

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

**OSNOVNE KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE
ENAČB Z ORIGAMIJEM (BWO?)**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

1	Uvod	1
2	Evklidske in origami konstrukcije	3
2.1	Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije	3
2.2	Origami konstrukcije	4
2.2.1	Origami operacije	5
2.2.2	Zadostne in potrebne origami operacije	8
2.2.3	Zrcaljenje točke čez premico	10
2.3	Kje origami konstrukcije nadvladajo evklidske	12
2.3.1	Algebrski pogled na evklidske konstrukcije	13
2.3.2	Števila, konstruktibilna z origamijem	14
3	Prepogibanje kvadrata	16
3.1	Razdelitev daljice na n enakih delov	16
3.2	Hagovi izreki	18
3.2.1	Prvi Hagov izrek	18
3.2.2	Drugi Hagov izrek	18
3.2.3	Tretji Hagov izrek	19
3.3	Reševanje nerešljivih starogrških problemov	19
3.3.1	Trisekcija kota	19
3.3.2	Podvojitev kocke	19
4	Konstrukcija pravilnih n-kotnikov	20
5	Pregibanje tangent na stožnice	21
5.1	Krožnica	21
5.2	Parabola	22
5.3	Elipsa	24
5.4	Hiperbola	26
6	Reševanje enačb	28
6.1	Kvadratna enačba	28
6.2	Kubična enačba	31
6.2.1	Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom	31
6.2.2	Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo	36
6.2.3	Hatorijeva konstrukcija	36
6.2.4	Alperinova rešitev	37
7	Alhazenov problem	38
8	Origami konstrukcije z več hkratnimi prepogibi	39
9	Zaključek	40
10	Naloge	41
	Literatura	43

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Osnovna literatura

1. T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na <https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ>.
2. K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

Podpis mentorja:

Osnovne konstrukcije in reševanje enačb z origamijem (bwo?)

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

Angleški prevod slovenskega naslova dela

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: integracija, kompleks, C^* -algebre

Keywords: integration, complex, C^* -algebras

1 Uvod

Začnimo z odzivom mojih prijateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le – že tako izjemno širokega – področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebre, diferencialne topologije ... Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [10, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, pred letom 1600 po Kr. ni). Oblikovanje oblik iz lista papirja se je do konca 20. stoletja hitro razširilo po vsem svetu [22]. Matematični vidik origamija je v ospredje prišel nekoliko kasneje. V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852) v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri poučevanju osnovne geometrije v vrtcu. Indijski matematik Tandalam Sundara Row je nato l. 1893 izdal obsežno knjigo *Geometric Exercises in Paper Folding* [26], v kateri popisuje konstrukcije raznolikih geometrijskih likov in celo krivulj. Velik prelom je dosegla italijanska matematičarka Margherita P. Beloch, ki je v 30-ih letih 20. st. odkrila, da lahko s prepogibanjem papirja rešujemo celo kubične enačbe. Vseeno je preteklo še pol stoletja, da je origami začel zanimati tudi širšo znanost, od takrat pa se je na tem področju odprlo veliko priložnosti za raziskovanje koncepta origamija in uporabo prepogibanja v najrazličnejših strokah [10, str. 10].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da lahko praktična izkušnja prepogibanja papirja za namen reševanja problemov učenca bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa vključuje neko motorično aktivnost in spretnost. Poleg fine motorike krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih nekaj člankov in seminarskih nalog ter diplomskih in magistrskih del, strokovnih knjig iz tega področja pa nisem našla. Ta naloga zajema predvsem uporabo origamija za namene raziskovanja geometrije ter reševanja enačb in vključuje veliko slik z orisanimi konstrukcijami. Zato je tudi daljša, vendar je tako tudi zaradi namena kasnejše uporabe pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih večinoma da predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe evklidskih orodij (neoznačeno ravnilo ter šestilo) raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali osnovne evklidske ter origami operacije in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo še kaj, česar z evklidskimi orodji ne moremo. V drugem poglavju se bomo ukvarjali s konstrukcijami tangent na stožnice. V tretjem poglavju sledi prepogibanje kvadratnega lista papirja, ki nam lahko stranice kvadrata razdeli v zanimivih razmerjih. Pogledali si bomo Hagove izreke in se naučili, kako stranico razdelimo na poljubno število enako dolgih delov. Poleg kvadrata je zanimiva tudi konstrukcija enakostraničnega trikotnika, ki ga lahko dobimo na več načinov, poleg teh pa si bomo v četrtem poglavju pogledali še konstrukcije tudi kakih drugih pravilnih n -kotnikov.

Po tej bolj osnovni geometriji se bomo v petem poglavju podali na vznemirljivo reševanje dveh starogrških problemov, ki ju z evklidskimi orodji – dokazano – ne znamo rešiti; to sta *podvojitev kocke* (oz. konstrukcija $\sqrt[3]{2}$) in *trisekcija kota*. Izkaže se, da se da vsakega od njiju rešiti celo na več kot en način!

Nazadnje pa se bomo posvetili še najbolj obsežnemu poglavju, ki deloma zapusti področje geometrije. Pogledali si bomo, kako lahko s pomočjo prepogibanja papirja rešujemo kvadratne in kubične enačbe, za bolj zahtevne pa bosta zanimivi podpoglavji o reševanju enačb 4. in 5. stopnje.

Zapustimo sedaj malo jezerce umetelno zloženih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Verjetno so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga [22]. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja (“oru” – prepogibati, “kami” – papir) se je na Daljnem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvom, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [27]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastalo poimenovanje “*origamics*”. V slovenščini uradnega prevoda še ni, Grahor pa v [19, str. 5] po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physics* – fizika itd.) predlaga termin “origamika”.

2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida¹, ki je napisal zelo znano zbirko trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi*. V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij², aksiomov³ in postulatov⁴. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definirал osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat ... ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic [9]. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov, iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

Postulat P1. Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

Postulat P2. Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

Postulat P3. Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

Postulat P4. Vsi pravi koti so med seboj skladni.

¹O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [3, str. 61].

²*Definicija* je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

³*Aksiom* je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

⁴*Postulat* je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [9, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmomoma ne ločujemo [20, str. 2].

Postulat P5. Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

Opomba 2.1. Vemo že, da je postulat P5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

Definicija 2.2. *Evklidske konstrukcije* so konstrukcije točk, daljic, premic in krožnic, ki jih je mogoče konstruirati le z uporabo t. i. *evklidskih orodij*:

- neoznačeno in neskončno dolgo ravnilo (angl. *straightedge*)
- šestilo, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj)

Opomba 2.3. Da se pokazati, da lahko za konstrukcije ekvivalentno uporabimo tudi šestilo, ki prenaša razdalje [20, str. 6–7]. Zato imamo odslej z izrazom *šestilo* v mislih kar moderno šolsko šestilo.

Formalno so torej edine dovoljene operacije tiste iz postulatov P1–P3. Seveda privzamemo, da so konstruktibilne tudi točke, ki jih dobimo kot že dane ali kot presečišča dveh premic, dveh krožnic ali premice in krožnice. Vendar je to dovolj, da lahko le z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo premice, kote, simetrane kotov in daljic, krožnice in še mnogo drugega. V resnici se da konstruirati toliko geometrijskih figur, da se matematiki raje vprašamo, česa pa se s tem orodjem *ne* da konstruirati. In tu pridemo do motivacije za uvedbo origami konstrukcij, saj lahko z njimi npr. rešimo kar dva od treh znamenitih starogrških problemov, ki jih z evklidskim orodjem ne moremo (gl. podpoglavje 3.3).

2.2 Origami konstrukcije

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini. Za model evklidske ravnine vzamemo kvadraten list papirja, saj s prepogibanjem očitno v tej ravnini tudi ostanemo. Dogovorimo se, da pregibe konstruiramo le po enega naenkrat (po vsakem prepogibu papir nazaj razgrnemo) ter v ravni črti, po vsakem prepogibu papir znova odgrnemo in prepovedana je uporaba kakršnegakoli orodja (npr. škarje in lepilo, izjemoma lahko za vidnejšo označbo že *konstruiranih* pregibov ali točk uporabimo pisalo). Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije praktično preizkusi tudi sam. Pri izbiri papirja je priporočljiv rahlo prosojen papir, skozi katerega se vidijo morebitne označbe točk in premic s svinčnikom (npr. navaden kuhinjski papir za peko).

Ker so pregibi torej ravne črte, nam služijo kot modeli premic. Na začetku, ko imamo pred seboj le kvadraten list papirja, so naše premice njegove stranice, nove premice pa dobimo kot pregibi skozi točke. Določimo še te – začetni modeli točk so ravno oglišča našega lista papirja, nadaljne točke pa dobimo kot presečišča premic, torej presečišča pregibov (ki gredo skozi dane ali že konstruirane točke). Torej imamo le pet možnosti, kako prepogniti papir – tako, da zložimo (slikovni prikaz v [10, str. 25–26]):

- točko na drugo točko (en možen pregib),
- točko samo vase (neskončno možnih pregibov),
- točko na premico (neskončno možnih pregibov),
- premico na drugo premico (en ali dva možna pregiba) in
- premico samo vase (neskončno možnih pregibov).

Definicija 2.4. Vzemimo kvadraten list papirja. Začetne premice so njegove stranice, začetne točke pa njegova oglišča. Nove premice so pregibi papirja skozi dane ali že skonstruirane točke, nove točke pa so presečišča premic oz. pregibov. Konstrukcije, ki jih izvajamo z z zgoraj naštetimi ter ravnimi in enkratnimi pregibi, imenujemo *origami konstrukcije*.

2.2.1 Origami operacije

V zadnjem stoletju se je preko različnih matematikov (Jacques Justin, Peter Messer, Benedetto Scimemi, Humiaki Huzita, Koshiro Hatori, George E. Martin idr.; nekateri so med seboj sodelovali, drugi so delovali neodvisno) izoblikoval seznam operacij, ki nam jih omogočajo zgoraj naštete konstrukcije. Seznam se je med avtorji razlikoval v številu (gl. [10, str. 29–30]), skupno pa se je izoblikovalo osem – na prvi pogled različnih – operacij. Najprej jih naštejmo, potem pa si ob sledečih slikah pogledajmo še prikaz opisanih konstrukcij. Videli bomo, da moramo pri nekaterih operacijah ločiti več primerov [23, 27].

Operacija O1. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p , ki gre skozi njiju.

Operacija O2. Za poljubni premici lahko določimo njuno presečišče, če obstaja.

Operacija O3. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p , da se točki pokrijeta.

Operacija O4. Za poljubni premici a in b obstaja pregib p , ki ju položi eno na drugo.

Operacija O5. Za poljubno točko A in premico a obstaja natanko en pregib p skozi točko A , ki je pravokoten na premico a .

Operacija O6. Za primerno izbrani točki A in B ter premico a obstaja pregib p skozi točko B , ki točko A položi na premico a .

Operacija O7. Za primerno izbrani točki A in B ter premici a in b obstaja pregib p , ki točko A položi na premico a in točko B na premico b .

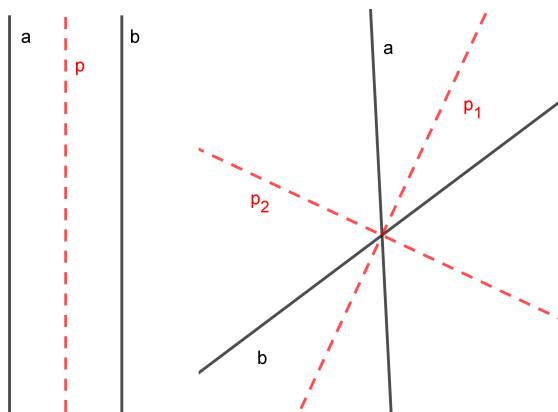
Operacija O8. Za poljubno točko A ter nevzporedni premici a in b obstaja pregib p , ki je pravokoten na premico b in točko A položi na premico a .



Slika 1: Operacije (od leve proti desni) O1, O2 in O3.

Sedaj za vsako operacijo posebej pogledimo njeno konstrukcijo. Takoj opazimo, da je operacija O1 ekvivalentna postulatu P1, kar nam lahko vzbudi zanimanje za povezavo med evklidskimi in origami konstrukcijami. Operacija O2 je izvedljiva v vsakem primeru nevzporednih pregibov in nam omogoča določitev novih točk v našem modelu ravnine. Operacija O3 pa nam poda konstrukcijo simetrane daljice AB (slika 1) – ko opravimo pregib in pustimo papir še zapognjen, je očitno, da so točke na pregibu enako oddaljene od točk A in B .

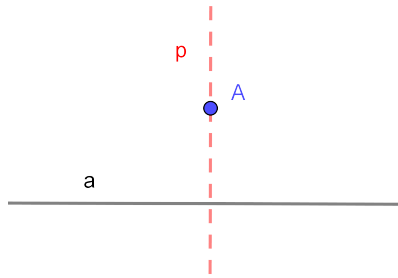
Nadalje opazimo, da nam operacija O4 konstruira obe simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče, v primeru vzporednih premic pa dobimo tretjo vzporednico, ki leži na sredi med njima (slika 2). Zato sta tu možna po dva ali, v posebnem primeru, en pregib.



Slika 2: Operacija O4 v obeh možnih primerih.

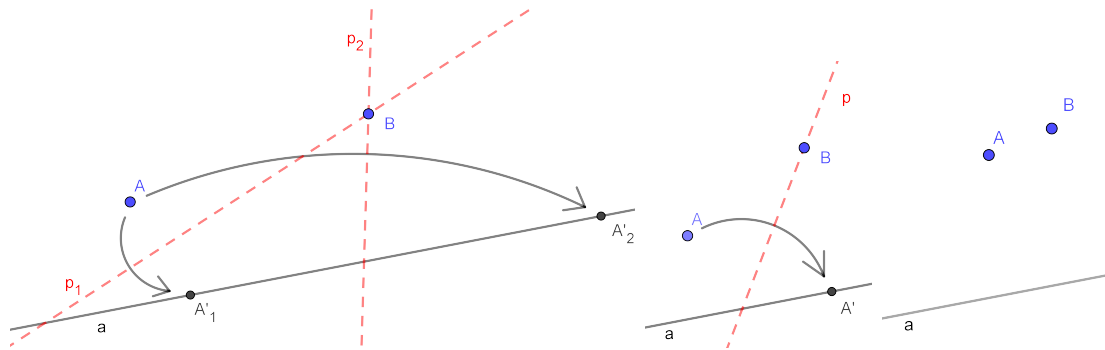
Operacija O5 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko (slika 3). Pri tem je vseeno, ali točka leži na premici ali ne. Pregib opravimo tako, da premico položimo samo nase in pazimo, da je točka A v pregibu. Zaradi simetrije je pregib res pravokoten na premico in tako tudi en sam.

Operacija O6 je še posebej zanimiva. Najprej si pogledimo njeno konstrukcijo. Vzemimo točki A in B ter premico a . Iščemo pregib skozi B , ki A položi na premico a . Ker točka B leži na pregibu, je enako oddaljena tako od točke A kot tudi njene slike A' na premici a , torej je A' ravno presečišče premice a in krožnice s središčem v B ter polmerom AB . Pregib je simetrala daljice AA' , ki po konstrukciji poteka



Slika 3: Operacija O5.

skozi točko B . Če velja $d(A, B) > d(B, a)$, sta presečišči s premico a dve (in s tem tudi dva možna pregiba, gl. sliko 4 levo), v primeru $d(A, B) = d(B, a)$ je presečišče eno samo (in s tem en možen pregib, gl. sliko 4 na sredi) in je premica a takrat tangentna na omenjeno krožnico, v zadnjem primeru, ko velja $d(A, B) < d(B, a)$, pa presečišč ni (in s tem tudi pregiba, gl. sliko 4 desno).



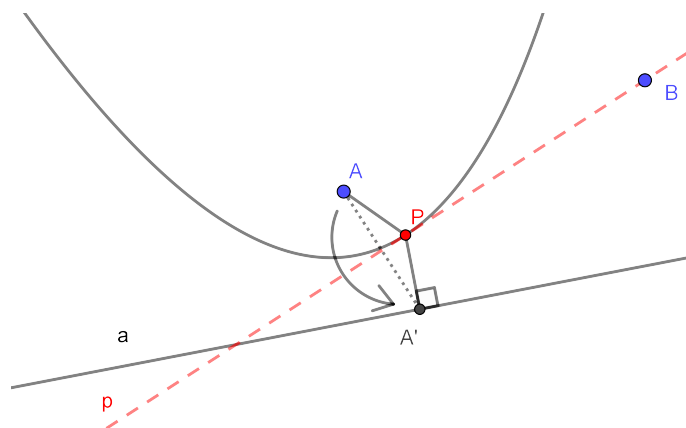
Slika 4: Operacija O6 v vseh treh primerih.

Zgodba operacije O6 se tu še ne zaključí. Ker na pregibu ležijo vse točke, ki so enako oddaljene od točke A in A' , to velja tudi za točko P , ki jo dobimo kot presečišče pregiba in pravokotnice na premico a skozi A' (slika 5). Zanj velja $d(A, P) = d(P, a)$ in je enolično določena (v srednjem primeru na sliki 4 je to kar točka B). Torej točka P leži na paraboli z goriščem A in premico vodnico a . Bralec lahko sam premisli, da je P edina točka na pregibu, ki je enako oddaljena od gorišča in premice vodnice. Pregib torej seka parabolo le v eni točki, kar pomeni, da je to *tangenta na to parabolo*. V levem primeru na sliki 4 smo dobili dve tangenti.

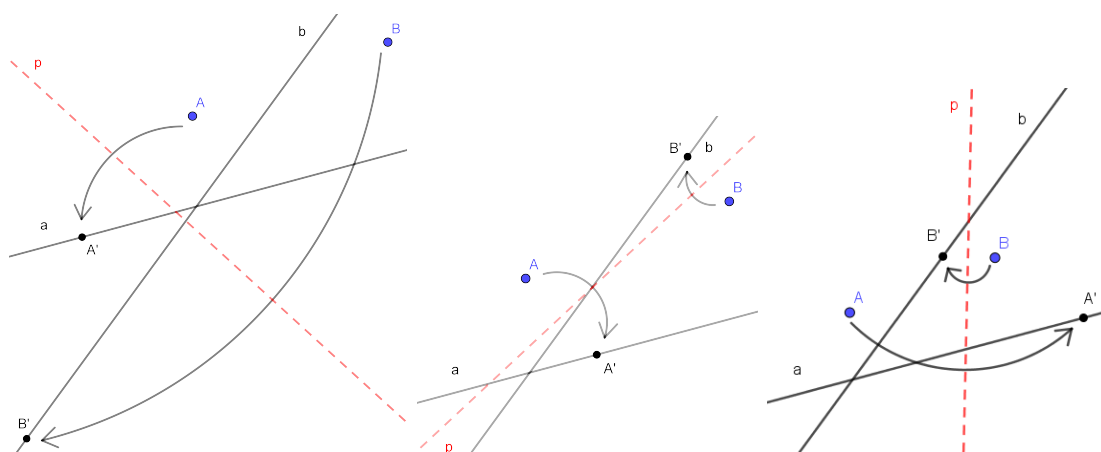
Poglejmo si naslednjo operacijo. Konstrukcijo O7 začnemo z upogibom papirja, ki točko A položi na premico a , potem pa točko premikamo po premici, dokler se tudi točka B ne stakne s premico b . Takrat naredimo pregib. Na sliki 6 so prikazani trije pregibi, kar je tudi največje možno število pregibov za iste točke in premice. Več o številu pregibov sledi v razdelku 6.2.

Kaj je geometrijski pomen te operacije? Če smo pri operaciji O6 dobili tangento na parabolo, potem lahko takoj vidimo, da pri operaciji O7 dobimo *skupno tangento na dve paraboli* – ena ima gorišče v točki A in premico vodnico a , druga pa gorišče v točki B ter premico vodnico b (slika 7).

Opomba 2.5. O operaciji O7 naj bi prva pisala italijanski matematičarki Margherita P. Beloch, po kateri operacijo imenujemo tudi *Belochin pregib*.



Slika 5: Operacija O6 kot konstrukcija tangente na parabolo z goriščem v A in premico vodnico a .



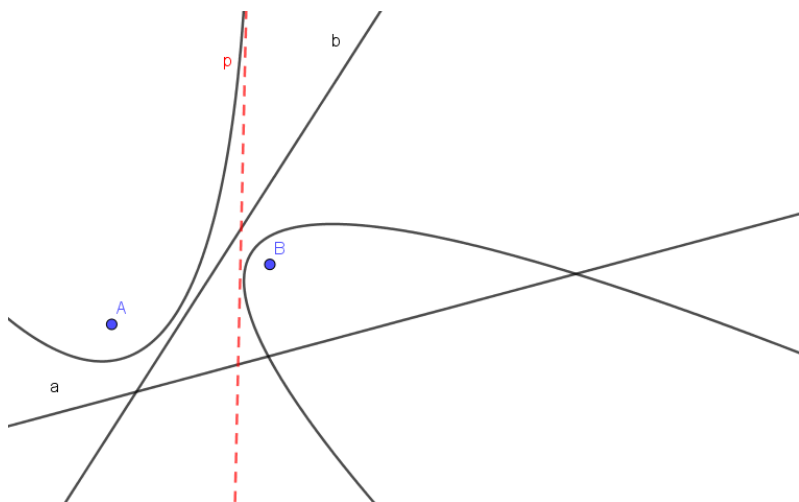
Slika 6: Operacija O7 (primer treh pregibov za isti točki in premici).

Zadnja operacija O8 zahteva nevzporedni premici, saj v nasprotnem primeru ne moremo konstruirati pregiba, ki bi bil pravokoten na obe premici in točko A položil na premico a (razen če le-ta že leži na njej). Premislimo geometrijsko konstrukcijo: ker mora biti pregib pravokoten na premico b , bo slika točke A (označena z A') ležala na vzporednici skozi točko A k premici b . Prav tako mora točka A' ležati na premici a , torej je slika ravno presečišče omenjene vzporednice in premice a . Iskan pregib je simetrala daljice AA' , ki je po konstrukciji pravokoten na premico b (slika 8).

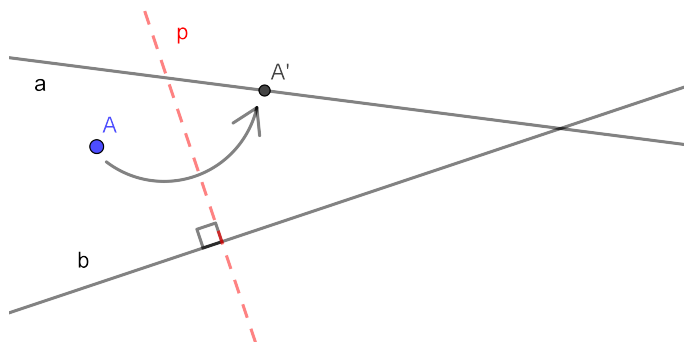
Opomba 2.6. Natančen bralec lahko opazi, da nam origami operacije ne podajajo konstrukcije slik točk, temveč samo pregibe, ki točke preslikajo na premice. Sliko točke konstruiramo šele po uporabi operacije O5 – skozi originalno točko naredimo pregib, pravokoten na prvi pregib (iz O6), in slika je potem presečišče pravokotnice in premice, na katero smo prepognili originalno točko.

2.2.2 Zadostne in potrebne origami operacije

Izkaže se, da je teh osem operacij zadostnih za katerokoli origami konstrukcijo.



Slika 7: Operacija O7 kot konstrukcija skupne tangente na dve paraboli.



Slika 8: Operacija O8.

Izrek 2.7. Če dovolimo le enkratne in ravne pregibe, so edine možne operacije prepogibanja operacije O1–O8.

Ideja dokaza je, da za vsak možen prepogib, ki prekrije točko ali premico s točko ali premico (gl. seznam na začetku podpoglavja 2.2) pogledamo vse možnosti. Izkaže se, da res dobimo prepogibe iz operacij O1–O8. Za natančen dokaz s slikovno ponazoritvijo gl. [10, str. 24–26 (izrek 1.1)].

Vendar ali so vse te operacije tudi potrebne ali lahko kakšno izpustimo? Operacija O2 je očitno potrebna, saj nam določa nove točke. Če podrobneje opazujemo ostale konstrukcije, pa opazimo, da so vse posebni primeri operacije O7 (t. j. konstrukcija pregiba, ki točko A položi na premico a in točko B na premico b), ko premici a in b sovpadata ali ko ena ali obe izmed točk A in B ležita na premici:

- Operacija O1: Naj točka A leži na premici a , točka B pa na premici b . Pregib skozi točki A in B točko A ohrani na premici a in točko B na premici b .
- Operacija O3: Naj točka A leži na premici b , točka B pa na premici a . Pregib, ki položi točki drugo na drugo, točko A položi na premico a in hkrati točko B na premico b .
- Operacija O4: Naj točka A leži na premici b , točka B pa na premici a . Simetrala kota v presečišču premic (ali vmesna vzporednica, če sta premici a in b

vzporedni), točko A položi na premico a in hkrati točko B na premico b .

- Operacija O5: Naj točka A leži na premici a , točka B pa na premici b . Pregib skozi točko A (ali B), ki je pravokoten na premico b (ali a), točko A ohrani na premici a in točko B na premici b .
- Operacija O6: Naj točka B leži na premici b . Pregib skozi točko B , ki točko A preslika na premico a (če tak pregib obstaja), točko B ohrani na premici b .
- Operacija O8: Naj točka B leži na premici b . Pregib, ki točko A položi na premico a in je pravokoten na premico b , točko B ohrani na premici b .

Ker lahko vse konstrukcije po izreku 2.7 opišemo z operacijami O1–O8, smo s tem dokazali spodnji izrek:

Izrek 2.8. *Če imamo dani vsaj dve točki in dve nevzporedni (lahko tudi identični) premici, ki vsebujeta dane točke, potem lahko vse origami konstrukcije z enkratnimi in ravnimi pregibi opišemo s kombinacijo operacij O2 in O7.*

Vseeno bomo ohranili vseh osem aksiom operacij, saj bomo kakšen pregib lažje razložili preko ene od ostalih petih operacij kot pa opisovali, na kakšen način je to operacija ??.

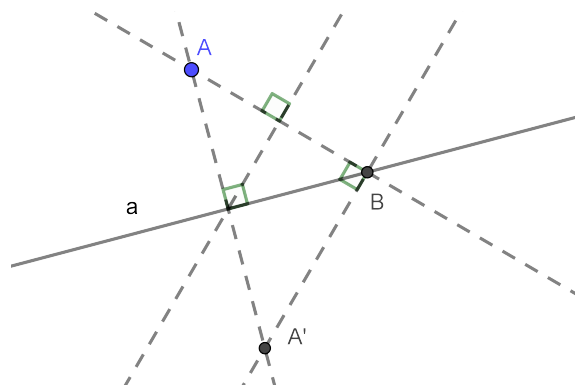
2.2.3 Zrcaljenje točke čez premico

Operacija O3 nam poda simetralo daljice AB . Torej je točka B zrcalna slika točke A čez to premico. Kaj pa, če imamo za neko točko A že dano premico a in iščemo njeno zrcalno sliko? Naravna rešitev je, da naredimo pregib po premici in s svinčnikom označimo zrcalno sliko. A definicija 2.4 pravi, da lahko točke dobimo le kot presečišča pregibov, poleg tega pa je uporaba pisala dovoljena le za vidnejšo označbo že konstruiranih točk.

Zato moramo najti zaporedje pregibov, kjer na koncu kot presečišče nekih dveh premic dobimo želeno točko. Za dano premico a in točki A , ki ne leži na tej premici (sicer je točka A zrcalna slika sama sebi), lahko zrcalno sliko točke konstruiramo z naslednjimi koraki (prikazani na sliki 9, postopek vzet iz [10, str. 28]):

1. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na premico a skozi točko A .
2. Z operacijo O4 prepognemo simetralo kota, ki ga oklepata premica a in pravokotnica iz prvega koraka.
3. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na simetralo skozi točko A . Njeno presečišče s premico a označimo z B .
4. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na pregib iz tretjega koraka skozi točko B . Presečišče novega pregiba in pravokotnice iz prvega koraka označimo z A' .

Trditev 2.9. *Točka A' iz opisane konstrukcije je zrcalna slika točke A .*



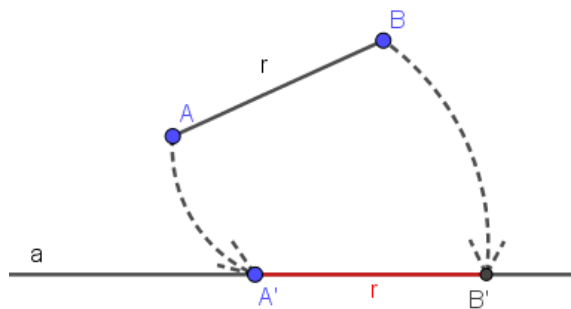
Slika 9: Zrcaljenje točke A čez premico a s prepogibanjem papirja.

Dokaz. Trikotnik, ki ga dobimo po 3. koraku, je pravokoten in enakokrak, saj je simetrala (pravega kota) iz 2. koraka pravokotna na njegovo osnovnico. Zato kot ob točki A znaša 45° . Ker je trikotnik $\triangle A'BA$ pravokoten, je zato tudi enakokrak, torej premica a razpolavlja daljico AA' , torej je A' res zrcalna slika točke A . \square

Ker lahko čez premico zrcalimo točke, lahko čeznjo zrcalimo tudi daljice oz. premice – to storimo tako, da zrcalimo dve točki z daljice in naredimo pregib čez njuni sliki. Zrcaljenje pa nam omogoča še nekaj več, kar nam pove naslednja trditev.

Trditev 2.10. *Z upoštevanjem pravil iz 2.2 in origami operacij lahko s prepogibanjem papirja prenašamo razdalje.*

Dokaz. V ravnini si izberimo poljubni točki A in B , ki določata daljico z neko dolžino r . Naj bo a poljubna premica in A' poljubna točka na njej. Trditev pravi, da lahko z origami operacijami konstruiramo točko $B' \in a$, da je $d(A', B') = r$ (slika 10). Pri tem ni pomembno, na kateri strani točke A' leži točka B' , saj jo lahko vedno zrcalimo čeznjo.

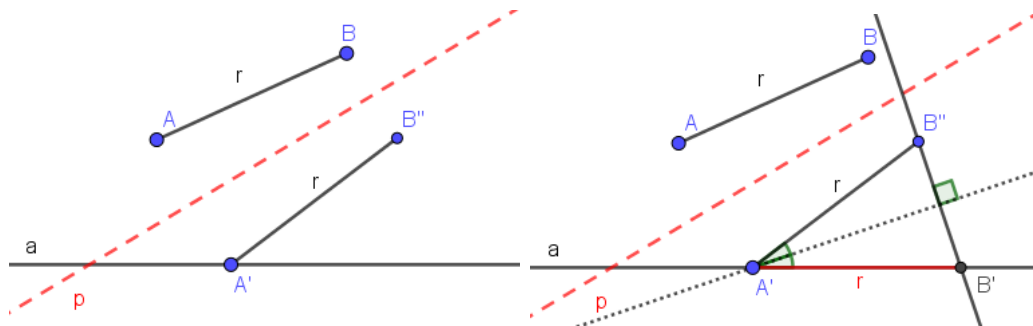


Slika 10: Prenos dolžine daljice AB na premico a k izbrani točki A' .

Prenos razdalje razdelimo na dva koraka:

1. Če $A \neq A'$, daljico AB zrcalimo čez tisto premico p , ki točko A preslika v točko A' (po O3 je tak pregib oz. premica ena sama). Zrcalno sliko točke B označimo z B'' (slika 11 levo). V posebnem primeru, ko daljica AB leži na premici a , je to že konec konstrukcije.

2. Daljico $A'B''$ rotiramo okoli točke A' , da se točka B'' preslika na premico a . To storimo tako, da z operacijo O4 konstruiramo simetralo kota med daljico $A'B''$ in premico a in čeznjo zrcalimo točko B'' (slika 11 desno). S tem dobimo točko $B' \in a$, ki je po konstrukciji od točke A' oddaljena za dolžino r .



Slika 11: Zrcaljenje daljice AB (levo) in rotacija daljice čez eno krajišče (desno).

S tem smo razdaljo r prenesli na poljubno mesto v ravnini. □

Tako lahko s prepogibanjem papirja zrcalimo točke (in premice), prenašamo razdalje pa tudi – po 2. koraku iz zgornjega dokaza – rotiramo točke (in premice). To novo znanje bomo uporabili v podpoglavju 2.3.2, od sedaj naprej pa bomo pri konstrukcijah, ki vključujejo zrcaljenje točk, zaradi preglednosti izpustili potrebne pregibe in zrcaljene točke označili kar s svinčnikom skozi papir.

2.3 Kje origami konstrukcije nadvladajo evklidske

Prišli smo do ključnega dela poglavja – reševanje vprašanja, zakaj se nam z origami konstrukcijami sploh splača ukvarjati.

Tako z evklidskim orodjem kot s prepogibanjem papirja lahko konstruiramo premice in točke ter prenašamo razdalje. Le evklidskim orodjem lahko konstruiramo tudi krožne loke, ker pa znamo rotirati točke okoli druge točke, vendar lahko tudi s prepogibanjem papirja konstruiramo katerokoli točko na krožnici z danim središčem in polmerom. Tako lahko vse evklidske konstrukcije opravimo tudi z origamijem (za natančnejši dokaz gl. [5]).

Bralec je ob zgornjih opisih posamezne operacije povabljen, da premisli, kako je mogoče operacije O1, O3, O4, O5, O6 in O8 opraviti tudi z evklidskim orodjem (operacija O2 le določa nove točke, zato tu o konstrukciji ne moremo govoriti). Do tu nam torej origami konstrukcije niso dale ničesar novega.

Ključna je sedma operacija. Izkaže se namreč, da operacije O7 oz. Belochinega pregiba ne moremo opraviti z evklidskim orodjem. Prefinjen način, kako to dokazati, je preko rešitve starogrškega problema o trisekciji kota. V podpoglavju 3.3 bomo spoznali več origami postopkov, ki nam poljuben kot razdelijo na tri skladne dele, pri tem pa uporabimo pregib iz operacije O7. Ker *trisekcija kota z evklidskim orodjem ni mogoča* (dokaz v [13, str. 77–78]), posledično tudi konstrukcija operacije O7 s tem orodjem ne obstaja. Primerov uporabe tega pregiba, ki nam rešijo (z evklidskim orodjem v splošnem) nerešljiv problem, je še več; eden najbolj odmevnih je uporaba

v več postopkih reševanja kubičnih enačb, ki jih v splošnem z evklidskim orodjem ne moremo reševati (gl. razdelek 6.2).

Prednost origamija pred evklidskim orodjem je najbolj vidna, če evklidske in origami konstrukcije prevedemo v jezik abstraktne algebre.

2.3.1 Algebrski pogled na evklidske konstrukcije

Definicija 2.11. Na listu papirja, ki nam služi kot model kompleksne ravnine \mathbb{C} , imejmo dano realno os, izhodišče $(0, 0)$ in razdaljo 1. Če lahko le z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo točko $(x, 0)$, rečemo, da je x *evklidsko-konstruktibilno* število. Pri tem upoštevamo tri pravila, ki izhajajo iz Evklidovih aksiomov in postulatov:

- nove točke dobimo s presečišči dveh premic, dveh krožnic ali premice in krožnice,
- skozi vsaki točki lahko z ravnilom potegnemo ravno črto ter
- za vsako točko in razdaljo r lahko s šestilom zarišemo krožnico, ki ima središče v tej točki in polmer r .

Opomba 2.12. Ker lahko uporabimo šestilo, ki prenaša razdalje (opomba 2.3), je dovolj *kjerkoli* v ravnini konstruirati točki z medsebojno razdaljo x .

Jerman bralca v [13] na zelo strukturiran in nazoren način popelje čez dokaz, da lahko z evklidskim orodjem konstruiramo natanko vsa racionalna števila, njihove vsote, razlike, zmnožke, količnike, kvadratne korene ter linearne kombinacije vsega naštetega. To je množica

$$\mathbb{Q}(r) = \{a + b\sqrt{r}; a, b, r \in \mathbb{Q}; r > 0 \text{ in } \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}\},$$

ki je komutativen obseg oz. polje in hkrati tudi dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom \mathbb{Q} z bazo $\{1, \sqrt{r}\}$.

Da pokažemo, da so to vsa možna evklidsko-konstruktibilna števila, je potrebna natančna obravnava vseh možnih enačb, ki jih dobimo pri iskanju presečišč dveh krožnic, dveh premic ter krožnice in premice, potem pa je potrebno še dokazati, da nam vse nadaljne rabe konstruiranih presečišč res podajo najmanjšo razširitev polja kompleksnih števil, ki je zaprta za operacijo kvadratnega korenjenja. Jerman s tem dokaže naslednji izrek.

Izrek 2.13. Število $r \in \mathbb{R}$ se da konstruirati le s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je r algebraičen nad \mathbb{Q} in je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom \mathbb{Q} , enaka 2^n za nek $n \in \mathbb{N}_0$.

Opomba 2.14. Razsežnosti obsega $\mathbb{Q}(r)$ pravimo tudi *stopnja razširitve obsega* \mathbb{Q} . Izkaže se, da je enaka stopnji minimalnega polinoma števila r nad \mathbb{Q} [13, str. 77].

Izreku takoj sledita dokaza, da trisekcija kota v splošnem ter konstrukcija števila $\sqrt[3]{2}$ z evklidskim orodjem nista mogoči [13, str. 77–78].

Iz izreka sledi tudi, da lahko vsa evklidsko-konstruktibilna števila analitično zapišemo kot rešitve kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti. O reševanju enačb se bomo natančneje ukvarjali v poglavju 6.

2.3.2 Števila, konstruktibilna z origamijem

Poiščimo še množico števil, ki jih lahko konstruiramo z origamijem.

Definicija 2.15. Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine \mathbb{R}^2 , imejmo dano abscisno os, izhodišče $(0, 0)$ in točko $(1, 0)$. Če lahko le z enkratnimi ravnimi prepogibi konstruiramo točko $(x, 0)$, rečemo, da je x *origami-konstruktibilno* število. Pri tem upoštevamo pet pravil iz začetka podpoglavja 2.2.

Opomba 2.16. Vemo že, da operacije O1– O8 zajamejo vse možne pregibe iz teh petih pravil, zato se jih še naprej poslužujemo.

Opomba 2.17. Ker znamo konstruirati pravokotnice in prenašati razdalje (trditve 2.10), lahko predpostavimo, da imamo dan kar celoten koordinatni sistem z abscisno in ordinatno osjo, izhodiščem ter enoto 1 na obeh oseh. Zato je tudi dovolj *kjerkoli* v ravnini konstruirati točki z medsebojno razdaljo x .

Izrek 2.18. Za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$, so origami-konstruktibilna vsa števila iz množice $\mathbb{Q}(r) = \{a + b\sqrt{r}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Dokaz. Ekvivalentno to pomeni, da lahko konstruiramo realne rešitve poljubne kvadratne enačbe, saj je njena splošna rešitev ravno oblike $a + b\sqrt{r}$ za neke $a, b \in \mathbb{Q}$ in $r \in \mathbb{Q}^+$. Torej moramo dokazati, da znamo s prepogibanjem seštevati, odštevati, množiti, deliti in koreniti dana oz. že konstruirana števila.

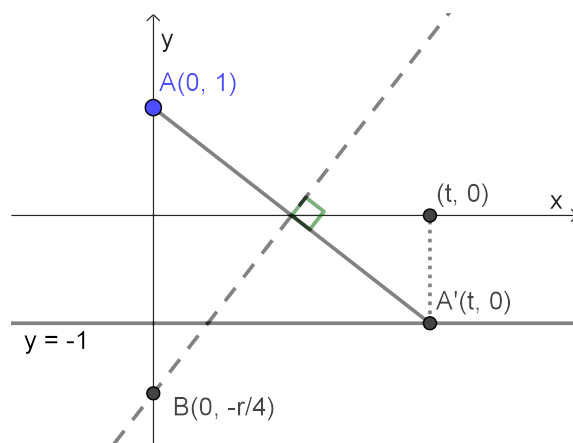
Na začetku imamo dani točki $(0, 0)$ in $(1, 0)$, ki predstavljata števili 0 in 1. Brez težav lahko za poljuben $x \in \mathbb{Z}$ konstruiramo točko $(x, 0)$, saj znamo zrcaliti točke čez premice in prenašati razdalje. Zato je tudi seštevanje in odštevanje že konstruiranih števil enostavno. Deljenje je podrobneje obravnavano v poglavju 3, kjer bomo spoznali, kako neko dolžino s prepogibanjem razdeliti na n delov za poljubni $n \in \mathbb{N}$. S tem znanjem in uporabo množenja (ki je poseben primer seštevanja) lahko torej konstruiramo poljuben $x \in \mathbb{Q}$ oz. poljubno točko (x, y) z racionalnima koordinatama v ravnini. Obstaja pa tudi več bolj direktnih metod za konstrukcijo števila $a/b \in \mathbb{Q}$ (glej [15, str. 12–21]).

Manjka nam samo še konstrukcija kvadratnega korena poljubnega racionalnega števila. V ta namen si pogledjmo naslednjo konstrukcijo (vzeto iz [11, str. 58]): Imejmo točko $A(0, 1)$, premico $y = -1$ in poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$ (po zgornjem premisleku jih znamo konstruirati). Na ordinatni osi označimo točko $B(0, -\frac{r}{4})$ in naredimo pregib skozi točko A položi na premico $y = -1$. Njena zrcalna slika je $A'(t, 0)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 12).

Pregib poteka skozi točko B in razpolovišče daljice AA' , torej je njegov koeficient $k_B = \frac{r}{2t}$ (izpeljavo prepuščamo bralcu). Ker je pregib simetrala daljice AA' , njena nosilka pa ima koeficient $k_A = -\frac{2}{t}$, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} k_B &= -\frac{1}{k_A} \\ \frac{r}{2t} &= \frac{t}{2} \\ r &= t^2 \text{ oz. } t = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Na koncu le še prepognemo pravokotnico na abscisno os skozi točko A' in tako dobimo točko $(\sqrt{r}, 0)$. Torej smo konstruirali število \sqrt{r} za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$. \square



Slika 12: Konstrukcija števila \sqrt{r} za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$.

Opomba 2.19. V razdelku 6.1 bomo pokazali, kako s prepogibanjem rešimo poljubno kvadratno enačbo z racionalnimi koeficienti brez pomoči kvadratne formule, kar je v bistvu še en dokaz zgornjega izreka.

Posledica 2.20. Vsa evklidsko-konstruktibilna števila so origami-konstruktibilna.

Do tega zaključka lahko pridemo tudi intuitivno. Operacija O1 simulira uporabo neoznačenega ravnila, konstrukcija v operaciji O6 podaja točke, ki so enako oddaljene od nekega središča, kar je ravno namen šestila.

Kot smo omenili že na začetku razdelka 2.3, se da s prepogibanjem konstruirati še kaj več kot z evklidskim orodjem. Poleg trisekcije poljubnega kota in reševanja kubičnih enačb med drugim lahko med drugim konstruiramo tudi $\sqrt[3]{k}$ za poljuben⁵ konstruktibilen k (dokaz v [20, str. 156]). (a potem so origami števila enaka množici $\{a + b\sqrt{r} + c\sqrt[3]{q} \mid a, b, c, r, q \in \mathbb{Q}\}$? Je kakšna oznaka?) Prepogibanje papirja je torej res močnejše orodje od evklidskega.

⁵Za $k = 2$ je to rešitev starogrškega problema o podvojitvi kocke. Več o tem sledi v pod poglavju 3.3

3 Prepogibanje kvadrata

Spomnimo se, da smo pri dokazovanju trditve 2.18 izpustili dokaz, da lahko vsako origami-konstruktibilno število delimo s poljubnim naravnim številom. Ob predpostavki, da to velja, smo dokazali, da so origami-konstruktibilna števila zaprta za deljenje. Eden od ciljev tega poglavja je tako pokazati, kako neko daljico s prepogibanjem razdeliti na n delov za poljubni $n \in \mathbb{N}$. Poleg tega pa si bomo pogledali še raznovrstna razmerja stranic v kvadratu, ki jih dobimo s prepogibanjem oglišč nanje. S to temo se je veliko ukvarjal Kazuo Haga, japonski profesor biologije, in v svojem delu *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding* [7] med drugim formuliral tri izreke, ki jih poznamo pod imenom *Hagovi izreki*. Na koncu si bomo pogledali še enostavne, a osupljive načine, kako lahko z origamijem rešimo problema trisekcije poljubnega kota ter podvojitve kocke, ki ju z evklidskim orodjem ne moremo.

Tako kot z evklidskim orodjem tudi s prepogibanjem papirja težko ostanemo na enem pregibu – enodimenzionalni premici – in si pri konstrukciji točk pomagamo s skokom v dvodimenzionalni svet. Zato vzemimo v roke kvadraten list papirja (za lažje računanje predpostavimo, da je stranica dolga 1) in raziskujmo, v kakšnih razmerjih lahko določeni pregibi ali zrcaljene točke delijo njegove stranice.

3.1 Razdelitev daljice na n enakih delov

Izziv tega problema je pravzaprav razdelitev daljice na liho število delov – enostavno je dolžino razdeliti na pol, na četrtine, osmine ... in če jo znamo razdeliti na liho število delov, potem jo zmoremo razdeliti na n delov za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Problem delitve daljice na enake dele s prepogibanjem papirja je skozi zadnja desetletja dobil več načinov reševanja. Tu si bomo pogledali **koliko?** metode.

Metoda križajočih se diagonal

Metoda nima uradnega prevoda niti uradnega imena, jo pa tako imenuje Robert J. Lang v svojem članku [14]. Njena konstrukcija je prikazana na sliki **referenca na sliko, ustvari sliko al pej kopirej hull2020 str. 14 al pej hull2018 str. 38**. Najprej kvadrat dvakrat prepognimo na pol – enkrat po diagonali skozi oglišči A in C in drugič po vertikali. Nato prepognemo po diagonali (skozi oglišče B) še desni pokončen pravokotnik. Presečišče obeh diagonal označimo s točko P in naredimo skoznjo prepogib, ki je pravokoten na horizontalno stranico kvadrata.

Trditev 3.1. *Zadnji pregib iz zgornjega opisa konstrukcije razdeli horizontalno stranico kvadrata v razmerju 2 : 1.*

Dokaz. Dokazujemo lahko na več načinov:

1. *Analitičen pristop:* Kvadrat postavimo v evklidsko ravnino tako, da je spodnje levo oglišče kvadrata v koordinatnem izhodišču in spodnje desno v točki $(1, 0)$. Obe diagonali izrazimo z enačbama premic. Glavna diagonala ima enačbo $y = x$, diagonala pravokotnika pa $y = -2x + 2$. Točka P je njuno presečišče in ima tako koordinati $(2/3, 2/3)$.

2. *Preko podobnih trikotnikov:* Z opisanimi prepogibi v tem kvadratu konstruiramo več trikotnikov. Njihova oglišča označimo tako, kot kaže slika **naredi in referiraj sliko, str. 38 v hull2013; ampak predrugači imena oglišč (glej nadaljevanje tega dokaza)**. Iz podobnosti trikotnikov $\triangle AGP$ in $\triangle ABC$ sledi, da je trikotnik $\triangle AGP$ enakokrak. Naj bo dolžina njegovih krakov x . Potem je $|AG| = |GP| = x$ in $|GB| = 1 - x$. Iz podobnosti trikotnikov $\triangle EFB$ in $\triangle PGB$ sledi

$$\frac{|EF|}{|FB|} = \frac{|PG|}{|GB|} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

□

Po konstrukciji pregiba, ki zgornjo stranico kvadrata razdeli v razmerju 2 : 1, desni pravokotnik (s stranico DE) po vertikali prepognemo še na pol. S tem smo stranico kvadrata razdelili na tri enake dele.

Razdelitev stranice kvadrata na štiri dele je očitna – kvadrat v vertikalni smeri dvakrat prepognemo na pol.

Stranico razdelimo na pet delov na podoben način kot na tri. Naredimo enak pregib po glavni diagonali, nato pa zgornjo stranico razdelimo v razmerju 3 : 1 (to znamo storiti). S tem smo na desni strani kvadrata dobili pokončen pravokotnik s horizontalno stranico, dolgo četrto stranice kvadrata. Naslednji pregib je, kot prej, diagonala tega pravokotnika (tista skozi oglišče B). Presečišče te in glavne diagonale je točka, ki je od desne stranice oddaljena za $1/5$ (dokaz je analogen tistemu za trditev 3.1). Naredimo vertikalni pregib skozi točko P in s tem zgornjo stranico kvadrata razdelimo v razmerju 4 : 1. Na koncu še levi del te stranice razdelimo na štiri dele. S tem smo celotno stranico razdelili na pet skladnih delov.

Zgornji postopek lahko posplošimo na poljuben $n \in \mathbb{N}$. Kot smo videli v konkretnih primerih za $n = 3, 4$ in 5 , smo si pomagali z vnajprejšnjo razdelitvijo stranice na $n - 1$ številu enakih delov (kar smo zmogli storiti). Dokaz naslednje trditve bo tako temeljil na indukciji.

Trditev 3.2 (Metoda križajočih se diagonal za splošen n). *Naj bo $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 1 prepognemo po diagonali AC , potem pa stranico DC s točko E razdelimo v razmerju $(n - 2) : 1$. Naredimo pregib novonastalega pravokotnika skozi točki B in E . Presečišče te in glavne diagonale je točka P , ki je od desne stranice kvadrata oddaljena za $1/n$.*


Dokaz. Za $n = 1$ in $n = 2$ ni kaj dokazovati – v prvem primeru pregiba sploh ni, v drugem primeru stranico prepolovimo.

Baza indukcije: Vemo že, da trditev drži za $n = 3, 4, 5$.

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da znamo stranico razdeliti na n enakih delov.

Indukcijski korak: Dokazujemo, da znamo stranico razdeliti na $n+1$ enakih delov. Po navodilih za konstrukcijo najprej stranico DC s točko E razdelimo v razmerju $(n - 1) : 1$ (kot če bi jo razdelili na n skladnih delov, ampak označimo le zadnji prpogib). To po indukcijski predpostavki znamo storiti. S prepogibom skozi oglišče B in točko E dobimo, kot presečišči obeh diagonal, točko P . Potem pa podobno kot

pri dokazu trditve 3.1 dokažimo, da leži točka P na želeni razdalji od desne stranice kvadrata:

1. *Analitičen pristop:* Naj bo oglišče A koordinatno izhodišče in oglišče B točka $(1, 0)$. Premica, ki je nosilka diagonale AC , ima tako enačbo $y = x$, nosilka diagonale CE pa $y = -nx + n$. Točka P je njuno presečišče in ima tako koordinate $(n/(n+1), n/(n+1))$. Torej je od desne stranice kvadrata res oddaljena za $1/(n+1)$.
2. *Preko podobnih trikotnikov:* Označimo oglišča trikotnikov, kot kaže slika **SLIKA**  **plus REFERENCA**. Trikotnik $\triangle AGP$ je enakokrak in njegova kraka označimo z x . Iz razmerij dolžin stranic podobnih trikotnikov $\triangle EFB$ in $\triangle PGB$ sledi

$$\frac{|EF|}{|FB|} = \frac{|PG|}{|GB|} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow n - nx = x \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}.$$

Točka P je od desne stranice kvadrata res oddaljena za $x - 1 = 1/(n+1)$. □

Posledica 3.3. *Poljubno daljico znamo razdeliti na n skladnih delov za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vzemimo neko daljico poljubne dolžine. Ker znamo konstruirati pravokotnice skozi točke in prenašati razdalje, lahko konstruiramo kvadrat, katereda zgornja stranica dana daljica (**spet kakšna slika več korakov**). Po zgornji trditvi jo znamo razdeliti v razmerju $(n-1) : 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem moramo njen daljši del razdeliti na $n-1$ skladnih delov. To storimo na enak način kot prej – konstruiramo manjši kvadrat s to novo stranico in ponovimo postopek. Ustavimo se, ko na nekem koraku stranico kvadrata razdelimo v razmerju $1 : 1$. Takrat bo zgornja stranica oz. dana daljica razdeljena na n skladnih delov. □

Metoda2

Metoda3

Metoda4

Več metod (vsaj tri?), na koncu daš Hagovo metodo in iz tega začneš z novim podpoglavjem – Hagovi izreki. Metode pred tem: Hull2013 (str. 36–40)

3.2 Hagovi izreki

Konstrukcija poljubnega $a/b \in \mathbb{Q}$ [15, str. 20–21]
Hull2013, activity 11 (str. 103–)

3.2.1 Prvi Hagov izrek

PLUS poslošitev.

3.2.2 Drugi Hagov izrek

PLUS poslošitev.

3.2.3 Tretji Hagov izrek

PLUS poslošitev.

3.3 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

3.3.1 Trisekcija kota

Motivacija za ta problem?

Kot 90° znamo tretjiniti z neoznačenim ravnilom in šestilom, saj znamo konstruirati kot 30° . Težava je, da ne obstaja konstrukcija, s katero na tri skladne kote razdelimo *poljuben* kot. V [13, str. 77–78] je dokaz o nezmožnosti trisekcije kota 60° . Avtor se pri tem sklicuje na izrek 2.13 in opombo 2.14 in podpoglavja 2.3.1.

Grki so to reševali z uporabo hiperbole – glej [25, str. 9]. V tem članku so opisane vse točke, ki se jih da konstruirati s stožnicami (in gre za ista števila kot z origamijem?) dobimo množico, zaprto za korenjenje in tretji koren ...

Z origamijem pa obstaja celo več načinov, kako poljuben kot razdeliti na tri skladne dele.

Neka origami konstrukcija je v [20, str. 155]

Avtor Abe:

- naloga 10.14 [20, str. 158 spodaj]
- [15, str. 33]

Avtor Justin:

- [15, str. 34]

Gleason's trisection [6]

Pappus [20, str. 154–155]

3.3.2 Podvojitev kocke

V prostoru imamo kocko. Ali se da samo z ravnilom in šestilom narisati stranico kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot dana kocka?

Če je stranica kocke dolga 1, je stranica podvojene kocke dolga $\sqrt[3]{2}$. Ker je obseg $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad obsegom \mathbb{Q} (enačba $x^3 - 2 = 0$ nima racionalne rešitve), podvojitev kocke ni mogoča [13, str. 78].

Grki so to rešili s presečiščem dveh parabol – glej [25, str. 5–6], kar je zelo podobno oni iz [20, str. 156] (za poljuben k !). Tukey daj samo slikco 10.7 in napiši, da za dokaz gledajo tistega pri konstrukciji preko Belochinega kvadrata (v razdelku 6.2.1). No, lahko pa tukaj dokažeš in v poglavju z enačbami referiraš, da je možno s kvadratom konstruirati in je to isto kot tle. Sam da tukaj ne zarišeš kvadrat. Ker ga v resnici ni treba. Če se tko odločiš, pol spremeni tisto podpoglavje v samo omembo.

Messerjeva konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ v [land2013]

4 Konstrukcija pravih n -kotnikov

Izrek: Pravih n -kotnik lahko narišemo le s šestilom in ravnilom natanko tedaj, ko je število n oblike $n = 2^r(2^{2^s} + 1)$, kjer sta r in s nenegativni celi števili, število $2^{2^s} + 1$ pa je praštevilo.

Fermat je domneval, da je vsako število oblike $2^{2^s} + 1$ praštevilo. To pa ni res. Že Euler je ugotovil, da je število $2^{2^5} + 1$ sestavljeno. Deljivo je s številom 641.

To vse je iz [13, str. 78].

5 Pregibanje tangent na stožnice

A čmo premaknit to poglavje tik pred enačbe?

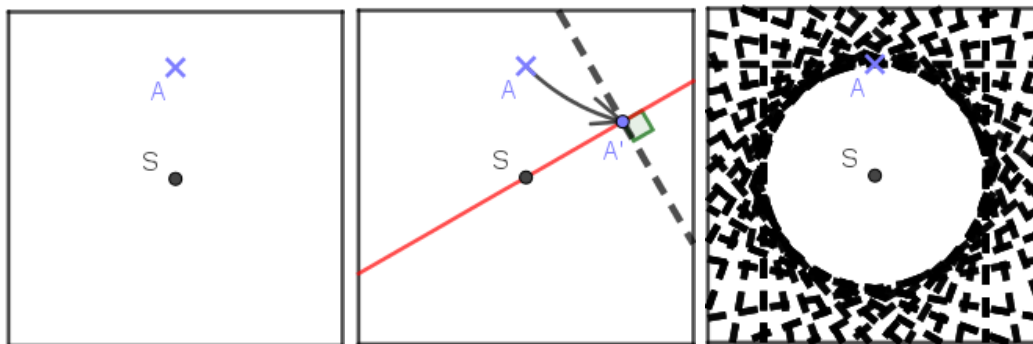
Iz didaktičnega vidika zelo zanimivo poglavje nam predstavlja konstrukcije tangent na stožnice s prepogibanjem papirja. Vsebina je tu predstavljena tako, da je bralec najprej povabljen, da vzame list papirja in ga prepogiba po navedenih korakih. Po opazanju, kaj se na papirju pri tem prikaže, preidemo na matematični del, kjer dokažemo, da so prepogibi res tangente na določeno stožnico.

Učitelji matematike so povabljeni, da si pri obravnavi stožnic vzamejo čas in izvedejo spodnje aktivnosti. Dijaki bodo z veliko verjetnostjo presenečeni nad rezultati zgibanja, kar jih lahko bolj motivira za obravnavo geometričnih lastnosti stožnic. Priporočljiva je tudi izvedba ure v računalniški učilnici, kjer lahko vsak dijak z ustreznim programskim orodjem (npr. Geogebra) sam poskusi zgraditi opisano konstrukcijo. S tem lahko znanje o stožnicah le še bolj utrdi.

Z origamijem ne moremo konstruirati gladkih krožnih lokov. Kljub temu pa lahko z upoštevanjem določenih korakov konstruiramo premice, ki so tangentne na neko krivuljo. Več takih tangent nam poda nekakšno lomljenko, če pa bi konstrukcije pregibov ponavljali v nedogled, bi v limiti res dobili gladko krivuljo. Pa si pogledjmo, kako s prepogibi dobimo obliko stožnic. **envelope oz. ovojnica:** https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_%28mathematics%29

5.1 Krožnica

Aktivnost: Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredi označi točko S . Nato drugje označi še točko A . Skozi točko S prepogni poljubno premico in na njej označi točko A' , da velja $|SA| = |SA'|$. Nato skozi točko A' prepogni pravokotnico na premico SA' . To je iskan pregib. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro premice skozi točko S (gl. sliko 13). Kaj opaziš?



Slika 13: Sukanje izbrane točke okoli središča.

Opomba 5.1. V podpoglavju 2.2.3 smo se naučili prenašati razdalje, zato je zgornja konstrukcija mogoča, zahteva pa še nekaj dodatnih vmesnih pregibov (gl. dokaz trditve 2.10).

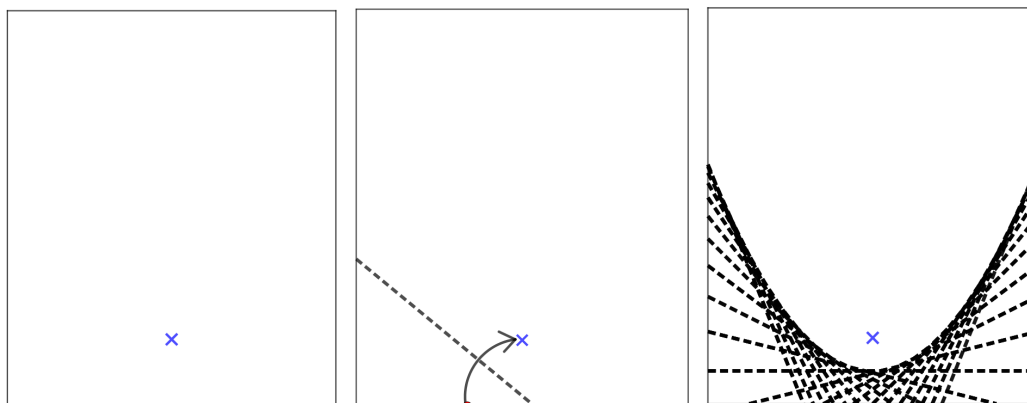
Iz konstrukcije pregiba kot pravokotnice na premico SA' skozi točko A' je naslednja trditev očitna in ne potrebuje zapisanega dokaza.

Trditev 5.2. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangento na krožnico s središčem v točki S in polmerom SA .*

Za različno izbiro premic skozi točko S dobimo različne tangente in s tem lomljeno krivuljo. S ponavljanjem konstrukcije tangente v neskončnost je krivulja vedno bolj gladka in podobna krožnici.

5.2 Parabola

Aktivnost: *Vzemi pravokoten list papirja in svinčnik ter nekje sredi spodnje polovice lista s pisalom označi točko. Nato si izberi točko še na spodnji stranici lista in ga prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na spodnji stranici papirja (gl. sliko 14). Kaj opaziš?*



Slika 14: Prepogibanje spodnje stranice papirja na izbrano točko.

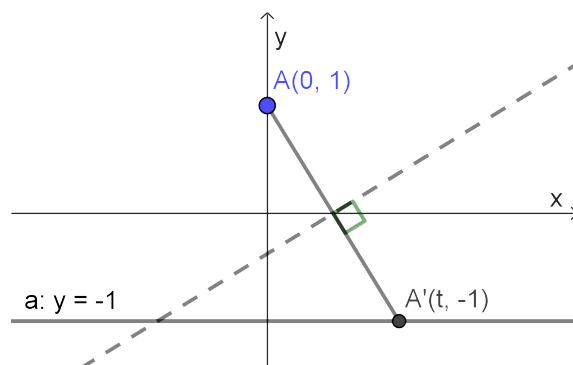
Omenjen pregib je origami operacija O3, lahko pa nanjo gledamo tudi kot na operacijo O6. Za le-to smo v poglavju 2 že premislili, da nam pregib, ki poteka skozi dano točko B in točko A položi na premico a , poda tangento na parabolo z goriščem A in premico vodnico a (gl. sliko 5 in premislek nad njo). Tukaj pa take točke B ni, kar pomeni le to, da smo s pregibom konstruirali neko tangento – pregib je namreč simetrala daljice, ki ima za krajišči obe izbrani točki iz navodila aktivnosti, torej obstaja točka (točka P na sliki 5), ki je enako oddaljena od spodnje stranice lista in prve izbrane točke. Nadaljni premislek, da je to edino presečišče pregiba in parabole, je enak kot prej. Spodnja trditev je tako že dokazana.

Trditev 5.3. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangento na parabolo z goriščem v izbrani točki in premico vodnico, ki jo predstavlja spodnja stranica lista.*

Kaj se po večkrat izvedenih pregibih spodnje stranice lista na začetno izbrano točko na papirju izriše? Ker so pregibi tangente na parabolo, predvidevamo, da je izrisana krivulja ravno to. Preden pa to dokažemo, pa poiščimo enačbo teh tangent.

V ta namen si – brez škode za splošnost, saj lahko z origamijem zrcalimo in rotiramo točke ter premice – model poljubne točke in spodnje stranice lista natančno določimo. Uporabimo že znan model iz dokaza izreka 2.18 (pri konstrukciji \sqrt{r}): vzemimo točko $A(0,1)$ in premico $a : y = -1$, ki sta origami-konstruktibilni, in

naredimo pregib, ki točko A preslika na premico a v točko $A'(t, -1)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 15).



Slika 15: Pregib točke $A(0, 1)$ na premico $a : y = -1$.

Opcija je tudi, da vseeno malo bolj posplošimo in namesto 1 damo c , iz česar se pol lahko tut opazuje, kaj se dogaja, če gorišče bolj odmaknemo od premice vodnice ali pa ji ga približujemo.

Ker je pregib oz. konstruirana premica simetrala daljice AA' , lahko hitro določimo njeno enačbo. Koeficient nosilke daljice AA' je $k_A = -\frac{2}{t}$, središče pa $(\frac{t}{2}, 0)$. Tako hitro določimo enačbo pregiba:

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}. \quad (5.1)$$

Dobili smo parametrizacijo neke družine premic. Za vsak $t \in \mathbb{R}$ torej dobimo drugo tangento na parabolo z goriščem v točki A in premico vodnico a , ki ima zgornjo enačbo.

Za vse točke na pregibu velja, da so enako oddaljene od točk A in A' . Vemo že, da obstaja le ena točka $T \in a$, za katero velja $d(T, A) = d(T, a)$. Njena abscisa je $x = t$ (točka T leži na pregibu točno nad točko A') in iz enačbe 5.1, dobimo še ordinato $y = t^2/4$. Ker točka T za vsak $t \in \mathbb{R}$ leži na paraboli, pri menjavi $x = t$ dobimo njeno enačbo: $y = x^2/4$.

Vendar to ni dokaz, da je obris pregibov iz naloge res parabola. Zgornji premislek temelji na že znanem dejstvu, da so pregibi tangentni na parabole, vendar nam nič ne zagotavlja, da take točke T ležijo točno na obrisu. (A mogoče je tam na strani 56 (Hull2013) spodej, ENVELOPE WAY, kakšen izrek, da ti tangente na ktrivuljo izrišejo prou to krivuljo?)

Hull v [11, str. 55–56] poda prefinjen dokaz preko kvadratne formule. Vemo, da pregib $O6$ ne obstaja vedno (slika 4 desno). Poglejmo, ali obstajajo v ravnini našega modela kakšne točke, skozi katere ne moremo konstruirati pregiba oz. tangente. Vzemimo našo parametrizacijo družine tangent (enačba 5.1). Če jo rešimo za t , nam dobljena formula pove, za katere vrednosti t pregib poteka skozi točko (x, y) :

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{x}{2}t + y = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - y}}{\frac{1}{2}}.$$

Enačba ima dve realni rešitvi pri pogoju $x^2/4 - y > 0$, kar pomeni, da vsako točko (x, y) , za katero ta pogoj velja, sekata dva pregiba. To so ravno točke pod parabolo

$y = x^2/4$. Za točke na paraboli velja $y = x^2/4$, iz česar dobimo eno rešitev $t = x$, torej to točko seka natanko en pregib. Nazadnje nam ostane še območje, za katerega velja $y > x^2/4$, t. j. območje nad parabolo $y = x^2/4$, kar nam ne poda realnih rešitev za t , torej ga ne seka noben izmed konstruiranih pregibov. Tako je obris, ki ga dobimo v nalogi, res parabola $y = x^2/4$.

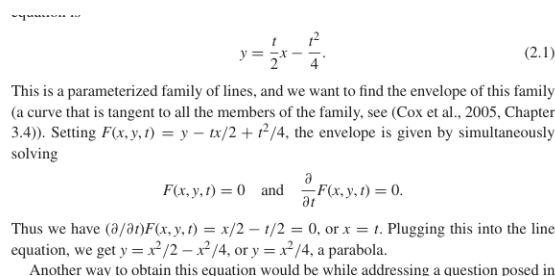
Torej je naš razmislek dva odstavka višje utemeljen. Sedaj, ko vemo, da je obris, ki nastane po večkratnem prepogibu spodnje stranice lista papirja na izbrano točko, res parabola, lahko pogledamo še več načinov za določitev enačbe parabole [11, str. 55–56]:

- Naj bo $y(x)$ naša parabola, katere enačbo iščemo. Vemo, da je v našem modelu za poljuben $t \in \mathbb{R}$ pregib v neki točki $(x, y(x))$ tangento na parabolo, koeficient tangente pa je $t/2$. Očitno velja $x = t$, torej je koeficient kar $x/2$. Zato dobimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C.$$

Ker parabola očitno poteka skozi točko $(0, 0)$, je $C = 0$ in dobimo želeno enačbo $y = x^2/4$.

- **Envelope way – gl. [11, str. 56 spodaj] (tema iz diferencialne ali algebrائية geometrije). Gl. tudi sliko 16**



Slika 16: Izsek iz [10, str. 32].

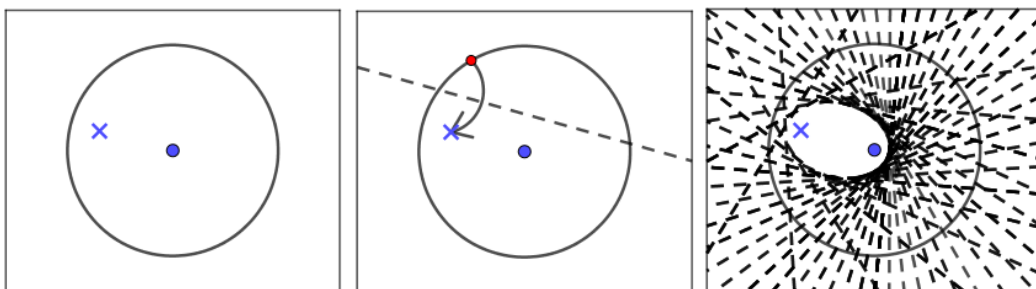
omenit kubično krivuljo? [11, str. 69–80], [15, str.46–49].

Aktivnosti za naslednji dve podpoglavji sta enaki kot v tem, le da namesto spodnje tranice lista v izbrano točko prepogibamo krožnico.

5.3 Elipsa

Aktivnost: Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na notranji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 17). Kaj opaziš?

Opomba 5.4. Za izris poljubne krožnice tu lahko uporabimo šestilo. Prej smo videli, da znamo lomljeno krožnico prepogniti tudi z origamijem, vendar imamo potem na listu papirja veliko pregibov, ki nam ovirajo pogled na ciljno sliko. Zato je uporaba šestila v ta namen dovoljena predvsem iz praktičnega vidika.



Slika 17: Prepogibanje krožnice na izbrano točko znotraj nje.

Izgleda, kot da se nam izriše elipsa, ki ima za gorišči središče krožnice in izbrano točko znotraj nje. Spomnimo se, da na elipsi ležijo vse točke, katerih vsota razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi (t. j. dvakratnik velike polosi). V našem primeru je elipsa natančno določena, kar nam pove naslednja trditev [11, str. 60–61].

Trditev 5.5. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangento na elipso z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo, enako polmeru izbrane krožnice.*

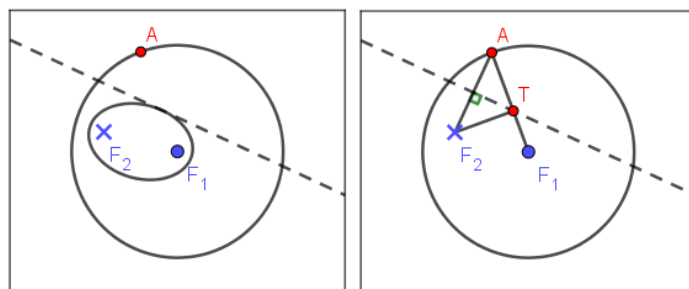
Dokaz. Naj bo točka F_1 središče krožnice s polmerom r in točka F_2 poljubna točka znotraj krožnice. Potem je elipsa, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako r , natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko A (slika 18 levo). Dokazujemo, da je tangento na to elipso.

Označimo s T presečišče pregiba in daljice AF_1 (slika 18 desno). **(Ali presečišče vedno obstaja? Ja, samo še dokaži to)** Ker je pregib simetrala daljice AF_2 , velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

$$|TF_1| + |TF_2| = |TF_1| + |TA| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke A . Ker je r velika os elipse, točka T leži na njej.

Pokažimo še, da je pregib tangento na elipso. Opazimo, da so vsi trije koti z vrhom v točki T , ki imajo za enega od krakov pregiba, skladni. Značilnost tangent na elipso pa je ravno ta, da se žarek, ki ga izstrelimo iz enega gorišča v rob elipse, vedno pod istim kotom odbije v drugo gorišče. Torej je pregib tangento na dano



Slika 18: Dokaz tangentsnosti pregibov na elipso.

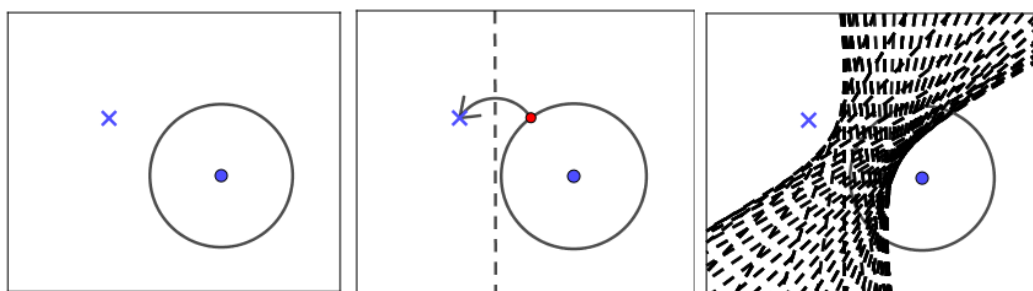
elipso v točki T .

□

Kaj se zgodi, če točko izberemo *zunaj* krožnice, pa si pogledamo v naslednjem razdelku.

5.4 Hiperbola

Aktivnost: Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na zunanji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. slika 19). Kaj opaziš?



Slika 19: Prepogibanje krožnice na izbrano točko zunaj nje.

Podobno kot prej lahko sklepamo, da se nam izriše obris hiperbole. Spomnimo se, da na hiperboli ležijo vse točke, katerih absolutna vrednost razlike razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi. Tako kot pri elipsi je tudi tu hiperbola natančno določena. Naslednja trditev in dokaz sta zato zelo podobna kot za elipso.

Trditev 5.6. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangento na hiperbolo z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo (t. j. dvakratnik velike polosi), enako polmeru izbrane krožnice.*

Dokaz. Naj bo točka F_1 središče krožnice s polmerom r in točka F_2 poljubna točka zunaj krožnice. Potem je hiperbola, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako r , natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko A (slika 20 levo). Dokazujemo, da je tangento na to hiperbolo.

Označimo s T presečišče pregiba in nosilke daljice AF_1 (slika 20 desno). (Ali presečišče vedno obstaja? NE, V 2 PRIMERIH DOBIMO ASIMPTOTO - ko je premica vzporedna k pregibu) Ker je pregib simetrala daljice AF_2 , velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

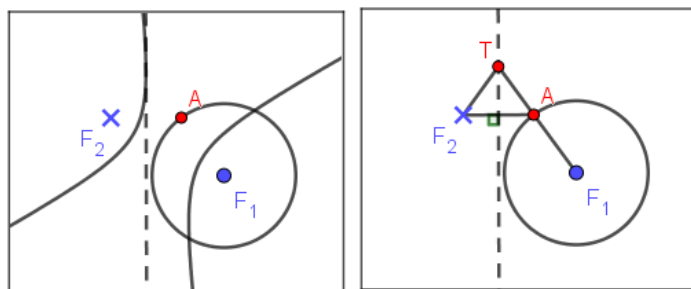
$$||TF_1| - |TF_2|| = ||TF_1| - |TA|| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke A . Ker je r velika os hiperbole, točka T leži na njej.

Pokažimo, da je to res tangenta. Ker je pregib simetrala daljice F_1A , prepola vlja kot $\angle ATF_2$, ki je enako kotu $\angle F_1TF_2$. To pa je ravno značilnost tangent na hiperbolo.

Torej je pregib tangento na dano hiperbolo v točki T . \square

Bolj analitičen dokaz, kjer se izračuna splošno enačbo elipse in hiperbole glede na izbrano krožnico in točko znotraj oz. zunaj nje, najdemo v [24, str. 204–206]. Tudi



Slika 20: Dokaz tangentnosti pregibov na hiperbolo.

Lotka v [18] iz opisane konstrukcije izpelje splošno enačbo elipse in tudi nastavi popravek, ki nam da splošno enačbo hiperbole. S tem oba dokažeta, da je ogrinjača teh pregibov res elipsa oz. hiperbola. Nekaj je tudi v [10, str. 34 spodaj].

6 Reševanje enačb

popravi da so captioni slik, ki so v več kot eni vrstici, poravnani na sredini

Zapustimo deloma področje geometrije in si pogledjmo, kako lahko s prepogibanjem papirja rešujemo enačbe z racionalnimi koeficienti.

Spomnimo se še, da smo origami-konstruktibilna števila definirali kot vsa števila, ki jih lahko s prepogibanjem konstruiramo preko na začetku dane abscine osi, izhodišča $(0, 0)$ in točke $(1, 0)$ in da lahko kar predpostavimo, da imamo dan celoten koordinatni sistem z abscisno in ordinatno osjo, izhodiščem ter enoto 1 na obeh oseh (definicija 2.4). V tej ravnini bomo konstruirali rešitve naših enačb, da pa bo pregibov čim manj in s tem preglednost večja, lahko pomožne točke in premice narišemo kar s svinčnikom (ker bi jih tako ali tako znali konstruirati s pregibi).

Začnimo z najbolj osnovno, t. j. linearno enačbo. Enačba $ax + b = 0$, kjer $a, b \in \mathbb{Q}$ in $a \neq 0$ ima rešitev $x = -b/a$, ki je racionalno število in po izreku 2.18 origami-konstruktibilno. Če bi želeli rešitev konstruirati z origamijem in geometrijsko, v ravnini prepognemo premico $y = ax + b$ (napravimo pregib npr. skozi točki $(0, b)$ in $(1, a+b)$) in njeno presečišče z abscisno osjo nam da iskano rešitev.

Uporaba origamija je za reševanje linearne enačbe očitno manj praktična kot računanje rešitve. Bolj zanimivo je reševanje kvadratne in kubične enačbe. Ker za njune rešitve obstajata splošni formuli, bi jih lahko najprej izračunali in nato preko operacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in korenjenja konstruirali s prepogibanjem, vendar je to časovno preveč potratno. Pogledali si bomo, kako se z origamijem lahko temu izognemo in rešitev konstruiramo bolj direktno.

Ključno vlogo bosta v nadaljevanju odigrali origami operaciji O6 in O7. Prva nam hkrati s konstrukcijo tangente na parabolo določi tudi točko na paraboli, skozi katero je pregib tangenten na stožnico, to pa je ekvivalentno reševanju kvadratne enačbe. Druga pa s konstrukcijo skupne tangente na dve paraboli omogoča reševanje kubične enačbe, saj imata paraboli v evklidski ravnini največ tri skupne tangente (trditev 6.1 v nadaljevanju).

V teoriji bi nam prepogibanje papirja pomagalo tudi pri reševanju kvartičnih enačb, saj zanje še obstaja splošna formula in tudi vemo, da lahko enačbo četrte stopnje prevedemo na enačbe nižje stopnje (gl. [4], [1]). Praktično pa je to težje izvedljivo, saj bi postopek reševanja zahteval veliko več pregibov kot pri reševanju ene kubične ali kvadratne enačbe, pa tudi vmesne rezultate bi morali računati. (Poglej članek [2] (naložen), ker mogoče je pa tle dejansko urjdi postopek za reševanje enačb 4. stopnje)

Za enačbe pete in višjih stopenj pa splošna formula za rešitve ne obstaja več (*Abel-Ruffinijev* izrek, gl. [21]). Kljub temu se da z origamijem še vedno konstruirati rešitve nekaterih enačb višjih stopenj, vendar ne obstaja postopek z enkratnimi prepogibi – potrebno se je poslužiti dvojnih (*two fold*) ali večkratnih (*multi-fold*) prepogibov (gl. poglavje 8).

6.1 Kvadratna enačba

Rešujemo enačbo oblike

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{Q}$ in velja $a \neq 0$. Njeni splošni rešitvi sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

vendar so konstrukcije vseh teh števil časovno potratno, zato iščemo hitrejši način reševanja.

Postopek, ki si ga bomo pogledali v nadaljevanju, predpostavlja $a = 1$. Ker je vodilni koeficient neničeln, lahko z njim enačbo delimo in pri tem še vedno dobimo racionalne koeficiente, zato lahko predpostavko brez škode za splošnost sprejmemo. Nova oblika enačbe je tako

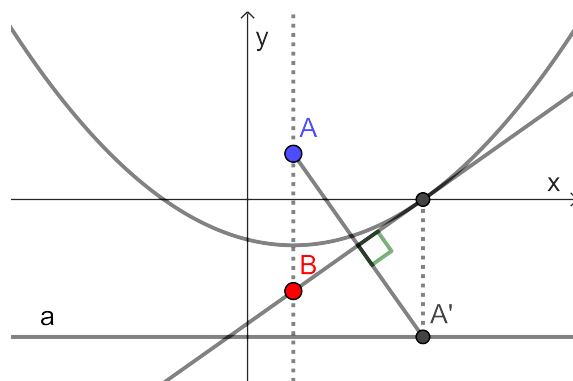
$$x^2 + bx + c = 0. \quad (6.1)$$

Predpostavimo, da ima enačba dve različni realni rešitvi oz. da je diskriminanta enačbe pozitivna, t. j. $D = b^2 - 4c > 0$. Če realnih ničel ni, o origami konstrukciji rešitev namreč nima smisla razpravljati. Če je rešitev ena, je podana kot $x = -b/2$, kar je origami-konstruktibilno število in se ga lahko takoj konstruira.

Enačba 6.1 nam poda pokončno parabolo $y = x^2 + bx + c$ z vodoravno premico vodnico in dvema ničlama, ki sta rešitvi naše enačbe. Iščemo absciso presečišča parabole z abscisno osjo.

Zopet se bomo poslužili dosedanjega znanja o operaciji O6. Ta nam s pregibom skozi dano točko B , ki točko A položi na premico a , konstruira tangento na parabolo z goriščem v točki A in premico vodnico a .

Naša parabola je z enačbo seveda natančno določena. Ideja iskane konstrukcije rešitev enačbe je določiti tako točko B (najlažje kar na osi parabole), da bi nam izvedba operacije O6 podala tangento na parabolo ravno v njeni ničli. Želeni pregib mora potekati skozi točko B in gorišče A položiti na tisto točko A' na premici vodnici a , ki ima enako absciso kot ničla parabole. (gl. sliko 21). Taka točka B je z osjo parabole in katerokoli izmed ničlama (zaradi simetrije) natanko določena.



Slika 21: Operacijo O6 skozi iskano točko B poda rešitev kvadratne enačbe.

Edina nevarnost, da ta konstrukcija ne bo delovala, je možnost, da točka B kdaj ne bo origami-konstruktibilna točka. Zato sedaj izračunajmo njene koordinate in se prepričajmo, da se to nikoli ne bo zgodilo.

Najprej iz dane enačbe parabole določimo njeno gorišče A in premico vodnico a . Spomnimo se, da iz enačbe parabole oblike

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

takoj razberemo koordinati gorišča (x_0, y_0) in enačbo premice vodnice $y = y_0 - p$. V našem primeru enačbo $y = x^2 + bx + c$ preoblikujemo v

$$\left(x - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\right).$$

S tem sta gorišče A in premica vodnica a določena:

$$A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2 - 1}{4}\right) \text{ in } a : y = c - \frac{b^2 + 1}{4}.$$

Naj bo t ena izmed rešitev enačbe 6.1. Na premici a z A' označimo točko z absciso t . Poiščimo enačbo pregiba, ki gorišče A položi v točko A' . Ta pregib bo tangento na parabolo ravno v njeni ničli, njegovo presečišče z osjo parabole $x = -b/2$ pa nam bo določilo točko B .

Koeficient nosilke daljice AA' je $-1/(2t+b)$, torej je koeficient pregiba $k = 2t+b$. Pregib je po konstrukciji tangento na parabolo v ničli $(t, 0)$, torej je njegova enačba

$$y = (2t + b)(x - t) = (2t + b)x - 2t^2 - bt = (2t + b)x - t^2 + c.$$

Pri tem smo upoštevali, da velja $t^2 + bt + c = 0$. Presečišče pregiba in osi parabole je tako točka B z absciso $x = -b/2$ in ordinato

$$y = (2t + b)\left(-\frac{b}{2}\right) - t^2 + c = -t^2 - tb + c - \frac{b^2}{2} = c + c - \frac{b^2}{2} = 2c - \frac{b^2}{2}.$$

Obe koordinati sta racionalni, torej je točka B konstruktibilna točka. Ker leži na osi parabole, nam poda obe rešitvi enačbe – pregiba sta si simetrična glede na os. Povzemimo sedaj postopek konstrukcije rešitve kvadratne enačbe 6.1:

1. V koordinatnem sistemu označimo gorišče $A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$, premico vodnico $a : y = c - \frac{b^2+1}{4}$ in točko $B\left(-\frac{b}{2}, 2c - \frac{b^2}{2}\right)$.
2. Z operacijo O6 naredimo pregib skozi točko B , ki točko A položi na premico a (če je diskriminanta enačbe pozitivna, sta možna pregiba dva).
3. Skozi sliko točke A naredimo vertikalni pregib in abscisa njegovega presečišča z abscisno osjo je ničla dane enačbe.

Primer: Poiščimo rešitve enačbe $x^2 - x - 1 = 0$. Določimo obe točki in premico: $A(\frac{1}{2}, -1)$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ in $a : y = -\frac{3}{2}$. Opravimo operacijo O6 in označimo presečišče abscisne osi in pravokotnice nanjo skozi sliko točke A . Če smo bili pri pregibanju natančni, dobimo presečišči pri $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (gl. sliko v [10, str. 37]).

To še zdaleč ni edini postopek za reševanje kvadratne enačbe. Kot še en lep primer Hull v [10, str. 38] navaja Lillovo konstrukcijo preko krožnice, lahek dokaz pa je prepuščen bralcu. Hkrati je to primer, kako za rešitev nekega problema najprej najdemo (bolj domačo) evklidsko konstrukcijo, ki jo lahko nato preko origami operacij preobrazimo v origami konstrukcijo – saj že vemo, da lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo vse in še več, kar se da z evklidskim orodjem. Pri obravnavi kubične enačbe bomo spoznali Belochino metodo, ki se jo da aplicirati tudi na kvadratno enačbo, in prilagojen postopek je tako opisan v razdelku 6.2.2.

6.2 Kubična enačba

Rešujemo enačbo oblike

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ in velja $a \neq 0$. Tu je navedena ena oblika zapisa njene splošne rešitve:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \\ C &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(Q + 2b^3 - 9abc + 27a^2d)} \\ x_1 &= -\frac{b}{3a} - \frac{C}{3a} - \frac{b^2 - 3ac}{3aC} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 + i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 - i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \end{aligned}$$

Operacija O6 nam je preko konstrukcije tangente na parabolo pomagala rešiti kvadratno enačbo. Spomnimo se, da je Belocheva to v 30-ih letih prejšnjega stoletja nadgradila z operacijo O7, ki nam konstruira skupno tangento na dve paraboli hkrati. Po njej jo tudi imenujemo *Belochin pregib*. Z njim je kot prva odkrila resnično moč origami konstrukcij, a je žal trajalo več kot pol stoletja, da so matematiki začeli ceniti njeno odkritje.

6.2.1 Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom

Belocheva je sama odkrila naslednjo metodo reševanja kubične enačbe, kjer nam Belochin pregib poda eno izmed rešitev. Na koncu razdelka bomo videli, da nam v postopku vsaka izmed rešitev da svoj pregib (razen če gre za večkratno ničlo) in ker so rešitve kubične enačbe največ tri, so tudi pregibi oz. skupne tangente na dve paraboli največ tri. Z razčlenitvijo sledečega postopka bomo tako dokazali spodnjo trditev.

Trditev 6.1. *Število realnih rešitev kubične enačbe je enako številu Belochinih pregibov v postopku, ki je naveden v tem poglavju.*

Posledica 6.2. *V evklidski ravnini imata različni paraboli največ tri skupne tangente.*

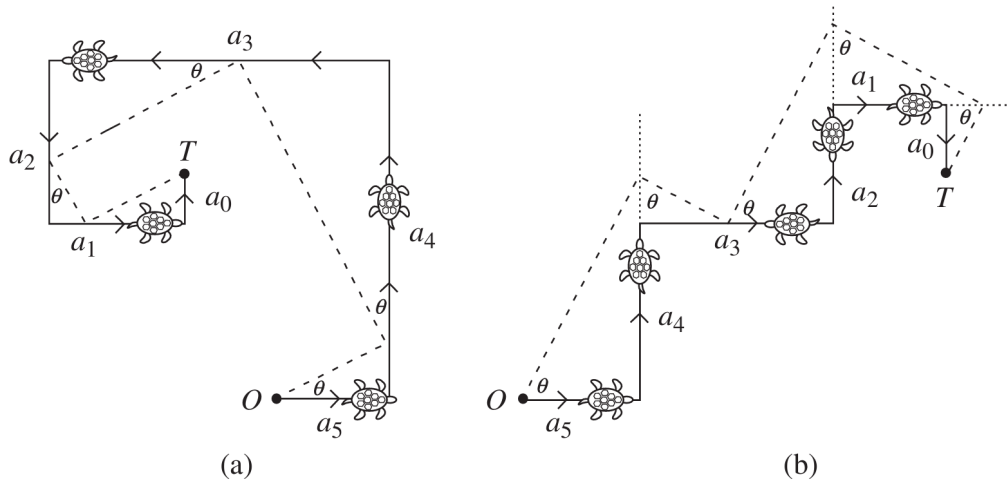
Belocheva v svojem postopku izhaja iz Lillove genialne metode iskanja ničel poljubnih polinomov z realnimi koeficienti, ki si jo bomo v naslednjem razdelku podrobneje pogledali, za njeno aplikacijo pa uporabi avtorsko konstrukcijo – Belochin kvadrat.

Lillova metoda

Njen avtor je avstrijski inženir Eduard Lill, ki jo je l. 1867 opisal v svojem članku [17]. Gre za inovativen postopek, ki je v svoji osnovi čisto enostaven. Imejmo poljuben

polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ z realnimi koeficienti in iščemo njegove realne ničle, če obstajajo. Lill je iz njegovih koeficientov s sledečim postopkom v ravnini ustvaril enolično pot. Običajno se za njeno konstrukcijo uporablja figuro želve, ki nam kaže, v katero smer se premika pa tudi kam je usmerjena.

Na začetku želvo postavimo v koordinatno izhodišče O tako, da gleda v pozitivno smer x -osi. Želva najprej v to smer prehodi razdaljo, enako koeficientu a_n . Nato se obrne za 90° v nasprotno smer urinega kazalca in prehodi naslednjo razdaljo a_{n-1} . To ponovi za vsak koeficient polinoma in po prehojeni razdalji a_0 se ustavi v neki točki T (slika 22). Če je kateri od koeficientov negativen, želva hodi ritensko (primer (b) na sliki 22 za koeficiente a_3, a_2 in a_0), v primeru ničelnega koeficienta pa obstoji na mestu in se samo obrne. S potjo želve dobimo lomljeno črto iz največ $n+1$ daljic, ki jih brez škode označujemo kar z njihovimi "pripadajočimi" koeficienti.



Slika 22: Primera želvine poti za polinoma pete stopnje. Vzeto iz [12, str. 311].

Sedaj se v izhodišče O postavimo še mi in z laserskim žarkom poskusimo zadeti želvo v točki T . Žarek najprej usmerimo daljico a_{n-1} , od katere se odbije v daljico a_{n-2} , od te v daljico a_{n-3} in tako naprej. (slika 22). Pri tem upoštevamo troje:

- laserski žarek ne upošteva odbojnega zakona in se od daljice vedno odbije pod kotom 90° , zato so vpadni koti žarka na vse daljice med seboj enaki in prav tako to velja za odbojne kote;
- žarek se lahko odbije tudi od nosilke daljice;
- vsakič sta možni dve smeri odboja – na isto stran daljice (oz. njene nosilke) ali skozi – izberemo pa tisto, ki nam omogoči, da sploh lahko zadenemo naslednjo daljico.

ecimo, da smo zmogli zadeti želvo. Kot, ki ga v točki O oklepata laserski žarek in abscisna os, označimo z θ .

Trditev 6.3. $x_\theta = -\tan \theta$ je ničla polinoma $p(x)$.

Dokaz. Vzemimo primer, ko so vsi koeficienti polinoma $p(x)$ pozitivni. Želvina pot je v tem primeru sestavljena iz $n+1$ daljic, pot laserskega žarka (ki se vedno odbije od

daljice in ne njene nosilke) pa iz n daljic. Slednje so ravno hipotenuze pravokotnih trikotnikov. Za vsako od njih je nasprotna kateta kota θ del daljice a_i , priležno kateto pa označimo z y_i ($n \geq i \geq 1$). dobimo

$$\begin{aligned} y_n &= \tan \theta \cdot a_n = -x_\theta a_n \\ y_{n-1} &= \tan \theta \cdot (a_{n-1} - y_n) = -x_\theta(a_{n-1} + x a_n) = -(a_{n-1}x_\theta + a_n x_\theta^2) \\ y_{n-2} &= \tan \theta \cdot (a_{n-2} - y_{n-1}) = -x_\theta(a_{n-2} + a_{n-1}x_\theta + a_n x_\theta^2) = \\ &= -(a_{n-2}x_\theta + a_{n-1}x_\theta^2 + a_n x_\theta^3) \\ &\vdots \\ y_1 &= -(a_1 x_\theta + a_2 x_\theta^2 + \dots + a_{n-1} x_\theta^{n-1} + a_n x_\theta^n). \end{aligned}$$

V zadnji enakosti desno stran premaknimo na levo in upoštevamo $y_1 = a_0$. Dobimo ravno $p(x_\theta) = 0$, torej je $x_\theta = -\tan \theta$ res ničla tega polinoma.

Primer negativnih koeficientov: [27, str. 36].

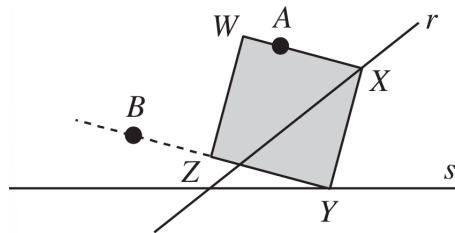
Primer ničelnih koeficientov: isto kot prej, samo se spusti y_i za tisti i , za katerega je $a_i = 0$. (???) \square

Če pod nobenim kotom θ ne moremo zadeti želve, je polinom $p(x)$ brez realnih ničel.

Pojavi se nam vprašanje, kako določiti kot θ . Za polinom tretje stopnje je Belocheva preko svojega pregiba našla zelo preprosto rešitev, ki si jo bomo sedaj pogledali.

Belochin kvadrat

Imejmo dani točki A in B ter premici r in s . Z origamijem konstruirajmo kvadrat $WXYZ$, kjer oglišče X leži na premici r , njegovo sosednje oglišče Y pa na premici s . Velja še, da točka A leži na stranici WX (ali njeni nosilki), točka B pa na stranici ZY (ali njeni nosilki, slika 23).

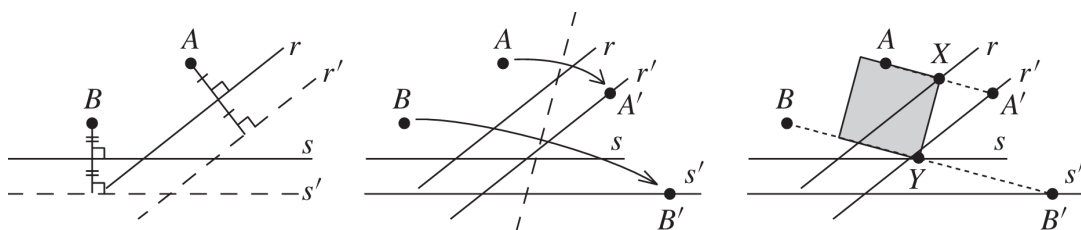


Slika 23: Belochin kvadrat. Vzeto iz [12, str. 309].

Belocheva je iznašla naslednji postopek, ki nam konstruira ta kvadrat:

- Najprej konstruiramo premico r' , ki je vzporedna premici r in od nje enako oddaljena kot točka A , tako da premica r leži med točko A in premico r' . Na enak način premici s konstruiramo njeno vzporednico s' (slika 24 levo). To konstrukcijo opravimo s prepogibi iz operacije O5, zrcaljenja točke čez premico ter ponovne uporabe operacije O5. Zaradi preglednosti seveda dopuščamo, da namesto zrcaljenja preprosto prepognemo po premici in s svinčnikom označimo sliko točke.

- Nato opravimo Belochin pregib, ki točko A slika v točko A' na premici r' , točko B pa v točko B' na premici s' (slika 24 na sredi).
- Naj bo točka X središče daljice AA' in točka Y središče daljice BB' . Ker je pregib simetrala teh dveh daljic AA' in BB' , sta njuni središči po konstrukciji⁶ ravno presečišči pregiba s premicama r in s (slika 24 desno).
- Daljica XY – ena izmed stranic kvadrata – je po konstrukciji pravokotna na daljici AX in BY , zato samo še določimo točki W in Z na daljicah ali njunih nosilkah in tako dobimo Belochin kvadrat.



Slika 24: Konstrukcija Belochinega kvadrata z origamijem. Vzeto iz [12, str. 310].

Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ z Belochinim kvadratom

Preden ravno naučeno znanje uporabimo za reševanje kubičnih enačb, si še na hitro pogledimo, kako lahko tudi z Belochinim kvadratom rešimo starogrški problem podvojitve kocke.

Za premico r vzemimo ordinatno os, za premico s pa abscisno os. Določimo še $A = (-1, 0)$ in $B = (0, -2)$. Vzporednici sta torej $r' : x = 1$ in $s' : y = 2$. Belochin pregib seka premico r v točki X , premico s pa v točki Y (slika 25). Z O označimo koordinatno izhodišče in opazimo podobne pravokotne trikotnike OAX , OXY in OYB . Z upoštevanjem $|AO| = 1$ in $|OB| = 2$ dobimo sledeča razmerja:

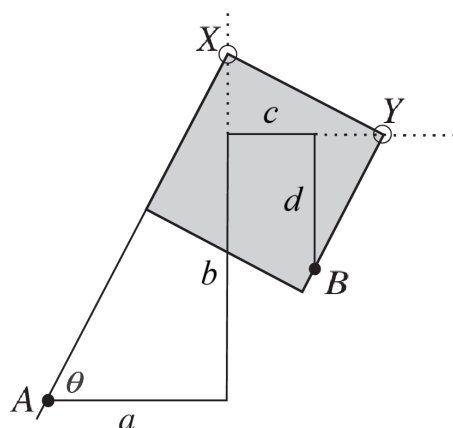
$$\frac{|OX|}{|AO|} = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{|OB|}{|OY|} \implies |OX| = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{2}{|OY|},$$

iz česar sledi

$$|OX|^3 = |OX| \cdot \frac{|OY|}{|OX|} \cdot \frac{2}{|OY|} = 2 \implies |OX| = \sqrt[3]{2}.$$

Vidimo lahko, da je to enaka konstrukcija kot jo je 50 let kasneje neodvisno od Belocheve odkril G. Martin (razdelek 3.3.2), le da je za točko B vzel točko $(0, -k)$ in s tem konstruiral dolžino $\sqrt[3]{k}$ za poljuben origami-konstruktibilen k .

⁶Gledamo lahko dva podobna pravokotna trikotnika s skupnim ogliščem v točki A (oz. B), enega dvakrat večjega od drugega



Slika 26: Konstrukcija želvine poti za Lillovo metodo preko Belochinega kvadrata. Vzeto in preurejeno iz [12, str. 313].

Kot zanimivost Lavričeva v [16, str. 10–13] s postopkom, ki je malo preurejen Belochin postopek, še analitično pokaže, da je ob primerno izbranih točkah A in B ter premicah r in s koeficient tangentnega pregiba rešitev kubične enačbe. Točki in premici izbere tako, da sta točki X in Y ravno presečišči z ordinatnima osema, iz česar lahko takoj razberemo koeficient tangente. V dokazu izpelje enačbi pripadajočih parabol in splošno enačbo njunih tangent ter iz tega dokaže rečeno. To je lahko odlična vaja za dijake, ki si želijo kakšnega izziva.

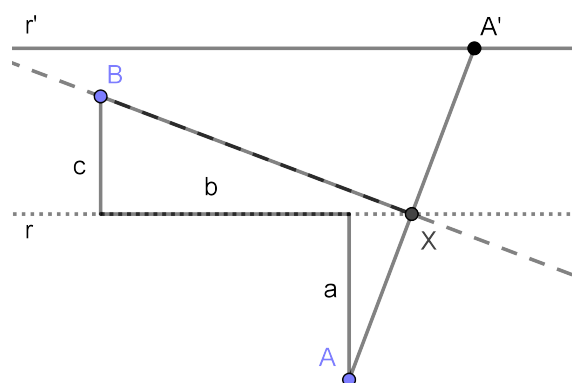
6.2.2 Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo

Lillovo lahko uporabimo tudi za reševanje kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. Na enak način v koordinatni sistem zarišemo želvino pot, ki se začne v točki A in konča v točki B . Za razliko od prej tu ne uporabimo Belochinega pregiba, temveč pregib iz operacije O6. Namesto dveh premic r in s imamo le eno – naj bo r nosilka daljice b . Kot prej – na razdalji a na drugi strani točke A – označimo še njeno vzporednico r' . Konstruiramo pregib, ki gre skozi točko B in točko A položi na premico r' . Njegovo presečišče s premico r nam določi točko X , kjer se žarek iz točke A pod pravim kotom odbije v točko B . Na sliki 27 je primer konstrukcije pri negativnem koeficientu c . S tem je kot θ določen. Premislili smo tudi že, da sta možna največ dva pregiba in da je število pregibov enako številu realnih rešitev enačbe.

6.2.3 Hatorijeva konstrukcija

Japonski matematik Koshiro Hatori navaja postopek, ki je zelo podoben Belochinem postopku, vendar ga je avtor iznašel neodvisno od Belochinega dela. Brez škode za splošnost predpostavi $a = 1$ in za reševanje enačbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sledi naslednjim korakom:

- V koordinatnem sistemu označimo točki $A = (b, 1)$ in $B = (d, c)$ ter premici $a : y = -1$ in $b : x = -d$.



Slika 27: Reševanje kvadratne enačbe po Lillovi metodi z operacijo O6 ($c < 0$).

- Opravimo pregib, ki točko A položi na premico a ter točko B na premico b (kar je ravno belochin pregib).

Avtor zaključi, da je koeficient opravljenega pregiba rešitev naše enačbe.

Bralec lahko sam premisli, da je to v resnici ravno Belochin postopek, le da se želva na začetku svoje poti ne nahaja v koordinatnem izhodišču in je najprej usmerjena navzdol. Prav tako lahko izrazi koeficient pregiba s kotom ob začetni točki A in res dobi $k = -\tan \theta$. (to si tudi sama preverila in res drži). Za geometrijsko razlago preko parabol gl. [8].

Opomba 6.6. Seveda bi lahko vzeli katerikoli $a \in \mathbb{Q}$ in vzeli premico $a : y = -a$.

6.2.4 Alperinova rešitev

Tudi on neodvisno od Belocheve, je pa pri njem $a = 1, b = 0$, kar se da nardit z vsako kubično enačbo, pač z uvedbo nove spremenljivke al neki, da se kvadratni člen uniči. (gl. Hull 2020 str. 43, hull2013 str. 78 spodej) - prevedba kubične enačbe na kvadratno al neki tazga.

7 Alhazenov problem

Vir: članek od Vavšetiča in tudi [20, str. 137–139].

8 Origami konstrukcije z več hkratnimi prepogibi

Kvartična enačba (str. 386, https://www.researchgate.net/publication/255578688_One_Two_and_Multi-Fold_Origami_Axioms#pf16)

Alperin, Lang, Lucero so neki delali, 2-fold origami za teve enačbe.

Kvintična enačba

petinjenje kota

9 Zaključek

Prepogibanje z enkratnimi pregibi, brez svinčnika. Znamo zrcalit, rotirati točke, prenašati razdalje (simulacija krožnice).

Origami konstrukcije so močnejše od evklidskih – medtem ko lahko z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti (oz. poljubna števila oblike $a + b\sqrt{r}$; $a, b, r \in \mathbb{Q}$), zmoremo s prepogibanjem papirja poleg tega reševati še kubične in kvartične enačbe, tretjiniti poljubne kote, konstruirati tretje korene poljubnih origami-konstruktibilnih števil ter konstruirati N -kotnike za vsak N oblike $2^i 3^j (2^k 3^l + 1)$, kjer je število v oklepaju praštevilo. Zaslugo za nadvlado origamija nad evklidskim orodjem ima Belochin pregib, ki edina od origami operacij ne more biti konstruirana z neoznačenim ravnilom in šestilom.

Zelo didaktičen pripomoček za popestritev pouka in pokazat, kako se matematiki skriva v malih stvareh, kako jo opaziti, kako sam izpeljati stvari, raziskovati, kako konstrukcija deluje (preko podvprašanj ipd. kot ima hull2013).

10 Naloge

1. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo vzporednico k dani premici skozi točko, ki ne leži na tej premici.
2. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo kvadrat z dano stranico AB .
3. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo enakostraničen trikotnik z dano stranico.

Literatura

- [1] R. F. Amir Fathi Pooya Mobadersany, *A simple method to solve quartic equations*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences **6**(6) (2012) 331–336.
- [2] J. S. B. Carter Edwards, *Folding quartic roots*, Mathematics Magazine **74**(1) (2001) 19–25.
- [3] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.
- [4] W. contributors, *Quartic equation – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2024, dostopno na https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quartic_equation&oldid=1262196167.
- [5] R. Geretschläger, *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine **68**(5) (1995) 357–371, dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2690924>.
- [6] A. M. Gleason, *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon*, The American Mathematical Monthly **95**(3) (1988) 185–194.
- [7] K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [8] K. Hatori, *Origami Construcions*, 2003, dostopno na <https://origami.ousaan.com/library/conste.html>.
- [9] T. L. Heath, *The thirteen books of euclid's elements, Vol. 1 (books i and ii)*, Dover Publications, Inc., 1956.
- [10] T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na <https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ>.
- [11] T. C. Hull, *Project origami: activities for exploring matmehatics*, Taylor & Francis Group, 2013.
- [12] T. C. Hull, *Solving cubics with creases: the work of beloch and lill*, The American Mathematical Monthly **118**(4) (2011) 307–315.
- [13] M. Jerman, *O konstrukcijah z ravnilom in šestilom*, Obzornik za matematiko in fiziko **3**(45) (1998) 73–78.
- [14] R. J. Lang, *British origami*, Four Problems **132**(3) (1988) 7–11.
- [15] R. J. Lang, *Origami and geometric constructions*, v: 2013, dostopno na https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf.
- [16] P. Lavrič, *Hagovi izreki za srebrne pravokotnike*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2013, dostopno na http://pefprints.pef.uni-lj.si/1534/1/Hagovi_izreki_za_srebrne_pravokotnike_PetraLavric.pdf.

- [17] E. Lill, *Résolution graphique des equations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*, Nouvelles Annales de Mathématiques **6**(2) (1867) 359–362.
- [18] A. J. Lotka, *Construction of conic sections by paper-folding*, School Science and Mathematics **7**(7) (1907) 595–597.
- [19] S. Maraž, T. Božič in M. Torkar, *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.
- [20] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Springer New York, 1997.
- [21] M. Mrinal, *Galois theory and the abel-ruffini theorem*, v: 2019, dostopno na <https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Mrinal.pdf>.
- [22] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na <https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami>.
- [23] M. Hvidsten, *Geometry with geometry explorer* (ur. R. E. Ross), The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.
- [24] S. G. Smith, *Paper folding and conic sections*, The Mathematics Teachers **96**(3) (2003) 202–207.
- [25] C. R. Videla, *On points constructible from conics*, The Mathematical Intelligencer **19**(2) (1997).
- [26] T. S. Row, *Geometric exercises in paper folding* (ur. D. E. S. Wooster WOoodruff Beman), The Open Court Publishing Company, 1917, dostopno na <https://ia800907.us.archive.org/7/items/tsundararowsgeo00rowrich/tsundararowsgeo00row.pdf>.
- [27] T. Zore, *Origami geometrija*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2022, dostopno na http://pefprints.pef.uni-lj.si/7209/1/Origami_geometrija_-_Tja%C5%A1a_Zore.pdf.