktibilna.*

Izkaže pa se, da se da – v nasprotju z evklidsko-konstruktibilnimi števili – s prepogibanjem konstruirati *še več* števil kot le ta iz množice $\mathbb{Q}(r)$. V [9, str. 156] je na primer dokaz, da lahko z origamijem skonstruiramo $\sqrt[3]{k}$ za poljuben[5] konstruktibilen $k$ (v starogrških problemih je za 3. koren iz $k = 2$, a tisto bi delovalo tut za poljuben $k$?). Torej je na področju konstruiranja števil prepogibanje papirja močnejše od evklidskih konstrukcij.

[5]Za $k = 2$ je to rešitev starogrškega problema o podvojitvi kocke. Več o tem sledi v poglavju 6

# 3 Prepogibanje stožnic

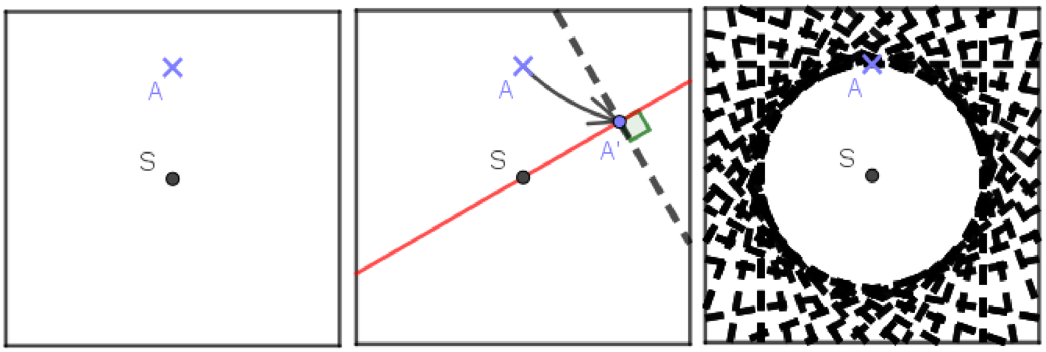
Iz didaktičnega vidika zelo zanimivo poglavje nam predstavlja konstrukcije tangent na stožnice s prepogibanjem papirja. Vsebina je tu predstavljena tako, da je bralec najprej povabljen, da vzame list papirja in ga prepogiba po navedenih korakih. Po opažanju, kaj se na papirju pri tem prikaže, preidemo na matematični del, kjer dokažemo, da so prepogibi res tangente na določeno stožnico.

Učitelji matematike so povabljeni, da si pri obravnavi stožnic vzamejo čas in izvedejo spodnje aktivnosti. Dijaki bodo z veliko verjetnostjo presenečeni nad rezultati zgibanja, kar jih lahko bolj motivira za obravnavo geometričnih lastnosti stožnic. Priporočljiva je tudi izvedba ure v računalniški učilnici, kjer lahko vsak dijak z ustreznim programskim orodjem (npr. Geogebra) sam poskusi zgraditi opisano konstrukcijo. S tem lahko znanje o stožnicah le še bolj utrdi.

Z origamijem ne moremo konstruirati gladkih krožnih lokov. Kljub temu pa lahko z upoštevanjem določenih korakov konstruiramo lomljeno obliko stožnic. Če bi korake ponavljali v nedogled, bi v limiti res dobili želeno krivuljo. Pa si najprej poglejmo, kako prepognemo krožnico.

## 3.1 Krožnica

***Aktivnost:*** *Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredi označi točko $S$. Nato drugje označi še točko $A$. Skozi točko $S$ prepogni poljubno premico in na njej označi točko $A'$, da velja $|SA| = |SA'|$. Nato skozi točko $A'$ prepogni pravokotnico na premico $SA'$. To ponovi čimvečkrat za drugo izbiro premice skozi točko $S$ (gl. sliko 13). Kaj opaziš?*




Slika 13: Sukanje izbrane točke okoli središča.

**Opomba 3.1.** V podpoglavju 2.2.3 smo se naučili prenašati razdalje, zato je zgornja konstrukcija mogoča, zahteva pa še nekaj dodatnih vmesnih pregibov.

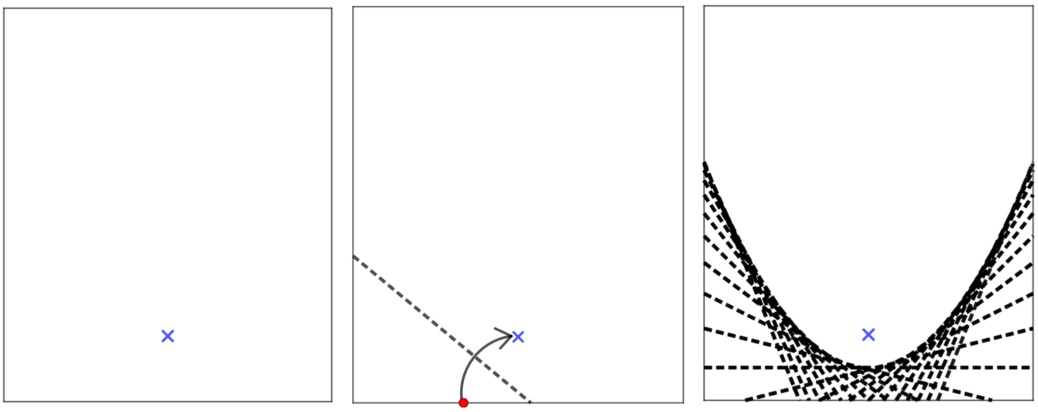
Iz konstrukcije pregiba kot pravokotnice na premico $SA'$ skozi točko $A'$ je naslednja trditev očitna in ne potrebuje zapisanega dokaza.

**Trditev 3.2.** *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na krožnico s središčem v točki $S$ in polmerom $SA$.*

Za različno izbiro premic skozi točko $S$ dobimo različne tangente in s tem lomljeno krivuljo. S ponavljanjem konstrukcije tangente v neskončnost je krivulja vedno bolj gladka in podobna krožnici.

## 3.2 Parabola

***Aktivnost:*** *Vzemi pravokoten list papirja in svinčnik ter nekje sredi spodnje polovice lista s pisalom označi točko. Nato si izberi točko še na spodnji stranici lista in ga prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za drugo izbiro točke na spodnji stranici papirja (gl. sliko 14). Kaj opaziš?*



Slika 14: Prepogibanje spodnje stranice papirja na izbrano točko.

Omenjen pregib je origami operacija O3, lahko pa nanjo gledamo tudi kot na operacijo O6. Za le-to smo v poglavju 2 že premislili, da nam pregib, ki poteka skozi dano točko $B$ in točko $A$ položi na premica $a$, poda tangento na parabolo z goriščem $A$ in premico vodnico $a$ (gl. sliko 5 in premislek nad njo). Tukaj pa take točke $B$ ni, kar pomeni le to, da smo s pregibom konstruirali neko tangento – pregib je namreč simetrala daljice, ki ima za krajišči obe izbrani točki iz navodila aktivnosti, torej obstaja točka (točka $P$ na sliki 5), ki je enako oddaljena od spodnje stranice lista in prve izbrane točke. Nadaljni premislek, da je to edino presečišče pregiba in parabole, je enak kot prej. Spodnja trditev je tako že dokazana.

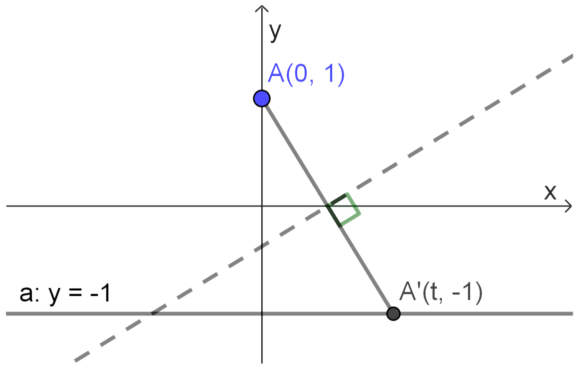
**Trditev 3.3.** *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na parabolo z goriščem v izbrani točk in premico vodnico, ki jo predstavlja spodnja stranica lista.*

Kaj se po večkrat izvedenih pregibih spodnje stranice lista na začetno izbrano točko na papirju izriše? Ker so pregibi tangente na parabolo, predvidevamo, da je izrisana krivulja ravno to. Preden pa to dokažemo, pa poiščimo enačbo teh tangent.

V ta namen si – brez škode za splošnost, saj lahko z origamijem zrcalimo in rotiramo točke ter premice – model poljubne točke in spodnje stranice lista natančno določimo. Uporabimo že znan model iz dokaza izreka 2.18 (pri konstrukciji $\sqrt{r}$): vzemimo točko $A(0,1)$ in premico $a : y = -1$, ki sta origami-konstruktibilni, in naredimo pregib, ki točko $A$ preslika na premico $a$ v točko $A'(t,-1)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 15).

Opcija je tudi, da vseeno malo bolj posplošimo in namesto 1 damo $c$, iz česar se pol lahko tut opazuje, kaj se dogaja, če gorišče bolj odmaknemo od premice vodnice ali pa ji ga približujemo.

Ker je pregib oz. konstruirana premica simetrala daljice $AA'$, lahko hitro določimo njeno enačbo. Koeficient nosilke daljice $AA'$ je $k_A = -\frac{2}{t}$, središče pa $(\frac{t}{2}, 0)$.




Slika 15: Pregib točke $A(0,1)$ na premico $a : y = -1$.

Tako hitro določimo enačbo pregiba:

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}. \tag{3.1}$$

Dobili smo parametrizacijo neke družine premic. Za vsak $t \in \mathbb{R}$ torej dobimo drugo tangento na parabolo z goriščem v točki $A$ in premico vodnico $a$, ki ima zgornjo enačbo.

Za vse točke na pregibu velja, da so enako oddaljene od točk $A$ in $A'$. Vemo že, da obstaja le ena točka $T \in a$, za katero velja $d(T, A) = d(T, a)$. Njena abscisa je $x = t$ (točka $T$ leži na pregibu točno nad točko $A'$) in iz enačbe 3.1, dobimo še ordinato $y = t^2/4$. Ker točka $T$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ leži na paraboli, pri menjavi $x = t$ dobimo njeno enačbo: $y = x^2/4$.

Vendar to ni dokaz, da je obris pregibov iz naloge res parabola. Zgornji premislek temelji na že znanem dejstvu, da so pregibi tangentni na parabole, vendar nam nič ne zagotavlja, da take točke $T$ ležijo točno na obrisu. (A mogoče je tam na strani 56 (Hull2013) spodej, ENVELOPE WAY, kakšen izrek, da ti tangente na ktrivuljo izrišejo prou to krivuljo?) (envelope oz. ovojnica: `https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_%28mathematics%29`)

Hull v [5, str. 55–56] poda prefinjen dokaz preko kvadratne formule. Vemo, da pregib O6 ne obstaja vedno (slika 4 desno). Poglejmo, ali obstajajo v ravnini našega modela kakšne točke, skozi katere ne moremo konstruirati pregiba oz. tangente. Vzemimo našo parametrizacijo družine tangent (enačba 3.1). Če jo rešimo za $t$, nam dobljena formula pove, za katere vrednosti $t$ pregib poteka skozi točko $(x, y)$:

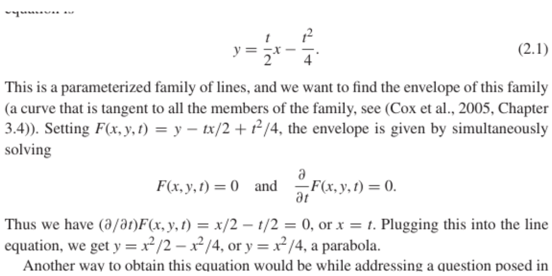
$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{x}{2}t + y = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - y}}{\frac{1}{2}}.$$

Enačba ima dve realni rešitvi pri pogoju $x^2/4 - y > 0$, kar pomeni, da vsako točko $(x, y)$, za katero ta pogoj velja, sekata dva pregiba. To so ravno točke pod parabolo $y = x^2/4$. Za točke *na* paraboli velja $y = x^2/4$, iz česar dobimo eno rešitev $t = x$, torej to točko seka natanko en pregib. Nazadnje nam ostane še območje, za katerega velja $y > x^2/4$, t. j. območje nad parabolo $y = x^2/4$, kar nam ne poda realnih rešitev za $t$, torej ga ne seka noben izmed konstruiranih pregibov. Tako je obris, ki ga dobimo v nalogi, res parabola $y = x^2/4$.

Torej je naš razmislek dva odstavka višje utemeljen. Sedaj, ko vemo, da je obris, ki nastane po večkratnem prepogibu spodnje stranice lista papirja na izbrano točko, res parabola, lahko pogledamo še več načinov za določitev enačbe parabole [5, str. 55–56]:

- Naj bo $y(x)$ naša parabola, katere enačbo iščemo. Vemo, da je v našem modelu za poljuben $t \in \mathbb{R}$ pregib v neki točki $(x, y(x))$ tangenten na parabolo, koeficient tangente pa je $t/2$. Očitno velja $x = t$, torej je koeficient kar $x/2$. Zato dobimo
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C.$$
Ker parabola očitno poteka skozi točko $(0, 0)$, je $C = 0$ in dobimo želeno enačbo $y = x^2/4$.

- Envelope way – gl. [5, str. 56 spodaj] (tema iz diferencialne ali algebraične geometrije). Gl. tudi sliko 16



equation is

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}. \quad (2.1)$$

This is a parameterized family of lines, and we want to find the envelope of this family (a curve that is tangent to all the members of the family, see (Cox et al., 2005, Chapter 3.4)). Setting $F(x, y, t) = y - tx/2 + t^2/4$, the envelope is given by simultaneously solving

$$F(x, y, t) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t}F(x, y, t) = 0.$$

Thus we have $(\partial/\partial t)F(x, y, t) = x/2 - t/2 = 0$, or $x = t$. Plugging this into the line equation, we get $y = x^2/2 - x^2/4$, or $y = x^2/4$, a parabola.

Another way to obtain this equation would be while addressing a question posed in

Slika 16: Izsek iz [4, str. 32].

na koncu še O7 – konstrukcija skupne parabole na dve paraboli – a se da iz tega še kaj pametnega izcimit?

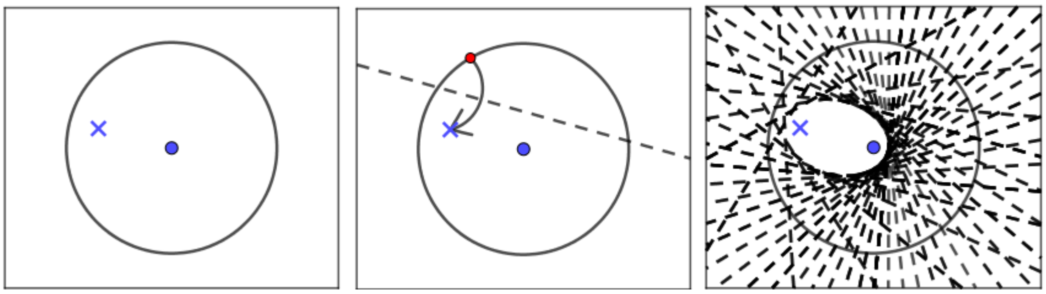
Aktivnosti za naslednji dve podpoglavji sta enaki kot v tem, le da namesto spodnje tranice lista v izbrano točko prepogibamo krožnico.

## 3.3 Elipsa

***Aktivnost:*** *Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na notranji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za drugo izbiro točke na krožnici (gl. sliko 17). Kaj opaziš?*

**Opomba 3.4.** Za izris poljubne krožnice tu lahko uporabimo šestilo. Prej smo videli, da znamo lomljeno krožnico prepogniti tudi z origamijem, vendar imamo potem na listu papirja veliko pregibov, ki nam ovirajo pogled na ciljno sliko. Zato je uporaba šestila v ta namen dovoljena predvsem iz praktičnega vidika.

Izgleda, kot da se nam izriše elipsa, ki ima za gorišči središče krožnice in izbrano točko znotraj nje. Spomnimo se, da na elipsi ležijo vse točke, katerih vsota razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi (t. j. dvakratnik velike polosi). V našem primeru je elipsa natančno določena, kar nam pove naslednja trditev [5, str. 60–61].



Slika 17: Prepogibanje krožnice na izbrano točko znotraj nje.

**Trditev 3.5.** *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na elipso z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo, enako polmeru izbrane krožnice.*

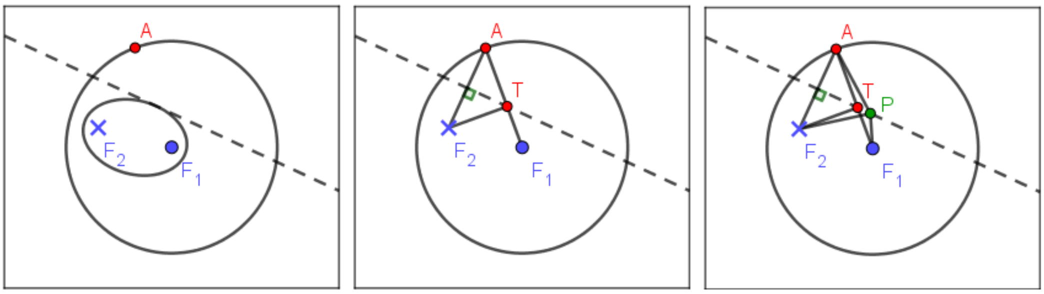
*Dokaz.* Naj bo točka $F_1$ središče krožnice s polmerom $r$ in točka $F_2$ poljubna točka znotraj krožnice. Potem je elipsa, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako $r$, natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko $A$ (slika 18 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to elipso.

Označimo s $T$ presečišče pregiba in daljice $AF_1$ (slika 18 na sredi). (Ali presečišče vedno obstaja? Ja, samo še dokaži to) Ker je pregib simetrala daljice $AF_2$, velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

$$|TF_1| + |TF_2| = |TF_1| + |TA| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke $A$. Ker je $r$ velika os elipse, točka $T$ leži na njej.

Pokažimo, da je to edino presečišče pregiba z elipso. Naj bo $P$ poljubna točka na pregibu, različna od $T$ (slika 18 desno). Ker leži na pregibu, velja $|PF_2| = |PA|$ in iz trikotniške neenakosti sledi $|PF_1| + |PF_2| = |PF_1| + |PA| > |F_1A| = r$, torej točka $P$ ne leži na elipsi. Pregib v točki $T$ je res tangenta na elipso.




Slika 18: Dokaz tangentnosti pregibov na elipso.

□

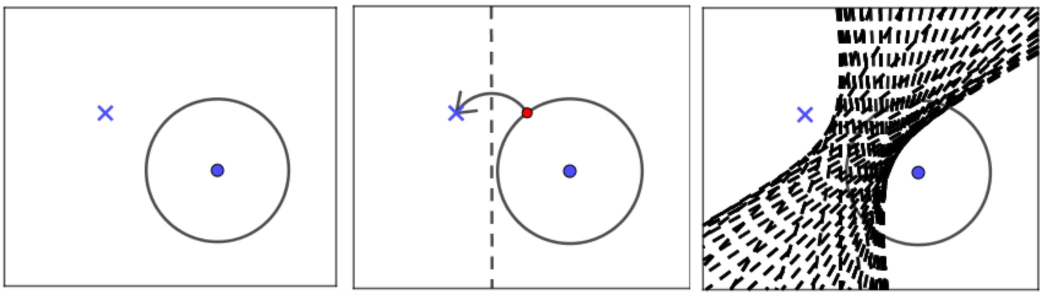
Bolj analitičen dokaz, kjer se izračuna splošno enačbo te elipse glede na izbrano krožnico in točko znotraj nje, najdemo v [12, str. 204–205].

še dokaz, da je OBRIS elipsa, kot prej s parabolo npr. iz kvadratne enačbe? Referenca na dokaz je v [5, str. 60]. Pa mogoče ista fora z ogrinjačami kot pri paraboli?

Kaj pa, če pri konstrukciji izberemo točko izven krožnice?

### 3.4 Hiperbola

***Aktivnost:*** *Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na zunanji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za drugo izbiro točke na krožnici (gl. sliko 19). Kaj opaziš?*



Slika 19: Prepogibanje krožnice na izbrano točko zunaj nje.

Podobno kot prej lahko sklepamo, da se nam izriše obris hiperbole. Spomnimo se, da na hiperboli ležijo vse točke, katerih absolutna vrednost razlike razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi. Tako kot pri elipski je tudi tu hiperbola natančno določena. Naslednja trditev in dokaz sta zato zelo podobna kot za elipso.

**Trditev 3.6.** *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na hiperbolo z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo (t. j. dvakratnik velike polosi), enako polmeru izbrane krožnice.*

*Dokaz.* Naj bo točka $F_1$ središče krožnice s polmerom $r$ in točka $F_2$ poljubna točka zunaj krožnice. Potem je hiperbola, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako $r$, natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko $A$ (slika 20 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to hiperbolo.

Označimo s $T$ presečišče pregiba in nosilke daljice $AF_1$ (slika 20 na sredi). (Ali presečišče vedno obstaja? NE, V 2 PRIMERIH DOBIMO ASIMPTOTO - ko je premica vzporedna k pregibu) Ker je pregib simetrala daljice $AF_2$, velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

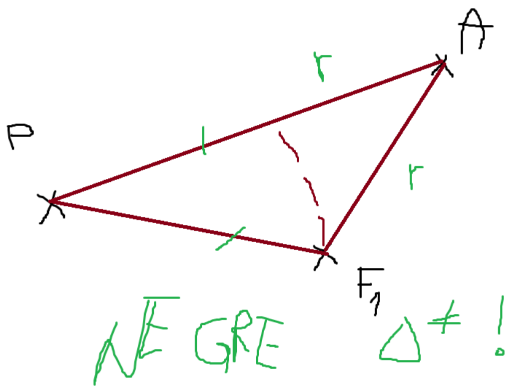
$$||TF_1| - |TF_2|| = ||TF_1| - |TA|| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke $A$. Ker je $r$ velika os hiperbole, točka $T$ leži na njej.

Pokažimo, da je to edino presečišče pregiba s hiperbolo. Naj bo $P$ poljubna točka na pregibu, različna od $T$ (slika 20 desno). Ker leži na pregibu, velja $|PF_2| = |PA|$ in sledi $||PF_1| - |PF_2|| = ||PF_1| - |PA||$. Predpostavimo, da je to enako $r$ in poglejmo, za katere možne položaje točke $P$ je to mogoče:

Spodnja slikca je ideja, dodelaj da bo natančno. Fora je spet trikotniška neenakost. In da mora P ležat na nosilki $AF_1$ IN pregibu, kar je točno točka T, ki je različna od nje, kar je pač protislovje.

- Točka $P$ leži na krožnici: Potem je $|PF_1| = r$, iz česar sledita dve možnosti:

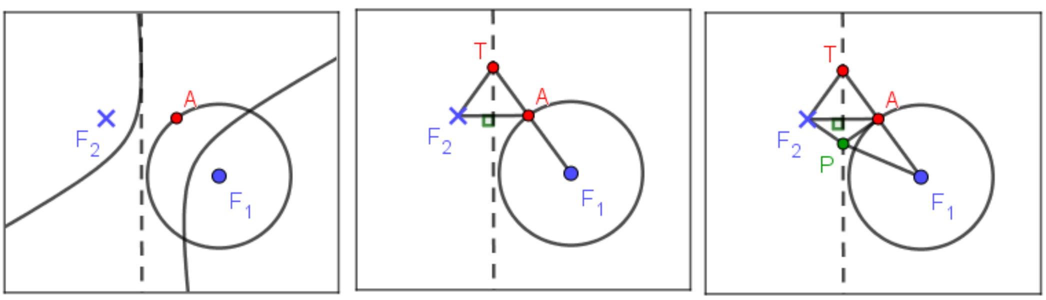



$|PA| = 0$ oz. $P = A$. To pomeni, da pregib poteka skozi točko $A$, kar pa ni mogoče.

$|PA| = 2r$ oz.

- Točka $P$ leži znotraj krožnice:
- Točka $P$ leži zunaj krožnice: Potem je $|PF_1| > r$. Če je $|PA| = |PB|$ (kjer je točka $B$ presečišče daljice $PF_1$ s krožnico), pridemo v protislovje s trikotniško neenakostjo, saj dobimo $|PA| + |AF_1| = |PB| + |BF_1| = |PF_1| < |PA| + |AF_1|$. (Naredi slikco kot je na 18ki desno, pa dodaj še točko B). Potem lahko velja samo še $|PA| > 2r$. dodelaj

DOKAŽI, DA NIČ OD TEGA TROJEGA NE GRE!! Ker ne velja nič od tega trojega, točka $P$ ne leži na hiperboli. Pregib v točki $T$ je res tangenta nanjo.




Slika 20: Dokaz tangentnosti pregibov na hiperbolo.

□

Bolj analitičen dokaz, kjer se izračuna splošno enačbo te hiperbole glede na izbrano krožnico in točko zunaj nje, najdemo v [12, str. 205–206]. Nekaj je tudi v [4, str. 34 spodaj]. Lep dokaz za elipso in hiperbolo (oboje skupej) je tudi v [7] –" a very nice analytical method that simultaneously proves that the resulting envelopes are ellipses and hyperbolas". Pa tudi v [14] so dokazi "for the parabola, ellipse, and hyperbola that are the most concise and elegant that the author has seen"

# 4 Prepogibanje kvadrata

# 5 Konstrukcija pravilnih $n$-kotnikov

.

Izrek: Pravilni $n$-kotnik lahko narišemo le s šestilom in ravnilom natanko tedaj, ko je število $n$ oblike $n = 2^r(2^{2^s} + 1)$, kjer sta $r$ in $s$ nenegativni celi števili, število $2^{2^s} + 1$ pa je praštevilo.

Fermat je domneval, da je vsako število oblike $2^{2^s} + 1$ praštevilo. To pa ni res. Že Euler je ugotovil, da je število $2^{2^5} + 1$ sestavljeno. Deljivo je s številom 641.

To vse je iz [6, str. 78].

# 6 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

## 6.1 Trisekcija kota

Neka konstrukcija je v [9, str. 155].

## 6.2 Podvojitev kocke

V prostoru imamo kocko. Ali se da samo z ravnilom in šestilom narisati stranico kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot dana kocka?

Če je stranica kocke dolga 1, je stranica podvojene kocke dolga $\sqrt[3]{2}$. Ker je obseg $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad obsegom $\mathbb{Q}$ (enačba $x^3 - 2 = 0$ nima racionalne rešitve), podvojitev kocke ni mogoča [6, str. 78].

# 7 Reševanje enačb

## 7.1 Kvadratna enačba

Z neoznačenim ravnilom in šestilom lahko konstruiramo natanko števila oblike $a + b\sqrt{r}$, kjer so $a, b, r \in \mathbb{Q}$ (gl. podpoglavje 2.3.1). Take oblike je tudi splošna rešitev kvadratne enačbe. Vemo, da z origamijem lahko konstruiramo še več števil kot z evklidskim orodjem, zato nam tudi prepogibanje papirja omogoča – preko operacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in korenjenja – konstruirati katerokoli rešitev poljubne kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti.

Origami operacija O6 nam podaja tangento na parabolo in lahko se vprašamo, ali je mogoče rešitve poljubne kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti konstruirali brez predhodnega računanja po kvadratni formuli. Odgovor je pozitiven, vendar zahteva tehten premislek ([4, str. 36–38]) Predelaj in zapiši, tudi omeni pretvorbo evklidske konstrukcije v origami, ki je tam navedena.

Za kubične enačbe iz parabol lahko gledaš [9, str. 150].

# 8 Naloge

1. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo vzporednico k dani premici skozi točko, ki ne leži na tej premici.

2. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo zrcalno sliko točke $P$ čez premico $p$ (točka ne leži na premici) [4, rešitev na str. 28].

# Literatura


[1] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.

[2] K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

[3] T. L. Heath, *The thirteen books of euclid's elements, Vol. 1 (books i and ii)*, Dover Publications, Inc., 1956.

[4] T. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

[5] T. Hull, *Project origami: activities for exploring matmehatics*, Taylor & Francis Group, 2013.

[6] M. Jerman, *O konstrukcijah z ravnilom in šestilom*, Obzornik za matematiko in fiziko **3**(45) (1998) 73–78.

[7] A. J. Lotka, *Construction of conic sections by paper-folding*, School Science and Mathematics **7**(7) (1907) 595–597.

[8] S. Maraž, T. Božič in M. Torkar, *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.

[9] G. E. Martin, *Geomteric constructions*, Springer New York, 1997.

[10] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na `https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami`.

[11] M. Hvidsten, *Geometry with geometry explorer* (ur. R. E. Ross), The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.

[12] S. G. Smith, *Paper folding and conic sections*, The Mathematics Teachers **96**(3) (2003) 202–207.

[13] T. S. Row, *Geometric exercises in paper folding* (ur. D. E. S. Wooster WOoodruff Beman), The Open Court Publishing Company, 1917, dostopno na `https://ia800907.us.archive.org/7/items/tsundararowsgeo00rowrich/tsundararowsgeo00row pdf`.

[14] R. C. Yates, *Folding the conics*, The American Mathematical Monthly **50**(4) (1943) 228–230.

[15] T. Zore, *Origami geometrija*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2022.