

ORIGAMIKA:

Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja

Avtorji: Sara Maraž, Tjaš Božič, Miha Torkar

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Področje: SŠ matematika

April, 2016

Škofijska gimnazija Vipava

Zahvala

Zahvaljujemo se profesorjem Škofijske gimnazije Vipava:

- mentorju mag. Alojzu Grahorju za spodbude in usmerjanje pri izdelavi raziskovalne naloge ter za pomoč pri iskanju virov,
- dr. Ireni Krapš Vodopivec za lektorski pregled naloge in
- prof. Danijeli Fabčič za pregled prevoda povzetka v angleščino.

Povzetek

Origami je japonska umetnost zgibanja papirja. Posebna oblika origamija je matematični origami, pri katerem prepogibamo list papirja (model ravnine) in proučujemo matematične lastnosti objektov v ravnini, ki pri tem nastanejo (točke, premice). Kazuo Haga je matematični origami poimenoval »origamics«, v nalogi pa predlagamo pojem »origamika«. Dokazano je, da je matematični origami močnejše orodje, kot sta neoznačeno ravnilo in šestilo. Tako je bil na primer s prepogibanjem papirja rešen problem podvojitve kocke in problem razdelitve kota na tretjine, saj je s prepogibanjem papirja mogoče rešiti kubično enačbo. Cilj raziskovalne naloge je postaviti in dokazati čim več matematičnih hipotez (matematičnih izzivov), ki izvirajo iz prepogibanja lika enakostraničnega trikotnika. V nalogi je raziskanih in dokazanih preko trideset matematičnih izzivov.

Ključne besede: *matematični origami, origamika, enakostranični trikotnik, prepogibanje papirja.*

ABSTRACT

Origami is a Japanese art of folding paper. Mathematical origami is a special type of origami in which a sheet of paper (a plane model) is folded and then the resulting mathematical attributes of the objects in the plane (straight lines, points) are studied. Mathematical Origami was named *Origamics* by Kazuo Haga; however, the term *Origamika* is suggested in the research project. Mathematical origami has been proved to be a stronger mathematical tool than unmarked ruler and a pair of compasses. For example, both the duplication of the cube problem and the angle trisection were solved by folding paper since cubic equation can also be solved in the same manner.

The aim of the research project is to set up and prove as many mathematical hypotheses (mathematical challenges) originating from the folding of equilateral triangle as possible. More than thirty mathematical challenges have been proved in the research.

Key words: *mathematical origami, origamics, equilateral triangle, paper folding*

Kazalo

Zahvala	2
Povzetek	3
1. Uvod	5
1.1. Matematični origami = ORIGAMIKA	5
1.1.1. Kaj je matematični origami?	5
1.1.2. Pravila matematičnega origamija	6
1.1.3. Uvodna izziva	9
1.2. Cilji naloge	14
1.3. Metode dela	14
2. Vsebina	15
2.1. Pregib enega vogala	15
2.1.1. Pregib enega oglišča na nasprotno stranico	15
2.1.2. Pregib enega oglišča v zunanost trikotnika	33
2.1.3. Pregib enega oglišča v notranost trikotnika	34
2.2. Pregib sosednjih stranic na premico skozi skupno oglišče	35
2.3. Hkratno prepogibanje dveh vogalov v skupno točko	40
2.4. Hkratno prepogibanje treh vogalov v skupno točko	42
2.5. Osnovni, glavni in pridruženi pregibi	44
2.6. Enakostranični trikotnik v kvadratu	49
2.7. Enakostranični trikotnik s prepogibanjem in enim rezom	51
2.8. Konstrukcija enakostraničnega trikotnika, če je dana osnovnica ali višina	53
2.9. Popolnoma zloženi enakostranični trikotnik	54
2.10. Poliedri, ki nastanejo s prepogibanjem enakostraničnega trikotnika.	58
3. Zaključek	63
4. Viri in literatura	64
5. Slikovno kazalo	65
6. Kazalo tabel	67
7. Priloge	68

1. Uvod

1.1. Matematični origami = ORIGAMIKA

1.1.1. Kaj je matematični origami?

Origami¹ je stara japonska in kitajska umetnost, ko s prepogibanjem papirja (brez lepila in škarij) izdelujemo praktične ali umetniške izdelke. Vendar se je prepogibanje papirja prijelo tudi v matematiki. Tako je matematik T. Sundara Row's leta 1901² izdal knjigo z naslovom *Geometric Escercises in Paper Folding*, v kateri je vrsta zanimivih geometrijskih nalog, ki so rešljive po običajni poti z neoznačenim ravnilom in šestilom in pa s prepogibanjem papirja. Prepogibanje papirja je lahko tudi izziv za postavljanje novih matematičnih problemov. Vse kaže, da je bil ta matematični prijem skoraj stoletje pozabljen. Zadnja desetletja pa se zelo hitro razvija. Na drugem znanstvenem srečanju o origamiju leta 1994 je Kazuo Haga predlagal za znanstveni (ali matematični origami) ime »origamics«. Nov pojem je izpeljal iz besede »origami« in končnice »-ics«, ki običajno označuje znanost ali tehnologijo, na primer »mathematics«. Izdal je tudi knjigo z naslovom »ORIGAMICS: Mathematical Exploration through Paper Folding«. V uvodu te knjige pravi, da je razlika med origami in origamics tudi v končnem produktu: prej je iz papirja izdeloval modele živali, rož, sadja ... (po osnovni izobrazbi je namreč biolog), sedaj pa samo pregibe in gube (Haga 2008: xi). Pri matematičnem origamiju (*origamics*) pregibe na papirju obravnavamo kot daljice oziroma modele za premice v dvodimenzionalni ravnini. Odmislimo pa debelino papirja (papir služi kot model za ravnino).

Po zgledu Kazuo Haga predlagamo ime ORIGAMIKA. Izhaja iz besede origami in ima končnico, ki se v slovenščini tudi uporablja pri poimenovanju znanstvenih disciplin, na primer matematika, fizika, informatika. S pojmom ORIGAMIKA bomo označevali matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja.

Kaj lahko konstruiramo s prepogibanjem papirja? Humiaki Huzita je leta 1985 predstavil šest aksiomov, ki opisujejo konstrukcije origamija v ravnini. Hatori je leta 2004 dodal še sedmi aksiom. Ko naredimo s papirjem pregib, dobimo v ravnini papirja model premice, tako imenovano premico pregiba. S pregibanjem pa preslikujemo tudi točke. Točko T, ki jo s pregibom preslikamo v točko T', lahko na papirju (ravnini) označimo z barvno piko (modelom točke). V nadaljevanju bomo daljico (premico) pregiba na kratko imenovali pregib. Na slikah bomo pregibe označevali s pikčastimi daljicami.

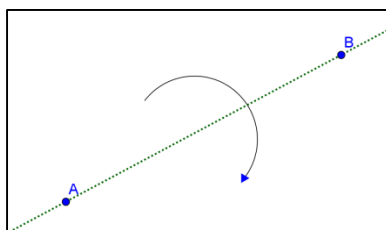
¹ origami –ja *m* [jap. *oru* zložiti, zgibati, prepogniti + *gami* iz *kami* papir] japonska umetnost zgibanja papirja (Tavzes 2002: 824)

² Domnevamo, da je bila to že druga izdaja. Tretja izdaja je bila leta 1917.

1.1.2. Pravila matematičnega origamija

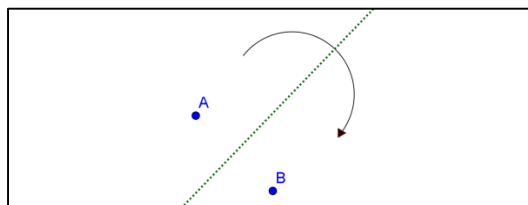
Pravilom matematičnega origamija pravimo kar *aksiomi origamija* (glej na primer Demaine, O'Rourke 2007: 285). Vseh aksiomov origamija, ki se nanašajo na ravnino, je sedem.

A01: Za dani dve različni točki A in B v ravnini obstaja pregib, ki poteka skozi točki A in B .



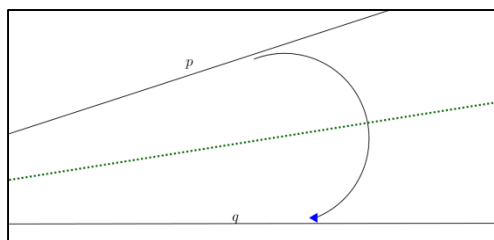
Slika 1: Aksiom origamija **A01**

A02: Za dani dve različni točki A in B v ravnini obstaja pregib, ki je simetrala daljice AB .



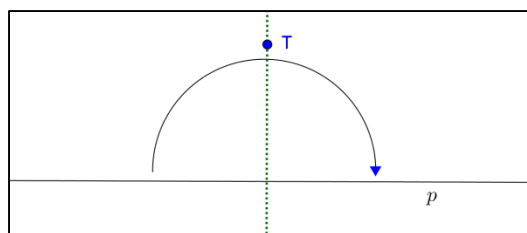
Slika 2: Aksiom origamija **A02**

A03: Za dani dve premici p in q v ravnini obstaja pregib, ki je simetrala kota, določenega s premicama p in q .



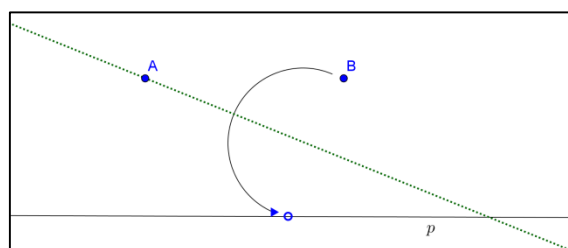
Slika 3: Aksiom origamija **A03**

A04: Za dano točko T in premico p v ravnini obstaja pregib, ki je pravokotnica na premico p skozi točko T .



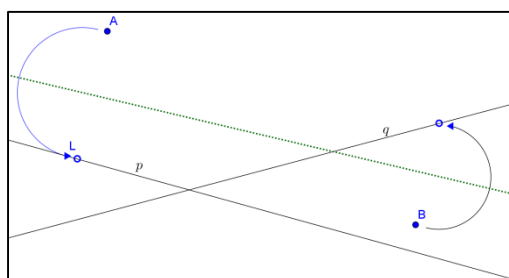
Slika 4: Aksiom origamija **A04**

A05: Za dani točki A in B ter premico p v ravnini obstaja pregib, ki poteka skozi točko A in preslika točko B na premico p .



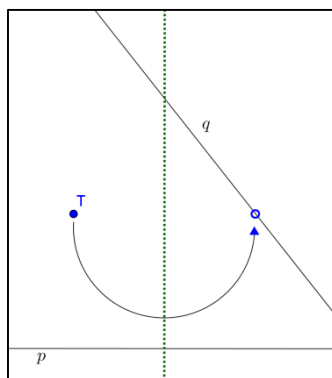
Slika 5: Aksiom origamija **A05**

A06: Za dani točki A in B ter premici p in q v ravnini obstaja pregib, ki hkrati preslika točko A na premico p in točko B na premico q .



Slika 6: Aksiom origamija **A06**

A07: Za dano točko T ter dani premici p in q v ravnini obstaja pregib, ki je pravokoten pa premico p in točko T preslika na premico q .



Slika 7: Aksiom origamija **A07**

Kaj lahko konstruiramo s temi aksiomi?

Aksiomi origamija A01 do A06, ki definirajo pravila prepogibanja papirja, so močnejši kot konstrukcije z neoznačenim ravnilom in šestilom. Dokazano je, da je prvih pet aksiomov enakovrednih konstrukcijam z neoznačenim ravnilom in šestilom. Na ta način lahko konstruiramo racionalna števila in korene kvadratnih enačb, ki imajo za koeficiente števila, dobljena na tak način. Na voljo imamo neoznačeno ravnilo (premico) in enačbo krožnice (ki je drugega reda). Njun presek je kvadratna enačba. Dodatna »moč« aksiomov origamija je skrita v šestem aksiomu A06. Ta omogoča konstruiranje rešitev kubičnih enačb (Hull 2013: 83), (povzeto po Demaine, O'Rourke 2007: 287, 288). Šesti aksiom A06 omogoča konstruiranje skupne tangente dveh parabol (Demaine, O'Rourke 2007: 288). Sedmi aksiom je »kvadratičen«. Lang je dokazal, »da teh sedem aksiomov tvori celoto v smislu, da so to vse operacije, ki določajo možni pregib iz danih kombinacij točk in daljic.« (Demaine, O'Rourke 2007: 288).

V Uvodnem izzivu 2 navajamo rešitev problema trisekcije kota s prepogibanjem papirja. Analitično se ta problem prevede na enačbo tretje stopnje. Iz enakosti za kosinus trojnega kota $\cos(3\varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ dobimo namreč v primeru $\varphi = 20^\circ$ enačbo

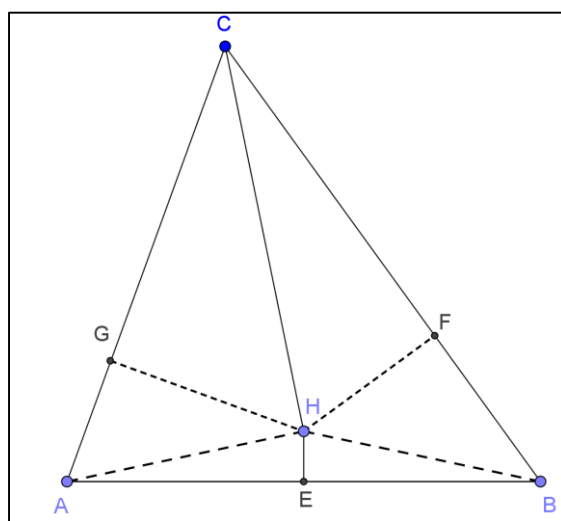
$$8x^3 - 6x - 1 = 0, \quad (1)$$

kjer smo označili $x = \cos 20^\circ$. Enačba (1) je nerazcepna nad množico racionalnih števil. Ni je mogoče prevesti na sistem enačb $ax + by + c = 0$ (premica – ravnilo) in $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ (krožnica – šestilo). Od tod sklepamo, da v splošnem trisekcija kota ni mogoča z neoznačenim ravnilom in šestilom (glej na primer Fuchs 2000: 2 ali Čabrič 2003/2004: 264). Trisekcija kota je možna z ravnilom in šestilom za kote oblike $\frac{90^\circ}{2^n}$ (Čabrič 2003/2004: 265).

1.1.3. Uvodna izziva

Uvodni izziv 1: Vsak trikotnik je enakokrak.

V uvodu avtorjem dostopne najstarejše knjige o matematičnem origamiju (Sundara Row 1901: ix)³ je opis zanimivega problema, ki ga tu povzemamo. »Dokazali« bomo, da je vsak trikotnik enakokrak. Vzemimo poljubni trikotnik (glej sliko 8). Daljica EH leži na simetrali stranice AB , daljica HC leži na simetrali kota ACB .



Slika 8: K dokazu, da je vsak trikotnik enakokrak

- a) Recimo, da se nosilki daljic CH in EH ne sekata. Potem sta vzporedni. Simetrala kota ACB je torej pravokotna na osnovnico AB , kar je možno edino v primeru, ko je trikotnik ABC enakokrak.
- b) Recimo, da se nosilki daljic CH in EH sekata v točki H (glej sliko 8). Iz točke H narišimo daljico HG , pravokotno na stranico AC in daljico HF , pravokotno na stranico BC . Povežimo HA in HB (z daljicama). Trikotnika CGH in CFH sta skladna, saj se ujemata v skupni stranici in dveh kotih. Zato je $|GC| = |FC|$. Prav tako sta skladna trikotnika AHG in BHF , saj se ujemata v dveh stranicah ($|HG| = |HF|$, $|HA| = |HB|$) in enem kotu (pravi kot). Zato je tudi $|AG| = |BF|$. Potem velja:

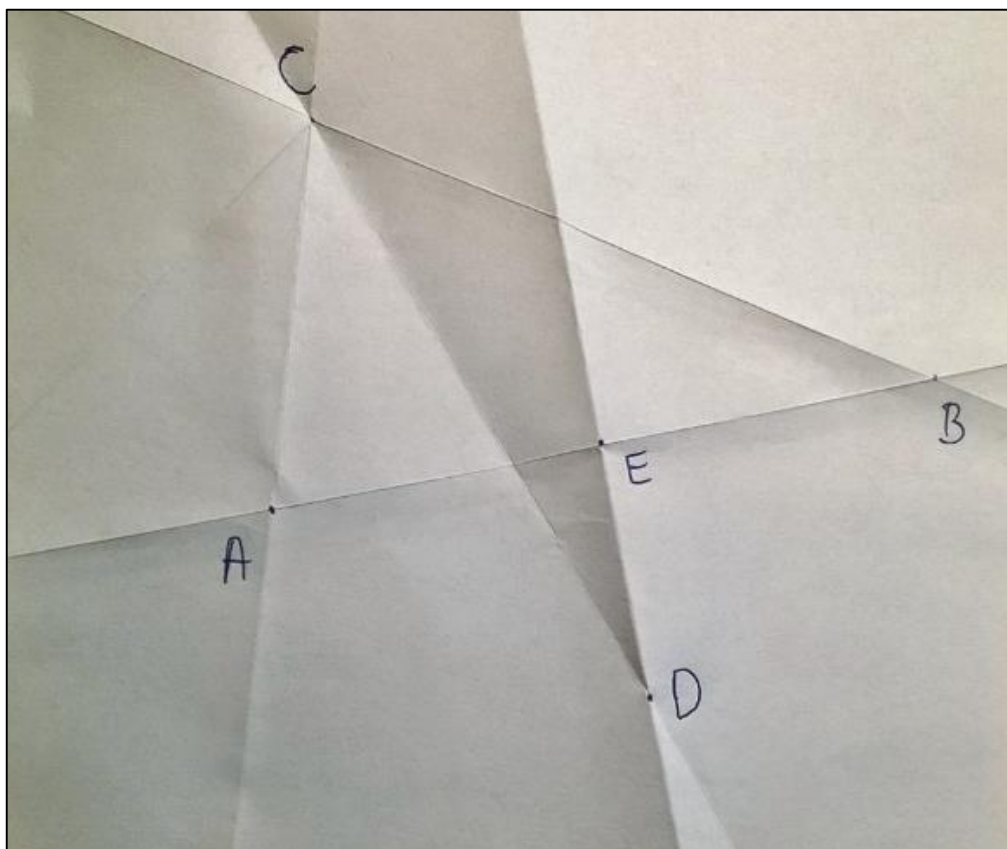
$$|AG| + |GC| = |BF| + |FC|$$

³ Knjiga T. Sundara Row: *Geometric Exercises in Paper Folding* je bila izdana leta 1901, uvod je avtor napisal leta 1893.

$$|AC| = |BC|$$

Tako smo »dokazali, da je vsak trikotnik enakokrak«, kar seveda ni res.

»Narišimo« skico, to je situacijo na sliki 8 s prepogibanjem papirja (glej sliko 9). Kakršenkoli trikotnik vzamemo, nikoli ne leži presečišče simetrale stranice in simetrale nasprotnega kota v notranjosti trikotnika. Sklepamo, da je bila skica na sliki 8 zavajajoča.



Slika 9: Presečišče simetrale stranice in simetrale nasprotnega kota s prepogibanjem (foto: Miha Torkar)

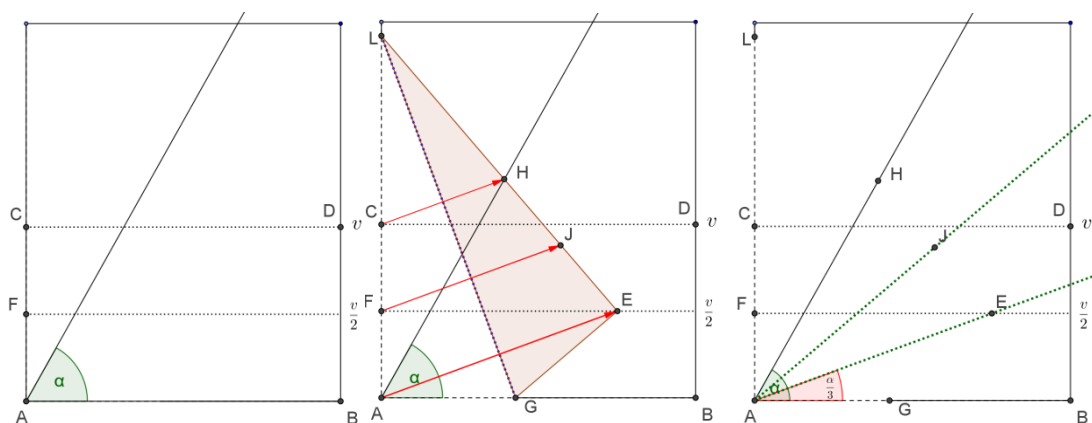
Utemeljitev: Naj bo točka D presečišče simetrale kota ACB in trikotniku ABC očrtane krožnice (glej sliko 9). Ker je nosilka daljice CD simetrala kota ACB , sta kota ACD in DCB skladna, hkrati pa sta to obodna kota v trikotniku ABC očrtani krožnici, torej razdeli točka D krožni lok AB na polovico. To pa pomeni, da leži točka D na simetrali stranice AB . Ker leži očrtana krožnica trikotnika vedno v zunanosti trikotnika (razen oglišč), se simetrala stranice in simetrala njej nasprotnega notranjega kota trikotnika vedno sekata v zunanosti trikotnika.

Ta primer kaže, da prepogibanje papirja lahko olajša reševanje geometrijskih problemov, hkrati pa nam ponuja nove izzive.

Uvodni izziv 2: Problem razdelitve kota na tri enake dele

Razdelitev kota na tri skladne kote je eden izmed treh slavnih starogrških problemov, ki se jih ne da rešiti s pomočjo neoznačenega ravnila in šestila⁴. Druga dva problema sta *kvadratura kroga* in *podvojitev kocke*.⁵ Problem tretjinjenja kota (razdelitve kota na tri enake dele) je rešljiv z matematičnim origamijem. Na sliki 10 so prikazani koraki rešitve problema. Vzeli bomo, da je dani kot ostri kot. Označimo ga z α . (Topi kot, označimo ga na primer z β , bi tretjinili tako, da bi na tri enake dele najprej razdelili njemu suplementarni kot $\alpha = 180^\circ - \beta$. Potem je $\frac{\beta}{3} = 60^\circ - \frac{\alpha}{3}$.)

Opisali bomo Abe-jevo trisekcijo, ki jo je objavil leta 1970 (Demaine, O'Rourke 2007: 286). Ostri kot α narišemo na spodnji rob AB pravokotnika tako, da je vrh v levem oglišču A , en krak pa vzporeden s spodnjo stranico (glej sliko 10). Spodnji rob prepognemo tako, da na primerni višini, vzporedno z osnovnico AB , dobimo pregib CD (recimo na višini v , točka C je levo oglišče pregiba), nato pa spodnji pravokotnik še razpolovimo (dobimo pregib, vzporeden osnovnici AB , na višini $\frac{v}{2}$). Naslednji pregib naredimo tako, da levo oglišče A prepognemo tako, da sovpada s pregibom na višini $\frac{v}{2}$, skrajna leva točka C že prej narejenega pregiba na višini v pa se prekrije z drugim krakom kota. Točko, kjer oglišče A prekrije pregib, označimo na papirju z E , slika točke F naj bo točka J , ki jo tudi označimo na papirju. Poltraka AE in AJ (ki ju dobimo s pregibom skozi AE in AJ) razdelita kot α na tri enake kote $\frac{\alpha}{3}$.

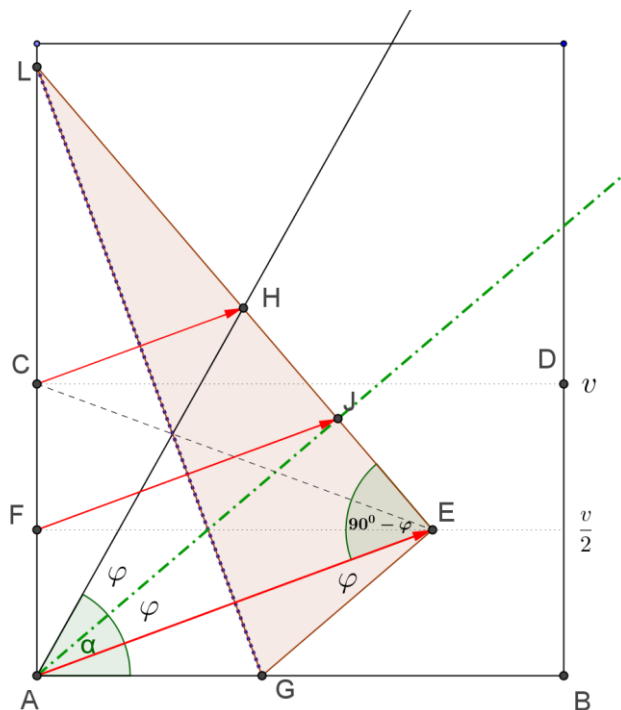


Slika 10: Potek razdelitve ostrega kota na tri skladne dele

⁴ Da se kota ne da razdeliti na tri skladne kote z neoznačenim ravnilom in šestilom, je dokazal Wantzel leta 1836.

⁵ Problem *kvadrature kroga* je konstruirati kvadrat z enako ploščino, kot jo ima dani krog. Problem *podvojitve kocke* pa je konstruirati dolžino osnovnega roba kocke s podvojeno prostornino.

Dokaz 1 (geometrijski dokaz): Končna situacija po zadnjem pregibu je prikazana na sliki 11. Ker leži točka F na razpolovišču daljice AC , je trikotnik CAE enakokrak. Opazimo, da je trikotnik EHA zrcalna slika trikotnika CAE preko nosilke pregiba GL , torej je tudi trikotnik EHA enakokrak. Premica AJ je simetrala kota EAH in pravokotna na stranico EH , saj je trikotnik EHA enakokrak.



Slika 11: K dokazu razdelitve kota na tretjine

Enaka kota EAJ in HAI označimo s φ . V pravokotnem trikotniku AEJ je potem kot AEJ enak $90^\circ - \varphi$. Ker je kot GEL pravi kot (to je vogal pravokotnika), je kot AEG enak φ . Trikotnik EAG je enakokrak, zato je tudi kot GAE enak φ . Tako imamo $\alpha = \varphi + \varphi + \varphi = 3\varphi$ in $\varphi = \frac{\alpha}{3}$.

q.e.d.

Dokaz 2 (analitični dokaz): V viru (Fuchs 2000: 4) je narejen analitični dokaz. V ustrezno izbranem koordinatnem sistemu je izpeljana enačba $4x^3 - 3x - a = 0$, kjer je $a = \cos \alpha$. V primeru $\alpha = 60^\circ$ dobimo enačbo (1).

q.e.d.

Poglejmo še, katere aksiome smo uporabili pri konstrukciji.

Kot (ostri kot) narišemo tako, da ima vrh v levem spodnjem oglišču pravokotnika, en krak pa predstavlja spodnji rob pravokotnika.

1. Prvi pregib je po $A03$.
2. Tudi drugi pregib je po $A03$.
3. Tretji pregib je po $A06$ (dve različni točki preslikamo na dve različni premici).
4. Zadnja dva pregiba sta po $A01$ (premica skozi dve dani točki).

Opomba: S prepogibanjem je rešljiv tudi problem podvojitve kocke (glej na primer Demaine, O'Rourke 2007: 289 ali pa Fuchs 2000: 7).

1.2. Cilji naloge

V literaturi je zelo dobro obdelano prepogibanje kvadrata in pravokotnika. Znani so Hagovi izreki (prvi, drugi in tretji Hagov izrek) v kvadratu in srebrnem pravokotniku (glej Haga 2008) in drugi matematični problemi (glej na primer Lang 2014). Enakostranični trikotnik je omenjen le tu in tam, običajno v povezavi s kvadratom. V raziskovalni nalogi obravnavamo origamiko enakostraničnega trikotnika.

Cilj naloge je *preiskovati* prepogibanje enakostraničnega trikotnika, *postaviti* čim več matematičnih *hipotez* in jih *dokazati*.

1.3. Metode dela

Pri izdelavi raziskovalne naloge smo uporabljali

- metodo dela po strokovni literaturi ter
- metodo matematičnega sklepanja in dokazovanja.

Pri postavljanju hipotez smo si pomagali

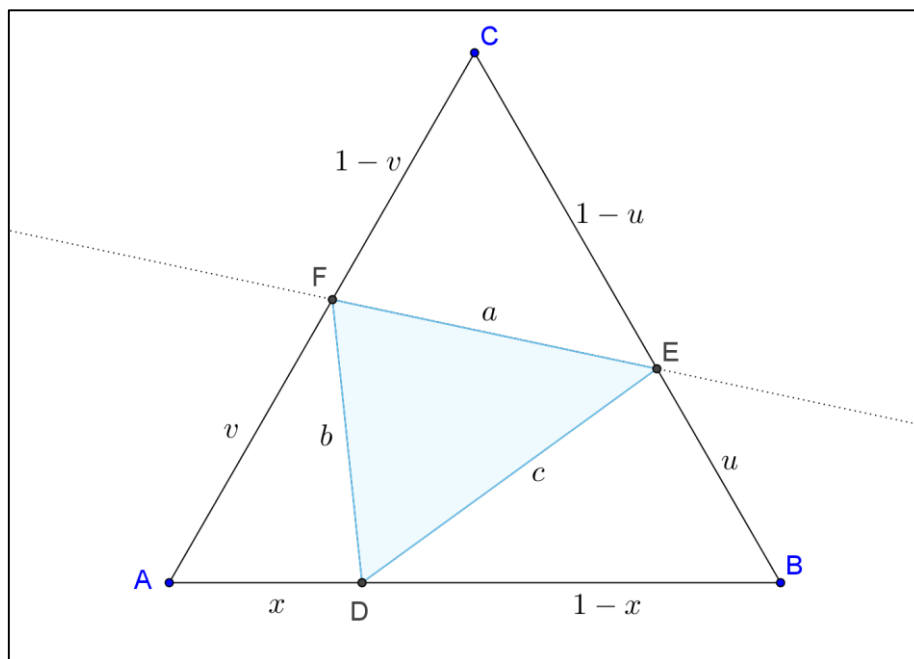
- s prepogibanjem lika enakostraničnega trikotnika in
- z grafičnim programom Geogebra.

Daljša izračuna smo izvedli s programom Derive 6.

2. Vsebina

2.1. Pregib enega vogala

2.1.1. Pregib enega oglišča na nasprotno stranico



Slika 12: Pregib oglišča na nasprotno stranico

Izziv 1: Trikotnika ADF in DBE sta podobna (glej sliko 12).

Dokaz: Upoštevajmo oznake na sliki 12. Kota DAF in EBD merita vsak 60° . Označimo kot $BDE = \varphi$ in kot $DEB = \varepsilon$.

Med njima velja zveza $\varepsilon = 120^\circ - \varphi$. Izračunajmo velikost kota

$$\text{kot } FDA = 180^\circ - 60^\circ - \varphi = \varepsilon.$$

Ker je kot $DAF = 60^\circ$, je potem kot $AFD = \varphi$. Trikotnika ADF in DBE se ujemata v notranjih kotih, zato sta podobna.

q.e.d.

Izziv 2: Naj bo dolžina stranice enakostraničnega trikotnika enaka 1. Dolžine stranic a, b, c, u in v izrazimo z dolžino stranice $|AD| = x$ (glej sliko 12).

Prvi način (preko razmerij v podobnih trikotnikih).

Ker sta trikotnika ADF in DBE podobna, se ujemata v razmerju enakoležnih stranic. Zapišimo razmerji:

$$\frac{1-v}{x} = \frac{1-u}{u}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{u}{1-x}$$

Iz prve enačbe izrazimo u : $u = \frac{x}{x-v+1}$ ter vstavimo v drugo enačbo: $\frac{x}{v} = \frac{\frac{x}{x-v+1}}{1-x}$ in izrazimo v in nato še u :

$$v(x) = \frac{x^2-1}{x-2}, \quad u(x) = \frac{x(2-x)}{x+1} \quad (2)$$

Nekaj več dela je potrebnega za izračun dolžine stranice $a = |FE|$. Uporabimo kosinusni izrek za stranico a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$$

$$a^2 = (1-v)^2 + (1-u)^2 - (1-v)(1-u)$$

$$a^2 = \left(1 - \frac{x^2-1}{x-2}\right)^2 + \left(1 - \frac{x(2-x)}{x+1}\right)^2 - \left(1 - \frac{x^2-1}{x-2}\right)\left(1 - \frac{x(2-x)}{x+1}\right)$$

$$a^2 = \frac{3(x^2-x+1)^3}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}\sqrt{(x^2-x+1)^3}}{(x+1)(2-x)}$$

Drugi način (s kosinusnim izrekom)

Trikotnika FEC in EFD sta skladna, zato je $b = 1 - v$ in $c = 1 - u$. V trikotniku ADF uporabimo kosinusni izrek:

$$(1 - v)^2 = x^2 + v^2 - 2xv \cos 60^\circ$$

$$(1 - v)^2 = x^2 + v^2 - xv$$

$$v = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Podobno še v trikotniku BED :

$$(1 - u)^2 = (1 - x)^2 + u^2 - 2(1 - x)u \cos 60^\circ$$

$$(1 - u)^2 = (1 - x)^2 + u^2 - (1 - x)u$$

$$u = \frac{x(2 - x)}{x + 1}$$

Dolžino stranice a izračunamo enako kot v prvem načinu (z uporabo kosinusnega izreka).

Izziv 3: Pri drugem načinu smo izrazili dolžine stranic z dolžino x , ne da bi uporabili podobnost. Dokažimo sedaj iz rezultatov drugega načina, da sta trikotnika ADF in BED podobna. Pokazati moramo, da se ujemata v razmerju enakoležnih stranic, torej da je

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BD|} = \frac{|DF|}{|ED|}$$

Izračunajmo posamezna razmerja:

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{x}{u} = \frac{x + 1}{2 - x}$$

$$\frac{|AF|}{|BD|} = \frac{v}{1 - x} = \frac{x + 1}{2 - x}$$

$$\frac{|DF|}{|ED|} = \frac{1 - v}{1 - u} = \frac{x + 1}{2 - x}$$

Razmerja enakoležnih stranic so enaka, torej sta trikotnika ADF in BED podobna.

q.e.d.

Zberimo rezultate dolžin stranic v tabeli:

$ AB $	1	1
$ AD $	x	x
$ AF $	v	$\frac{x^2 - 1}{x - 2}$
$ DF = FC $	$b = 1 - v$	$\frac{x^2 - x + 1}{2 - x}$
$ DB $	$1 - x$	$1 - x$
$ BE $	u	$\frac{x(2 - x)}{x + 1}$
$ DE = EC $	$c = 1 - u$	$\frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$
$ FE $	a	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{(x^2 - x + 1)^3}}{(x + 1)(2 - x)}$

Tabela 1: Dolžine odsekov na stranicah enakostraničnega trikotnika (glej sliko 12)

Izračunajmo vrednosti dolžin stranic v trikotniku na sliki 1 in opazujmo, katere racionalne dolžine dobimo ($x < 1$).

x	u	v	a
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7\sqrt{21}}{60}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{13\sqrt{39}}{140}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{215}$	$\frac{7\sqrt{7}}{30}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{42}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{31\sqrt{93}}{462}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{13}{56}$	$\frac{48}{91}$	$\frac{43\sqrt{129}}{728}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{19\sqrt{19}}{120}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{90}$	$\frac{80}{153}$	$\frac{73\sqrt{219}}{1530}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{110}$	$\frac{99}{190}$	$\frac{91\sqrt{273}}{2090}$

Tabela 2: Dolžine odsekov u , v in a pri vrednostih $x = \frac{1}{n}$, $n \in [1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ (glej sliko 12)

Izziv 4 (ODPRTI PROBLEM): Kako prepogniti enakostranični trikotnik, da dobimo $x = \frac{1}{n}$.

Posredna rešitev: Lahko bi si pomagali s kvadratom, ki ima enako dolgo stranico. Za kvadrat je znano, kako s prepogibanjem dobimo dolžino $\frac{1}{n}$, kjer je stranica kvadrata dolga 1 (glej Hull 2013: 35). Na enotskem kvadratu prepognemo $\frac{1}{n}$, potem pa prenesemo dolžino na enotski enakostranični trikotnik.

Izziv 5: Ali sestavljajo števila stolpca u kakšno zaporedje? Če je odgovor da, poišči splošni člen v odvisnosti od ulomka $\frac{1}{n}$.

V tabeli 2 opazimo, da se v stolpcu u nekateri števci razlikujejo za 2. Izpišimo jih:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{7}{20}, \frac{3}{10}, \frac{11}{42}, \frac{13}{56}, \frac{5}{24}, \frac{17}{90}, \frac{19}{110} \dots \quad (3)$$

Ulomke v zaporedju (3) lahko razširimo tako, da bodo števci predstavljali aritmetično zaporedje z razliko 2:

$$\frac{3}{6}, \frac{5}{12}, \frac{7}{20}, \frac{9}{30}, \frac{11}{42}, \frac{13}{56}, \frac{15}{72}, \frac{17}{90}, \frac{19}{110} \dots$$

oziroma: $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{6}, \quad \frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{12}, \quad \frac{1}{4} \rightarrow \frac{7}{20}, \quad \frac{1}{5} \rightarrow \frac{9}{30}, \quad \frac{1}{6} \rightarrow \frac{11}{42}, \quad \frac{1}{7} \rightarrow \frac{13}{56} \dots$

Ugibamo: $\frac{1}{n} \rightarrow \frac{2n-1}{n(n+1)}$. To je seveda hipoteza, ki jo je potrebno dokazati.

Dokaz: V drugem stolpcu tabele 2 je navedena dolžina $u(x) = \frac{x(2-x)}{x+1}$. Vstavimo namesto $x = \frac{1}{n}$ in dobimo:

$$u\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}(2-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}+1} = \frac{2n-1}{n(n+1)}.$$

q.e.d.

Izziv 6: Ko na sliki 12 premikamo točko D po stranici AB (najbolje v programu za dinamično geometrijo), se spreminjata dolžini v in u . Zastavimo si vprašanje, pri kateri vrednosti spremenljivke x je dolžina v najdaljša (glej formuli (2)).

Problem bomo rešili z uporabo prvega odvoda.

$$v(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$$

Iz pogoja $\frac{dv}{dx} = 0$ dobimo enačbo $x^2 - 4x + 1 = 0$ z rešitvama $2 - \sqrt{3}$ in $2 + \sqrt{3}$. Rešitev mora biti manjša od 1, zato je maksimum funkcije v pri $x_{max} = 2 - \sqrt{3}$. Ekstremna vrednost pa je ravno dvakrat večja $v_{max} = 2(2 - \sqrt{3})$.

Zaradi simetrije problema pričakujemo, da bo imela funkcija u ekstrem pri $1 - x_{max} = \sqrt{3} - 1$. Preverimo:

$$u(x) = \frac{x(2 - x)}{x + 1}$$

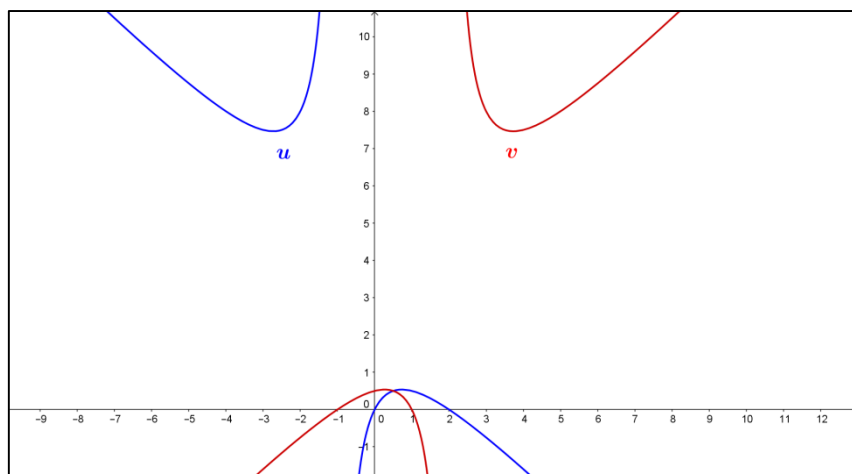
$$\frac{du}{dx} = -\frac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2}$$

Iz pogoja $\frac{du}{dx} = 0$ dobimo enačbo $x^2 + 2x - 2 = 0$ z rešitvama $\sqrt{3} - 1$ in $-\sqrt{3} - 1$.

Rešitev mora biti pozitivna, zato je maksimum funkcije u pri $x_{max} = \sqrt{3} - 1$. Ekstremna vrednost pa je seveda enaka kot prej: $u_{max} = 2(2 - \sqrt{3})$.

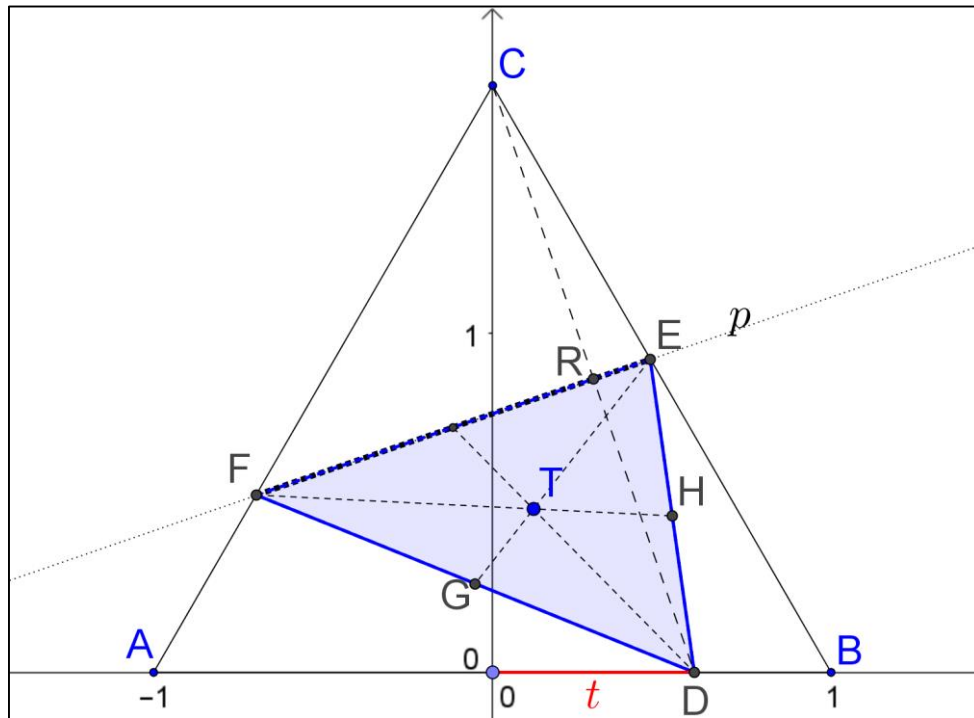
Izziv 7: Iz slike 12 sklepamo, da sta vrednosti u in v simetrični. Kako se to odraža na funkcijskih predpisih (glej formuli (2))? Kakšna je zveza med funkcijama u in v ?

Narišimo grafa obeh funkcij u in v v isti koordinatni sistem (glej sliko 13).



Slika 13: Grafa funkcij u in v (glej predpisa (2))

enačbo krivulje, na kateri leži sled. Če bomo ugotovili, da gre za parametrično obliko enačbe elipse, bomo hipotezo potrdili, sicer jo bomo zavrnili.



Slika 15: Izpeljava enačbe krivulje sledi težišča trikotnika **DEF**

Ideja dokaza: Zapisali bomo enačbi nosilk težiščnic EG in HF ter poiskali njuno presečišče. Za to pa potrebujemo koordinate točk E, F, G in H .

V izbranem koordinatnem sistemu so koordinate točk A, B, C in D enake:

$A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$ in $D(t,0)$. Premica p pregiba EF je simetrala daljice CD . Njuno presečišče R ima koordinati $R\left(\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Smerni koeficient nosilke daljice CD je enak $k = -\frac{\sqrt{3}}{t}$, premice p pa $k_p = \frac{t}{\sqrt{3}}$. Ker gre premica p skozi točko R , je njena enačba:

$$p: y = \frac{\sqrt{3}t}{3}x - \frac{\sqrt{3}t^2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Enačba nosilke daljice AC je $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$, enačba nosilke BC pa $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

Ko poiščemo presečišči vsake izmed nosilk s premico p , dobimo koordinate točk E in F :

$$E \left(\frac{t^2 + 3}{2(t + 3)}, \frac{\sqrt{3}(t + 1)(3 - t)}{2(t + 3)} \right)$$

$$F \left(\frac{t^2 + 3}{2(t - 3)}, \frac{\sqrt{3}(t - 1)(t + 3)}{2(t - 3)} \right)$$

Točka G leži na razpolovišču daljice DF , zato je

$$G \left(\frac{3(t - 1)^2}{4(t - 3)}, \frac{\sqrt{3}(t - 1)(t + 3)}{4(t - 3)} \right)$$

Točka H leži na razpolovišču daljice DE , zato je

$$H \left(\frac{3(t + 1)^2}{4(t + 3)}, \frac{\sqrt{3}(t + 1)(3 - t)}{4(t + 3)} \right)$$

Ker so koordinate točk E, F, G in H znane (izražene s parametrom t), dobimo enačbo nosilke daljice EG :

$$y = \frac{\sqrt{3}x(3t^3 - 5t^2 + 9t + 9)}{t^3 + 9t^2 - 21t + 27} - \frac{\sqrt{3}(2t^4 - 5t^3 + 3t^2 + 9t - 9)}{t^3 + 9t^2 - 21t + 27}$$

in enačbo nosilke daljice FH :

$$y = -\frac{\sqrt{3}x(3t^3 + 5t^2 + 9t - 9)}{t^3 - 9t^2 - 21t - 27} + \frac{\sqrt{3}(2t^4 + 5t^3 + 3t^2 - 9t - 9)}{t^3 - 9t^2 - 21t - 27}$$

Presečišče premic – nosilk daljic EG in FH je seveda težišče T trikotnika DEF . Rešimo sistem in dobimo:

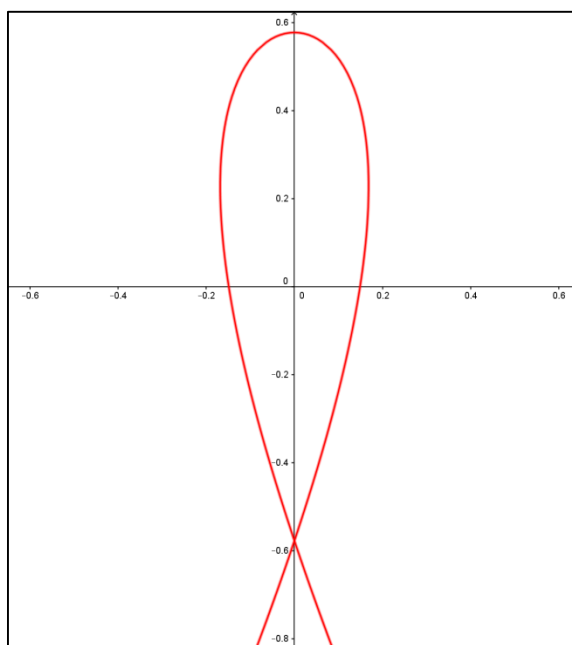
$$T \left(\frac{2t(t^2 - 3)}{3(t^2 - 9)}, \frac{\sqrt{3}(5t^2 - 9)}{3(t^2 - 9)} \right)$$

Tako smo poiskali parametrično enačbo krivulje, ki jo opisuje težišče, medtem ko točka D drsi po stranici osnovnega trikotnika ABC

$$x = \frac{2t(t^2-3)}{3(t^2-9)} \quad y = \frac{\sqrt{3}(5t^2-9)}{3(t^2-9)} \quad (4)$$

Graf te krivulje je prikazan na sliki 16. Opazimo, da je krivulja, na kateri leži sled težišča, sestavni del krivulje (4) in da skoraj zagotovo ne bo del elipse. Vendar je potreben še računski dokaz.

Ideja dokaza: Na krivulji (4) bomo izbrali ustrezno število točk ter zapisali enačbo elipse skozi izbrane točke. Na koncu bomo primerjali, ali nova točka s krivulje (4) leži tudi na dobljeni elipsi.



Slika 16: Krivulja sledi težišča trikotnika DPE (točka D se premika po stranici AB)

Elipsa je ena izmed krivulj drugega reda $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

kjer je vsaj eden izmed koeficientov A, B in C različen od 0. Iskana elipsa ima polosi vzporedni s koordinatnima osema, zato je $B = 0$. Poleg tega je ordinatna os njena simetrijska os, zato je $D = 0$. Koeficienta A in C sta pri elipsi oba enakega predznaka. Brez izgube splošnosti vzemimo $A = 1$. Tako dobimo enačbo:

$$x^2 + Cy^2 + Ey + F = 0.$$

Enačba ima tri neznane koeficiente, zato bomo izbrali tri različne točke s krivulje (4). Vzemimo tri različne parametre t , izračunajmo točko na krivulji (4) in vstavimo v enačbo elipse:

$$t = 0, \text{ točka } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \text{enačba: } C + \sqrt{3}E + 3F = 0$$

$$t = \frac{1}{2}, \text{ točka } \left(\frac{11}{105}, \frac{31\sqrt{3}}{105}\right), \quad \text{enačba: } 2883C + 3255\sqrt{3}E + 11025F + 121 = 0$$

$$t = 1, \text{ točka } \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad \text{enačba: } 3C + 6\sqrt{3}E + 36F + 1 = 0$$

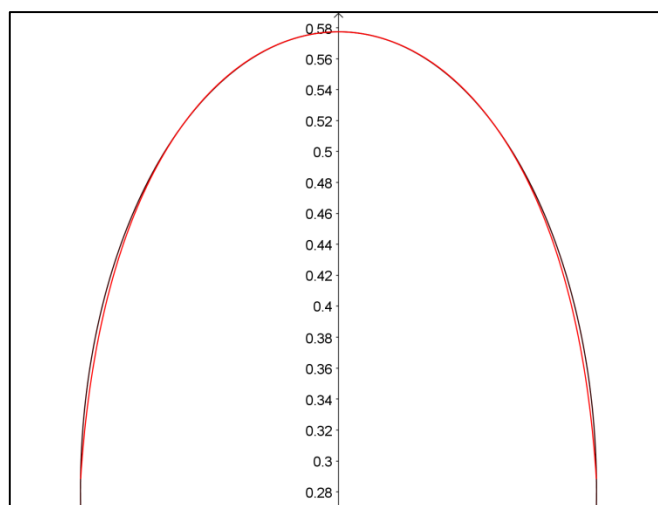
Rešitev sistema enačb nam da:

$$C = \frac{17}{54}, \quad E = -\frac{11\sqrt{3}}{108}, \quad F = -\frac{1}{324}$$

od koder sledi enačba elipse:

$$x^2 + \frac{17}{54}y^2 - \frac{11\sqrt{3}}{108}y - \frac{1}{324} = 0 \quad (5)$$

Krivulja (4) in dobljena elipsa (5) sta narisani na sliki 17. Iz slike vidimo, da bo naša hipoteza ovržena. Potrdimo to še z računom.



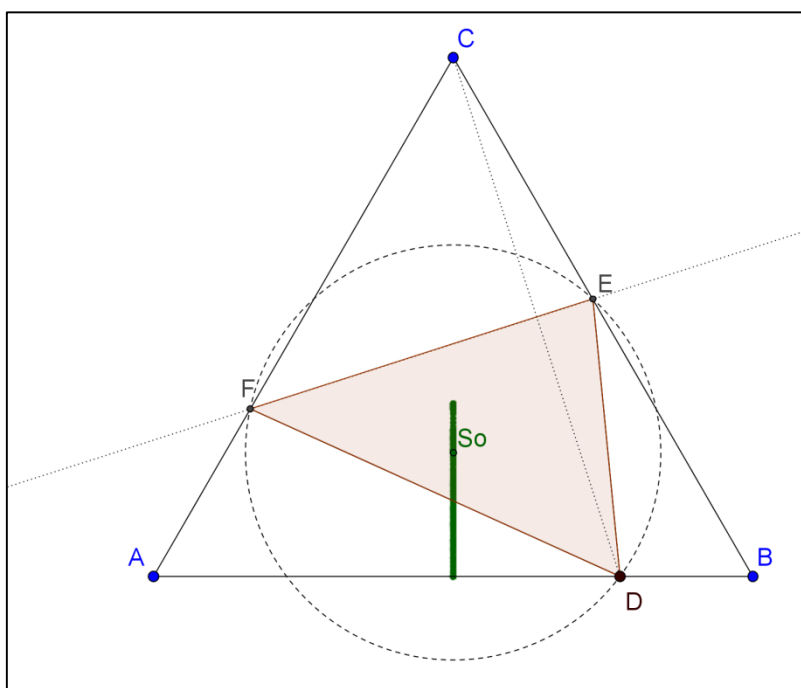
Slika 17: Krivulja težišča (rdeča) in graf elipse (črno)

V enačbi (4) vzemimo $t = 1/3$. Točka na krivulji (4) je potem $W\left(\frac{13}{180}, \frac{19\sqrt{3}}{60}\right)$. Preverimo, ali leži točka W na elipsi (5). Ko vstavimo koordinate točke W v enačbo elipse (5), dobimo:

$$\frac{1}{12960} = 0,$$

kar pomeni, da točka W ne leži na elipsi. Hipoteza 1 tako ni potrjena. Geometrijsko mesto težišč trikotnika DEF , ko pomikamo točko D po daljici AB , ni del elipse.

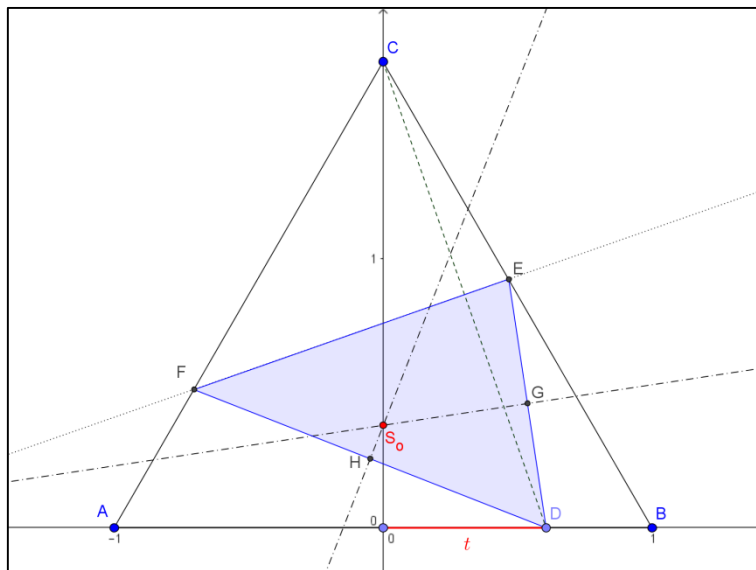
q.e.d.



Slika 18: Sled središča trikotniku DFE očrtane krožnice (ko se točka D premika po stranici AB)

Izziv 9: (Hipoteza 2) Prepognimo oglišče C enakostraničnega trikotnika ABC tako, da leži oglišče na stranici AB . Prepognjeni trikotnik označimo z DEF . Geometrijsko mesto središča očrtane krožnice zavihanega trikotnika DEF leži na premici, simetrali stranice AB (glej sliko 18).

Dokaz: Kot v dokazu hipoteze 1 izberimo koordinatni sistem tako, da bo njegovo središče v razpolovišču stranice AB , točke pa naj imajo naslednje koordinate: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$ in $D(t,0)$ (glej sliko 19).



Slika 19: Izpeljava enačbe sledi trikotniku **DEF** včrtane krožnice

Enako kot v dokazu hipoteze 1 izpeljemo koordinate točk *E* in *F*:

$$E\left(\frac{t^2 + 3}{2(t + 3)}, \frac{\sqrt{3}(t + 1)(3 - t)}{2(t + 3)}\right)$$

$$F\left(\frac{t^2 + 3}{2(t - 3)}, \frac{\sqrt{3}(t - 1)(t + 3)}{2(t - 3)}\right)$$

Točki *G* in *H* sta:

$$G\left(\frac{3(t + 1)^2}{4(t + 3)}, \frac{\sqrt{3}(t + 1)(3 - t)}{4(t + 3)}\right)$$

$$H\left(\frac{3(t - 1)^2}{4(t - 3)}, \frac{\sqrt{3}(t - 1)(t + 3)}{4(t - 3)}\right)$$

Smerni koeficient premice nosilke daljice *DE* je enak $k = \frac{\sqrt{3}(t^2 - 2t - 3)}{t^2 + 6t - 3}$, od koder izpeljemo enačbo simetrale stranice *DE*:

$$y = -\frac{\sqrt{3}x(t^2 + 6t - 3)}{3(t^2 - 2t - 3)} - \frac{3\sqrt{3}(t + 1)(t - 1)}{(t + 3)(t - 3)}$$

Smerni koeficient nosilke daljice DF je enak $k = \frac{\sqrt{3}(t^2+2t-3)}{(t^2-6t-3)}$, enačba simetrale daljice DF pa:

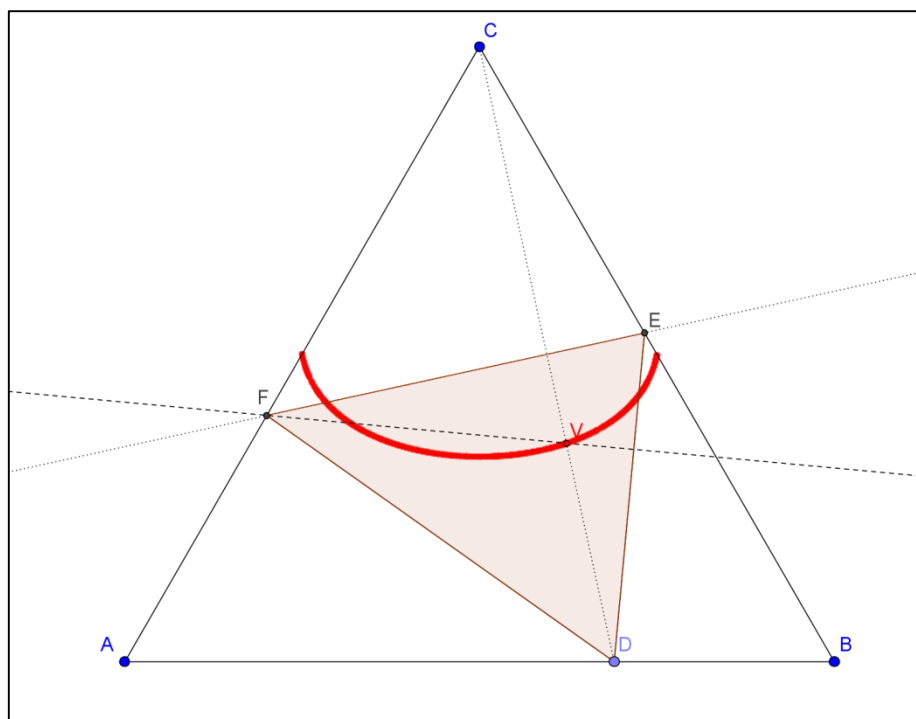
$$y = \frac{\sqrt{3}x(t^2 - 6t - 3)}{3(t^2 + 2t - 3)} + \frac{3\sqrt{3}(t + 1)(t - 1)}{(t + 3)(t - 3)}$$

Presečišče teh dveh simetral je središče S očrtane krožnice:

$$S\left(0, \frac{3\sqrt{3}(t + 1)(t - 1)}{(t + 3)(t - 3)}\right), \quad -1 < t < 1$$

To pa je daljica, ki leži na simetrali stranice AB . Hipoteza 2 je tako potrjena.

q.e.d.



Slika 20: Sled višinske točke trikotnika DFE (ko se točka D premika po stranici AB)

Izziv 10: (Hipoteza 3) Prepognimo oglišče C enakostraničnega trikotnika ABC tako, da leži oglišče na stranici AB . Prepognjeni trikotnik označimo z DEF . Geometrijsko mesto višinske točke zavihanega trikotnika DEF leži na elipsi (glej sliko 20).

Dokaz: Koordinatni sistem izberemo enako kot v dokazu hipoteze 1. Enačba premice, nosilke daljice DC , je $y = -\frac{\sqrt{3}}{t}x - \sqrt{3}$. Ta premica je nosilka višine na stranico EF . Poiščimo še enačbo premice, nosilke višine na stranico DE . Smerni koeficient nosilke daljice DE je $k = \frac{\sqrt{3}(t^2-2t-3)}{t^2+6t-3}$, tako da je enačba nosilke višine na stranico DE , ki poteka skozi točko F , enaka

$$y = \frac{\sqrt{3}x(t^2 + 6t - 3)}{3(t^2 - 2t - 3)} + \frac{4\sqrt{3}(11t^2 - 12t - 27)}{3(t-3)(t^2 - 2t - 3)} + \frac{2\sqrt{3}t}{3} + \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

Presečišče obeh dobljenih nosilk višin je višinska točka V s koordinatama

$$x = \frac{2t(t^2-3)}{(t^2-9)} \quad y = \frac{\sqrt{3}(t^2+3)}{(t+3)(3-t)} \quad (6)$$

Tako smo dobili parametrično enačbo sledi višinske točke V trikotnika DEF , ko točka D drsi po stranici AB . Prikazana je na sliki 22.

Enako kot v dokazu hipoteze 1 iščemo krivuljo drugega reda z nastavkom

$$x^2 + Cx^2 + Ey + F = 0$$

Izračunamo koordinate treh točk pri $t = 0, t = \frac{1}{2}, t = 1$, zapišemo enačbe in rešimo sistem.

$$t = 0, \text{ točka } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \text{enačba: } C + \sqrt{3}E + 3F = 0$$

$$t = \frac{1}{2}, \text{ točka } \left(\frac{11}{35}, \frac{13\sqrt{3}}{35}\right), \quad \text{enačba: } 507C + 455\sqrt{3}E + 1225F + 121 = 0$$

$$t = 1, \text{ točka } \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad \text{enačba: } 3C + 2\sqrt{3}E + 4F + 1 = 0$$

$$\text{Rešitev sistema je } C = \frac{17}{6}, \quad E = -\frac{103\sqrt{3}}{36}, \quad F = \frac{23}{12}$$

od koder sledi enačba elipse:

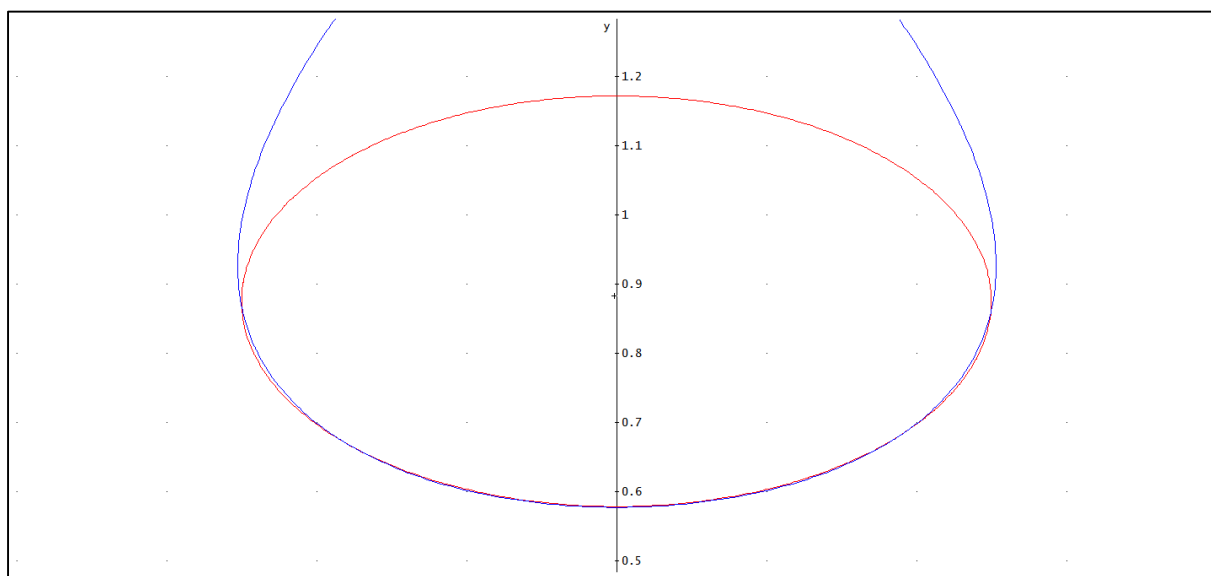
$$12\sqrt{3}x^2 + 34\sqrt{3}y^2 - 103y + 23\sqrt{3} = 0 \quad (7)$$

Obe krivulji sta narisani na sliki 21, vendar je že iz slike razvidno, da bo hipoteza 3 zavrnjena. Utemeljimo to še z računom. Vzemimo $t = \frac{1}{3}$. Točka na sledi je tedaj $(\frac{13}{60}, \frac{7\sqrt{3}}{20})$.

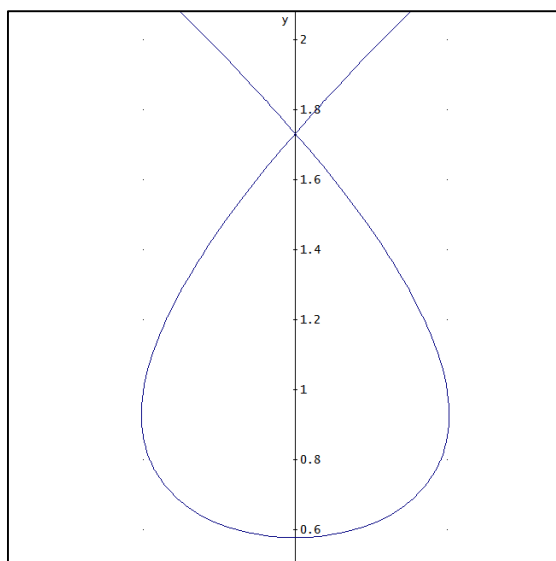
Koordinati vstavimo v dobljeno enačbo elipse in dobimo

$$\frac{\sqrt{3}}{120} = 0$$

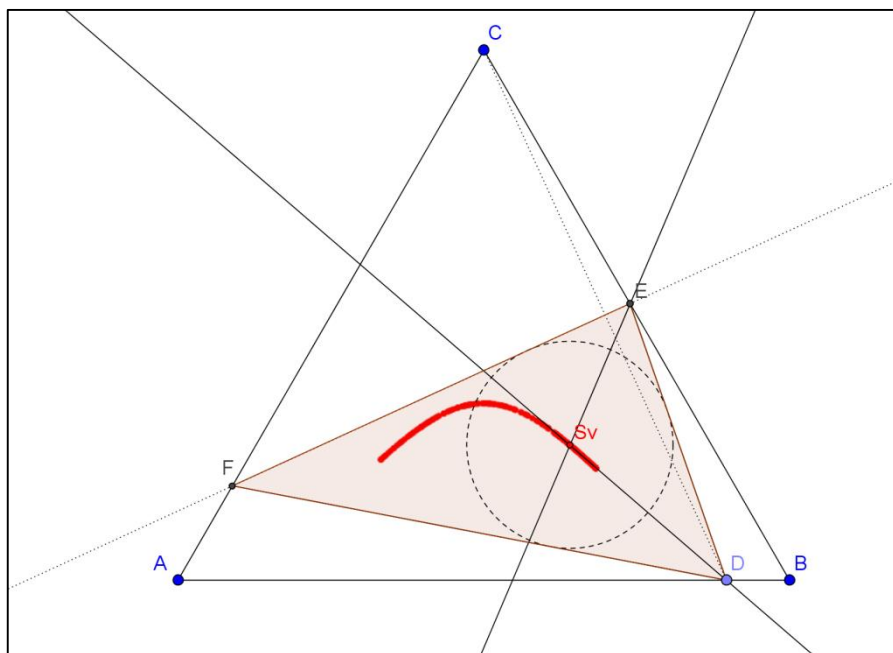
Kar pomeni, da hipoteze 3 nismo potrdili.



Slika 21: Krivulja višinske točke v primerjavi z elipso (glej izziv 10)



Slika 22: Krivulja geometrijskega mesta višinskih točk (glej izziv 10)



Slika 23: Sled trikotniku **DFE** včrtane krožnice (ko se točka **D** premika po stranici **AB**)

Izziv 11: (Hipoteza 4) Prepognimo oglišče C enakostraničnega trikotnika **ABC** tako, da leži oglišče na stranici **AB**. Prepognjeni trikotnik označimo z **DEF**. Geometrijsko mesto središča včrtane krožnice zavihanega trikotnika **DEF** leži na hiperboli (glej sliko 23)

Dokaz: S pomočjo programa Derive 6 smo izpeljali koordinati središča trikotniku **DEF** včrtane krožnice. Rezultat je na sliki 24.

$$x = \frac{(t^4 + 6t^2 + 9) \cdot (2\sqrt{3} \cdot \text{SIGN}(t^3 + 9t^2 + 15t - 9) \cdot ((t+3) \cdot \text{SIGN}(t^2 - 6t - 3)) + (t^2 - 2t - 3) \cdot \text{SIGN}(t^2 + 6t - 3)) + \sqrt{(t^2 + 3) \cdot \text{SIGN}(t + 3) \cdot ((t+3) \cdot \text{SIGN}(t^2 - 6t - 3)) - (5t + 3) \cdot \text{SIGN}(t^2 + 6t - 3))}}{2 \cdot (t+3) \cdot (\sqrt{3} \cdot (t^4 + 6t^2 + 9) \cdot \text{SIGN}(t^2 - 6t - 3) \cdot (t^3 + 9t^2 + 15t - 9)) - (t^2 + 3)^{3/2} \cdot \text{SIGN}(t + 3) \cdot ((t-3) \cdot \text{SIGN}(t^2 - 6t - 3)) + (t+3) \cdot \text{SIGN}(t^2 + 6t - 3))}$$

$$y = \frac{4 \cdot t \cdot (t-3) \cdot (t^2 + 3)^{3/2} \cdot (2 \cdot \text{SIGN}(t^2 + 6t - 3) \cdot (t^2 - 6t - 3)) - 1 \cdot (2 \cdot \sqrt{(t^2 + 3) \cdot \text{SIGN}(t^3 + 9t^2 + 15t - 9)} + \sqrt{3} \cdot (1-t) \cdot \text{SIGN}(t + 3))}{(t+3) \cdot (\sqrt{3} \cdot (t^4 + 6t^2 + 9) \cdot \text{SIGN}(t^3 + 9t^2 + 15t - 9) \cdot ((t-2t-3) \cdot \text{SIGN}(t^2 + 6t - 3) \cdot (t^2 - 6t - 3)) - t^2 - 2t + 3) + 2 \cdot (t^2 + 3)^{3/2} \cdot \text{SIGN}(t + 3) \cdot ((5t^2 - 9) \cdot \text{SIGN}(t^2 + 6t - 3) \cdot (t^2 - 6t - 3)) - t^2 + 9)}$$

Slika 24: Enačba krivulje višinske točke (dobljena s programom Derive 6)

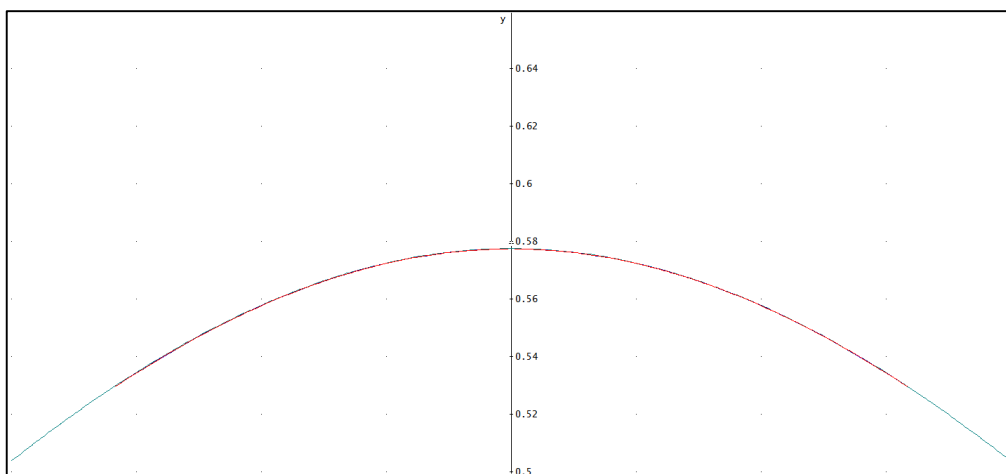
Pri parametrih $t = 1/4$, $t = 1/10$ in $t = 45/100$ smo izpeljali enačbo stožnice – hiperbole, ki se grafično popolnoma ujema sledi središča trikotniku včrtane krožnice (v mejah zaslonske grafike) (glej sliko 25). Samo na osnovi slike ne moremo trditi, ali hipotezo lahko zavrnilo. Enačba te hiperbole je v prilogi 1. Pri $t = 1/3$ je ustrezna točka na krivulji sledi

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{20} - \frac{7}{60}, \frac{13\sqrt{3}}{20} - \frac{13\sqrt{7}}{60} \right)$$

ki pa ne leži na dobljeni enačbi hiperbole, saj je (po vstavitvi koordinat x in y v enačbo hiperbole):

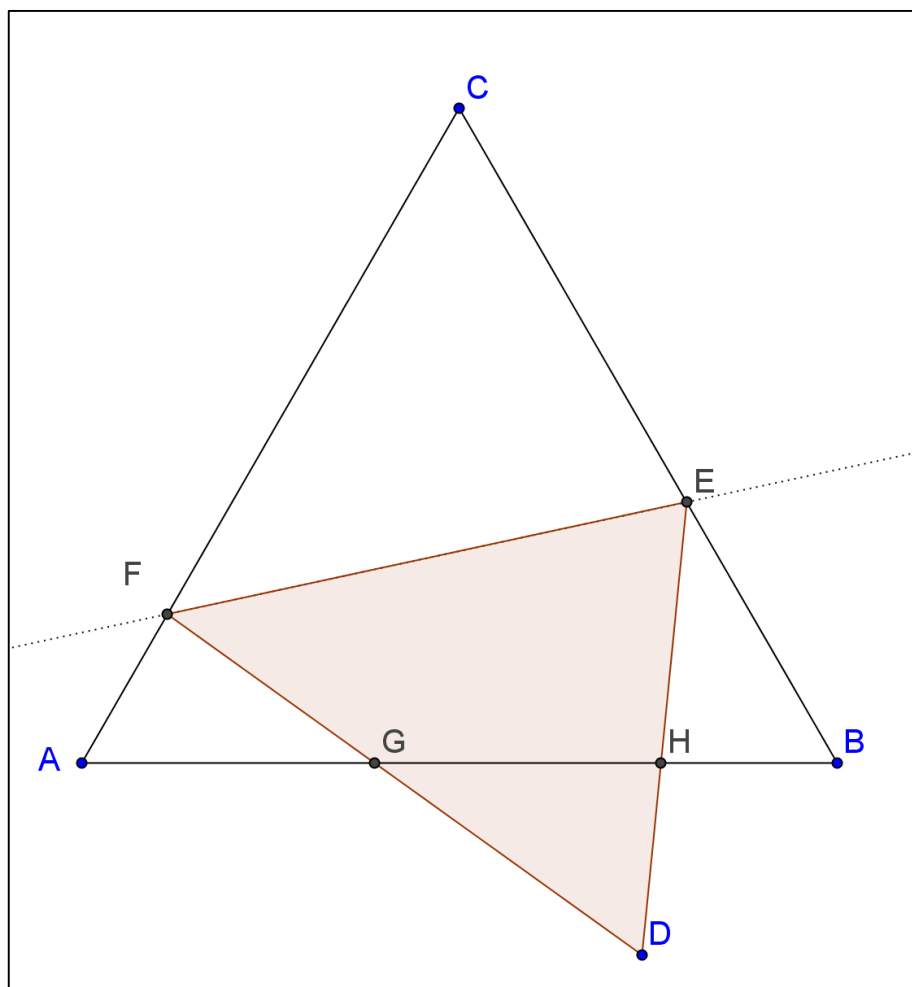
$$1,027268146 \cdot 10^{-10} = 0$$

Dopuščamo možnost numeričnih napak, vendar lahko z veliko verjetnostjo zavrnamo hipotezo 4.



Slika 25: Primerjava krivulje višinske točke in hiperbole (k izzivu 11)

2.1.2. Pregib enega oglišča v zunanost trikotnika



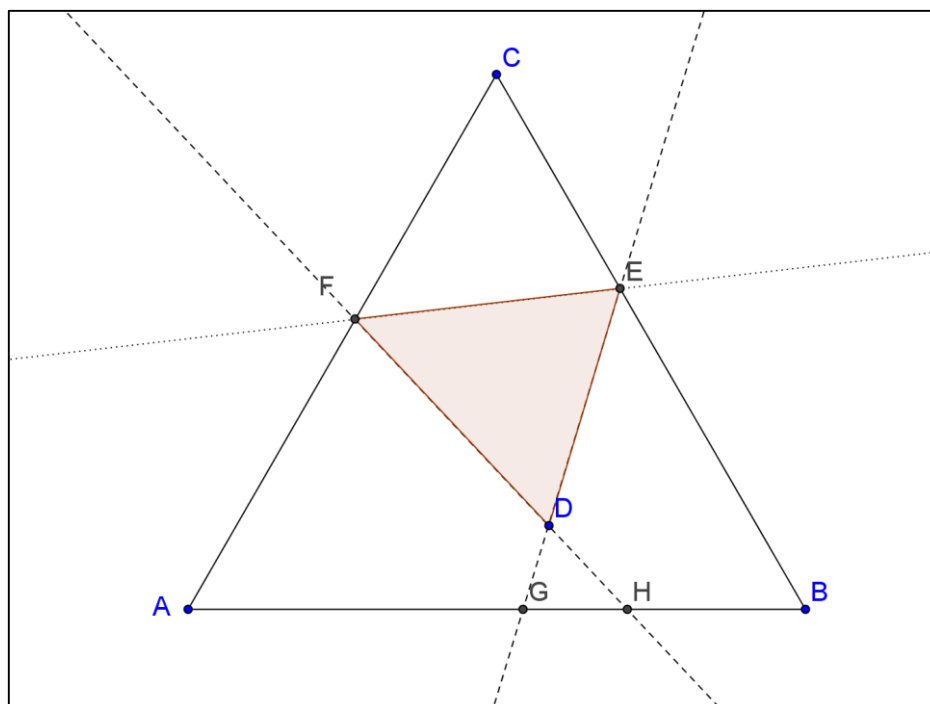
Slika 26: Pregib oglišča preko nasprotne stranice

Izziv 12: En vogal enakostraničnega trikotnika prepognemo tako, da sega oglišče preko nasprotne stranice (glej sliko 26). Ali so si kateri izmed dobljenih trikotnikov podobni?

Seveda so. Trikotnika AGF in DGH sta podobna, saj se ujemata v dveh kotih: $\text{kot } FGA = \text{kot } DGH$, kota pri A in pri D pa merita 60° . Prav tako sta podobna trikotnika DGH in BEH , saj se prav tako ujemata v dveh kotih: $\text{kot } GHD = \text{kot } BHE$, kota pri D in pri B pa merita 60° . Povzemimo: $AGF \sim DGH$ in $DGH \sim BEH$. Zaradi tranzitivnosti relacije »biti podoben« sledi $AGF \sim BEH$.

Torej so si trikotniki AGF , DGH in BEH podobni. (Trikotnika ECF in EDF pa sta seveda skladna.)

2.1.3. Pregib enega oglišča v notranjost trikotnika

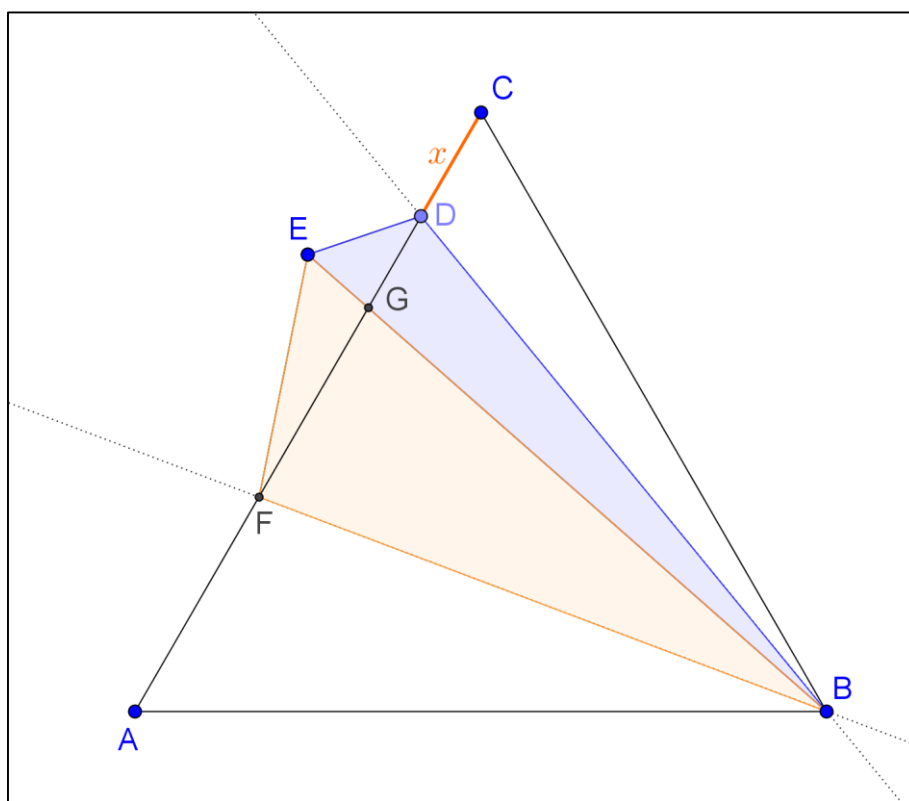


Slika 27: Pregib oglišča v notranjost enakostraničnega trikotnika

Izziv 13: En vogal enakostraničnega trikotnika prepognemo tako, da leži oglišče v notranjosti trikotnika (glej sliko 27). Ali so si kateri izmed dobljenih trikotnikov, ki jih tvorijo stranice ali njihove nosilke, podobni?

Trikotnika CFE in DFE sta skladna. V trikotnikih AHF , DHG in BEG je en kot enak 60° . Trikotnika AHF in DHG imata skupni kot pri oglišču H , trikotnika DHG in BEG pa pri oglišču G . Iz zveze $AHF \sim DHG$ ter $DHG \sim BEG$ sledi (zaradi tranzitivnosti relacije »biti podoben«) $AHF \sim BEG$. Torej so si trikotniki AHF , DHG in BEG podobni.

2.2. Pregib sosednjih stranic na premico skozi skupno oglišče

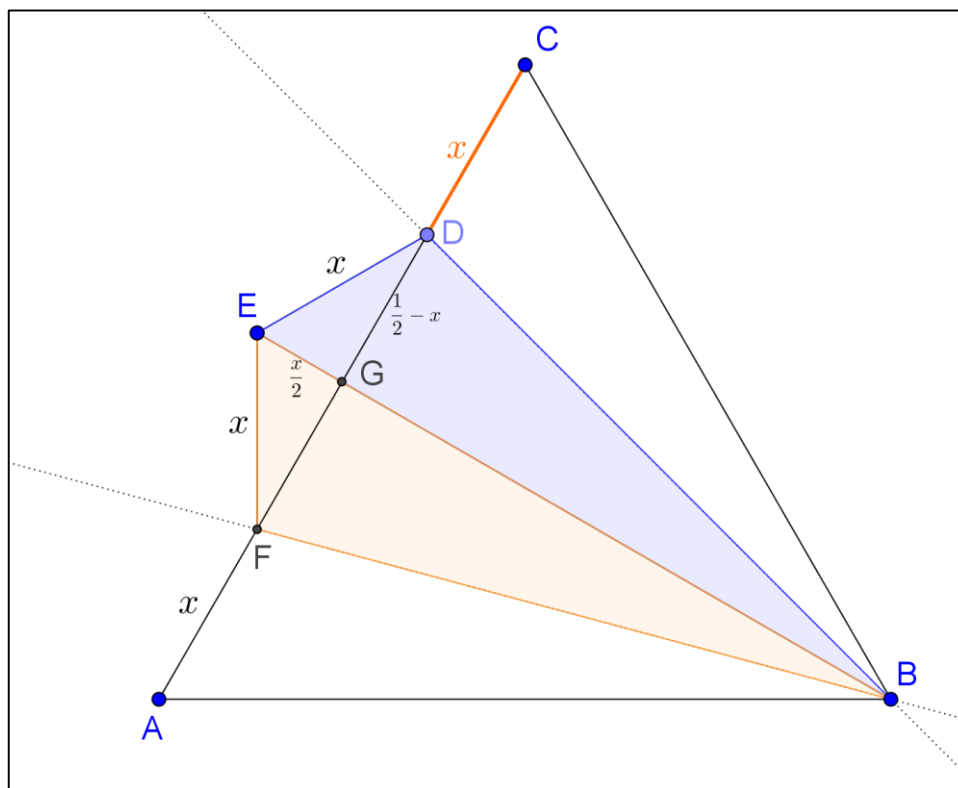


Slika 28: Pregib sosednjih oglišč (pregiba potekata skozi tretje oglišče)

Izziv 14: Sosednji stranici prepognemo tako, da se dotikata (glej sliko 28). Ugotovimo, kateri trikotniki so si podobni.

Trikotnika ABF in GBF sta skladna. Prav tako sta skladna trikotnika BDC in BDE . Trikotnika ABG in EDG sta si podobna, saj imata po en kot enak 60° , kota AGB in DGE pa sta sovršna. Zaradi analognih razlogov sta si podobna tudi trikotnika CGB in EGF .

Izziv 15: (ODPRTI PROBLEM) Izrazimo z dolžino $x = |CD|$ dolžine stranic štirikotnika $BDEF$.



Iščemo takšno dolžino daljice $|CD| = x$, pri kateri je štirikotnik $BDEF$ deltoid (glej sliko 29).

Enakostranični trikotnik s prepogibanjem zelo enostavno prepognemo v deltoid. Najprej prepognemo točko A v točko C in dobimo pregib BG . Nato pa stranici BC in BA prepognemo na pregib BG . S tem je točka D (in velikost x) določena.

Predpostavimo, da je štirikotnik $BDEF$ deltoid. Tedaj je $|CD| = |DE| = |EF| = |FA| = x$. Stranica enakostraničnega trikotnika ABC naj bo enotska: $|AB| = 1$. Potem je dolžina stranice DG enaka $|DG| = \frac{1}{2} - x$. V trikotniku EGD je kot pri oglišču G pravi kot, kot pri oglišču E pa meri 60° , torej je trikotnik EGD polovica enakostraničnega trikotnika. Dolžina stranice GE je zato $|GE| = \frac{x}{2}$. Zapišimo Pitagorov izrek v trikotniku EGD in rešimo enačbo. Glede na izbrano dolžino stranice AB je dolžina $x < \frac{1}{2}$.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Rešitvi sta $2 - \sqrt{3}$ ter $2 + \sqrt{3}$. Slednja rešitev je prevelika, zato jo izločimo. Torej je

$$x = 2 - \sqrt{3}$$

tista dolžina daljice, pri kateri je s prepogibanjem dobljeni štirikotnik deltoid.

Zanimivo, da smo enak rezultat dobili v izzivu 5.

Opomba: Seveda bi lahko izračun izvedli tudi s pomočjo kotnih funkcij, na primer:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{1}{2} - x}{x}$$

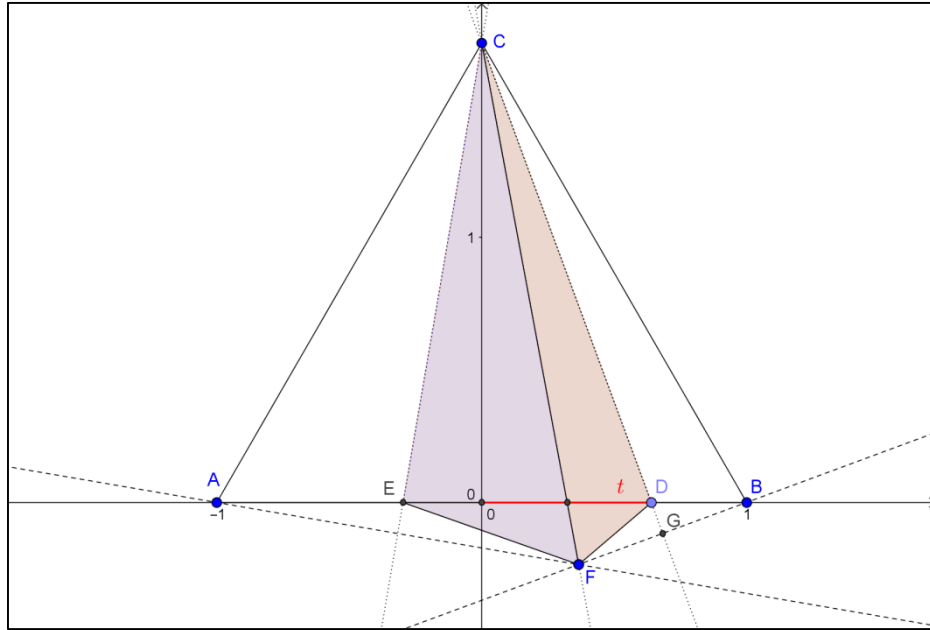
$$\frac{\frac{1}{2} - x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 2 - \sqrt{3}$$

Izziv 17: Pri kateri vrednosti dolžine x ima štirikotnik $BDEF$ maksimalno ploščino (glej sliko 29)?

Trikotnik ABC postavimo v koordinatni sistem (glej sliko 30) tako, da je $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$. Stranica enakostraničnega trikotnika ABC meri 2. Točko D (ki se premika po stranici AB) definiramo s parametrom t , ki meri razdaljo od izhodišča, $D(t, 0)$. Brez izgube splošnosti zaradi simetričnosti podatkov vzemimo $0 \leq t \leq 1$. Trikotnika DBC in FDC sta skladna, prav tako trikotnika EFC in AEC . Zato je ploščina štirikotnika enaka vsoti ploščin trikotnikov DBC in AEC . Izračunajmo ploščino teh dveh trikotnikov vsakega posebej. Ploščina trikotnika DBC je enaka

$$S_{DBC} = \frac{(1-t)\sqrt{3}}{2}.$$



Slika 30: Kako prepogniti, da bo ploščina štirikotnika **EFDC** največja?

Za izračun ploščine trikotnika AEC potrebujemo dolžino njegove osnovnice AE . Izračunajmo absciso točke E . Enačba premice (pregiba) DC je enaka $y = -\frac{\sqrt{3}}{t}x + \sqrt{3}$. Enačba njene pravokotnice, ki poteka skozi točko B (to je enačba premice skozi BF) pa $y = \frac{\sqrt{3}t}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}t$. Zapišimo enačbo krožnice s središčem D in polmerom $|DB| = 1 - t$:

$(x - t)^2 + y^2 = (1 - t)^2$. Presečišče te krožnice in premice, nosilke daljice BF , sta točki:

$$F\left(\frac{t^2+6t-3}{t^2+3}, \frac{2\sqrt{3}t(t-1)}{t^2+3}\right) \text{ in } B(1,0)$$

Enačba simetrale daljice AF (to je premica skozi E in C) je:

$$y = \frac{\sqrt{3}x(t+3)}{3(1-t)} + \sqrt{3}$$

Njeno presečišče z abscisno osjo pa je pri $x = \frac{3(t-1)}{t+3}$. Torej je abscisa točke E enaka $\frac{3(t-1)}{t+3}$.

Dolžina stranice AE je enaka $|AE| = \frac{3(t-1)}{t+3} - (-1) = \frac{4t}{t+3}$, ploščina trikotnika AEC pa

$$S_{AEC} = \frac{\frac{4t}{t+3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}t}{t+3}.$$

Ploščino štirikotnika $EFDC$ zapišemo kot funkcijo spremenljivke (parametra) t :

$$S(t) = \frac{2\sqrt{3}t}{t+3} + \frac{(1-t)\sqrt{3}}{2}$$

Odvod po spremenljivki t je enak $\frac{dS}{dt} = -\frac{\sqrt{3}(t^2+6t-3)}{2(t+3)^2}$. Iz pogoja $\frac{dS}{dt} = 0$ dobimo dve rešitvi $t_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} - 3$. Upoštevamo pozitivno rešitev $t = 2\sqrt{3} - 3$.

Ali ima maksimalni štirikotnik kakšno posebno obliko? Izračunajmo koordinati točke F pri $t = 2\sqrt{3} - 3$: $F(0, \sqrt{3} - 2)$. Abscisa točke E je pri $t = 2\sqrt{3} - 3$ enaka $3 - 2\sqrt{3}$, kar je nasprotna vrednost abscise točke D : $2\sqrt{3} - 3$. Torej je maksimalni štirikotnik deltoid.

Do enakega sklepa pridemo tudi, ko se spomnimo, da smo v Izzivu 11 izračunali dolžino tiste razdalje od oglišča, pri kateri smo dobili deltoid. V rešitvi izziva 12 smo s t označili odmik od razpolovišča osnovnice. Odmik od oglišča je tedaj enak $1 - (2\sqrt{3} - 3) = 4 - 2\sqrt{3}$. V izzivu 11 smo imeli enotski enakostranični trikotnik, v izzivu 12 pa enakostranični trikotnik s stranico 2. Sklepamo torej, da je štirikotnik z največjo ploščino ravno deltoid.

Seveda bi lahko analitični pristop iz izziva 17 uporabili tudi za rešitev izziva 11. Zapišimo pogoj, da je štirikotnik DCEF deltoid in poračunajmo:

$$|EF| = |FD|$$

$$|AE| = |DB|$$

$$\frac{3(t-1)}{t+3} - (-1) = 1 - t$$

$$t^2 + 6t - 3 = 0$$

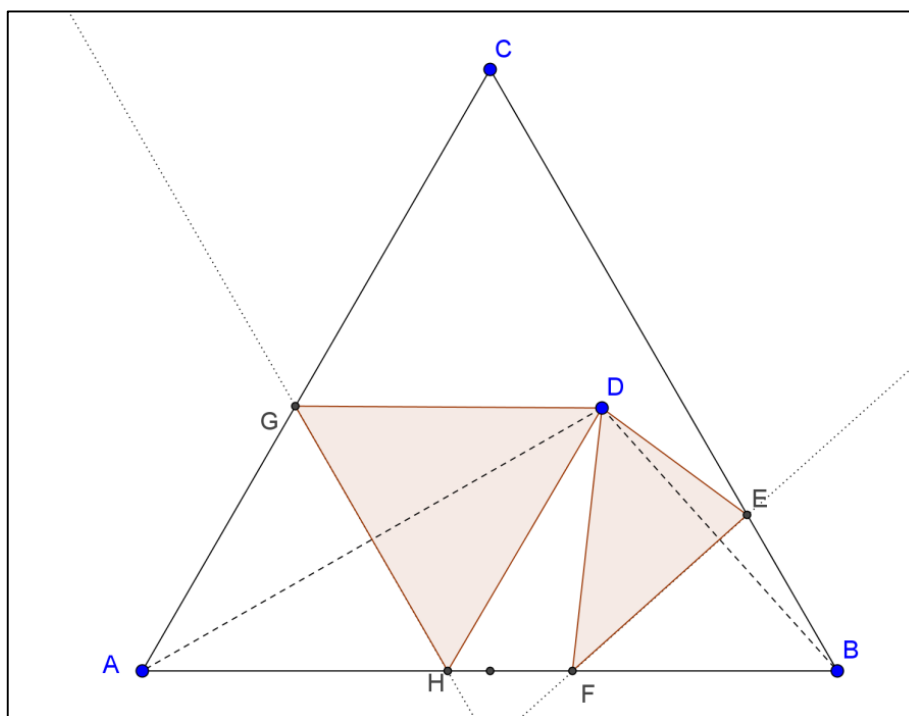
$$t_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} - 3$$

$$t = 2\sqrt{3} - 3$$

Vidimo, da je odgovor na oba izziva (11 in 17) enak, torej je maksimalni štirikotnik, dobljen na ta način, deltoid.

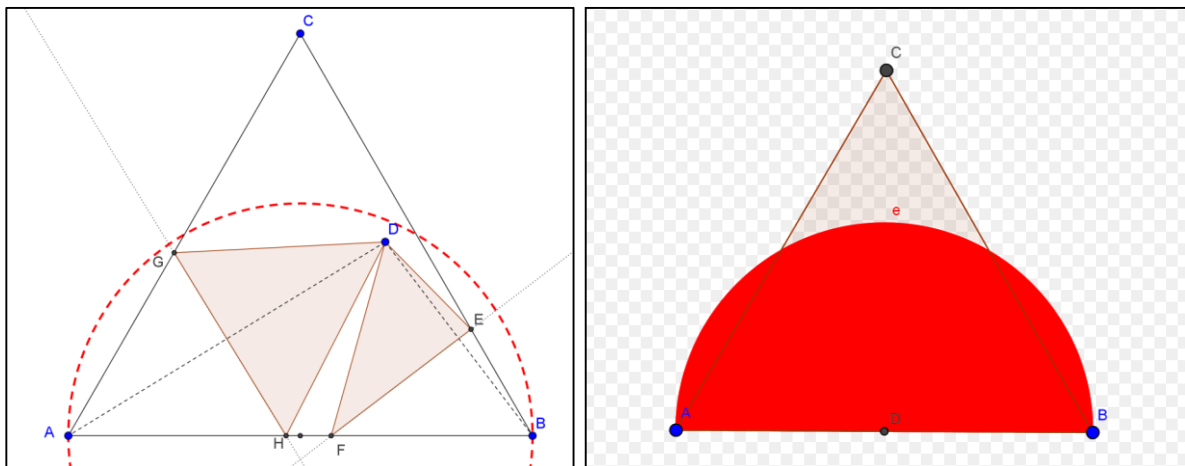
2.3. Hkratno prepogibanje dveh vogalov v skupno točko

Izziv 18: Hkrati prepognimo oglišči A in B tako, da se pokrivata. Skupno točko imenujmo D (glej sliko 31). Določiti je potrebno območje točke D , kjer je hkratni pregib dveh oglišč mogoč (ko se prepognjeni deli ne prekrivajo).



Slika 31: Pregib dveh vogalov v skupno točko D

Hipoteza 5: Območje, na katerem je mogoč hkratni pregib dveh oglišč, je polkrog s polmerom AB (A in B sta oglišči, ki ju pri prepogibanju preslikamo v skupno točko D).

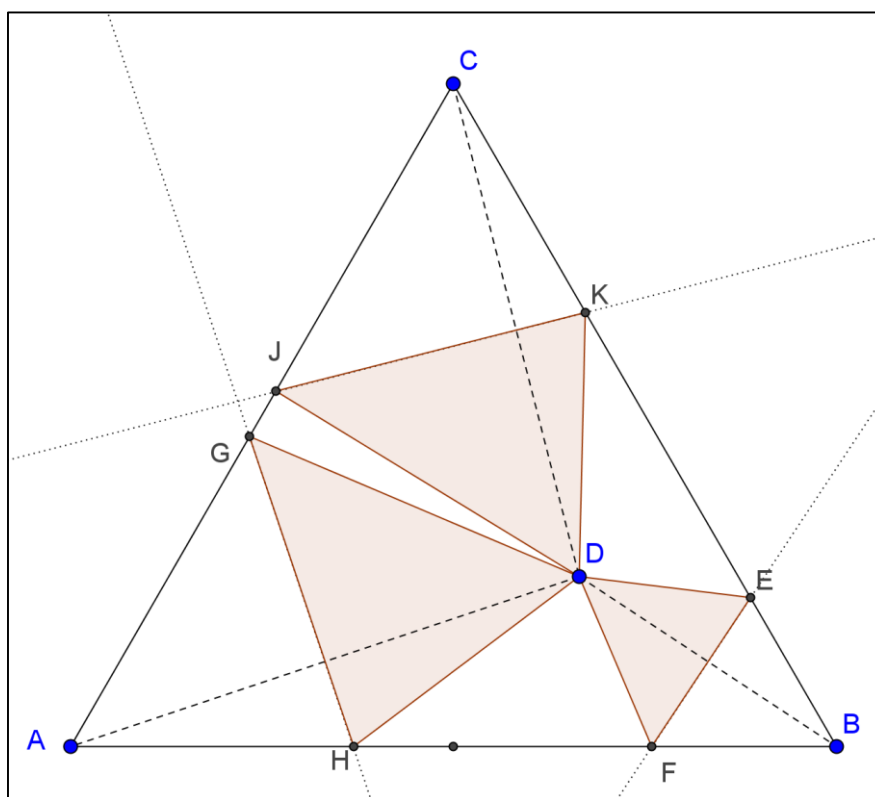


Slika 32: Možne lege točke D (skupne točke dveh oglišč)

Dokaz: Opazimo (glej sliko 32), da je $|HD| = |HA|$ in $|FD| = |FB|$. Ker hkrati pregibamo oglišči A in B v skupno točko, velja vedno $|AH| \leq \frac{|AB|}{2}$ in $|FB| \leq \frac{|AB|}{2}$. To pomeni, da sta dolžini stranic $|HD|$ in $|FD|$ največji, kadar sta enaki $\frac{|AB|}{2}$. Takrat točki H in F sovpadata, točka D pa doseže mejo polkroga s polmerom AB .

q.e.d.

2.4. Hkratno prepogibanje treh vogalov v skupno točko



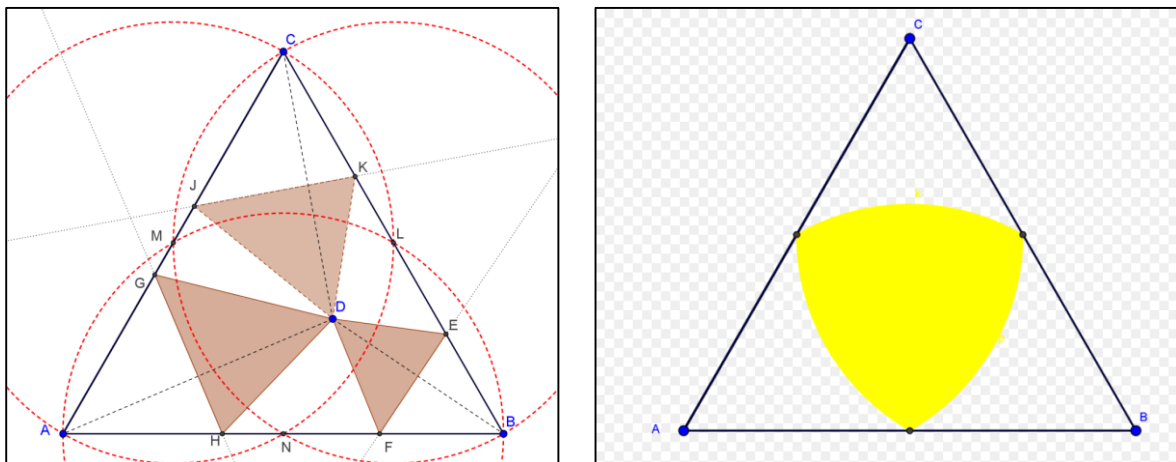
Slika 33: Pregibi vseh treh oglišč v skupno točko D

Izziv 19: Hkrati prepognemo vse tri vogale v skupno točko D . Določimo področje, na katerem se nahaja točka D , da so vsi trije pregibi izvedljivi (glej sliko 33).

Hipoteza 6: Področje, ki ga lahko zavzame skupna točka pregibov vseh treh oglišč, je omejeno z deli treh polkrogov nad stranicami enakostraničnega trikotnika.

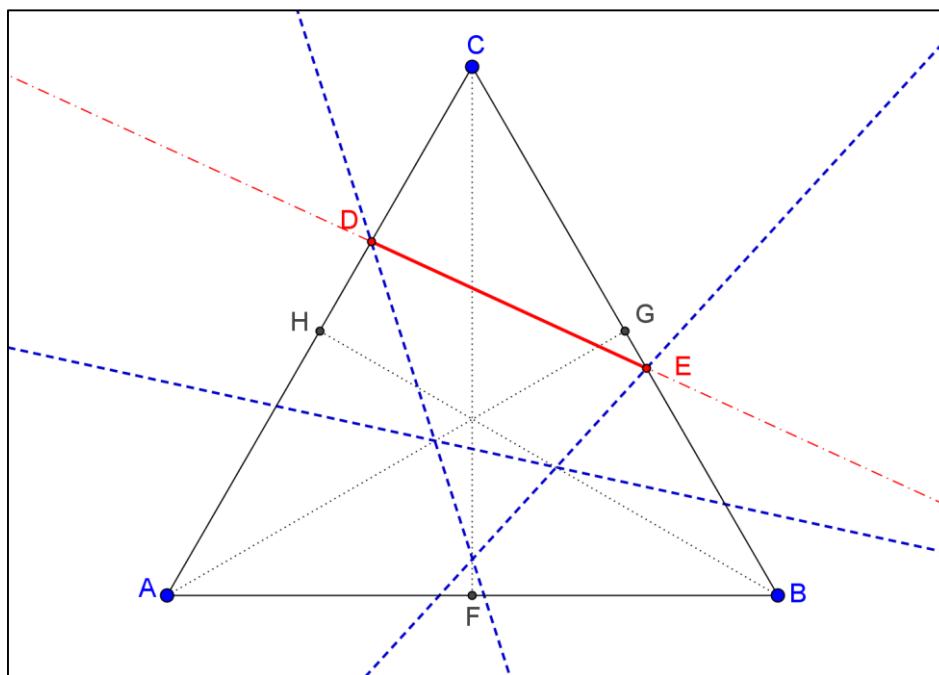
Dokaz: Argumente iz dokaza hipoteze 5 uporabimo nad vsako stranico (glej sliko 34).

q.e.d.



Slika 34: Možne lege točke D (skupne točke vseh treh oglišč)

2.5. Osnovni, glavni in pridruženi pregibi



Slika 35: Osnovni pregibi (.....), glavni pregib (____) in pridruženi pregibi (-----)

V enakostraničnem trikotniku ABC najprej naredimo tri pregibe po višinah (na sliki 35 so označeni s pikčastimi daljicami) AG , BH in CF . Te tri pregibe imenujemo **osnovni pregibi**. Nato naredimo poljubni pregib DE (označen z rdečo daljico). Imenujemo ga **glavni pregib**. Na koncu pa vsak rob trikotnika zapognemo na glavni pregib in dobimo tri pregibe, ki jih imenujemo **pridruženi pregibi** (na sliki so označeni s tremi črtkanimi premicami). Geometrijsko so pridruženi pregibi simetrale, ki jih oklepajo stranice trikotnika z glavnim pregibom. Opazimo, da pridruženi pregibi določajo enakostranični trikotnik in da se pridruženi pregibi sekajo na osnovnih pregibih.

Izziv 20: Pridruženi pregibi določajo enakostranični trikotnik.

Izziv 21: Kateri trikotniki so si podobni?

Upoštevajmo oznake oglišč na sliki 36. Označimo kote: $\text{kot } MDE = 2\alpha$, $\text{kot } DEL = 2\beta$ in $\text{kot } DPA = 2\gamma$. Poiščimo zveze med njimi.

V trikotniku CDE velja $180 - 2\alpha + 180 - 2\beta + 60 = 180$. Od tu sledi: $\alpha + \beta = 120 \rightarrow \beta = 120 - \alpha$.

V trikotniku APD velja zveza $60^\circ + 2\gamma + 2\alpha = 180^\circ$ oziroma $\alpha + \gamma = 60 \rightarrow \gamma = 60 - \alpha$.

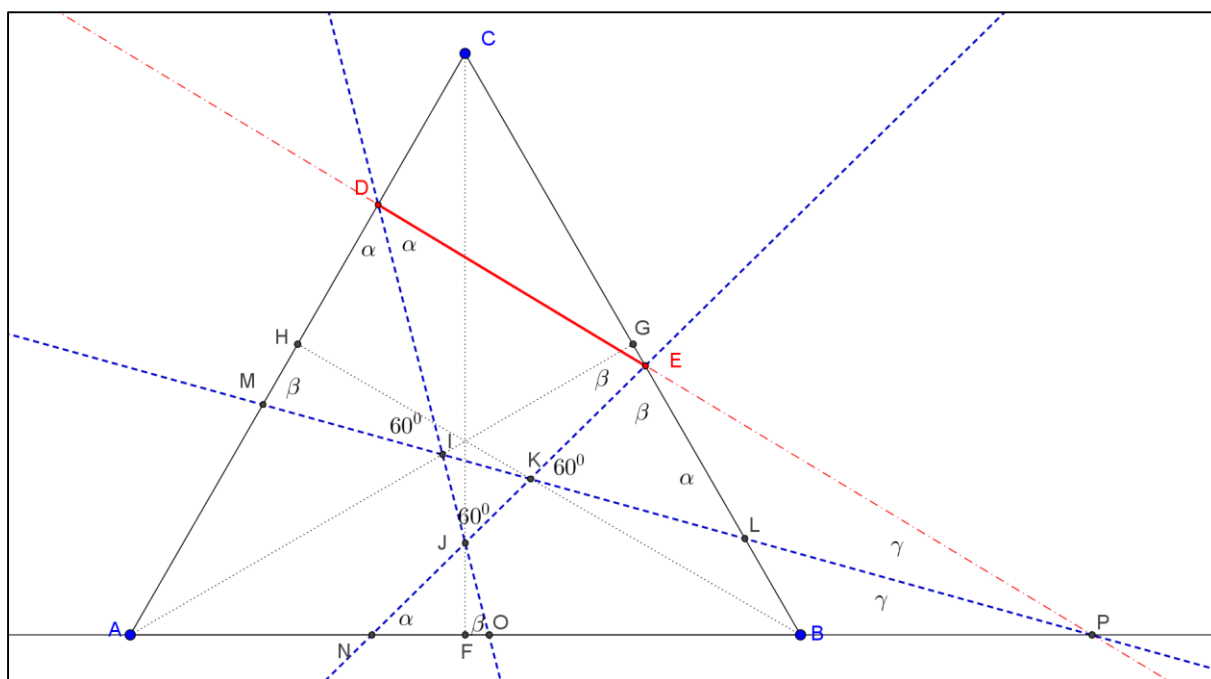
V trikotniku PMD izračunajmo kot PMD :

$$\text{kot } PMD = 180 - 2\alpha - \gamma = 180 - 2\alpha - (60 - \alpha) = 120 - \alpha = \beta.$$

Iz teh zvez preračunamo še ostale kote, kot so že označeni na sliki 36. S tem smo rešili oba izziva:

(Izziv 20): Pridruženi pregibi določajo enakostranični trikotnik.

(Izziv 21): Podobni trikotniki so trikotniki: IDM, KLE, JDE in JNF .



Slika 36: Koti med pridruženimi pregibi (k izzivu 20)

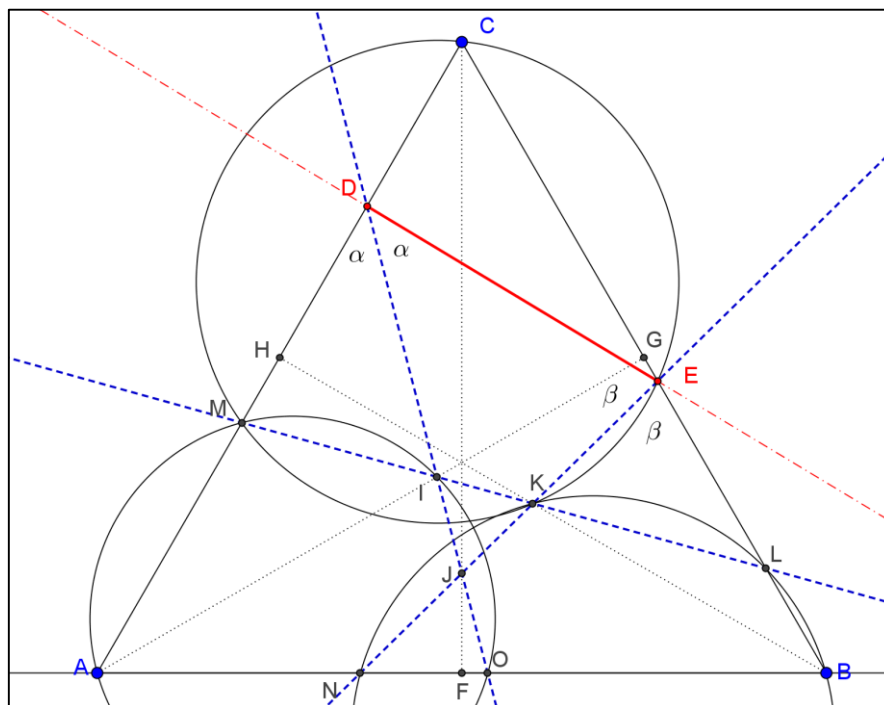
Izziv 22: Ali so štirikotniki $AOIM, NBLK$ in $CMKE$ tetivni?

Vemo, da je štirikotnik tetivni natanko tedaj, ko je vsota nasprotnih kotov enaka 180. Pogledjmo štirikotnik $AOIM$:

$$\text{kot } OAM + \text{kot } MIO = 60 + 120 = 180$$

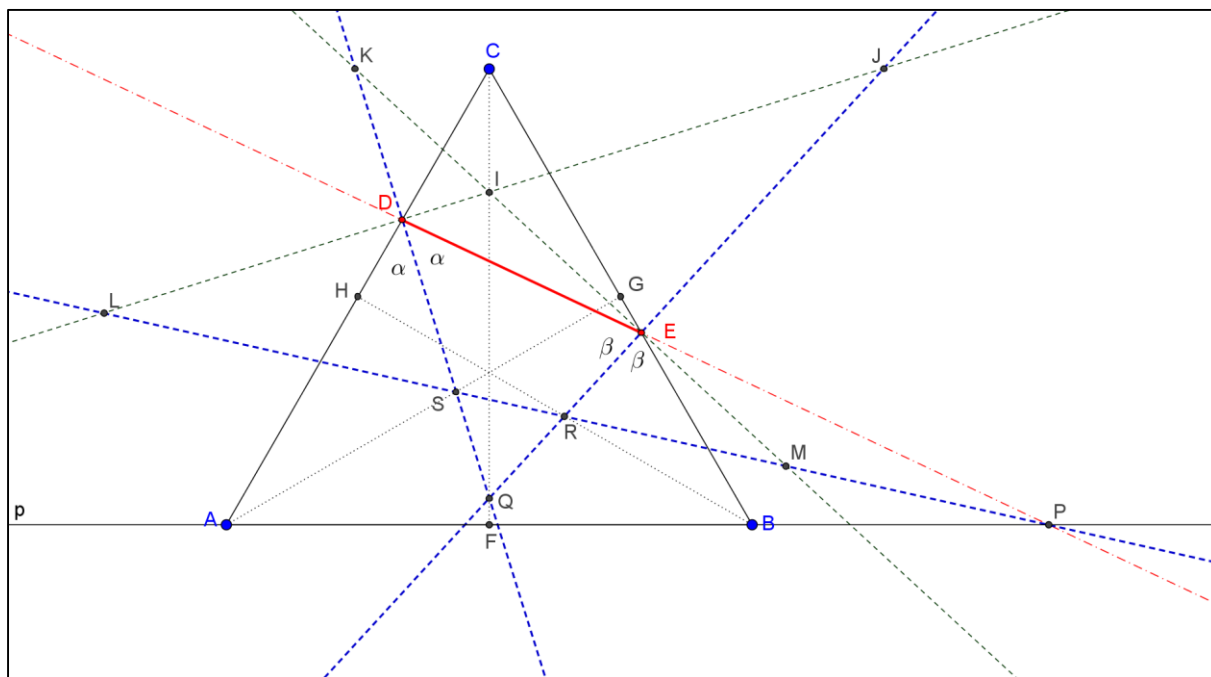
$$\text{kot } IOA + \text{kot } AMI = \beta + 180 - \beta = 180$$

Štirikotnik $AOIM$ je tetivni, lahko mu očrtamo krožnico. Podobno velja za štirikotnika $NBLK$ in $CMKE$ (slika 37).



Slika 37: Tetivni štirikotniki

Do sedaj smo obravnavali pridružene pregibe le na enem bregu (imenujmo ga levi breg) glavnega pregiba (dobili smo tri pridružene pregibe). Na drugem bregu (imenujmo ga desni breg) pa imamo še dva pridružena pregiba. Na sliki 38 so to tisti pregibi, ki potekajo skozi točko I .



Slika 38: Vsi pridruženi pregibi (-----)

Izziv 23: Tudi pregiba na desnem bregu se sekata pod kotom 60° .

Označimo kot $DIE = x$. Tedaj velja zveza:

$$x + \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} + \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 180^\circ$$

$$x = \alpha + \beta$$

Ker je $\alpha + \beta = 120^\circ$, je potem manjši kot med pregiboma z desnega brega enak 60° .

Izziv 24: Pregibi z različnih bregov se v zunanosti trikotnika ABC sekajo pod kotom 30° .

Pregiba z različnih bregov sta pravokotna med seboj v točkah D in E , saj sta simetrali notranjega in zunanjega kota kotov pri D in E v trikotniku DEC . Vsa štiri presečišča pregibov v zunanosti trikotnika ABC so oglišča pravokotnega trikotnika $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$.

Sklenemo lahko z ugotovitvijo, da se pregibi sekajo v notranjosti trikotnika ABC pod kotom 60° , na robu trikotnika pod kotom 90° in v zunanosti trikotnika pod kotom 30° .

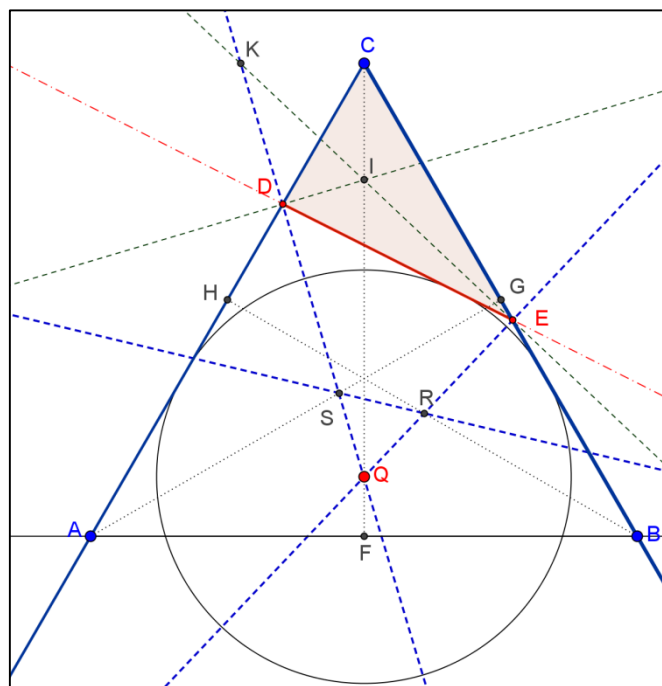
Izziv 25: Pridruženi pregibi se sekajo na osnovnih pregibih.

Oglejmo si najprej pridružena pregiba na desnem bregu glavnega pregiba (v trikotniku DEC na sliki 39). Sekata se v točki I . Ta pridružena pregiba sta simetrali notranjih kotov pri D in E , torej je njuno presečišče središče trikotniku DEC včrtane krožnice. Potem pa tudi tretja simetrala notranjega kota poteka skozi isto točko. To pa je ravno nosilka višine na stranico AB , na kateri pa leži osnovni pregib FC . Pridružena pregiba na desnem bregu glavnega pregiba DE se sekata na osnovnem pregibu.

Poiščimo presečišče nosilke osnovnice AB in nosilke glavnega pregiba DE . Označimo ga s P . Opazujmo trikotnik APD . Pridružena pregiba PS in DS sta simetrali notranjih kotov trikotnika APD , zato je njuno presečišče S središče trikotniku včrtane krožnice. Zato leži tudi na simetrali tretjega kota AG , ki je ravno osnovni pregib.

Zaradi simetrije problema lahko naredimo analogni sklep tudi za točko R .

Kaj pa za točko Q ?



Slika 39: Lega presečišč pridruženih pregibov

Opazujmo trikotnik DEC . Pridružena pregiba QE in QD sta simetrali zunanjih kotov tega trikotnika pri ogliščih D in E . Njuno presečišče Q je središče pričrtane krožnice. Zato skozi točko Q poteka tudi simetrala kota pri oglišču C , ki pa je ravno nosilka osnovnega pregiba FC .

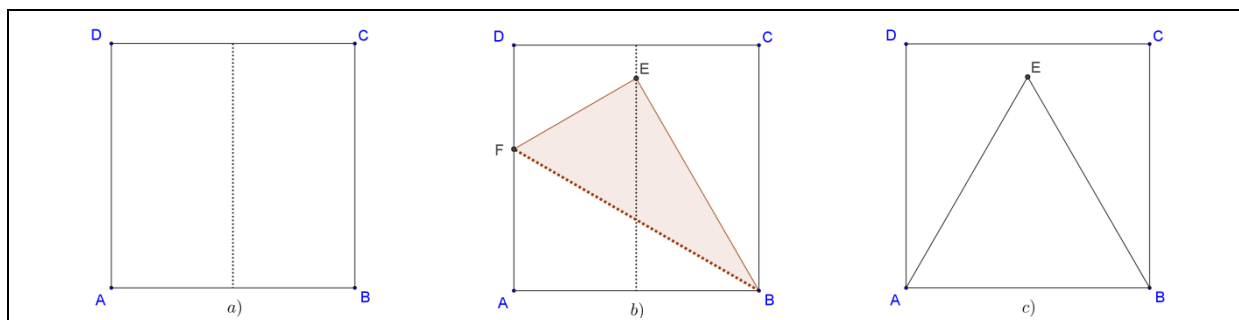
Tako velja, da se pridruženi pregibi sekajo na osnovnih pregibih.

2.6. Enakostranični trikotnik v kvadratu

Izziv 26: S prepogibanjem kvadrata »konstruirajmo« enakostranični trikotnik (Sundara 1901: 9), (Hull 2013: 9)

Prvi način. Konstrukcijo povzemamo po knjigi (Hull 2013: str. 9)⁶.

Kvadrat prepognemo tako, da se oglišče A preslika v B in oglišče D v C (slika 40). S tem razpolovimo kvadrat, na polovici dobimo pregib. Nato prepognemo oglišče A tako, da se preslika na dobljeni pregib, a tako, da gre novi pregib skozi oglišče B . Označimo sliko točke A z E (slika 40.b). Trikotnik ABE je enakostraničen, saj je $|BE| = |AB|$ (slika 40.c). Ta konstrukcija ima tudi to prednost, da ne potrebujemo kvadrata, ampak jo lahko izvedemo s pravokotnikom. Pravokotnik razpolovimo po širini.

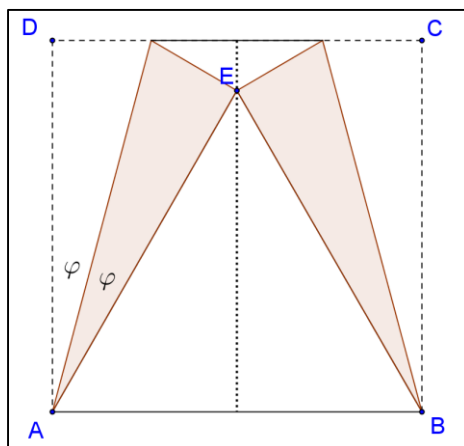


Slika 40: Enakostranični trikotnik v kvadratu (prvi način)

Drugi način. (Prirejeno po Hull 2013: 11)

Sosednji oglišči C in D kvadrata prepognemo na srednjico tako, da gresta nova pregiba skozi preostali oglišči, vsak na svoji strani (glej sliko 41). Ker nastane enakostranični trikotnik ABE , je kot $\varphi = 15^\circ$.

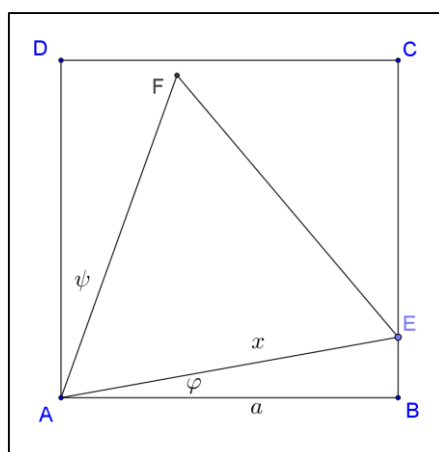
⁶ V istem viru je navedeno, da obstaja več načinov »konstrukcije« enakostraničnega trikotnika v kvadratu s prepogibanjem papirja..



Slika 41: Enakostranični trikotnik v kvadratu (drugi način)

Izziv 27: S prepogibanjem kvadrata s stranico a konstruirajmo ploščinsko največji enakostranični trikotnik (Hull 2013: 10)

Opazujmo enakostranični trikotnik na sliki 40 c). Gotovo ni ploščinsko največji mogoč, saj je očitno, da dobimo večji trikotnik z rahlim zasukom okrog oglišča A (glej sliko 42).



Slika 42: K izpeljavi konstrukcije ploščinsko največjega enakostraničnega trikotnika v kvadratu

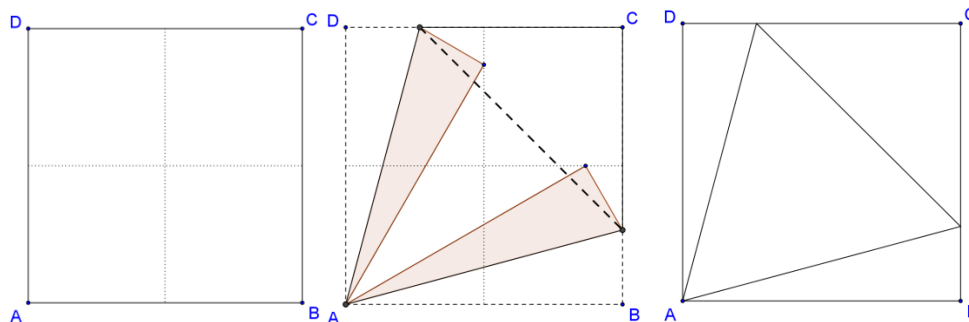
Predstavljamo si, da je oglišče A negibno in da premikamo točko E po stranici BE . Dolžina daljice AE se povečuje. Povečuje se tudi kot φ , medtem ko se kot ψ zmanjšuje. Ker je problem simetričen, je lahko kot φ kvečjemu enak 15° . Če je kot φ večji od 15° , je potem kot ψ manjši od 15° . Tako smo omejili velikost kota φ : $0 \leq \varphi \leq 15^\circ$. Ploščina

enakostraničnega trikotnika je $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Izrazimo dolžino x s kotom φ . Velja zveza $\cos \varphi = \frac{a}{x}$ oziroma $x = \frac{a}{\cos \varphi}$. Tako je izraz za ploščino enakostraničnega trikotnika enak:

$$S(\varphi) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4 \cos^2 \varphi}. \quad (8)$$

Poiščimo odvod funkcije (8) in ga izenačimo z 0: $\frac{dS}{d\varphi} = \frac{\sqrt{3}a^2 \sin \varphi}{2 \cos^3 \varphi}$

Ker je $0 \leq \varphi \leq 15^\circ$, je odvod enak 0 samo v primeru, ko je $\varphi = 0$. Ker pa je funkcija S na opazovanem intervalu naraščajoča (njen odvod je pozitiven), doseže maksimum pri $\varphi = 15^\circ$. Konstrukcija maksimalnega enakostraničnega trikotnika v danem kvadratu je prikazana na sliki 43. Dokaz, da sta pregiba na srednji sliki 43 velika po 15° , je pri izzivu 21, drugi način.



Slika 43: Konstrukcija ploščinsko največjega enakostraničnega trikotnika z origamiko v kvadratu

2.7. Enakostranični trikotnik s prepogibanjem in enim rezom

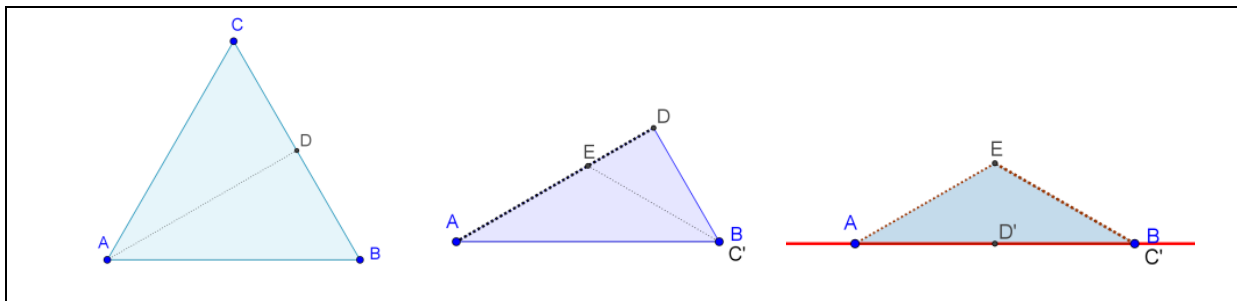
Pri tem izzivu odstopamo od aksiomov origamija tako, da dopuščamo večplastno prepogibanje papirja. Konkretno to pomeni, da se po pregibu ne »vrnemo« v začetno stanje, temveč lahko nadaljujemo z matematičnim pregibanjem dveh ali več plasti.

Izziv 28: Med prebiranjem literature in internetnih virov smo zasledili, da lahko lik prepognemo na tak način, da ga potem z enim rezom »izrežemo« (O'Rourke 2012: 72). Tako smo si zastavili izziv, kako z enim rezom dobiti enakostranični trikotnik.

V istem viru je nakazana rešitev tega problema (O'Rourke 2012: 75)

Rešitev: Na papir narišemo enakostranični trikotnik. Najprej prepognemo eno stranico, na primer AC , preko višine AD , da se pokrije s stranico AB . Nato pa še polovico tretje, to

je novo stranico BD , prepognemo na osnovnico AB , na kateri že ležita prejšnji dve stranici (glej sliko 44). Vzamemo škarje in prerežemo po stranici AB . Ko razgrnemo, imamo lik enakostraničnega trikotnika in v papirju izrezano odprtino enake oblike.



Slika 44: Enakostranični trikotnik z enim rezom

V knjigi *How to fold it: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra* je celotno 5. poglavje z naslovom *Fold and One-Cut* namenjeno tej tematiki⁷. V istem delu (O'Rourke 2012: 78) je naveden tako imenovani izrek »Prepogni in enkrat odreži«⁸, ki pravi takole: »Vsak lik, ki je omejen samo z daljicami in je narisane na papirju, lahko prepognemo v ravnino tako, da samo z enim rezom prerežemo vse stranice lika in nič več«.

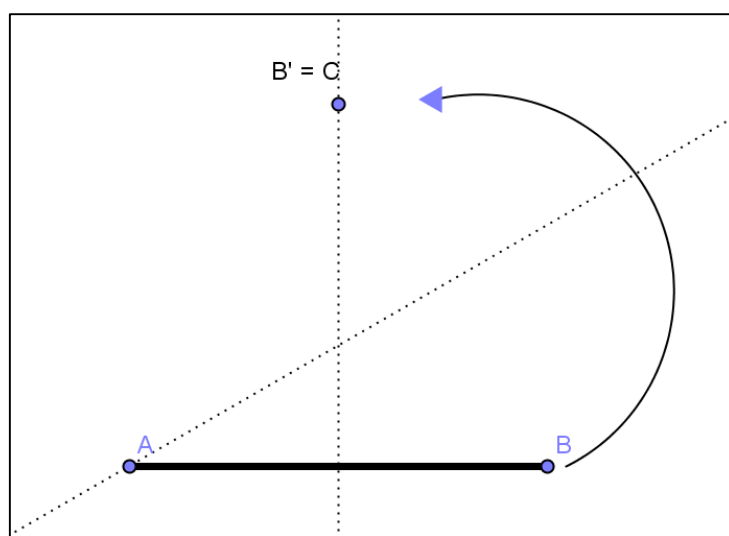
⁷ Glej tudi Demaine, O'Rourke 2007: 254.

⁸ Fold and One-Cut Theorem.

2.8. Konstrukcija enakostraničnega trikotnika, če je dana osnovnica ali višina

Izziv 29: Na listu papirja imamo dano daljico dolžine a . S prepogibanjem papirja konstruirajmo enakostranični trikotnik nad dano daljico.

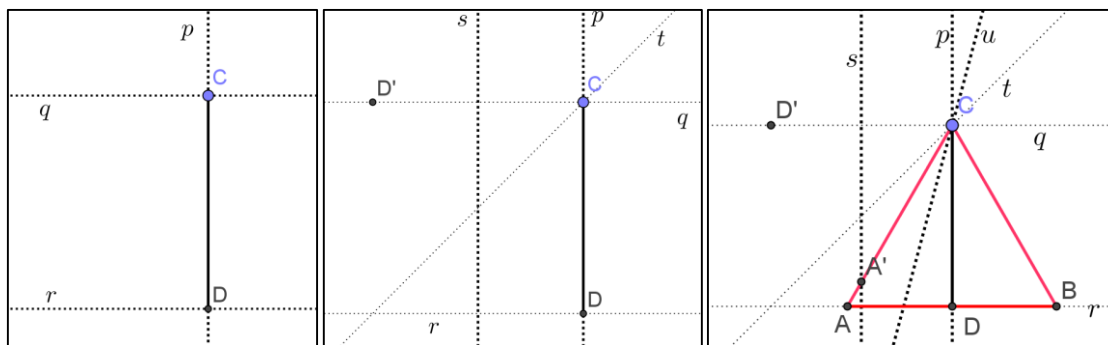
Dani daljici »narišemo« simetralo. Nato naredimo pregib tako, da poteka skozi točko A , krajišče B pa preslikamo na dobljeno simetralo dane stranice. Preslikano točko označimo s C . Nato naredimo še pregiba AC in BC .



Slika 45: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika z dano stranico

Izziv 30: Na listu papirja imamo dano daljico dolžine v . S prepogibanjem papirja konstruirajmo enakostranični trikotnik z višino v .

Naj bo na listu papirja narisana višina, to je daljica DC z dolžino v . Najprej naredimo pregibe p , q in r (glej sliko 46, leva slika). Če že znamo razdeliti kot na tri enake dele (glej uvodni izziv 2), razdelimo prava kota med daljico DC in premico q na tri enake dele. Sicer pa uporabimo drugo rešitev izziva 26. Točko D preslikamo na premico q tako, da gre pregib skozi točko C . Naredimo simetralo daljice $D'S$ (označimo jo s s) in nato preslikamo točko D na premico s tako, da poteka pregib skozi točko C . Prepognemo skozi točki C in A' in določimo točko A . Daljica AC je stranica enakostraničnega trikotnika, saj je kot $A'CD = 30^\circ$, ker je trikotnik $D'CA'$ enakostranični po konstrukciji.



Slika 46: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika z dano višino

2.9. Popolnoma zloženi enakostranični trikotnik

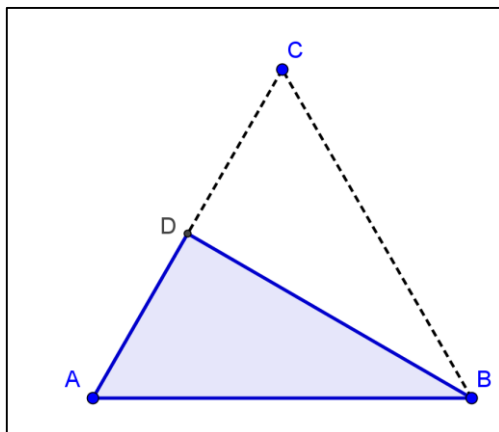
Definicija: Lik je *popolnoma zložen*, kadar samo s prepogibanjem dosežemo, da prepognjeni deli pokrijejo celotni neprepognjeni del lika in da ne pride do prekrivanja. Tu odstopimo od aksiomov origamija v smislu, da »dovolimo« dvoplastno prepogibanje.

Primer: Kvadrat prepognemo preko diagonale ALI kvadrat prepognemo preko srednjice ALI kvadrat prepognemo tako, da vsa štiri oglišča sovpadajo v središču kvadrata.

Izziv 31: Poiščimo popolnoma zloženi enakostranični trikotnik.

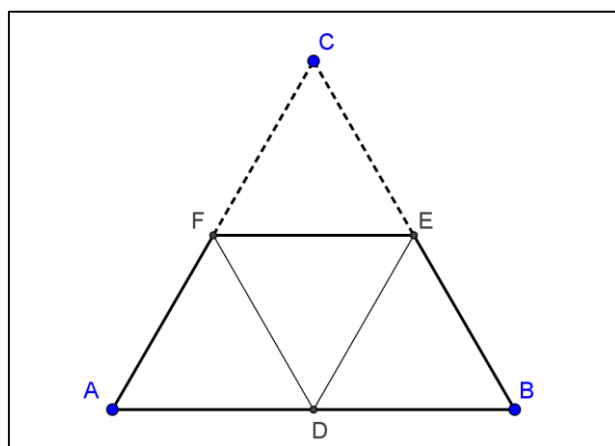
Naj bo ABC enakostranični trikotnik. Če zapognemo vogal z ogliščem C tako, da je oglišče C v notranjosti trikotnika, v zunanosti trikotnika ali na sosednjih stranicah, ne moremo dobiti popolne zložitve. Ostane nam samo še možnost, da oglišče C prepognemo na nasprotno stranico AB .

Ko oglišče C prepognemo na eno izmed ostalih oglišč (recimo na oglišče A), dobimo zloženi lik – polovico enakostraničnega trikotnika (glej sliko 47).



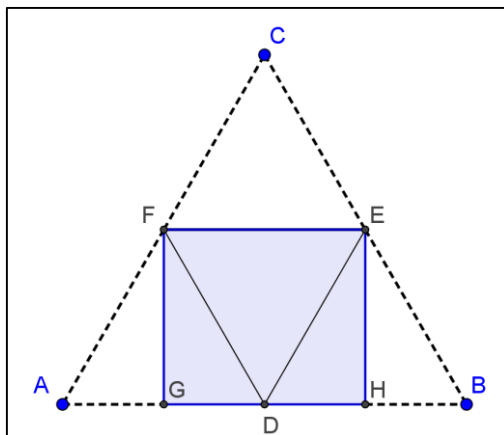
Slika 47: Prva možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika

Ko pregledamo možne pregibe oglišča C na stranico AB , ugotovimo, da je edina možnost, ko leži slika oglišča C na razpolovišču daljice AB (glej sliko 48).

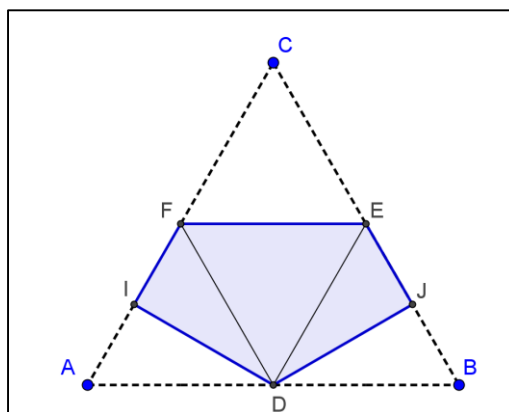


Slika 48: Pregib oglišča C na razpolovišče nasprotne stranice

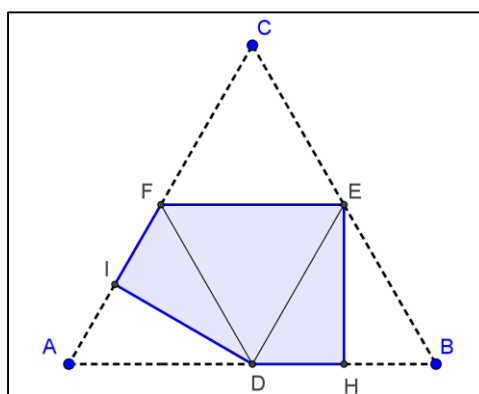
Trikotnik ADF lahko zložimo na dva načina (po zgledu prve možnosti), in sicer tako da preslikamo točko A na točko F ali pa točko A na točko D . Enako lahko prepognemo točko B . Tako imamo še štiri možnosti, od katerih sta dve enaki (dobimo skladna lika, eden izmed njiju je prikazan na sliki 51). Te tri možnosti so prikazane na slikah 49, 50 in 51.



Slika 49: Druga možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika



Slika 50: Tretja možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika

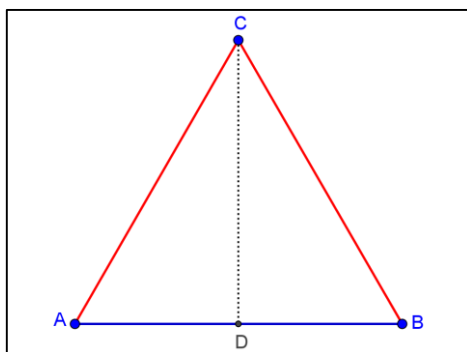


Slika 51: Četrta možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika

V viru (Demaine, O'Rourke 2007: 419) je zapisano, da obstajajo štirje popolnoma zloženi enakostranični trikotniki, niso pa prikazani.

Izziv 32: Dokažimo, da so vsi popolnoma zloženi enakostranični trikotniki zajeti v izzivu 31.

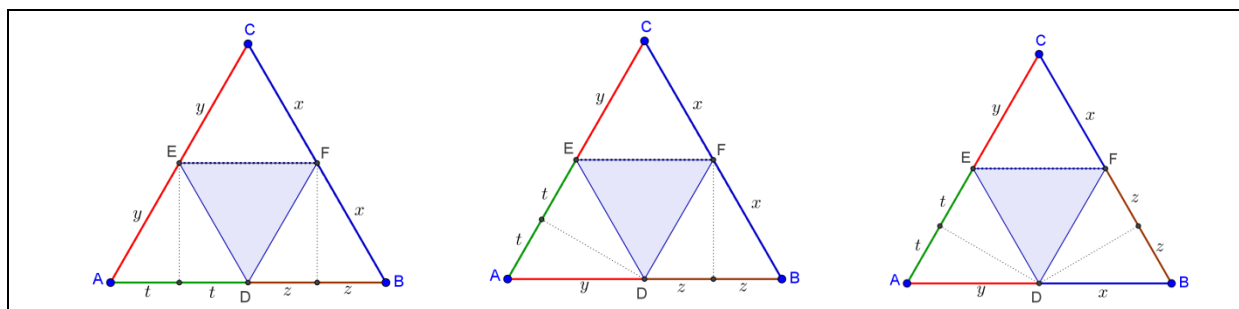
Pri pregibanju v popolnoma zloženi lik lahko točka C ostane na mestu ali pa se preslika drugam. Upoštevamo tudi, da se mora v popolnoma zloženem liku polovica obsega zlepiti z drugo polovico obsega. Predpostavimo najprej, da je točka C negibna. Razdelitev obsega na polovico s paroma enako dolgimi odseki je prikazana na sliki 52.



Slika 52: Ena od možnih delitev obsega na polovico, kjer točka C miruje.

Delitev obsega s slike 52 nam da prvo možnost, ki je opisana v izzivu 31. Točka C je negibna tudi v primeru, ko A preslikamo na C ali ko B preslikamo na C , vendar dobimo v vseh teh primerih do skladnosti enak popolnoma zloženi enakostranični trikotnik.

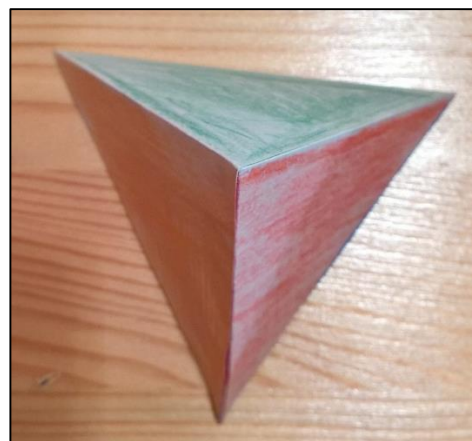
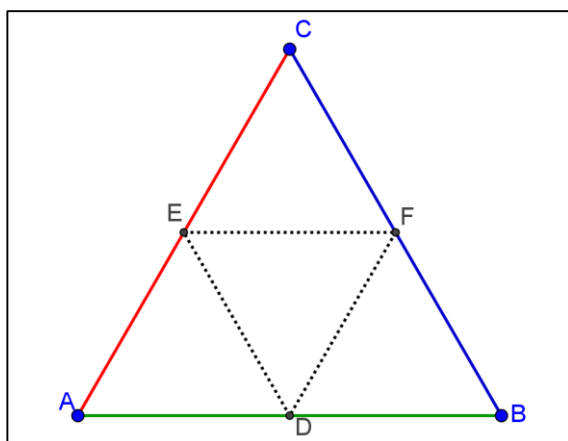
Druga možnost je, da se točka C preslika drugam. Če se preslika izven ali v notranjost trikotnika, je nemogoče v celoti dvojno prekriti preostanek. Točka C se tako lahko preslika le na nasprotno stranico (glej sliko 12, kjer je slika točke C označena z D). Toda trikotnika ADF in DBE sta raznostranična in ju ni mogoče popolnoma dvojno pokriti, razen ko je slika točke C (to je točka D) na razpolovišču nasprotne stranice. V tem primeru sta tudi trikotnika ADE in DBF enakostranična. Vsakega izmed njiju pa lahko na dva načina prepognemo tako, da dobimo popolnoma zložena mala enakostranična trikotnika (glej sliko 53). To pa so ravno štiri možnosti, ki smo jih dobili v izzivu 31.



Slika 53: Točko C prepognemo na razpolovišče nasprotne stranice

2.10. Poliedri, ki nastanejo s prepogibanjem enakostraničnega trikotnika.

V tem razdelku se bomo ukvarjali s problemom, kako s prepogibanjem sestavimo konveksni polieder. Robove samo zlepimo (ne naredimo zavihkov za lepljenje). Nikjer ne sme priti do prekrivanja. V knjigi *Geometric Folding Algorithms: linkages, origami, polyhedra* so na strani 402 opisani vsi možni poliedri, ki jih lahko dobimo s prepogibanjem latinskega križa. Dokazano je, da obstaja natanko 23 poliedrov, ki jih lahko dobimo iz latinskega križa. V istem viru je na strani 414 popoln opis zgibanja kvadrata v polieder, za enakostranični trikotnik pa le zapis, da obstaja neskončno mnogo poliedrov, ki jih lahko dobimo z zgibanjem enakostraničnega trikotnika⁹. Tam je prikazan le primer tetraedra (glej sliko 54).



Slika 54: Pravilni tetraeder: a) pregibi b) geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)

Izziv 33: Poiščimo še kakšen način prepogibanja enakostraničnega trikotnika tako, da lahko naredimo konveksni polieder (poleg tetraedra).

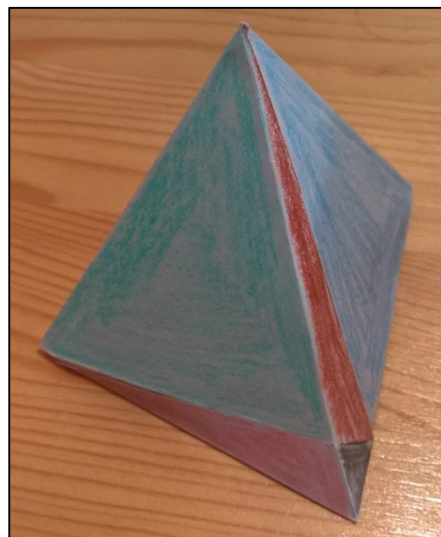
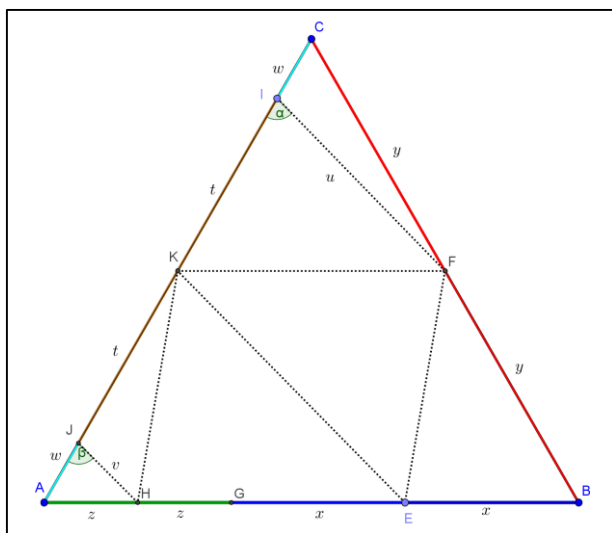
Prva možnost je že prej omenjeni pravilni tetraeder.

Druga možnost

Pomagali smo si z rešitvijo analognega problema za kvadrat (Demaine, O'Rourke 2007: 414). Izhajajmo iz situacije na sliki 54.a. Na stranicah AC in BC pustimo stanje tako, kot je: točki E in F naj razpolavljata omenjeni stranici in predvidimo njuno lepljenje v polieder. Na stranici AB pa premaknimo točko D in vsak del razpolovimo, da dobimo pare daljic, ki jih bomo zlepili. S poskušanjem smo ugotovili, da ne dobimo poliedra, temveč

⁹ Tudi v navajanem O'Rourkovem delu je na strani 135 omenjeno prepogibanje enakostraničnega trikotnika v polieder.

moramo odseka AE in EC nekoliko skrajšati. Pa še v tem primeru ne gre vedno gladko. Opazili smo, da dobimo polieder samo v primeru, ko sta kota α in β enaka (glej sliko 55). Vseh poliedrov pri tej delitvi je kontinuum neskončno mnogo.



Slika 55: Drugi primer razdelitve obsega na polovico in dobljeno geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)

V primeru, ko sta kota α in β enaka, sta si trikotnika AHJ in KFI podobna. Vemo, da je $|KF| = \frac{1}{2}$, saj vzamemo, da je stranica enakostraničnega trikotnika dolga 1. Zato velja:

$\frac{w}{z} = \frac{t}{\frac{1}{2}}$ oziroma $w = 2tz$. V omenjenih trikotnikih uporabimo kosinusni izrek:

$$v^2 = z^2 + w^2 - wz$$

$$u^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2 - \frac{1}{2}t$$

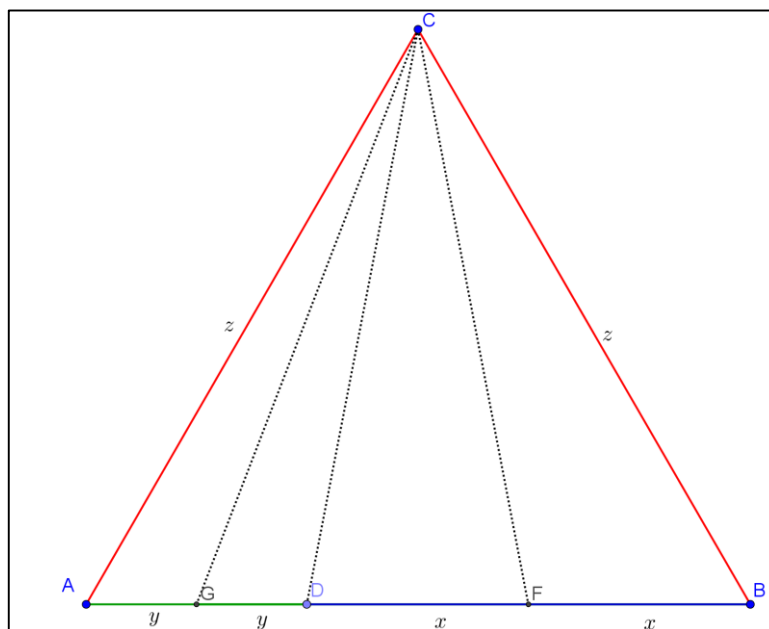
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = t^2 + u^2 - 2tu \cos \alpha$$

Zveza med x in z pa je $2x + 2z = 1$, med w in t pa: $2w + 2t = 1$.

Iz teh zvez dobimo $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}(1-x)}{x}$ oziroma $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{4x^2 - 6x + 3}}$. Primer: pri $x = \frac{1}{4}$ dobimo $\alpha = 79.10660535^\circ$.

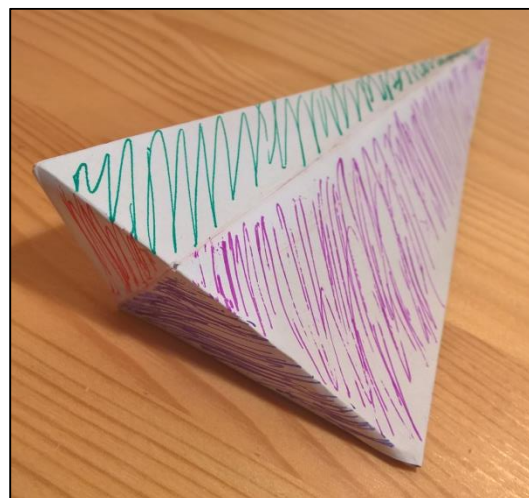
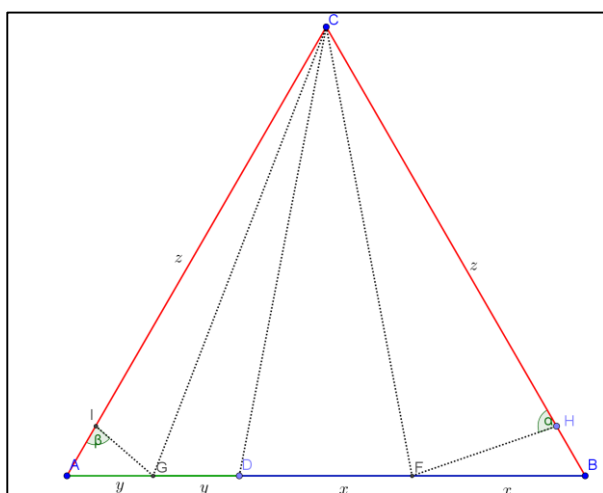
Tretja možnost

Zelo preprosta je delitev obsega na polovico, ki je prikazana na sliki 56. Izhajamo iz možnosti, ki je prikazana na sliki 52, le da osnovnico razdelimo na štiri dele, po dva para.



Slika 56: Tretji primer razdelitve obsega na polovico

Vendar pa praktično ne dobimo poliedra. Če pa vogale pri A in B še dodatno zavijamo, dobimo polieder, a ne v vsakem primeru. Z eksperimentiranjem smo ugotovili, da dobimo polieder v primeru, ko sta kota α in β skladna (glej sliko 57). Tudi tu dobimo kontinuum neskončno mnogo poliedrov.

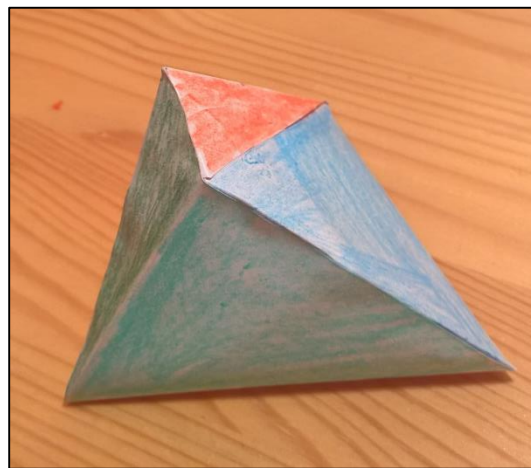
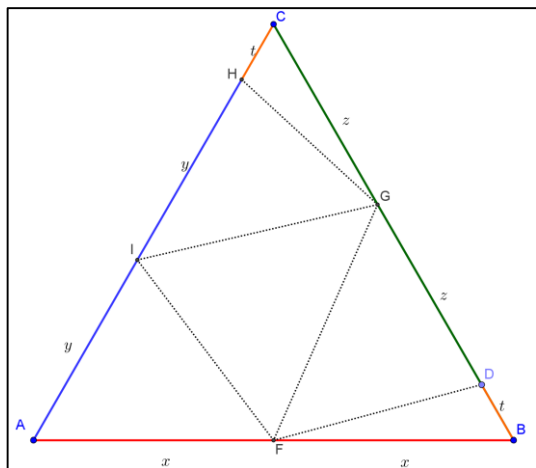


Slika 57: Dopolnjena tretja možnost delitve obsega na polovico in geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)

Pri tretji možnosti je seveda izziv tudi izračunati velikost kota v odvisnosti od dolžine x .

Četrta možnost

Pri četrty možnosti smo osnovnico AB razpolovili, stranico AC pa razdelili na par enakih odsekov dolžine x in ostanek y . Če hočemo enako dolge robove lepiti med seboj, moramo odsek dolžine y odmeriti na stranici BC ob oglišču B . Preostanek stranice B potem razdelimo na enaka odseka dolžine x (glej sliko 58). Na ta način dobimo spet kontinuum neskončno poliedrov.



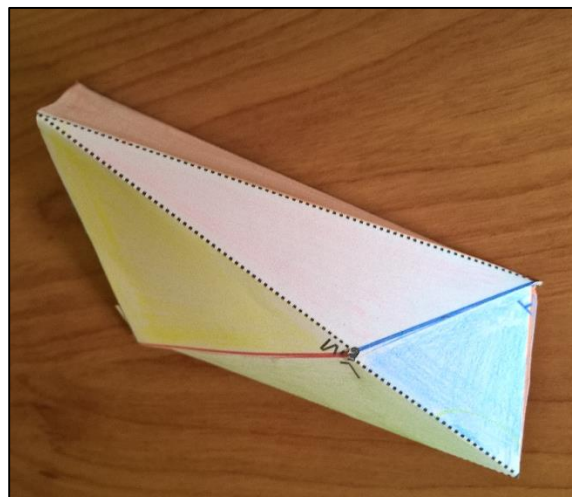
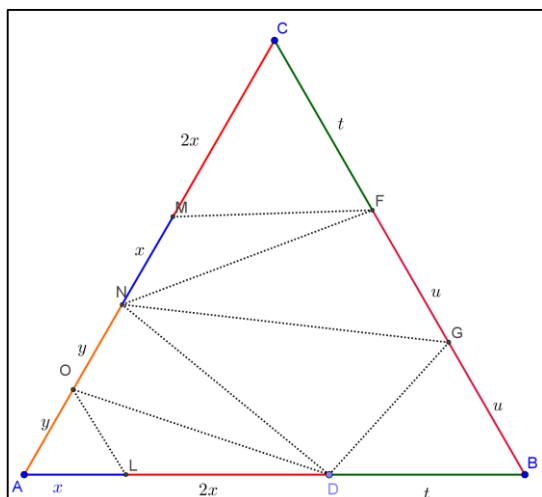
Slika 58: Četrty primer razdelitve obsega na polovico in dobljeno geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)

Izziv 34: Poiščimo vse možnosti, kako iz enakostraničnega trikotnika sestavimo konveksni polieder samo s prepogibanjem papirja¹⁰.

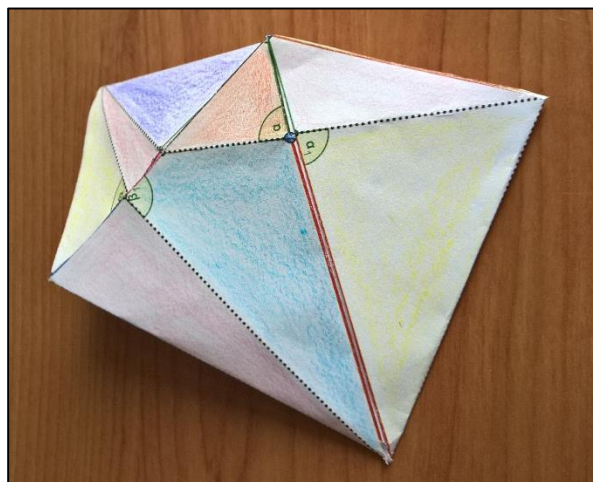
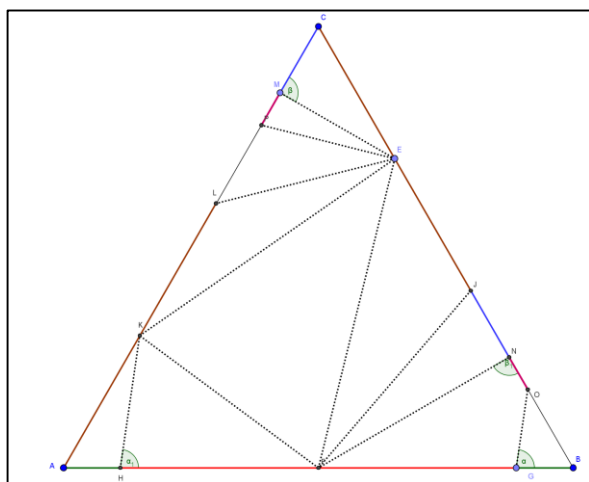
V viru (Akiyama, Nakamura: 36)¹¹ so med ostalim opisani tudi vsi konveksni poliedri, ki jih lahko dobimo s prepogibanjem enakostraničnega trikotnika. Opisan je pristop, kako sistematično preveriti vse možnosti. Avtorja izhajata iz vseh možnosti popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika, ki so opisani v izzivih 31 in 32. Ideja je v tem, da zlepljeni del (posamezni stranici, ne celote) razširimo (odpremo) v tako imenovani obroč in ga potem razdelimo na posamezne odseke tako, da je njegov obseg razdeljen na polovici. Poleg možnosti, ki smo jih opisali v izzivu 33, sta navedeni še dve.

¹⁰ O prepogibanju likov v konveksne poliedre obstaja Aleksandrov izrek, ki pravi, da vsakemu Aleksandrovmu lepljenju pripada natanko določeni polieder. Z Aleksandrovim lepljenjem pa so določeni pogoji, ki jih mora lik izpolnjevati (glej O'Rourke 2012: 133).

¹¹ Do tega vira smo prišli tik pred oddajo raziskovalne naloge.



Slika 59: Peti primer¹² razdelitve obsega na polovico in dobljeno geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)



Slika 60: Šesti primer¹³ razdelitve obsega na polovico in dobljeno geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)

V vsakem izmed teh zadnjih primerov dobimo kontinuum neskončno poliedrov.

V članku *Foldings of Regular polygons to Convex Polyhedra I* so na sliki Fig. 3.10 napačno narisani pregibi (glej Akiyama, Nakamura 2005: 40). Na levi strani slike 60 je popravljena verzija.

¹² Glej Akiyama, Nakamura 2005: 41

¹³ Prirejeno po Akiyama, Nakamura 2005: 40

3. Zaključek

V nalogi smo obravnavali matematično prepogibanje lika enakostraničnega trikotnika. Ocenjujemo, da smo zastavljene cilje dosegli, saj smo postavili veliko matematičnih problemov v zvezi z enakostraničnim trikotnikom, pri katerih izvira osnovna ideja iz prepogibanja papirja. Skušali smo zajeti več različnih matematičnih področij, ne samo geometrijskega. Tako smo vključili probleme s področja analize, ekstremalne probleme, stožnice, krepko pa smo posegli tudi v trirazsežni prostor. Izzivi, pri katerih ni naveden vir, so naše delo. Ne izključujemo pa možnosti, da so v sklopu drugih matematičnih dejavnosti že rešeni.

Ko smo izbirali temo za izdelavo naloge, smo najprej prišli do ideje, da bi večino geometrijskih izrekov in drugih matematičnih zvez ter lastnosti v srednješolski matematiki skušali izpeljati s pomočjo prepogibanja papirja (kolikor je možno). Po pregledu dostopne literature smo se odločili za raziskovanje enakostraničnega trikotnika. Omenjena tema ostaja ena izmed možnosti za nadaljnje raziskovanje s pomočjo matematičnega origamija. Prav tako predlagamo raziskovanje prepogibanja pravih n -kotnikov, konkretno pravih petkotnikov in pravih šestkotnikov. Predvidevamo, da bi bilo zgibanje teh likov v konveksne poliedre zanimivo področje nadaljnjega raziskovanja.

4. Viri in literatura

[1] Akiyama, J., Nakmura, G.: Foldings of Regular Polygons to Convex Polyhedra I: Equilateral Triangles, članek v *Proc. 2003 Indonesia-Japan Conf. Combinatorial Geom. Graph Theory*, volume 3330 of *Lecture Notes in Computer Science*, strani 34-43, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[2] Čabrič, B.: Trisekcija kota, 2003, Presek, Ljubljana, 2003/2004, [online], [citirano 15.12.2015] Dostopno na spletnem naslovu:

file:///C:/Users/UPORAB~1/AppData/Local/Temp/URN_NBN_SI_DOC-BHWULMX4.pdf

[3] Demaine, E. K., O'Rourke, J.: *Geometric Folding Algorithms: linkages, origami, polyhedra*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[4] Fuchs, C.: Angle trisection with origami and related topics, 2000, [online], [citirano 20.11.2015] Dostopno na internetnem naslovu: <http://fuchsc.sbg.ac.at/publ/origat2.pdf>

[5] Hull, T.: *Project Origami: activities for exploring mathematics*, 2013, CRC Press, Boca Raton.

[6] Haga, K.: *ORIGAMICS: Mathematical Exploration through Paper Folding*, 2008, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey.

[7] Lang, R. J.: *Origami and Geometric Constructions*, 2014, [online], [citirano 15.11.2015] Dostopno na spletnem naslovu: http://www.langorigami.com/science/matHagah/hja/origami_constructions.pdf

[8] O'Rourke, J.: *How to fold it: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra*, Cambridge University Press, New York, 2012.

[9] Sundara, R. T.: *Geometric Exercises in Paper Folding*, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1901 Dostopno na internetnem naslovu:

<https://ia802704.us.archive.org/4/items/tsundararowsgeom00sunduoft/tsundararowsgeom00sunduoft.pdf>.

ali pa na

<https://ia801400.us.archive.org/25/items/tsundararowsgeo00rowrich/tsundararowsgeo00rowrich.pdf>.

[10] Tavzes, M. ur.: *Veliki slovar tujk*, CZ, Ljubljana, 2002.

5. Slikovno kazalo

Slika 1: Aksiom origamija $A01$	6
Slika 2: Aksiom origamija $A02$	6
Slika 3: Aksiom origamija $A03$	6
Slika 4: Aksiom origamija $A04$	7
Slika 5: Aksiom origamija $A05$	7
Slika 6: Aksiom origamija $A06$	7
Slika 7: Aksiom origamija $A07$	8
Slika 8: K dokazu, da je vsak trikotnik enakokrak	9
Slika 9: Presečišče simetrane stranice in simetrane nasprotnega kota s prepogibanjem (foto: Miha Torkar).....	10
Slika 10: Potek razdelitve ostrega kota na tri skladne dele	11
Slika 11: K dokazu razdelitve kota na tretjine.....	12
Slika 12: Pregib oglišča na nasprotno stranico	15
Slika 13: Grafa funkcij u in v (glej predpisa (2)).....	20
Slika 14: Sled težišča trikotnika DFE (ko se točka D premika po stranici AB).....	21
Slika 15: Izpeljava enačbe krivulje sledi težišča trikotnika DEF	22
Slika 16: Krivulja sledi težišča trikotnika DFE (točka D se premika po stranici AB).....	24
Slika 17: Krivulja težišča (rdeča) in graf elipse (črno).....	25
Slika 18: Sled središča trikotniku DFE očrtane krožnice (ko se točka D premika po stranici AB).....	26
Slika 19: Izpeljava enačbe sledi trikotniku DEF včrtane krožnice.....	27
Slika 20: Sled višinske točke trikotnika DFE (ko se točka D premika po stranici AB)	28
Slika 21: Krivulja višinske točke v primerjavi z elipso (glej izziv 10).....	30
Slika 22: Krivulja geometrijskega mesta višinskih točk (glej izziv 10).....	30
Slika 23: Sled trikotniku DFE včrtane krožnice (ko se točka D premika po stranici AB)	31
Slika 24: Enačba krivulje višinske točke (dobljena s programom Derive 6).....	31
Slika 25: Primerjava krivulje višinske točke in hiperbole (k izzivu 11)	32
Slika 26: Pregib oglišča preko nasprotne stranice.....	33
Slika 27: Pregib oglišča v notranjost enakostraničnega trikotnika	34
Slika 28: Pregib sosednjih oglišč (pregiba potekata skozi tretje oglišče).....	35
Slika 29: Kako prepogniti, da bo štirikotnik $BDEF$ deltoid?	36
Slika 30: Kako prepogniti, da bo ploščina štirikotnika $EFDC$ največja?	38
Slika 31: Pregib dveh vogalov v skupno točko D	40
Slika 32: Možne lege točke D (skupne točke dveh oglišč).....	41
Slika 33: Pregibi vseh treh oglišč v skupno točko D	42
Slika 34: Možne lege točke D (skupne točke vseh treh oglišč)	43
Slika 35: Osnovni pregibi (.....), glavni pregib (____) in pridruženi pregibi (-----)	44
Slika 36: Koti med pridruženimi pregibi (k izzivu 20)	45

Slika 37: Tativni štirikotniki	46
Slika 38: Vsi pridruženi pregibi (-----)	47
Slika 39: Lega presečišč pridruženih pregibov	48
Slika 40: Enakostranični trikotnik v kvadratu (prvi način)	49
Slika 41: Enakostranični trikotnik v kvadratu (drugi način)	50
Slika 42: K izpeljavi konstrukcije ploščinsko največjega enakostraničnega trikotnika v kvadratu	50
Slika 43: Konstrukcija ploščinsko največjega enakostraničnega trikotnika z origamiko v kvadratu	51
Slika 44: Enakostranični trikotnik z enim rezom	52
Slika 45: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika z dano stranico	53
Slika 46: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika z dano višino	54
Slika 47: Prva možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika	55
Slika 48: Pregib oglišča C na razpolovišče nasprotne stranice	55
Slika 49: Druga možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika	56
Slika 50: Tretja možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika	56
Slika 51: Četrta možnost popolnoma zloženega enakostraničnega trikotnika	56
Slika 52: Ena od možnih delitev obsega na polovico, kjer točka C miruje	57
Slika 53: Točko C prepognemo na razpolovišče nasprotne stranice	57
Slika 54: Pravilni tetraeder: a) pregibi b) geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)	58
Slika 55: Drugi primer razdelitve obsega na polovico in dobljeno geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)	59
Slika 56: Tretji primer razdelitve obsega na polovico	60
Slika 57: Dopolnjena tretja možnost delitve obsega na polovico in geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)	60
Slika 58: Četrty primer razdelitve obsega na polovico in dobljeno geometrijsko telo (Foto: M. Torkar)	61

6. Kazalo tabel

Tabela 1: Dolžine odsekov na stranicah enakostraničnega trikotnika.....18

Tabela 2: Dolžine odsekov u , v in a pri vrednostih $x = \frac{1}{n}, n \in [1, n], n \in \mathbb{N}$ 18

7. Priloge

Priloga 1: Enačba hiperbole (glej izziv 11)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2}{4} - \left(\frac{1037 \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3} - 9 \cdot \sqrt{7})}{311356415 \cdot (28991291442405 \cdot \sqrt{13943128} + 112427862929645 \cdot \sqrt{1810061} + 378779988579500 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3} \right) \\
 & - \frac{3943 \cdot (\sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{3}) \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{311356415 \cdot (28991291442405 \cdot \sqrt{13943128} + 112427862929645 \cdot \sqrt{1810061} + 378779988579500 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3} \\
 & - \frac{60327 \cdot (\sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{12}) \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{21518166975 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 753446000400 \cdot \sqrt{5490183} + 28891291442405 \cdot \sqrt{6310021} + 112427862929645 \cdot \sqrt{10001} - 51295830550009 \cdot \sqrt{12} - 2884829901800021 \cdot \sqrt{61} - 7155350947443120 \cdot \sqrt{7} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{3}) \\
 & - \frac{104826 \cdot (\sqrt{21} - 9) \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{21518166975 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 753446000400 \cdot \sqrt{5490183} + 28891291442405 \cdot \sqrt{6310021} + 112427862929645 \cdot \sqrt{10001} - 51295830550009 \cdot \sqrt{12} - 2884829901800021 \cdot \sqrt{61} - 7155350947443120 \cdot \sqrt{7} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{3}) \\
 & - \frac{967 \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{11548815 \cdot (28779488021200 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 4346656066500 \cdot \sqrt{5490183} + 112427862929645 \cdot \sqrt{6310021} + 5899121029505 \cdot \sqrt{10001} - 51295830550009 \cdot \sqrt{12} - 2884829901800021 \cdot \sqrt{61} - 7155350947443120 \cdot \sqrt{7} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{3}) \\
 & - \frac{133 \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 4346656066500 \cdot \sqrt{5490183} + 112427862929645 \cdot \sqrt{6310021} + 5899121029505 \cdot \sqrt{10001} - 51295830550009 \cdot \sqrt{12} - 2884829901800021 \cdot \sqrt{61} - 7155350947443120 \cdot \sqrt{7} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{3})}{11548815 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 753446000400 \cdot \sqrt{5490183} + 28891291442405 \cdot \sqrt{6310021} + 112427862929645 \cdot \sqrt{10001} - 51295830550009 \cdot \sqrt{12} - 2884829901800021 \cdot \sqrt{61} - 7155350947443120 \cdot \sqrt{7} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{3}) \\
 & - \frac{5112412 \cdot \sqrt{21}}{51012885} \cdot \left(\frac{854 \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{5897792 \cdot (112427862929645 \cdot \sqrt{13943128} + 5899121029505 \cdot \sqrt{1810061} + 378779988579500 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3} \right) + \left(\frac{5897792 \cdot (112427862929645 \cdot \sqrt{13943128} + 5899121029505 \cdot \sqrt{1810061} + 378779988579500 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3}}{5897792 \cdot (112427862929645 \cdot \sqrt{13943128} + 5899121029505 \cdot \sqrt{1810061} + 378779988579500 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3}} \right) \\
 & - \frac{21 \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{1779710 \cdot (753996000400 \cdot \sqrt{13943128} + 4346656066500 \cdot \sqrt{1810061} + 112427862929645 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3}} \\
 & - \frac{2047 \cdot (10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3})}{66271283 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{13943128} + 2387948023200 \cdot \sqrt{1810061} + 9427819427121 \cdot \sqrt{210007} + 112427862929645 \cdot \sqrt{30003} - 135865900650627 \cdot \sqrt{427} - 2884829901800021 \cdot \sqrt{61} - 7155350947443120 \cdot \sqrt{7} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{3})} \\
 & - \frac{602787 \cdot \sqrt{7}}{1358873259 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left(\frac{10601287469644110 \cdot \sqrt{12} \cdot 0427 + 100506049157828370 \cdot \sqrt{5490183} + 274579894134113135 \cdot \sqrt{6310021} + 1136168374626494505 \cdot \sqrt{10001} - 6186619104280169941 \cdot \sqrt{12} - 71527780069657054311 \cdot \sqrt{61} - 78585768333735294382 \cdot \sqrt{7} - 4443517219720177934 \cdot \sqrt{3}}{136670 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{13943128} + 4346656066500 \cdot \sqrt{1810061} + 112427862929645 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3}} \right) + \left(\frac{136670 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{13943128} + 4346656066500 \cdot \sqrt{1810061} + 112427862929645 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3}}{136670 \cdot (630950809500 \cdot \sqrt{13943128} + 4346656066500 \cdot \sqrt{1810061} + 112427862929645 \cdot \sqrt{210007} + 46112926512400 \cdot \sqrt{30003} - 7135350947443120 \cdot \sqrt{427} - 1296585424353860 \cdot \sqrt{183} - 5129046393550549 \cdot \sqrt{21} - 172924624015291281) \cdot \sqrt{3}} \right) = 0
 \end{aligned}$$