

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

**ORIGAMI KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE
ENAČB S PREPOGIBANJEM PAPIRJA**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ... **DOPIŠI**

Kazalo

1	Uvod	1
2	Evklidske in origami konstrukcije	3
2.1	Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije	3
2.2	Origami konstrukcije	4
2.2.1	Pravila origami konstrukcij	4
2.2.2	Origami operacije	5
2.2.3	Zrcaljenje točke čez premico	10
2.3	Zakaj origami konstrukcije nadvladajo evklidske	13
2.3.1	Algebrski pogled na evklidske konstrukcije	13
2.3.2	Origami števila	14
3	Prepogibanje lista različnih geometrijskih oblik	18
3.1	Nekaj kratkih in zanimivih konstrukcij za uvod	18
3.2	Hagovi izreki za prepogibanje kvadrata	22
3.2.1	Prvi Hagov izrek	23
3.2.2	Drugi Hagov izrek	25
3.2.3	Tretji Hagov izrek	27
3.3	Razdelitev daljice na n skladnih delov	28
3.4	X -pregibi	33
3.5	Reševanje nerešljivih starogrških problemov	35
3.5.1	Podvojitev kocke	37
3.5.2	Trisekcija kota	40
4	Konstrukcija pravilnih n-kotnikov	45
5	Pregibanje tangent na stožnice	46
5.1	Krožnica	46
5.2	Parabola	47
5.3	Elipsa	49
5.4	Hiperbola	51
6	Reševanje enačb	54
6.1	Reševanje kvadratne enačbe preko tangente na parabolo	55
6.2	Belochin postopek z Lillovo metodo	58
6.2.1	Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom	58
6.2.2	Hatorijeva konstrukcija	64
6.2.3	Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo	65
6.3	Alperinova in Geretschlägerjeva metoda za reševanje kubičnih enačb .	66
6.4	Reševanje starogrških problemov preko reševanja enačb	67
6.5	Kubična in kvartična enačba v projektivni ravnini	67
7	Alhazenov problem	74
8	Origami konstrukcije z več hkratnimi prepogibmi	75

9 Zaključek	76
Literatura	77

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. **ZA DOPISAT!**

Osnovna literatura

1. T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na <https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ>.

Podpis mentorja:

Origami konstrukcije in reševanje enačb s prepogibanjem papirja

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razлага vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano. NAPIŠI!

Origami constructions and solving equations by paper-folding

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work. NAPIŠI!

Math. Subj. Class. (2020): 51M05, 11R04, 14N05

Ključne besede: prepogibanje papirja, origami operacije, origami konstrukcije, origami števila, Hagovi izreki, trisekcija kota, podvojitev kocke, prepogibanje tangent na stožnice, Belochin pregib, Lillova metoda, reševanje enačb

Keywords: Dopolni po slovensko in prevedi tujej

1 Uvod

Začnimo z odzivom mojih priateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le – že tako izjemno širokega – področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebре, diferencialne topologije ... Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [11, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, do pred letom 1600 po Kr. ni). Oblikovanje oblik iz lista papirja se je do konca 20. stoletja hitro razširilo po vsem svetu [25]. Matematični vidik origamija je v ospredje prišel nekoliko kasneje. V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852) v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri poučevanju osnovne geometrije v vrtcu. Indijski matematik Tandalam Sundara Row je nato l. 1893 izdal obsežno knjigo *Geometric Exercises in Paper Folding* [30], v kateri popisuje konstrukcije raznolikih geometrijskih likov in celo krivulj. Velik prelom je doseglja italijanska matematičarka Margherita P. Beloch, ki je v 30-ih letih 20. st. odkrila, da lahko s prepogibanjem papirja rešujemo celo kubične enačbe. Vseeno je preteklo še pol stoletja, da je origami začel zanimati tudi širšo znanost, od takrat pa se je na tem področju odprlo veliko priložnosti za raziskovanje koncepta origamija in njegovo uporabo v najrazličnejših strokah [11, str. 10].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da lahko praktična izkušnja prepogibanja papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa zahteva spretnost in natančnost. Poleg fine motorike z origamijem krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem tistih iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih nekaj člankov, seminarskih nalog ter diplomskeh in magistrskih del, strokovnih knjig v slovenščini iz tega področja pa nisem našla. Ta naloga zajema predvsem uporabo origamija za namene raziskovanja geometrije ter reševanja enačb in vključuje veliko slik z orisanimi konstrukcijami. Me ddrugim je namenjena uporabi pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih večinoma da predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe znamenitih evklidskih orodij raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali podobnosti med evklidskimi in origami konstrukcijami in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo več, kot lahko z neoznačenim ravnalom in šestilom. To bomo pokazali tudi s spustom na algebraično ozadje konstrukcij.

V drugem poglavju bomo v roke prijeli liste papirja različnih geometrijskih oblik in spoznali nekaj osnovnih konstrukcij – preko osnovnošolskega dokazovanje lastnosti geometrijskih likov do konstrukcije treh pravilnih n -kotnikov; pogledali si bomo tudi vse tri Hagine izreke, s katerimi njihov avtor raziskuje, v kakšnem razmerju lahko z določenimi prepogibi razdelimo stranice kvadrata, potem pa bomo to posplošili na iskanje postopka razdelitve stranice na poljubno število enakih delov. Spoznali bomo še X -pregibe, zaključili pa s konstrukcijo kvadratnega korena poljubnega origami števila in z (več različnimi!) origami postopki, ki nam rešijo dva starogrška problema, nerešljiva z evklidskim orodjem – problem trisekcije kota ter podvojitve kocke, torej konstrukcije števila $\sqrt[3]{2}$.

Sledi kratko poglavje o konstrukcijah pravilnih n -kotnikov (**tu še ne vem, a bom vključila ali ne**). Potem sledi didaktično zanimivo področje, v katerem spoznamo (ali osvežimo spomin), kako s prepogibanjem papirja točke na določeno premico ali krožnico konstruiramo tangente na vse štiri stožnice in s tem na papirju dobimo njihov obris.

Najbolj zanimivo in obsežno poglavje pa je reševanje enačb s prepogibanjem papirja. Ko v prvem poglavju spoznamo, katera števila lahko konstruiramo z origamijem, tu znanje nadgradimo in spoznamo več metod, s katerimi lahko rešujemo splošne kvadratne in kubične enačbe ter celo nekatere enačbe četrte stopnje. V tem poglavju so zbrane metode in postopki več avtorjev, kot so Lill, Beloch, Alperin in Geretschläger.

Potem je še poglavje o Alzhazen's problem in 2-fold origami, ampak še ne vem, koliko bom tega v ključila. Nekaj bi še, ker do zdaj ni neke pretežke matematike za FMF tuje noter, ampak bom še videla. Do zdaj se ukvarjam samo z 1-fold origamijem, torej da prepogneš in takoj poravnas papir nazaj.

Ker je naloga spisana z namenom morebitne uporabe pri pouku srednješolske (lahko tudi osnovnošolske) matematike, je v njej zajetih veliko tem, ki bi bile razumljive tudi bralcem, ki nimajo veliko znanja univerzitetne matematike. Vseeno se na nekaterih področjih dotaknemo tudi konceptom, ki dijakom načeloma niso znani (npr. afina in projektivna geometrija pri metodi reševanja enačbe četrte stopnje). **(in mogoče še potem, če vključiš zadnji dve poglavji, ki res nista enostavni)**

Zapustimo sedaj znano jezerce umetelno prepognjenih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

popravi da so captioni slik, ki so v več kot eni vrstici, poravnani na sredini

2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Verjetno so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga [25]. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja (“oru” – prepogibati, “kami” – papir) se je na Dalnjem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvo, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [31]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastalo poimenovanje “*origamics*”. V slovenščini uradnega prevoda še ni, Grahor pa v [21, str. 5] po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physics* – fizika itd.) predlaga termin “origamika”.

2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida¹, ki je napisal zelo znano zbirkovo trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi*. V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij², aksiomov³ in postulatov⁴. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definiral osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat ... ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic [10]. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov, iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

Postulat P1. Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

Postulat P2. Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

Postulat P3. Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

Postulat P4. Vsi pravi koti so med seboj skladni.

¹O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [4, str. 61].

²Definicija je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

³Aksiom je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

⁴Postulat je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [10, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmom ne ločujemo [22, str. 2].

Postulat P5. Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

Opomba 2.1. Vemo že, da je postulat P5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

Definicija 2.2. *Evklidske konstrukcije* so konstrukcije točk, daljic, poltrakov, premic, krožnih lokov in krožnic, ki jih je iz danih točk in razdalj mogoče konstruirati le z uporabo t. i. *evklidskih orodij*:

- neoznačeno in neskončno dolgo ravnilo (angl. *straightedge*) in
- šestilo, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj).

Pri tem nove točke definiramo kot presečišča dveh premic, dveh krožnic ali premice in krožnice.

Opomba 2.3. Evklidske konstrukcije tako upoštevajo postulata P1 in P2 (ker lahko z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo le daljice, poltrake in premice skozi dani točki) in P3 (ker lahko s šestilom konstruiramo le krožnice z danim središčem in polmerom). Nove točke so z njihovimi presečišči dobro definirane.

Opomba 2.4. Da se pokazati, da lahko za konstrukcije ekvivalentno uporabimo tudi šestilo, ki prenaša razdalje [22, str. 6–7]. Zato imamo odslej z izrazom *šestilo* v mislih kar moderno šolsko šestilo.

Izkaže se, da z evklidskim orodjem ne moremo konstruirati poljubno dolgih daljic – kot zelo znane protiprimere lahko tu naštejemo tri starogrške probleme. Pri *kvadraturi kroga* nam evklidsko orodje ne zmore konstruirati razdalje $\sqrt{\pi}$, pri *podvojitvi kocke* razdalje $\sqrt{2}$, pri *trisekciji kota* ne zmore poljubnega kota razdeliti na tri enake dele. Drugi in tretji problem sta, verjetno za marsikoga presenetljivo, rešljiva z origamijem. V razdelku 3.5 si bomo pogledali njuni rešitvi, sedaj pa podrobneje spoznajmo še konstrukcije, ki jih dobimo s prepogibanjem papirja.

2.2 Origami konstrukcije

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini in se z trodimenzionalni modeli ne bomo ukvarjali. Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije v praksi preizkusiti tudi sam. Pri izbiri papirja je priporočljiv rahlo prosojen papir, skozi katerega se vidijo morebitne označbe točk in premic s svinčnikom (npr. navaden kuhinjski papir za peko).

2.2.1 Pravila origami konstrukcij

Bistvo origamija je, da prepogibamo list papirja. Zato je tudi naravno, da ga vzamemo za model evklidske ravnine. V njej si za modele premic vzamemo *ravne pregibe*, modeli točk pa naj bodo presečišča premic, t. j. *presečišča pregibov*. Določimo še nekaj pravil:

- pregibe opravljamo po enega naenkrat, torej po vsakem pregibu papir nazaj razgrnemo,
- ne uporabljamo drugih orodij, kot so ravnilo, šestilo, škarje, lepilo ipd.,
- pisalo je dovoljeno le pogojno – z njim lahko označimo pomožne točke, za katere vemo, da jih znamo konstruirati, ampak bi nam pomožni pregibi zmanjšali preglednost konstrukcije (npr. zrcaljene točke, gl. razdelek 2.2.3); prav tako lahko s pomočjo ravnila močneje poudarimo že konstruirane točke in premice,
- ne opravljamo naključnih pregibov, temveč papir prepogibamo tako, da se objekti na njem (točke in premice) prekrijejo. Zato moramo na začetku imeti na listu že nekaj danih objektov (npr. dve različni točki ali premico in točko, ki ne leži na njej). Če poskusimo razmislati, kaj so potem vsi možni dovoljeni prepogibi, pridemo do sledečih petih možnosti (za njihov slikovni prikaz gl. [11, str. 25–26]):
 - točko prepognemo na drugo točko (en možen pregib),
 - točko prepognemo samo vase (neskončno možnih pregibov),
 - točko prepognemo na premico (neskončno možnih pregibov),
 - premico prepognemo na drugo premico (en ali dva možna pregiba) in
 - premico prepognemo samo vase (neskončno možnih pregibov).

Definicija 2.5. *Origami konstrukcije* so konstrukcije točk in premic, ki jih je iz danih točk in razdalj mogoče konstruirati le z ravnimi in enkratnimi prepogibi iz zgornjega seznama. Pri tem nove točke definiramo kot presečišča dveh pregibov.

2.2.2 Origami operacije

V zadnjem stoletju se je preko več matematikov (Jacques Justin, Peter Messer, Benedetto Scimemi, Humiaki Huzita, Koshiro Hatori, George E. Martin idr.; nekateri so med seboj sodelovali, drugi so delovali neodvisno) skozi čas izobiloval seznam t. i. *origami operacij*⁵, ki zajamejo vseh pet možnosti prepogibanja. Da so to zadostne operacije za katerokoli origami konstrukcijo, si bomo pogledali v razdelku 2.7.

Seznam se je med avtorji razlikoval v številu (gl. [11, str. 29–30]), kot končen seznam pa bomo tu navedli vseh osem naštetih – na prvi pogled različnih – operacij. Najprej jih naštejmo, potem pa si ob sledečih slikah poglejmo še prikaz opisanih konstrukcij. Videli bomo, da moramo pri nekaterih operacijah ločiti več primerov [26, 31].

Operacija O1. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p , ki gre skoznju.

Operacija O2. Za poljubni premici lahko določimo njuno presečišče, če obstaja.

⁵Najbolj znanih pod imenom *Huzita-Hatori aksiomi*, vendar izraz *aksiom* tu ni primeren, saj bomo kmalu pokazali, da se med seboj prepletajo so nekateri izmed njih kombinacija drugih. Prav tako v nalogi opustimo ime avtorjev, ker je seznam delo veliko več matematikov kot le Hatorija in Huzite.

Operacija O3. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p , da se točki pokrijeta.

Operacija O4. Za poljubni premici a in b obstaja pregib p , ki ju položi eno na drugo.

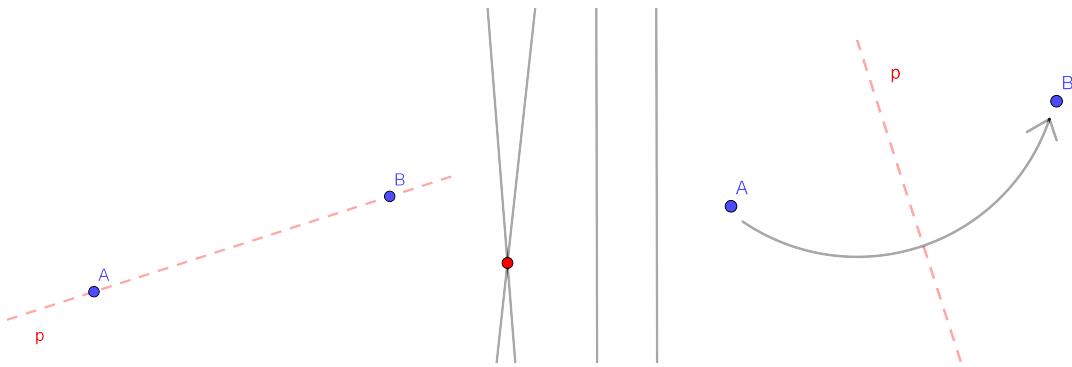
Operacija O5. Za poljubno točko A in premico a obstaja natanko en pregib p skozi točko A , ki je pravokoten na premico a .

Operacija O6. Za primerno izbrani točki A in B ter premico a obstaja pregib p skozi točko B , ki točko A položi na premico a .

Operacija O7. Za primerno izbrani točki A in B ter premici a in b obstaja pregib p , ki točko A položi na premico a in točko B na premico b .

Operacija O8. Za poljubno točko A ter nevzporedni premici a in b obstaja pregib p , ki je pravokoten na premico b in točko A položi na premico a .

Sedaj za vsako operacijo posebej poglejmo njen konstrukcijo. Tako opazimo, da je operacija O1 ekvivalentna postulatu P1, kar nam lahko vzbudi zanimanje za povezavo med evklidskimi in origami konstrukcijami. Operacija O2 je izvedljiva v vsakem primeru nevzporednih pregibov in nam omogoča določitev novih točk v našem modelu ravnine. Operacija O3 pa nam poda konstrukcijo simetrale daljice AB (slika 1) – ko opravimo pregib in pustimo papir še zapognjen, je očitno, da so točke na pregibu enako oddaljene od točk A in B .

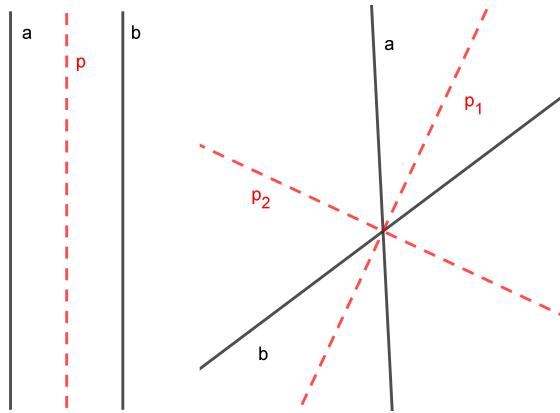


Slika 1: Operacije (od leve proti desni) O1, O2 in O3.

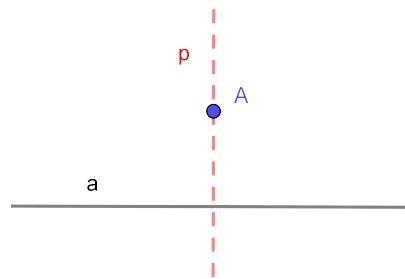
Nadalje opazimo, da nam operacija O4 konstruira obe simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče, v primeru vzporednih premic pa dobimo tretjo vzporednico, ki leži na sredi med njima (slika 2). Zato sta tu možna po dva ali, v posebnem primeru, en pregib.

Operacija O5 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko (slika 3). Pri tem je vseeno, ali točka leži na premici ali ne. Pregib opravimo tako, da premico položimo samo nase in pazimo, da je točka A v pregibu. Zaradi simetrije je pregib res pravokoten na premico in tako tudi en sam.

Operacija O6 je še posebej zanimiva. Najprej si poglejmo njen konstrukcijo. Vzemimo točki A in B ter premico a . Iščemo pregib skozi B , ki A položi na premico a . Ker točka B leži na pregibu, je enako oddaljena tako od točke A kot tudi njene

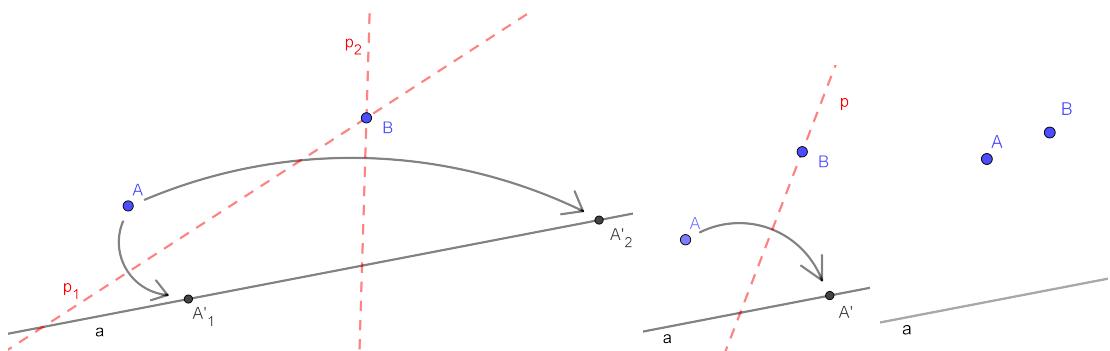


Slika 2: Operacija O4 v obeh možnih primerih.



Slika 3: Operacija O5.

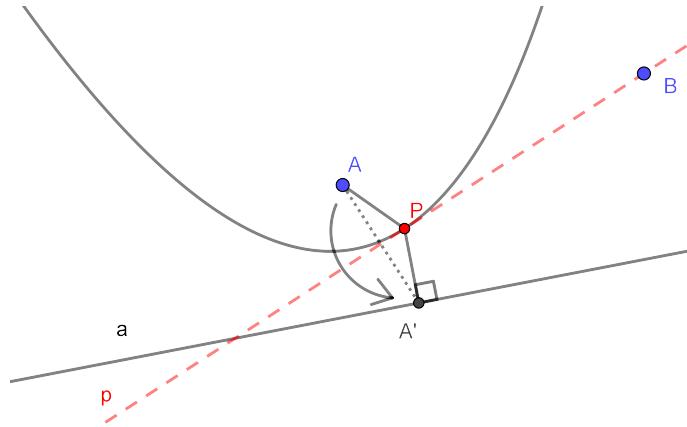
slike A' na premici a , torej je A' ravno presečišče premice a in krožnice s središčem v B ter polmerom AB . Pregib je simetrala daljice AA' , ki po konstrukciji poteka skozi točko B . Če velja $d(A, B) > d(B, a)$, sta presečišči s premico a dve (in s tem tudi dva možna pregiba, gl. sliko 4 levo), v primeru $d(A, B) = d(B, a)$ je presečišče eno samo (in s tem en možen pregib, gl. sliko 4 na sredi) in je premica a takrat tangentna na omenjeno krožnico, v zadnjem primeru, ko velja $d(A, B) < d(B, a)$, pa presečišč ni (in s tem tudi pregiba, gl. sliko 4 desno).



Slika 4: Operacija O6 v vseh treh primerih.

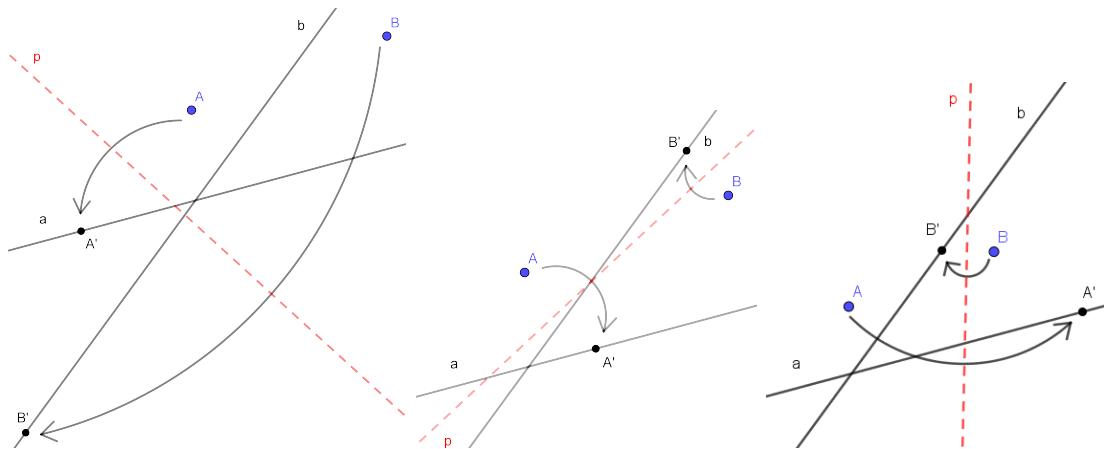
Zgodba operacije O6 se tu še ne zaključi. Ker na pregibu ležijo vse točke, ki so enako oddaljene od točke A in A' , to velja tudi za točko P , ki jo dobimo kot presečišče pregiba in pravokotnice na premico a skozi A' (slika 5). Zanjo velja $d(A, P) = d(P, a)$ in je enolično določena (v srednjem primeru na sliki 4 je to kar

točka B). Torej točka P leži na paraboli z goriščem A in premico vodnico a . Bralec lahko sam premisli, da je P edina točka na pregibu, ki je enako oddaljena od gorišča in premice vodnice. Pregib torej seka parabolo le v eni točki, kar pomeni, da je to *tangenta na to parabolo*. V levem primeru na sliki 4 smo dobili dve tangentni.



Slika 5: Operacija O6 kot konstrukcija tangente na parabolo z goriščem v A in premico vodnico a .

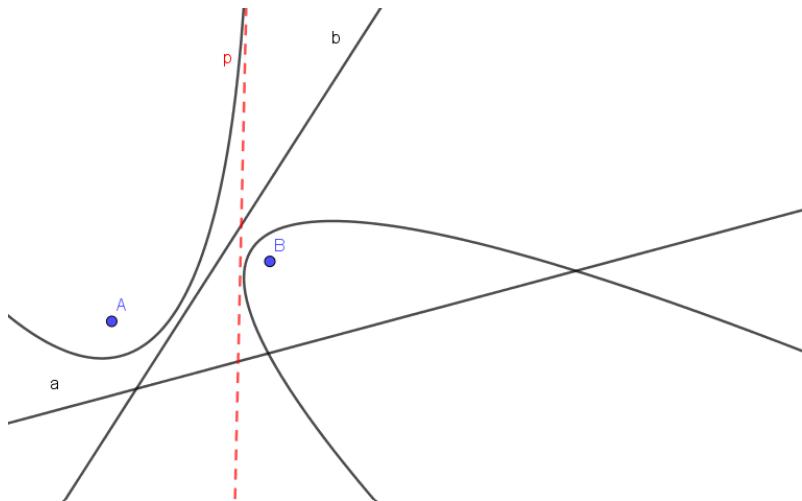
Poglejmo si naslednjo operacijo. Konstrukcijo O7 začnemo z upogibom papirja, ki točko A položi na premico a , potem pa točko premikamo po premici, dokler se tudi točka B ne stakne s premico b . Takrat naredimo pregib. Na sliki 6 so prikazani trije pregibi, kar je tudi največje možno število pregibov za iste točke in premice. Več o številu pregibov sledi v razdelku 6.2.



Slika 6: Operacija O7 (primer treh pregibov za isti točki in premici).

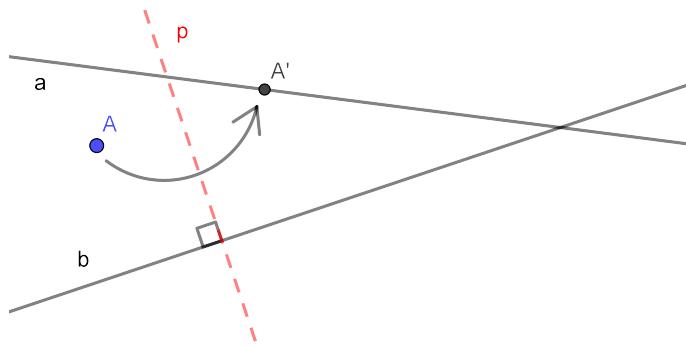
Kaj je geometrijski pomen te operacije? Če smo pri operaciji O6 dobili tangentno na parabolo, potem lahko takoj vidimo, da pri operaciji O7 dobimo *skupno tangentno na dve paraboli* – ena ima gorišče v točki A in premico vodnico a , druga pa gorišče v točki B ter premico vodnico b (slika 7).

Opomba 2.6. O operaciji O7 naj bi prva pisala italijanski matematičarki Margherita P. Beloch, po kateri operacijo imenujemo tudi *Belochin pregib*.



Slika 7: Operacija O7 kot konstrukcija skupne tangente na dve paraboli.

Zadnja operacija O8 zahteva nevzporedni premici, saj v nasprotnem primeru ne moremo konstruirati pregiba, ki bi bil pravokoten na obe premici in točko A položil na premico a (razen če le-ta že leži na njej). Premislimo geometrijsko konstrukcijo: ker mora biti pregib pravokoten na premico b , bo slika točke A (označena z A') ležala na vzporednici skozi točko A k premici b . Prav tako mora točka A' ležati na premici a , torej je slika ravno presečišče omenjene vzporednice in premice a . Iskan pregib je simetrala daljice AA' , ki je po konstrukciji pravokoten na premico b (slika 8).



Slika 8: Operacija O8.

Opomba 2.7. Natančen bralec lahko opazi, da nam origami operacije ne podajajo konstrukcije slik točk, temveč samo pregibe, ki točke preslikajo na premice. Sliko točke konstruiramo šele po uporabi operacije O5 – skozi originalno točko naredimo pregib, pravokoten na prvi pregib (iz O6), in slika je potem presečišče pravokotnice in premice, na katero smo prepognili originalno točko.

Zadostne in potrebne origami operacije

Omenili smo že, da je teh osem operacij zadostnih za katerokoli origami konstrukcijo.

Izrek 2.8. Če dovolimo le enkratne in ravne pregibe, so edine možne operacije pre-pogibanja operacije O1–O8.

Ideja dokaza je, da vsak možen prepogib, ki prekrije točko ali premico s točko ali premico (gl. seznam petih možnosti v razdelku 2.2.1) uvrstimo v eno izmed origami operacij O1–O8. Za natančen dokaz s slikovno ponazoritvijo gl. [11, str. 24–26 (izrek 1.1)] ([Lahko ga tudi tu dokažem](#)).

Vendar ali so vse te operacije tudi potrebne ali lahko kakšno izpustimo? Operacija O2 je očitno potrebna, saj nam določa nove točke. Če podrobnejše opazujemo ostale konstrukcije, pa opazimo, da so vse posebni primeri operacije O7 (t. j. konstrukcija pregiba, ki točko A položi na premico a in točko B na premico b), ko premici a in b sovpadata ali ko ena ali obe izmed točk A in B ležita na premici:

- Operacija O1: Naj točka A leži na premici a , točka B pa na premici b . Pregib skozi točki A in B točko A ohrani na premici a in točko B na premici b .
- Operacija O3: Naj točka A leži na premici b , točka B pa na premici a . Pregib, ki položi točki drugo na drugo, točko A položi na premico a in hkrati točko B na premico b .
- Operacija O4: Naj točka A leži na premici b , točka B pa na premici a . Simetrala kota v presečišču premic (ali vmesna vzporednica, če sta premici a in b vzporedni), točko A položi na premico a in hkrati točko B na premico b .
- Operacija O5: Naj točka A leži na premici a , točka B pa na premici b . Pregib skozi točko A (ali B), ki je pravokoten na premico b (ali a), točko A ohrani na premici a in točko B na premici b .
- Operacija O6: Naj točka B leži na premici b . Pregib skozi točko B , ki točko A preslika na premico a (če tak pregib obstaja), točko B ohrani na premici b .
- Operacija O8: Naj točka B leži na premici b . Pregib, ki točko A položi na premico a in je pravokoten na premico b , točko B ohrani na premici b .

Ker lahko vse konstrukcije po izreku 2.8 opišemo z operacijami O1–O8, smo s tem dokazali spodnji izrek:

Izrek 2.9. *Če imamo dani vsaj dve točki in dve nevzporedni (lahko tudi identični) premici, ki vsebujujeta dane točke, potem lahko vse origami konstrukcije z enkratnimi in ravnnimi pregibi opišemo s kombinacijo operacij O2 in O7.*

Vseeno bomo ohranili vseh osem aksiom operacij, saj bomo kakšen pregib lažje razložili preko ene od ostalih petih operacij kot pa opisovali, na kakšen način je to operacija O7.

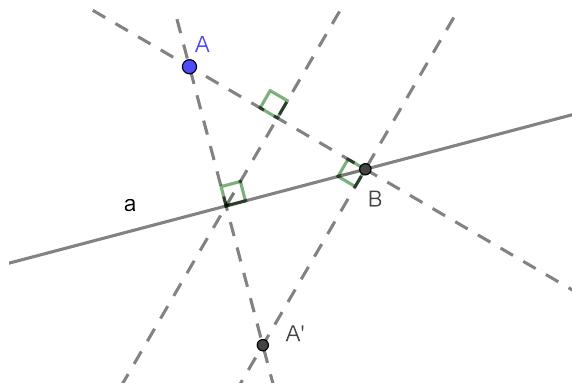
2.2.3 Zrcaljenje točke čez premico

Operacija O3 nam poda simetralo daljice AB . Torej je točka B zrcalna slika točke A čez to premico. Kaj pa, če imamo za neko točko A že dano premico a in iščemo njeno zrcalno sliko? Naravna rešitev je, da naredimo pregib po premici in s svinčnikom označimo zrcalno sliko. A definicija 2.5 pravi, da lahko točke dobimo le kot presečišča pregibov, poleg tega pa je uporaba pisala dovoljena le za vidnejšo označbo že konstruiranih točk.

Zato moramo najti zaporedje pregibov, kjer na koncu kot presečišče nekih dveh premic dobimo želeno točko. Za dano premico a in točki A , ki ne leži na tej premici (sicer je točka A zrcalna slika sama sebi), lahko zrcalno sliko točke konstruiramo z naslednjimi koraki (prikazani na sliki 9, postopek vzet iz [11, str. 28]):

1. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na premico a skozi točko A .
2. Z operacijo O4 prepognemo simetralo kota, ki ga oklepata premica a in pravokotnica iz prvega koraka.
3. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na simetralo skozi točko A . Njeno presečišče s premico a označimo z B .
4. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na pregib iz tretjega koraka skozi točko B . Presečišče novega pregiba in pravokotnice iz prvega koraka označimo z A' .

(Na spodnji sliki označi s številkami zaporedje pregibov)



Slika 9: Zrcaljenje točke A čez premico a s prepogibanjem papirja.

Trditev 2.10. Točka A' iz opisane konstrukcije je zrcalna slika točke A .

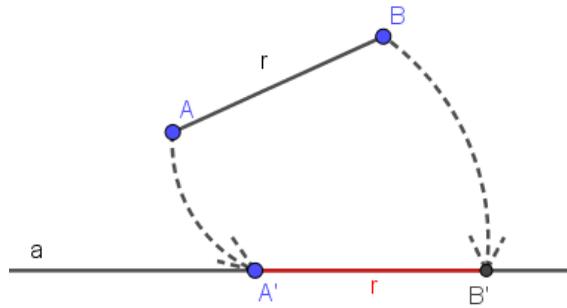
Dokaz. Trikotnik, ki ga dobimo po 3. koraku, je pravokoten in enakokrak, saj je simetrala (pravega kota) iz 2. koraka pravokotna na njegovo osnovnico. Zato kot ob točki A znaša 45° . Ker je trikotnik $\triangle A'BA$ pravokoten, je zato tudi enakokrak, torej premica a razpolavlja daljico AA' , torej je A' res zrcalna slika točke A . \square

Ker lahko čez premico zrcalimo točke, lahko čeznjo zrcalimo tudi daljice oz. premice – to storimo tako, da zrcalimo dve točki z daljice in naredimo pregib čez njuni sliki. Zrcaljenje pa nam omogoča še nekaj več, kar nam pove naslednja trditev.

(Moja avtorska trditev in dokaz:)

Trditev 2.11. Z upoštevanjem pravil iz razdelka 2.2.1 in origami operacij lahko s prepogibanjem papirja prenašamo razdalje.

Dokaz. V ravnini si izberimo poljubni točki A in B , ki določata daljico z neko dolžino r . Naj bo a poljubna premica in A' poljubna točka na njej. Trditev pravi, da lahko z origami operacijami konstruiramo točko $B' \in a$, da je $d(A', B') = r$ (slika 10).

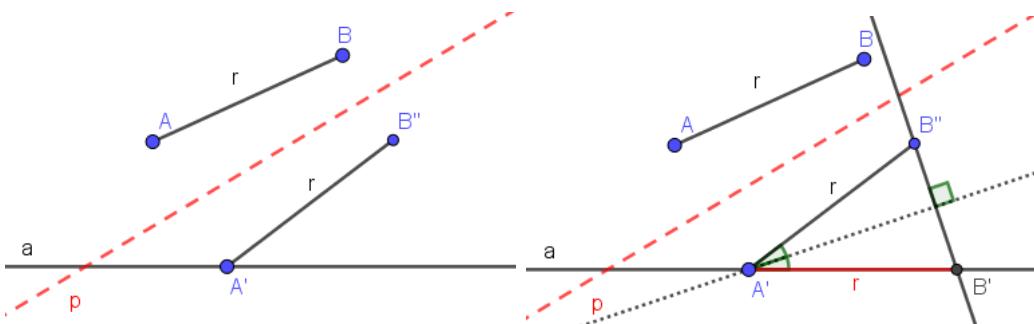


Slika 10: Prenos dolžine daljice AB na premico a k izbrani točki A' .

Pri tem ni pomembno, na kateri strani točke A' leži točka B' , saj jo lahko vedno zrcalimo čeznjo.

Prenos razdalje razdelimo na dva koraka:

1. Če $A \neq A'$, daljico AB zrcalimo čez tisto premico p , ki točko A preslika v točko A' (po O3 je tak pregib oz. premica ena sama). Zrcalno sliko točke B označimo z B'' (slika 11 levo). V posebnem primeru, ko daljica AB leži na premici a , je to že konec konstrukcije.
2. Daljico $A'B''$ rotiramo okoli točke A' , da se točka B'' preslika na premico a . To storimo tako, da z operacijo O4 konstruiramo simetralo kota med daljico $A'B''$ in premico a in čeznjo zrcalimo točko B'' (slika 11 desno). S tem dobimo točko $B' \in a$, ki je po konstrukciji od točke A' oddaljena za dolžino r .



Slika 11: Zrcaljenje daljice AB (levo) in rotacija daljice čez eno krajišče (desno).

S tem smo razdaljo r prenesli na poljubno mesto v ravnini. \square

Tako lahko s prepogibanjem papirja zrcalimo točke (in premice), prenašamo razdalje pa tudi – po 2. koraku iz zgornjega dokaza – rotiramo točke (in premice). To novo znanje bomo uporabili v razdelku 2.3.2, od sedaj naprej pa bomo pri konstrukcijah, ki vključujejo zrcaljenje točk, zaradi preglednosti izpustili potrebne pregibe in zrcaljene točke označili kar s svinčnikom skozi papir.

2.3 Zakaj origami konstrukcije nadvladajo evklidske

Prišli smo do ključnega dela poglavja – reševanje vprašanja, zakaj se nam z origami konstrukcijami sploh splača ukvarjati.

Tako z evklidskim orodjem kot s prepogibanjem papirja lahko konstruiramo premice in točke ter prenašamo razdalje. Le evklidskim orodjem lahko konstruiramo tudi krožne loke, ker pa znamo rotirati točke okoli druge točke, lahko tudi s prepogibanjem papirja konstruiramo katerokoli točko na krožnici z danim središčem in polmerom. Tako lahko vse evklidske konstrukcije opravimo tudi z origamijem (za natančnejši dokaz gl. [6, str. 362–365]).

Bralec je ob zgornjih opisih posamezne operacije povabljen, da premisli, kako je mogoče operacije O1, O3, O4, O5, O6 in O8 opraviti tudi z evklidskim orodjem (operacija O2 le določa nove točke, zato tu o konstrukciji ne moremo govoriti). Do tu nam torej origami konstrukcije niso dale ničesar novega.

Ključna je sedma operacija. Izkaže se namreč, da operacije O7 oz. Belochinega pregiba ne moremo opraviti z evklidskim orodjem. Kako lahko to dokažemo? V razdelku 3.5.2 bomo spoznali več origami postopkov, ki nam poljuben kot razdelijo na tri skladne dele, pri tem pa uporabimo pregib iz operacije O7. Ker *trisekcija kota z evklidskim orodjem ni mogoča* (dokaz v [14, str. 77–78]), posledično tudi konstrukcija operacije O7 s tem orodjem ne obstaja. Prav tako bomo v poglavju 6 videli več načinov uporabe operacije O7 za reševanje kubične enačbe, za katero prav tako vemo, da je v splošnem z evklidskim orodjem ne moremo rešiti.

Sedaj vemo, da je množica evklidskih konstrukcij *prava* podmnožica origami konstrukcij. V naslednjem razdelku si bomo pogledali, kako lahko evklidske in origami konstrukcije prevedemo v jezik algebре in tudi na algebrski način pokažemo premoč origamija nad evklidskim orodjem. Raziskovali bomo, katere dolžine (in s tem katera števila) lahko z obema orodjema konstruiramo. Tak pogled je imel že Evklid, ki je na števila gledal kot končni rezultat niza konstrukcij z evklidskim orodjem pri dani daljici enotske dolžine [26, str. 164].

2.3.1 Algebrski pogled na evklidske konstrukcije

Definicija 2.12. Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine \mathbb{C} , imejmo dano izhodišče O in število 1 na realni osi. Če lahko z neoznačenim ravnalom in šestilom s končnim številom potez konstruiramo kompleksno število α , rečemo, da je α *evklidsko-konstruktibilno* število.

Jerman bralca v [14] na zelo strukturiran in nazoren način popelje čez dokaz, da lahko z evklidskim orodjem na realni osi konstruiramo natanko vsa racionalna števila, njihove vsote, razlike, zmnožke, količnike, kvadratne korene ter linearne kombinacije vsega naštetega (zelo nazorna je tudi izpeljava v [26, str.165–170]). To je množica

$$\mathbb{Q}(r) = \{a + b\sqrt{r}; a, b \in \mathbb{Q}; r > 0 \text{ in } \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}\},$$

ki je komutativen obseg oz. polje in hkrati tudi dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom \mathbb{Q} z bazo $\{1, \sqrt{r}\}$.

Da pokažemo, da so to vsa možna realna evklidsko-konstruktibilna števila, je potrebna obravnava vseh možnih enačb, ki jih dobimo pri iskanju presečišč dveh krožnic, dveh premic ter krožnice in premice, potem pa je potrebno še dokazati, da

nam vse nadaljne rabe konstruiranih presečišč res podajo najmanjšo razširitev polja racionalnih števil, ki je zaprta za operacijo kvadratnega korenjenja. Jerman s tem dokaže naslednji izrek.

Izrek 2.13. *Število $r \in \mathbb{R}$ se da konstruirati le s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je r algebraičen nad \mathbb{Q} in je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom \mathbb{Q} , enaka 2^n za nek $n \in \mathbb{N}_0$.*

Opomba 2.14. Razsežnosti obsega $\mathbb{Q}(r)$ pravimo tudi *stopnja razširitve obsega \mathbb{Q}* . Izkaže se, da je enaka stopnji minimalnega polinoma števila r nad \mathbb{Q} [14, str. 77].

Izreku takoj sledita dokaza, da trisekcija kota v splošnem ter konstrukcija števila $\sqrt[3]{2}$ z evklidskim orodjem nista mogoči [14, str. 77–78].

Iz izreka sledi tudi, da lahko vsa realna evklidsko-konstruktibilna števila analitično zapišemo kot rešitve kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti. O reševanju enačb se bomo natančneje ukvarjali v poglavju 6.

Ker med kompleksno in evklidsko ravnino obstaja bijekcija, lahko tako konstruiramo poljubno število $\alpha = x + yi$, kjer sta $x \in \mathbb{Q}(r)$ in $y \in \mathbb{Q}(s)$ za neka $r, s \in \mathbb{Q}^+; \sqrt{r}, \sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$. S tem lahko zapišemo tudi kompleksne rešitve kvadratne enačbe. Torej lahko z evklidskim orodjem konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe.

2.3.2 Origami števila

Poiščimo še množico števil, ki jih lahko konstruiramo z origamijem. Definiramo jih na enak način kot *evklidsko-konstruktibilna* števila.

Definicija 2.15. Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine \mathbb{C} , imejmo dano izhodišče O in število 1 na realni osi. Premice predstavljajo pregibi papirja, nove točke pa njihova presečišča. Če lahko s končnim številom enkratnih ravnih prepogibov in upoštevanjem operacij O1–O8 konstruiramo kompleksno število α , rečemo, da je α *origami število*. Množico origami števil označimo z \mathcal{O} .

Opomba 2.16. Po izreku 2.8 operacije O1–O8 zajamejo vse možne pregibe, zato so origami števila dobro definirana.

Definicija 2.17. Če lahko v evklidski ravnini z origamijem po zgornjih pravili konstruiramo točko A , pravimo, da je A *origami-konstruktibilna točka*. Če lahko z origamijem konstruiramo premico p , pravimo, da je premica p *origami-konstrukcibilna premica*.

Preko sledečih izrekov in trditev bomo še na algebrski način pokazali, da je množica števil, ki jih lahko konstruiramo z evklidskim orodjem, prava podmnožica množice origami števil.

Trditev 2.18. *Naj bo $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, kjer $a, b \in \mathbb{R}$. Potem je $\alpha \in \mathcal{O}$, če in samo če $a, b \in \mathcal{O}$.*

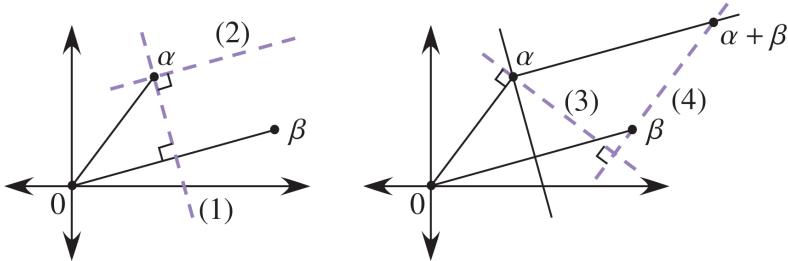
Dokaz. Ker sta a in b pravokotni projekciji števila α na realno in imaginarno os (operacija O5), je trditev očitna. \square

Izrek 2.19. Množica \mathcal{O} je podpolje polja \mathbb{C} .

Dokaz. Za dokaz izreka moramo pokazati, da je $1 \in \mathcal{O}$ (kar velja že po definiciji), da za poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ velja $\alpha - \beta, \alpha\beta \in \mathcal{O}$ in da je $1/\alpha \in \mathcal{O}$ za vsak $\alpha \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Spomnimo se, da lahko kompleksna števila ponazorimo z vektorji in zato lahko računske operacije grafično izvajamo kar preko njih.

Vzemimo poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Ker število $-\beta$ dobimo po zaporednem zrcaljenju čez obe osi, velja $-\beta \in \mathcal{O}$. Ker je odštevanje v resnici seštevanje nasprotnega elementa, je za dokaz $\alpha - \beta \in \mathcal{O}$ dovolj pokazati, da je množica \mathcal{O} zaprta za seštevanje.

Če α, β in O ležijo na isti premici, ni veliko za dokazovati, temveč samo prenesemo razdaljo na pravljeno mesto na premici. Predpostavimo sedaj, da α, β in O ne ležijo na isti premici in s paralelogramskim pravilom konstruirajmo število $\alpha + \beta$ (slika 12). Štirikrat uporabimo operacijo O5: preko pravokotnice (1) na vektor $\overrightarrow{O\beta}$ skozi α konstruiramo vzporednico (2) k taistemu vektorju skozi α in na enak način preko pravokotnice (3) konstruiramo vzporednico (4) k vektorju $\overrightarrow{O\alpha}$ skozi β . V presečišču vzporednic dobimo $\alpha + \beta$.



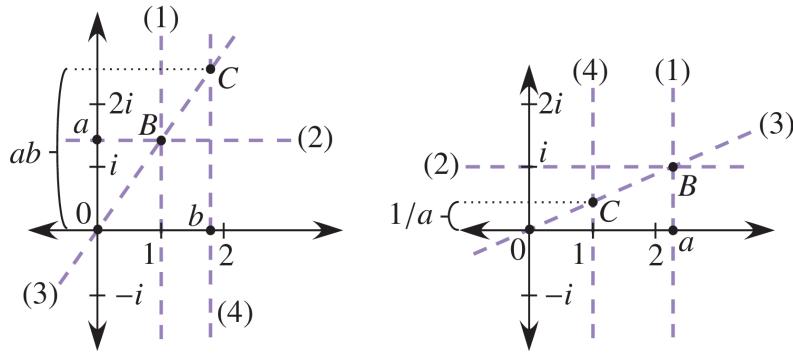
Slika 12: Konstrukcija $\alpha + \beta$.

Za dokaz preostalih dveh zahtev najprej dokažimo, da za neničelna $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ velja $ab, 1/a \in \mathcal{O}$, potem pa s pomočjo trditve 2.18 to dokažemo še za poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.

Naj bosta $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ poljubna in neničelna (če je katerikoli od njiju enak 0, je produkt ničeln in že po definiciji origami število). Ker sta a in b origami števili, ju lahko konstruiramo. Naj b leži na realni osi, ai pa na imaginarni (slika 13 levo). Z dvakratno uporabo operacije O5 konstruiramo origami število $1 + ai$ (točka B). Konstruiramo pregib skozi O in B (premica z naklonom a) ter v presečišču s pravokotnico skozi b dobimo število $b + abi$ (točka C). Pravokotnica skozi C na imaginarno os na njej konstruira origami število ab .

Podobno konstruiramo še število $1/a$. Na realni osi konstruiramo število a (slika 13 desno), s pomočjo O5 pa še število $a + i$ (točka B). Pregib skozi O in B ima naklon ravno $1/a$. V presečišču tega pregiba s pravokotnico na realno os v točki ! dobimo število $1 + (1/a)i$ (točka C). Tako nam pravokotnica na imaginarno os skozi točko C konstruira origami število $1/a$.

Vzemimo sedaj poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Če je $\alpha = a + bi, \beta = c + di$, potem po trditvi 2.18 velja $a, b, c, d \in \mathcal{O}$. Število $\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ima v svojem realnem in imaginarnem delu njihove vsote, razlike in produkti, za katere že vemo, da so v \mathcal{O} . Torej je $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.



Slika 13: Konstrukcija ab in $1/a$ za neničelna $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$.

Za neničeln $\alpha = a + bi \in \mathcal{O}$ je $1/\alpha = a/(a^2 + b^2) + (-b)/(a^2 + b^2)i$. Ker sta po trditvi 2.18 $a, b \in \mathcal{O}$, sta zopet realni in imaginarni del tega števila origami števili, torej $1/\alpha \in \mathcal{O}$. \square

Trditev 2.20. *Naj bo $\alpha \in \mathcal{O}$. Potem $\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{O}$.*

Dokaz. Naj bo $\alpha = re^{i\theta}$ za neka $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (v ničelnem primeru ni kaj dokazovati) in θ poljuben kot. Torej imamo za kvadratni in kubični koren števila α skupno pet rešitev:

- $\sqrt{\alpha} = \pm \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ in
- $\sqrt[3]{\alpha}_1 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta}{3}}, \sqrt[3]{\alpha}_2 = \sqrt[3]{r} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})}, \sqrt[3]{\alpha}_3 = \sqrt[3]{r} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})}$.

Torej moramo dokazati, da $\sqrt{r}, \sqrt[3]{r} \in \mathcal{O}$, da znamo razpolavljati in tretjiniti kote ter rotirati origami število za kot 60° okoli izhodišča O . Potem bomo po izreku 2.19 lahko konstruirali zgornjih pet števil in tako dokazali to trditev.

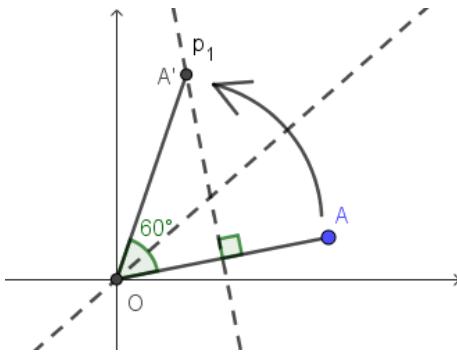
Najprej se še prepričajmo, da $r \in \mathcal{O}$. Ker je to ravno razdalja števila α do izhodišča, jo lahko prenesemo na realno os in tako konstruiramo realno število r , torej je res $r \in \mathcal{O}$.

V razdelku 6 bomo pogledali, kako z origamijem rešujemo splošne kvadratne in kubične enačbe, torej bomo znali konstruirati tudi rešitve enačb $x^2 - r = 0$ in $x^3 - r = 0$. Konkretne konstrukcije števil \sqrt{r} in $\sqrt[3]{r}$ opisane tudi v razdelku 3.5. Z operacijo O4 znamo razpoloviti kot, postopek tretjinjenja kota pa je, kot že omenjeno, opisan v razdelku 3.5.2. Ostane nam samo še rotacija točke za kot 60° okoli izhodišča. Na sliki 14 je prikaz enostavne konstrukcije – najprej prepognemo simetralo p_1 daljice OA in konstruiramo pregib p_2 skozi O , ki točko A preslika v točko A' na simetrali p_1 . Trikotnik $\triangle OAA'$ je enakostraničen. \square

Množica origami števil \mathcal{O} je tako zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje ter za kvadratno in kubično korenjenje. Ker so cela števila očitno origami števila (po definiciji imamo dano enoto, ki jo znamo prenašati po realni osi), so zaradi zaprtosti za deljenje origami števila tudi vsa racionalna števila. Zato za vsak $r \in \mathbb{Q}^+, \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$ in vsaka $a, b \in \mathbb{Q}$ velja $a + b\sqrt{r} \in \mathcal{O}$, torej za vsak tak r velja

$$\mathbb{Q}(r) \subseteq \mathcal{O}.$$

S tem je dokazana naslednja trditev.



Slika 14: Rotacija točke za kot 60° okoli izhodišča.

Trditev 2.21. Vsa evklidsko-konstruktibilna števila so origami števila.

Da so evklidsko-konstruktibilna števila *prava* podmnožica origami števil, je potrebno najti samo en $r \in \mathcal{O} \cap \mathbb{Q}^+$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$, za katerega velja $\sqrt[3]{r} \notin \mathbb{Q}(r)$. Bralec je povabljen k enostavnemu dokazu, da že za $r = 2$ ne obstajata $a, b \in \mathbb{Q}$, da bi veljalo $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$ – če začnemo reševati to enačbo za a in b , se hitro izkaže, da nima niti realnih rešitev.

Izrek 2.22. Množica evklidsko-konstruktibilnih števil je prava podmnožica množice origami števil, t. j.

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+, \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}} \mathbb{Q}(r) \subset \mathcal{O}$$

Tako smo še na algebraičen način dokazali prevlado origamija nad evklidskim orodjem.

(a potem so origami števila enaka množici $\{a+b\sqrt{r}+c\sqrt[3]{q}\}$ za poljubne $a, b, c, r, q \in \mathbb{Q}$? Je kakšna oznaka?)

A vključimo še ta spodnji izrek, da bo podobno kot 2.13? Lahko gledajo Alperin [1]

Izrek 2.23. Število $r \in \mathbb{R}$ se da konstruirati z origamijem natanko tedaj, ko je r algebraičen nad \mathbb{Q} in je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom \mathbb{Q} , enaka $2^n 3^m$ za neka $n, m \in \mathbb{N}_0$.

3 Prepogibanje lista različnih geometrijskih oblik

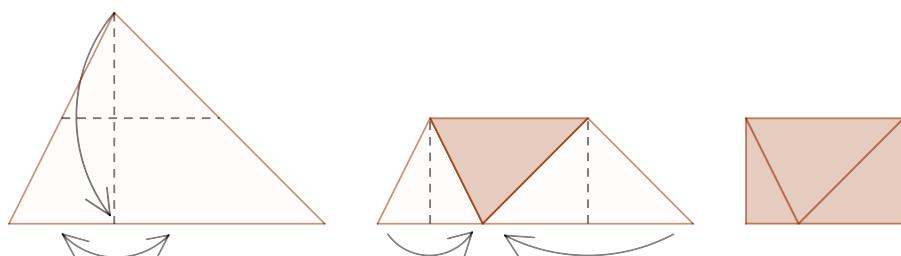
V tem poglavju bomo v roke vzeli liste papirja različnih geometrijskih oblik (včasih pa le navaden list papirja) in raziskovali, kaj lahko z njegovim prepogibanjem dobimo. Za uvod si bomo pogledali nekaj najosnovnejših konstrukcij, ki jih lahko učitelj matematike uporabi tudi pri pouku v osnovni šoli, nato pa se bomo vrnili nazaj v malo bolj zanimive konstrukcije, kot so konstrukcija enakostraničnega trikotnika, šestkotnika in osemkotnika. Nato si bomo pogledali vse tri Hagove izreke o razmerjih, na katere specifični pregibi kvadratnega lista papirja razdelijo njegove stranice, nato pa to posplošili na iskanje metod za razdelitev daljice na poljubno število skladnih delov. Na kratko bomo spoznali tudi t. i. X -pregibe. Nazadnje pa bomo po konstrukciji kvadratnega korena poljubnega origami števila preko več različnih postopkov končno rešili dva starogrška problema, zaradi katerih smo se sploh začeli ukvarjati s temo origamija.

3.1 Nekaj kratkih in zanimivih konstrukcij za uvod

Ponazoritev lastnosti geometrijskih likov z origamijem

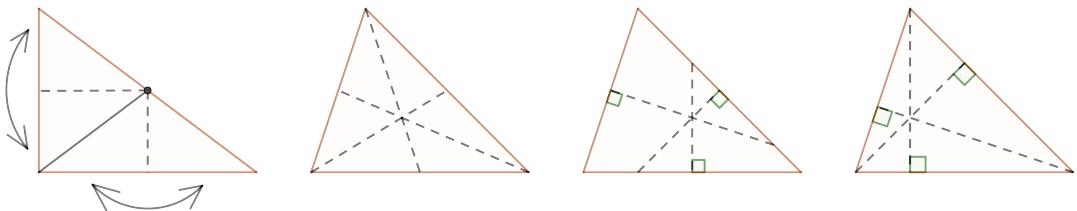
Johnson v [15] opisuje, kako lahko s prepogibanjem lista papirja v obliki trikotnika, štirikotnika in kroga pokažemo določene lastnosti geometrijskih likov. Opisov, ki jih spremljajo nazorne skice konstrukcij, ne dokazuje, ampak rešitev nastavi z vprašanjji, na katera mora bralec sam pri sebi odgovoriti. Učitelji so povabljeni, da se pri pouku večkrat poslužujejo teh pripomočkov, saj bo to za učence zanimivo, hkrati pa zelo poučno. Pri tem naj se sami odločijo, na kakšen način bodo uporabili prepogibanje papirja – ali kot že podana navodila iz knjige, iz katerih morajo učenci sami ugotoviti rezultat ali kot iskanje konstrukcije, ki dokaže želeno lastnost ipd. Sedaj bomo našteli bistvene konstrukcije, ki jih navaja avtor, večinoma pa bo lažji premislek, zakaj delujejo, prepuščen bralcu.

Avtor začne z osnovami – ki jih že poznamo – kot so pregibi skozi točko, pravokotnica na premico (skozi dano točko, ki leži na njej ali ne), simetrala daljice, simetrala kota in vzporednica premici. Z zložitvijo trikotnika v pravokotnik na način, kot kaže slika 15, pokaže, da je vsota notranjih kotov trikotnika res 180° . Iz te konstrukcije tudi sledi formula za ploščino trikotnika, saj je le-ta dvakrat večja od ploščine nastalega pravokotnika, ki ima za stranici polovico osnovnice trikotnika in polovico njegove višine. Prav tako lahko tu vidimo, da je srednjica trikotnika (pregib vrha trikotnika na sliki 15 levo) simetrala njegove višine in pol krajša od njegove osnovnice.



Slika 15: Pregib trikotnika, ki njegove notranje kote zloži skupaj v iztegnjeni kot.

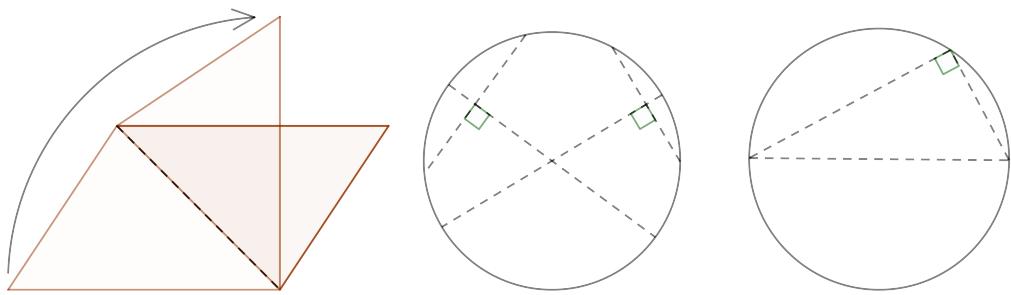
Nadalje z določitvijo središča hipotenuze pravokotnega trikotnika bralca povabi, da se s prepogibi prepriča, da nastala točka osnovni trikotnik razdeli na dva enako-kraka trikotnika (slika 16 levo). Prav tako se lahko prepriča, da se višine trikotnika, njegove težišnice, simetrale stranic ter simetrale kotov sekajo v isti točki (seveda vsaka skupina daljic zase; na sliki 16 so prikazani vsi primeri razen za simetralo kotov).



Slika 16: Prikaz še nekaj lastnosti trikotnika.

Če odložimo trikotnik in v roke vzamemo paralelogram, preko prepogib njegovih sosednjih stranic druge na drugo vidimo, da njegove diagonale v splošnem ne razpolavljajo notranjih kotov (slika 17 levo). Slednje velja le za romb, za katerega poleg tega lahko še takoj s pregibom po diagonalah pokažemo, da sta pravokotni druga na drugo.

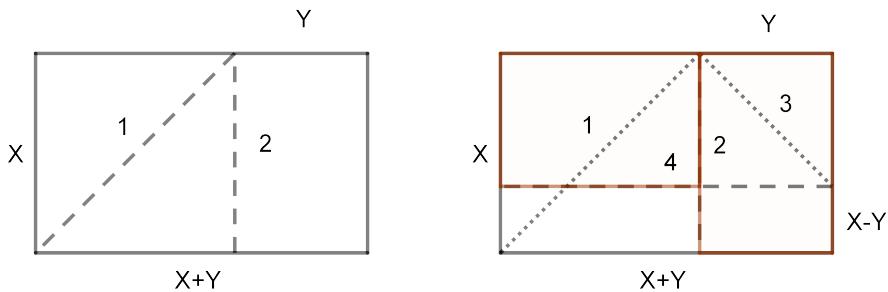
Nato se avtor posveti krogu. Vsak prepogib, ki prekrije njegove robove, ga očitno razdeli na pol in je njegov premer. Dva taka, a različna prepogiba določata središče kroga. Dobi se ga tudi tako, da prepognemo dve različni tetivi in skozi vsako izmed njiju še njeno simetralo, ki se sekata v središčni točki (slika 17 na sredi). Prav tako se dva različna premra in simetrala poljubne tetine sekajo v isti točki. Avtor ravnokar naštetega ne opiše tako, temveč poda navodila za konstrukcijo pregibov in bralca sprašuje, kaj nam končna konstrukcija da. Bralec šele po opravljenih prepogibih vidi, da gre za običajne evklidske konstrukcije. Razdelek se konča še s ponazoritvijo Talesovega izreka (slika 17 desno) in konstrukcijo tangente na krožnico.



Slika 17: Prikaz nekaj lastnosti paralelograma in kroga.

Nadalje lahko s prepogibanjem pravokotnika s stranicama X in $X + Y$, kjer krajšo stranico prepognemo na daljšo, ponazorimo odštevanje (slika 18 levo). Če nato prepognemo še drugi vogal, dobimo štiri manjše pravokotnike, iz česar lahko bralec sam dokaže formulo $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (slika 18 desno).

Trije nevporedni pregibi, ki se ne sekajo v isti točki, nam na papirju konstruirajo trikotnik. S štirimi pravokotnimi prepogibi dobimo pravokotnik, če njegovo krajšo stranico prepognemo na daljšo, pa še kvadrat (kar smo že storili pri konstrukciji



Slika 18: Prikaz odštevanja in dokaz formule $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ z označenim vrstnim redom prepogibov.

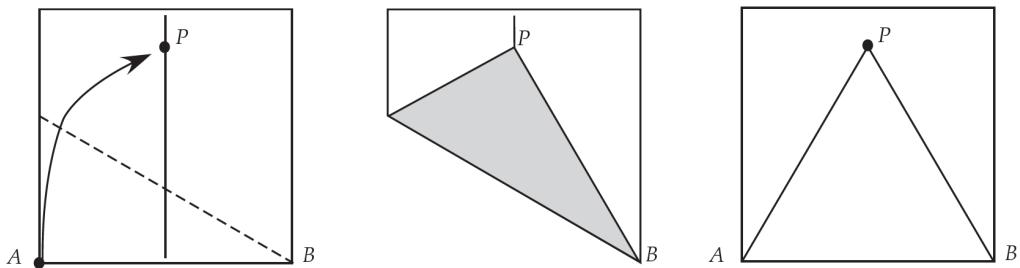
v prejšnjem odstavku). V slednjem lahko z določenimi prepogibi pokažemo, da se diagonali razpolavlja in sta pravokotni druga na drugo, in če oglišča prepognemo v presečišče diagonal, dobimo nov kvadrat s polovično ploščino originalnega.

Konstrukcije poljubnega trikotnika, pravokotnika in kvadrata so zelo enostavne. Malo več premisleka pa je potrebnega za konstrukcije pravilnih n -kotnikov. Johnson se v nadaljevanju knjige posveti še konstrukciji n -kotnikov preko večkratnega zvijanja traku, simetriji, konstrukciji tangent na stožnico (kar bomo obravnavali v poglavju 5), tridimenzionalnim konstrukcijam (npr. kocke) in še

Konstrukcija enakostraničnega trikotnika, šestkotnika in osemkotnika

dej samo teve in potem za kej več referiraj poglavje o n-kotnikih

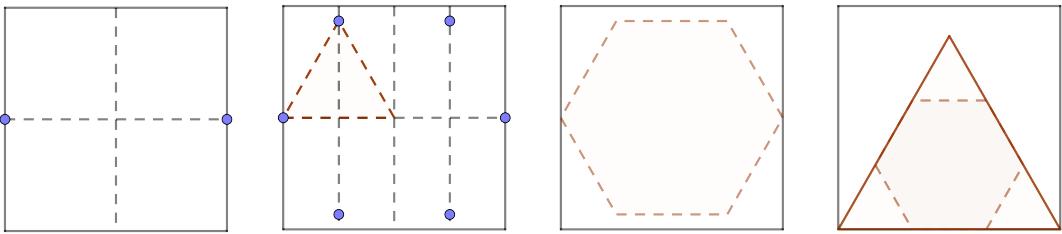
Kvadratni list papirja po višini prepognemo na pol in nanj položimo spodnje desno oglišče A kvadrata, da pregib poteka skozi spodnje levo oglišče B (slika 19). Sliko oglišča A označimo s točko P . Ker je po konstrukciji $|AB| = |PB|$ in je vertikalnen prepogib simetrala spodnje stranice kvadrata, je trikotnik $\triangle ABP$ enakostraničen.



Slika 19: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika. Vzeto in predelano iz [12, str. 9].

Sedaj, ko znamo konstruirati enakostranične trikotnike, lahko konstruiramo tudi pravilni šestkotnik – kvadrat s simetalama stranic razdelimo na štiri dele, nato pa v vsakem od štirih manjših kvadratov po zgornjem postopku konstruiramo enakostranični trikotnik (oz. le eno njegovo stranico) z osnovnico na horizontalni simetrali (prve tri figure na sliki 20).

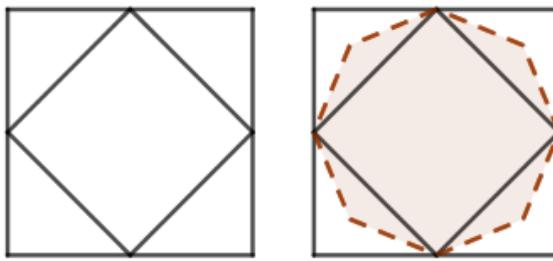
Še lažje pravilni šestkotnik konstruiramo preko enakostraničnega trikotnika, ki mu vrhove prepognemo v središče (slika 20 desno). Ker središče deli višine v raz-



Slika 20: Konstrukcija pravilnega šestkotnika na dva načina.

merju $2 : 1$, pregibi stranice razdelijo na tri skladne dele, sam trikotnik pa na tri manjše enakostranične trikotnike in šestkotnik na sredi.

V roke vzemimo nov kvadraten list papirja in konstruirajmo najprej središča njegovih stranic. S pregibi skozi sosednji središči dobimo manjši kvadrat. Sedaj razpolovimo še vsak kot, ki ga tvorita po ena stranica večjega in ena stranica manjšega kvadrata. Presečišča simetral dveh sosednjih kotov nam data še preostale štiri oglišča pravilnega osemkotnika (slika 21). Bralec naj sam dokaže, da je to res.



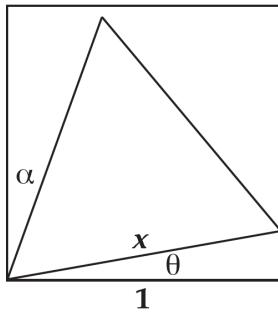
Slika 21: Konstrukcija pravilnega osemkotnika.

Vrnimo se nazaj na enakostranični trikotnik v danem kvadratnemu listu papirja. Ali znamo konstruirati največji tak trikotnik (in kako)? Recimo, da obstaja tak trikotnik. Najprej premislimo, da mora vsaj eno njegovo oglišče ležati v oglišču kvadrata. Če to ne drži, se trikotnik ne dotika ene stranice kvadrata – ker ima tri stranice, kvadrat pa štiri – recimo spodnje. Potem se z ostalimi tremi oglišči dotika preostalih treh stranic kvadrata, sicer to ne bi bil največji trikotnik – lahko bi ga še povečali. Potisnimo sedaj trikotnik navzdol po kvadratu, dokler se najnižje oglišče na eni od pokončnih stranic kvadrata ne dotakne njegove spodnje stranice – kar se zgodi ravno v oglišču kvadrata. Zaradi simetrije brez škode privzemimo, da je to spodnje levo oglišče.

Predpostavimo, da ima kvadrat stranico dolžine 1 in naj bo θ kot med spodnjima stranicama kvadrata in trikotnika, kot kaže slika 22. Naj bo x dolžina stranice trikotnika. Iščemo tak kot θ , da bo ploščina trikotnika največja. Ker je notranji kot trikotnika velik 60° , je kot θ zaradi simetrije omejen z $0 \leq \theta \leq 15^\circ$. Ob upoštevanju $x = 1/\cos \theta$ je njegova ploščina

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

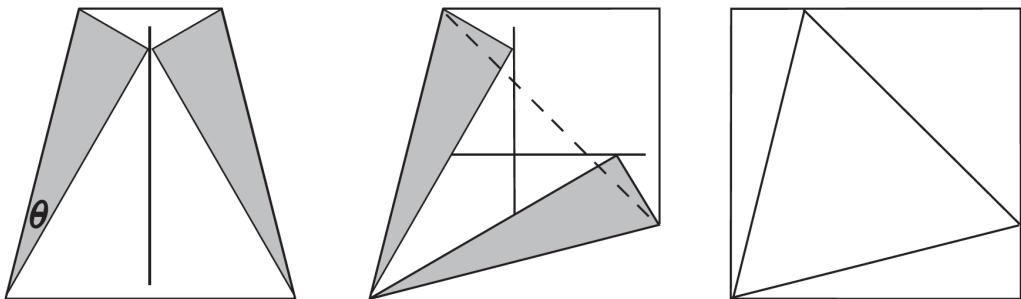
Funckijo bi lahko odvajali in preko iskanja njenega maksimuma izrazili kot, Hull pa v [12, str. 11] predlaga enostavnejšo rešitev. Ker je $\cos x$ na intervalu $[0^\circ, 15^\circ]$ oz.



Slika 22: Lega največjega enakostraničnega trikotnika znotraj kvadrata.

$[0, \pi/12]$ pozitivna in padajoča, je njena obratna vrednost naraščajoča, zato je tudi $1/\cos^2 \theta$ naraščajoča funkcija. Ploščina $P(\theta)$ torej narašča in maksimum doseže pri $\theta = 15^\circ$.

Trikotnik je simetričen glede na diagonalo kvadrata. Na sliki 23 (levo) je prikazana konstrukcija kota 15° – spodnje belo območje enakostraničen trikotnik in vsak od pregibov je simetrala kota 30° . Če opravimo taka dva pregiba na sosednjih stranicah, kot kaže slika 23 na sredi, tako dobimo iskani največji enakostranični trikotnik v danem kvadratu.



Slika 23: Konstrukcija največjega enakostraničnega trikotnika znotraj kvadrata.

S razpolavljanjem ali trisekcijo kotov ob središču kvadrata ali trikotnika – koliko ostalih n-kotnikov lahko konstruiramo? Če je tega preveč, dej tudi to v novo poglavje ... Začneš s tem, potem pa greš na uni izrek, za koliko oglišč lahko konstruiraš z evklidskim orodjem in pol še koliko z origamijem.

3.2 Hagovi izreki za prepogibanje kvadrata

S prepogibanjem kvadratnega lista papirja se je veliko ukvarjal Kazuo Haga, sicer japonski profesor biologije. V svojem delu *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding* [8] je tako med drugim formuliral tri izreke, ki jih poznamo pod imenom *Hagovi izreki*. Pri vsakem od njih gre za konstrukcijo specifičnega pregiba, ki povzroči delitev stranic kvadrata v različnih razmerjih. Vsak izrek posebej bomo najprej formulirali, si slikovno ogledali konstrukcijo in ga dokazali, nato pa si pogledali še nekaj dodatnih lastnosti, ki sledijo iz njega.

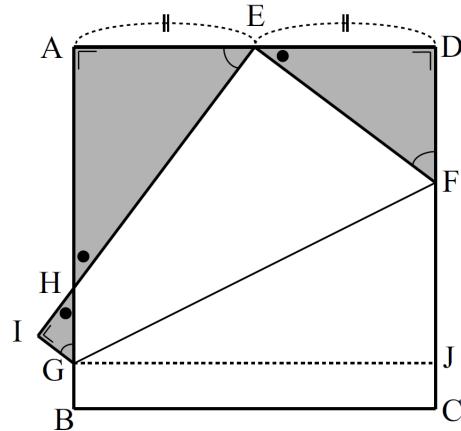
Da si olajšamo računanje, predpostavimo, da ima kvadrat, ki predstavlja naš list papirja, stranico dolžine 1. Njegova oglišča označimo s črkami A, B, C in D ,

začenši v zgornjem desnem oglišču in sledičimi v pozitivni smeri, torej nasprotni smeri urinega kazalca.

3.2.1 Prvi Hagov izrek

Izrek 3.1 (Prvi Hagov izrek). *Zgornjo stranico AD kvadrata $ABCD$ razpolovimo v točki E in s pregibom nanjo položimo oglišče C . S tem na levi in desni stranici kvadrata dobimo tri točke, ki jih označimo z F, G in H (slika 24). Za te točke velja:*

- *točka F deli desno stranico v razmeru $3 : 5$,*
- *točka H deli levo stranico v razmerju $2 : 1$,*
- *točka H deli spodnjo stranico v razmerju $1 : 5$,*
- *točke G deli levo stranico v razmerju $7 : 1$.*



Slika 24: Konstrukcija pregiba iz prvega Hagovega izreka. Vzeto iz [8, str. 4].

Dokaz. Kot kaže slika 24, označimo še točki I in J . Najprej lahko opazimo, da pregib iz izreka povzroči nastanek treh podobnih pravokotnih trikotnikov, ki so na sliki 24 pobarvani sivo. Za vsakega od njih lahko določimo dolžine njegovih stranic.

Začnimo s trikotnikom $\triangle DEF$. Ker je E razpolovišče stranice AD , je $|DE| = 1/2$. Če drugo kateto DF označimo z a , je hipotenuza EF dolga $1 - a$, saj $|DF| + |EF| = |DF| + |FC| = 1$ po konstrukciji. Iz Pitagorovega izreka nato izračunamo $a = 3/8$. Torej točka F res deli stranico CD v razmerju $3 : 5$.

Iz razmerja podobnih trikotnikov $\triangle DEF$ in $\triangle AHE$ dobimo

$$\frac{|AH|}{|AE|} = \frac{|DE|}{|DF|}, \quad \text{torej} \quad |AH| = \frac{|AE| \cdot |DE|}{|DF|} = \frac{1/2 \cdot 1/2}{3/8} = \frac{2}{3}.$$

Točka H res deli stranico AB v razmerju $2 : 1$. Drugače povedano – s prvim Hagovim izrekom znamo poljubno daljico razdeliti na tri skladne dele.

Sedaj lahko izračunamo dolžino hipotenuze EH trikotnika $\triangle AHE$. Iz Pitagorovega izreka sledi $|EH| = 5/6$ (in posledično iz $|EI| = 1$ še $|HI| = 1/6$), torej točka H res deli spodnjo stranico v razmerju $1 : 5$.

Za izračun dolžine doljice BG , ki je po konstrukciji enaka dolžini katete GI , si spet pomagamo z razmerji podobnih trikotnikov; tokrat vzamemo trikotnika $\triangle IHG$ in $\triangle AHE$. Iz razmerja

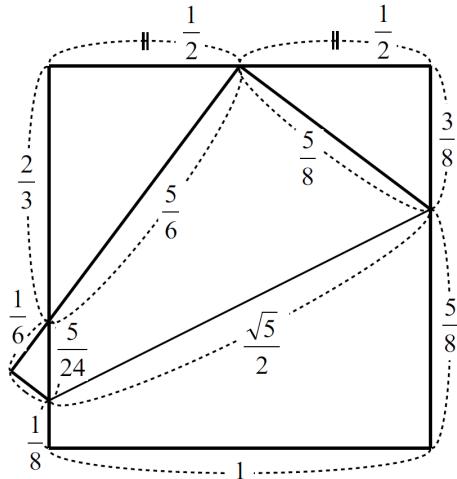
$$\frac{|GI|}{|HI|} = \frac{|AE|}{|AH|} \text{ sledi } |BG| = |GI| = \frac{|AE| \cdot |HI|}{|AH|} = \frac{1/2 \cdot 1/6}{2/3} = \frac{1}{8},$$

torej točka G res deli stanico AB v razmerju $7 : 1$. \square

Za vajo lahko izračunamo še preostale dolžine daljic:

$$\begin{aligned} |GH| &= |AB| - |AH| - |BG| = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}, \\ |CJ| &= |BG| = \frac{1}{8}, \\ |FJ| &= |CD| - |DF| - |CJ| = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ |FG| &= \sqrt{|GJ|^2 + |FJ|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

S tem so znane vse dolžine daljic, na katere pregib iz prvega Hagovega izreka razdeli stranice enotskega kvadrata. Na sliki 25 je tako povzetek naših ugotovitev.



Slika 25: Dolžine daljic po prvem Hagovem izreku. Vzeto iz [8, str. 7].

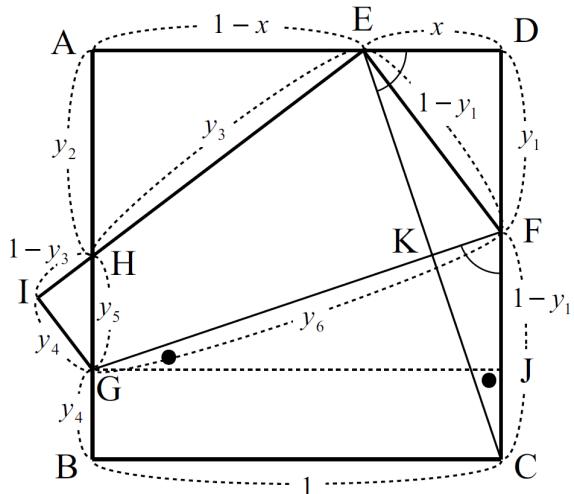
Izrek lahko tudi poslošimo, če za točko E ne vzamemo razpolovišča, temveč poljubno točko na doljici AD . Naj bo $x = |ED|$. Nastale točke označimo kot prej, dolžine nastalih daljic pa z y_1 do y_6 , kot kaže slika 26.

Za vsak $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ poiščimo sedaj vrednost y_i v odvisnosti od x . Kot prej najprej opazimo, da imamo zopet tri podobne pravokotne trikotnike. Iz Pitagorovega izreka za pravokotni trikotnik $\triangle EDF$ sledi

$$y_1 = (1 - x^2)/2,$$

iz razmerja podobnih pravokotnih trikotnikov $\triangle EDF$ in $\triangle HAE$ pa izračunamo

$$y_2 = \frac{x(1-x)}{y_1} = \frac{2x}{1+x} \text{ in } y_3 = \frac{(1-y_1)(1-x)}{y_1} = \frac{1+x^2}{1+x}.$$



Slika 26: Oznake dolžin iz prvega Hagovega izreka v splošnem. Vzeto iz [8, str. 9].

Pregib FG je po konstrukciji simetrala daljice CE , torej pravokotna nanjo, iz česar sledi, da sta trikotnika $\triangle CKF$ in $\triangle CDE$ podobna in kota $\angle DEC$ in $\angle KFC$ skladna. Zato sta skladna tudi trikotnika $\triangle CDE$ in $\triangle GJF$, torej $|FJ| = x$. Posledično je

$$y_4 = |CJ| = 1 - (y_1 + x) = \frac{(1-x)^2}{2} \quad \text{in} \quad y_5 = 1 - y_2 - y_4 = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(1+x)}.$$

Na koncu še s ponovno uporabo Pitagorovega izreka izračunamo

$$y_6 = \sqrt{|GJ|^2 + |FJ|^2} = \sqrt{1+x^2}.$$

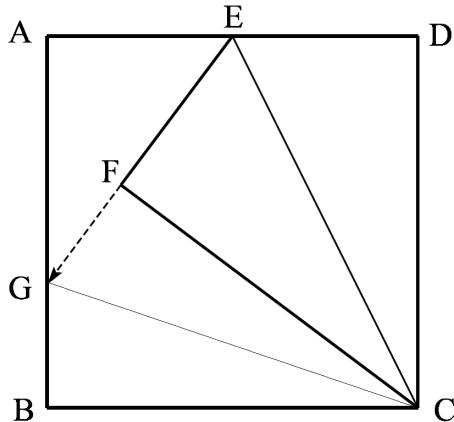
Splošne vrednosti dolžin y_i mogoče niso najlepše, vendar pri marsikateri izbiri števila $x \in (0, 1)$ dobimo lepe številke. Najbolj so zanimiva recipročna števila naravnih števil. Vemo že, da pri izbiri $x = 1/2$ lahko dobimo števila $1/3, 1/6, 1/8$, pri izbiri $x = 1/4$ in $x = 3/4$ dobimo še $2/5$ (in iz tega z razpolovitvijo $1/5$) in $1/7$. Računanje prepuščamo bralcu, se pa na tej točki lahko vprašamo, ali za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja primeren x , da lahko preko neke dolžine y_i ali $1 - y_i$ in preko postopkov za konstrukcijo že znanih razmerij konstruiramo dolžino $1/n$. Odgovor je pritrdilen, enostaven razmislek pa sledi v razdelku 3.3.

3.2.2 Drugi Hagov izrek

Izrek 3.2 (Drugi Hagov izrek). *Zgornjo stranico AD kvadrata $ABCD$ razpolovimo v točki E in opravimo pregib skozi točko E ter oglišče C . Točka D se tako preslika v točko F (slika 27). Če stranico EF podaljšamo do leve stranice kvadrata, jo presečišče G razdeli v razmerju $2 : 1$.*

Dokaz. Opazimo lahko, da sta trikotnika $\triangle BCG$ in $\triangle FCG$ skladna, saj imata skladni daljšo kateto in hipotenuzo ter pravi kot nasproti hipotenuze. Označimo $x = |GB| = |GF|$. Zapišimo Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik $\triangle AGE$:

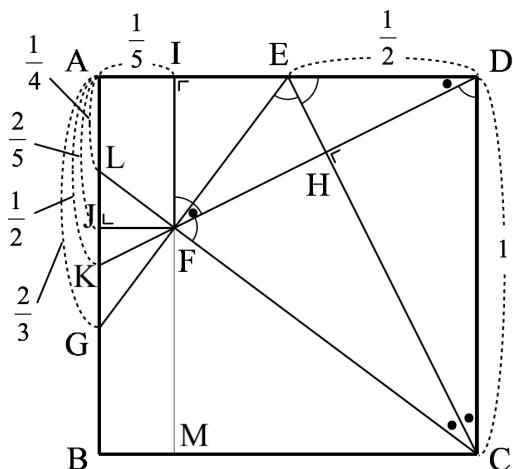
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{in izračunamo } x = \frac{1}{3},$$



Slika 27: Konstrukcija pregiba iz drugega Hagovega izreka. Vzeto iz [8, str. 12].

torej točka G res deli stranico AB v razmerju $2 : 1$. \square

S tem smo zopet dobili način razdelitve doljice na tri enake dele, a tu zanimivih razmerij še ni konec. Poglejmo si še, v kakšen razmerju nam stranice deli točka F in točke, ki jih dobimo s podaljšanjem daljic FD in FC do leve stranice. Označimo nove točke H, I, J, K in M , kot kaže slika 28.



Slika 28: Dolžine daljic po drugem Hagovem izreku. Vzeto in preurejeno iz [8, str. 15].

Po konstrukciji pregiba velja $FD \perp CE$, iz česar dobimo podobne pravokotne trikotnike $\triangle CDE$, $\triangle CFE$, $\triangle DAK$, $\triangle DHE$, $\triangle FHE$, $\triangle DIF$. Prvi trije od našteteih so celo skladni, prav tako je skladen tudi sledeči par. Le trikotnik $\triangle DIF$ nima

skladnega para. Iz sledečih razmerij izračunamo

$$\begin{aligned}|DH| &= \frac{|DE| \cdot |CD|}{|CE|} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{torej } |DF| = 2|FH| = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\|DI| &= \frac{|DF| \cdot |CD|}{|CE|} = \frac{4}{5}, \quad \text{torej } |AI| = \frac{1}{5}, \\|FI| &= \frac{|DI| \cdot |DE|}{|CD|} = \frac{2}{5} \quad \text{in} \\|AK| &= |DE| = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

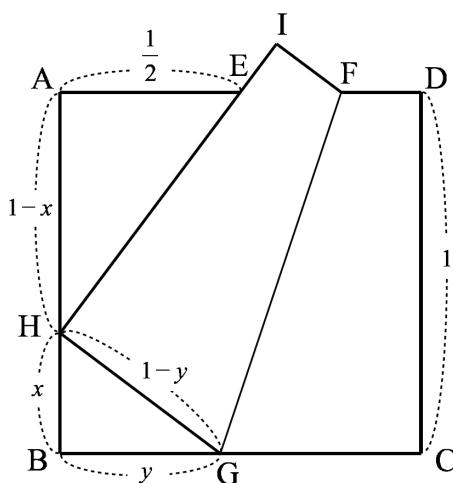
Iz podobnih trikotnikov $\triangle BCL$ in $\triangle MCF$ sledi še

$$|BL| = \frac{|BC| \cdot |FM|}{|CM|} = \frac{3}{4}, \text{ tojej } |AL| = |AB| - |BL| = \frac{1}{4}.$$

Torej nam drugi Hagov izrek poleg konstrukcije števil $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ poda tudi direktno konstrukcijo števil $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ in $\frac{4}{5}$.

3.2.3 Tretji Hagov izrek

Izrek 3.3 (Tretji Hagov izrek). *Zgornjo stranico AD kvadrata $ABCD$ razpolovimo v točki E in opravimo pregib, ki točko E položi na desno stranico in hkrati oglišče C na levo stranico (slika 29). Njena slika H levo stranico deli v razmerju $2 : 1$.*



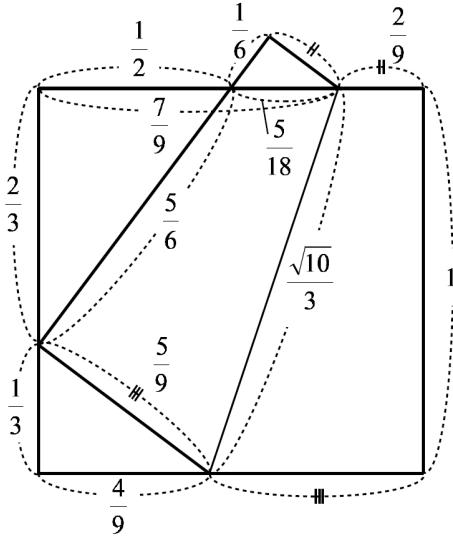
Slika 29: Konstrukcija pregiba iz tretjega Hagovega izreka. Vzeto iz [8, str. 18].

Dokaz. Označimo še točke E, F, G , in I ter uvedimo $x = |BH|$ in $y = |BG|$, kot kaže slika 29. Zaradi prepogiba je $|GH| = |CG| = 1 - y$. Iz Pitagorovega izreka za pravokotni trikotnik $\triangle BGH$ ter razmerja za podobna trikotnika $\triangle BGH$ in $\triangle AHE$ dobimo sistem enačb

$$x^2 + y^2 = (1-y)^2 \quad \text{in} \quad \frac{1/2}{1-x} = \frac{x}{y},$$

iz katerih izračunamo $x = \frac{1}{3}$ in $y = \frac{4}{9}$. Torej točka H res deli stranico AB v razmerju $2 : 1$. \square

Kot pri prejšnjih dveh izrekih bi lahko poračunali še preostale dolžine daljic. To za vajo prepuščamo bralcu, ki se lahko o svojih rezultatih prepriča s sliko 30.



Slika 30: Dolžine daljic po tretjem Hagovem izreku. Vzeto iz [8, str. 19].

Pri vseh treh Hagovih izrekih gre torej za prepogib, ki ali gre skozi središče zgornejne stranice AD ali stranico CD kvadrata $ABCD$ položi nanj. V vsakem primeru nam konstrukcija poda točko na levi stranici AB , ki jo deli v razmerju $2 : 1$, torej sedaj zmoremo (na več načinov) poljubno daljico razdeliti na tri skladne dele. Če popustimo pogoj, da uporabljamo središče stranice AD , lahko z izbiro poljubne točke na tej stranici kvadrata izreke posplošimo in dobimo več zanimivih razmerij, kot se izkaže, celo razmerje $n : 1$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$.

Avtor Haga je svoje izreke preizkusil tudi na *srebrnih pravokotnikih*⁶ in tako prišel do novih načinov razdelitev na 9, 14, 16 in še več različnih delov. Tu se s tem ne bomo ukvarjali, zato naj si bralec, ki ga zanima več, to pogleda v [8, str. 21–32].

3.3 Razdelitev daljice na n skladnih delov

Stranico kvadrata želimo razdeliti na n enakih delov, kjer je $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Za $n = 2^t$, kjer je $t \in \mathbb{N}_0$, je to čisto enostavno, saj samo prepolavljam razdalje med pregibi, dokler ne dosežemo cilja. Če je n sod, vendar ni potenca 2, torej $n = 2^t(2m + 1)$, kjer sta $t, m \in \mathbb{N}$, stranico najprej razdelimo na 2^t delov, nato pa moramo vsakega izmed njih razdeliti na $2m + 1$ (liho število) delov. Izziv tega problema je torej v razdelitvi daljice na liho število delov. Ko bomo zo zmogli, jo bomo znali razdeliti na n delov za vsak $n \in \mathbb{N}$.

V prejšnjem razdelku so nam Hagi izreki podali razdelitev stranice kvadrata na tri, pet, sedem in devet delov. Vendar iščemo metodo, ki nam stranico razdeli na n delov za splošen lih $n \in \mathbb{N}$. Spomnimo se, da smo en tak postopek že spoznali

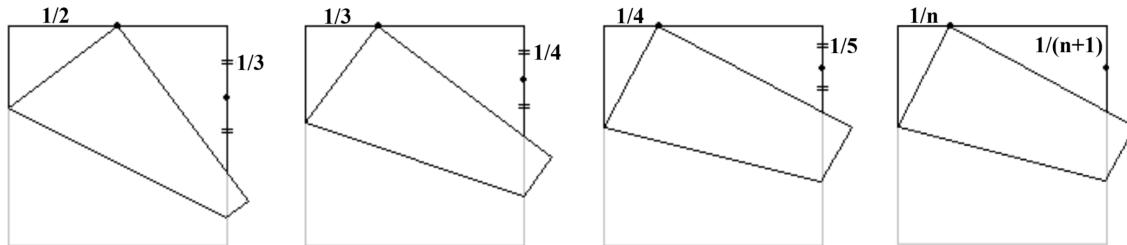
⁶To so pravokotniki, ki imajo stranice v razmerju $1 : \sqrt{2}$. Lastnost tega razmerja je, da če tak pravokotnik prepoloviš po daljši stranici, dobiš nov, za pol manjši srebrni pravokotnik. Primer takega pravokotnika je kar A4 list papirja – prepričaš se lahko tako, da krajo stranico prepognes na daljšo, da dobiš diagonalo kvadrata, in preveriš, da je ta pregib enako dolg kot daljša stranica. To je enak princip kot pri zlatih pravokotnikih, kjer je razmerje stranic v zlatem rezu.

– v dokazu izreka 2.19 smo za poljuben $a \in \mathbb{R}$ znali konstruirati razdaljo $1/a$, kar bi lahko uporabili za razdelitev neke doljice na a enakih delov – konstruirano razdaljo $1/a$ bi a -krat prenesli naprej. Načinov reševanja tega problema pa se je skozi zadnja desetletja oblikovalo še veliko več; tu bomo spoznali še dve metodi.

Metoda po posplošenem prvem Hagovem izreku

Spomnimo se prvega Hagovega izreka, kjer nam prepogib oglišča B na središče doljice AD v točki H na doljici AB povzroči njen razdelitev v razmerju $2 : 1$. Nato smo izrek posplošili in namesto središča zgornje stranice izbrali poljubno točko, ki je za x odmaknjena od oglišča D (slika 26). Pri tem smo med drugim izračunali razdaljo $y_2 = |HA| = 2x/(1+x)$.

Razveseli nas, da pri $x = 1/n$ dobimo ravno $y_2 = 2/(n+1)$, kar je dvakratnik števila $1/(n+1)$. Če torej znamo zgornjo stranico razdeliti v razmerju $(n-1) : 1$, nam središče doljice HA levo stranico razdeliti v razmerju $n : 1$. Na sliki 31 je prikaz za $n = 2, 3, 4$ in splošen n (pri tem se sicer na zgornjo stranico prepogne spodnje levo oglišče, zato je to zrcalna različica slike, kot smo je vajeni). Po indukciji (prvi Hagov izrek je baza indukcije pri $n = 2$) je to še ena metoda za razdelitev doljice na poljubno število skladnih delov preko prepogibanja kvadratnega lista papirja.



Slika 31: Konstrukcije razmerij po posplošenem prvem Hagovem izreku.

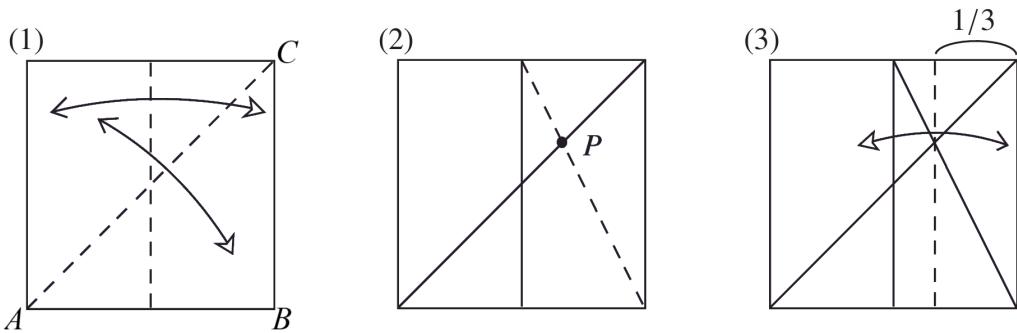
Metoda križajočih se diagonal

Metoda nima uradnega prevoda niti uradnega imena, jo pa tako imenuje Robert J. Lang v svojem članku [16]. Njena konstrukcija je prikazana na sliki 32. Najprej kvadrat dvakrat prepognemo na pol – enkrat po diagonali skozi oglišči A in C in drugič po vertikali. Nato prepognemo po diagonali (skozi oglišče B) še desni pokončen pravokotnik. Presečišče obeh diagonal označimo s točko P in naredimo skoznjo prepogib, ki je pravokoten na horizontalno stranico kvadrata.

Trditev 3.4 (Metoda križajočih se diagonal za $n = 3$). *Zadnji pregib iz zgornjega opisa konstrukcije razdeli horizontalno stranico kvadrata v razmerju $2 : 1$.*

Dokaz. Dokazujemo lahko na več načinov:

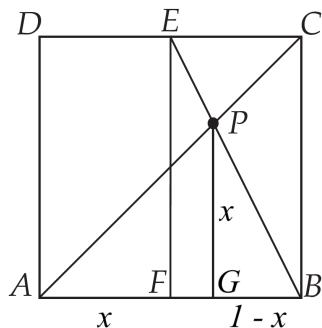
1. *Analitičen pristop:* Kvadrat postavimo v evklidsko ravnino tako, da leži oglišče A v koordinatnem izhodišču in oglišče B v točki $(1, 0)$. Obe diagonali izrazimo z enačbama premic. Glavna diagonala ima enačbo $y = x$, diagonala pravokotnika pa $y = -2x + 2$. Točka P je njuno presečišče in ima tako koordinati $(2/3, 2/3)$.



Slika 32: Konstrukcija po metodi križajočih se diagonal za $n = 3$. Vzeto in preurejeno iz [12, str. 37].

2. *Preko podobnih trikotnikov:* Z opisanimi prepogibi v tem kvadratu konstruiramo več trikotnikov. Njihova oglišča označimo tako, kot kaže slika 33. Iz podobnosti trikotnikov $\triangle AGP$ in $\triangle ABC$ sledi, da je trikotnik $\triangle AGP$ enakrak. Naj bo dolžina njegovih krakov x . Potem je $|AG| = |GP| = x$ in $|GB| = 1 - x$. Iz podobnosti trikotnikov $\triangle EFB$ in $\triangle PGB$ sledi

$$\begin{aligned} \frac{|EF|}{|FB|} &= \frac{|PG|}{|GB|}, \\ \frac{1}{2} &= \frac{x}{1-x}, \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



Slika 33: Dokaz metode križajočih se diagonal za $n = 3$. Vzeto in preurejeno iz [12, str. 38].

□

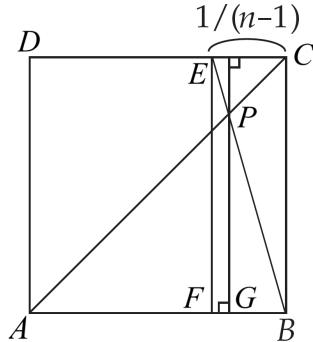
Po konstrukciji pregiba, ki zgornjo stranico kvadrata razdeli v razmerju $2 : 1$, levi pravokotnik (s stranico AG) po vertikali prepognemo še na pol in tako stranico kvadrata razdelimo na tri enake dele. Preidimo sedaj iz $n = 3$ na višje število delov.

Razdelitev stranice kvadrata na štiri dele je že znana – kvadrat v vertikalni smeri dvakrat prepognemo na pol.

Stranico razdelimo na pet delov na podoben način kot na tri. Naredimo enak pregib po glavni diagonali, nato pa zgornjo stranico razdelimo v razmerju $3 : 1$ (na primer preko razdelitve na štiri dele). S tem smo na desni strani kvadrata dobili pokončen pravokotnik s horizontalno stranico, dolgo četrt stranice kvadrata. Naslednji pregib je, kot prej, diagonala tega pravokotnika (tista skozi oglišče B). Presečišče te in glavne diagonale je točka, ki je od desne stranice oddaljena za $1/5$ (dokaz je analogen tistemu za trditve 3.4, pri čemer je tu $|FB| = 1/4$ in posledično $x = 4/5$). Naredimo vertikalnen pregib skozi točko P in s tem zgornjo stranico kvadrata razdelimo v razmerju $4 : 1$. Na koncu še levi del te stranice razdelimo na štiri dele. S tem smo celotno stranico razdelili na pet skladnih delov.

Zgornji postopek lahko posplošimo na poljuben $n \in \mathbb{N}$. Kot smo videli v konkretnih primerih za $n = 3$ in 5 , smo si pomagali z vnajprejšnjo razdelitvijo stranice na $n - 1$ število enakih delov, kar že znamo storiti. Dokaz naslednje trditve bo tako temeljil na indukciji.

Trditve 3.5 (Metoda križajočih se diagonal za splošen n). *Naj bo $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 1 prepognemo po diagonali AC , potem pa stranico DC s točko E razdelimo v razmerju $(n - 2) : 1$. Naredimo pregib novonastalega pravokotnika skozi točki B in E (slika 34). Presečišče te in glavne diagonale je točka P , ki je od desne stranice kvadrata oddaljena za $1/n$.*



Slika 34: Konstrukcija po metodi križajočih se diagonal za splošen n . Vzeto in preurejeno iz [12, str. 38].

Dokaz. Za $n = 1$ in $n = 2$ ni kaj dokazovati – v prvem primeru pregiba sploh ni, v drugem primeru stranico prepolovimo.

Baza indukcije: Po trditvi 3.4 že vemo, da trditve drži za $n = 3$ (tudi za 5).

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da znamo stranico razdeliti na $n - 1$ enakih delov.

Indukcijski korak: Dokazujemo, da znamo stranico razdeliti na n enakih delov. Po navodilih za konstrukcijo iz trditve konstruiramo točko P in pri tem označimo še točke E, F in G , kot kaže slika 34. Potem je dokaz posplošena različica tistega za trditve 3.4:

1. *Analitičen pristop:* Naj bo oglišče A koordinatno izhodišče in oglišče B točka $(1, 0)$. Premica, ki je nosilka diagonale AC , ima tako enačbo $y = x$, nosilka diagonale CE pa $y = -(n-1)x + (n-1)$. Točka P je njuno presečišče in ima

tako koordinate $((n-1)/n, (n-1)/n)$. Torej je od desne stranice kvadrata res oddaljena za $1/n$.

2. *Preko podobnih trikotnikov:* Trikotnik $\triangle AGP$ je enakokrak in naj bo $|AG| = |GP| = x$. Iz razmerij dolžin stranic podobnih trikotnikov $\triangle EFB$ in $\triangle PGB$ sledi

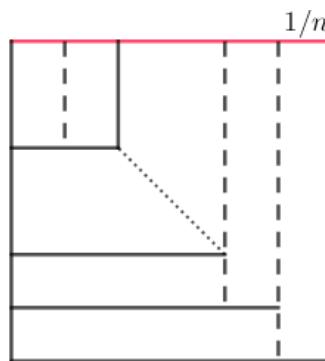
$$\begin{aligned}\frac{|EF|}{|FB|} &= \frac{|PG|}{|GB|}, \\ \frac{1}{\frac{1}{n-1}} &= \frac{x}{1-x}, \\ x &= \frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

Točka P je od desne stranice kvadrata res oddaljena za $1 - x = 1/(n+1)$.

□

Posledica 3.6. *Poljubno daljico znamo razdeliti na n skladnih delov za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vzemimo neko daljico poljubne dolžine. Ker znamo konstruirati pravokotnice skozi točke in prenašati razdalje, lahko konstruiramo kvadrat, katereda zgornja stranica dana daljica. Po zgornji trditvi jo znamo razdeliti v razmerju $(n-1) : 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem moramo njen daljši del razdeliti na $n-1$ skladnih delov. To storimo na enak način kot prej – konstruiramo manjši kvadrat s to novo stranico in ponovimo postopek. Ustavimo se, ko na nekem koraku stranico kvadrata razdelimo v razmerju $1 : 1$ (slika 35). Takrat bo zgornja stranica oz. dana daljica razdeljena na n skladnih delov. □



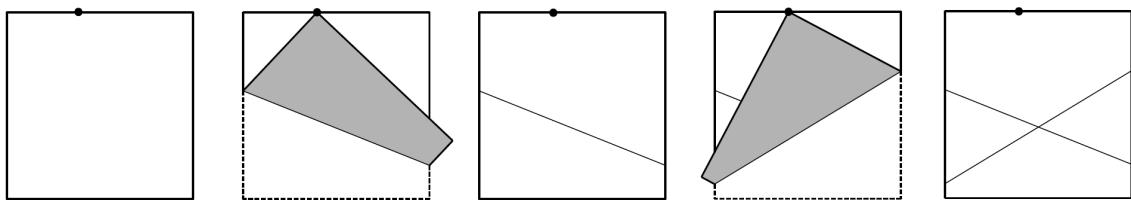
Slika 35: Razdelitev poljubne stranice (označena z rdečo) na poljubno število skladnih delov.

Do zdaj smo imeli metode z razdelitvijo preko prepogibanja kvadratnega lista papirja. Za razdelitev preko pravokotnika je prav tako veliko že razvitih konstrukcij, ki nam njegovo stranico razdelijo na poljubno število skladnih delov. V tej nalogi se s tem ne bomo ukvarjali, bralec pa je povabljen, da si več ogleda v [8, str. 107–134].

3.4 X-pregibi

Poglejmo si še eno zanimivo lastnost, ki izhaja iz prepogibanja kvadrata po principu prvega Hagovega izreka. Njen odkritelj je prav taisti avtor Kazuo Haga (glej [8, str. 33–44]). Potek konstrukcije je sledeč (slika 36):

1. Na zgornji stranici kvadrata izberemo poljubno točko.
2. Levo spodnje oglišče prepognemo na izbrano točko.
3. Papir razgrnemo in opazimo pregib.
4. Nato na izbrano točko prepognemo še desno spodnje oglišče.
5. Papir razgnemo in opazimo nov pregib.

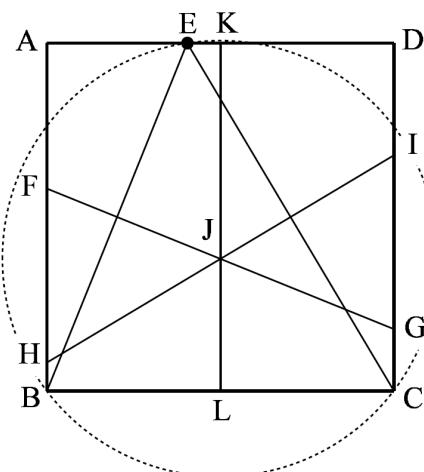


Slika 36: Potek konstrukcije X -pregibov. Vzeto in predelano iz [8, str. 34].

Par pregibov, ki smo ju dobili po opravljenem postopku, po videzu spominja na črko X , zato ju avtor imenuje kar X -pregiba.

Bralec je povabljen, da za več različnih točk na zgornji stranici kvadrata opravi pripadajoče X -pregibe. Nato pa naj kvadrat prepogne še na pol po vertikali. Mogoče ga bo presenetilo, da le-ta vedno poteka skozi presečišče X -pregibov!

V resnici to ni težko dokazati. Uvedimo najprej označke točk, kot kaže slika 37. Pri tem je E poljubna izbrana točka, gledamo pa trikotnik $\triangle BCE$. Po konstrukciji



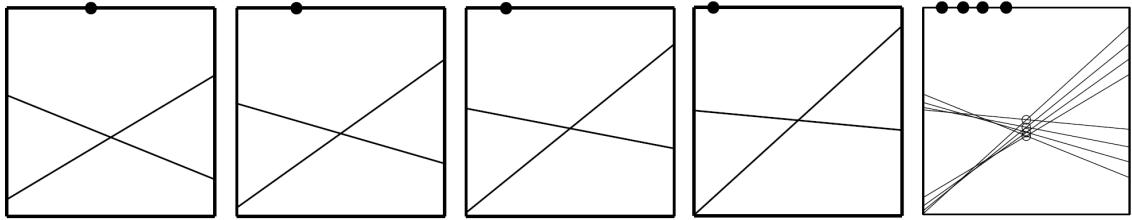
Slika 37: Dokaz, da se X -pregiba in navpična simetrala kvadrata sekajo v isti točki. Vzeto iz [8, str. 38].

je pregib FG po konstrukciji simetrala njegove stranice BE , pregib HI simetrala

stranice CE in pregib KL simetrala stranice BC in hkrati navpična simetrala kvadrata $ABCD$. Vemo, da se simetrale stranic trikotnika sekajo v skupni točki, torej smo s tem še matematično potrdili zgornjo opazko iz konstrukcije.

Naj bo J presečišče simetral stranic trikotnika $\triangle BCE$. Potem je to hkrati tudi središče njegove očrtane krožnice, kot je načrtana na sliki 37. Posledično so seveda razdalje oglišč B, C in E do točke J polmeri krožnice, torej so med seboj skladne.

Bralec naj sedaj vzame vse svoje kvadratne liste papirja, na katere je konstruiral različne X -pregibe, in jih zloži drug na drugega. Opazka, da presečišča pregibov ležijo na isti premici, ni presenetljiva, saj smo ravnokar premislili, da vsako tako presečišče leži n anavpični simetrali kvadrata. Bolj je zanimiva opazka, da nobeno od teh presečišč ne leži v zgornji polovici kvadrata (slika 38).



Slika 38: Štirje primeri X -prepogibov in njihova unija. Vzeto in predelano iz [8, str. 36].

Kvadrat lahko postavimo v koordinatni sistem z ogliščem B v izhodišču in ogliščem A v točki $(0, 1)$. Če naj bo $E = (a, 1)$ poljubna točka na stranici AD . Ohranimo oznake točk s slike 37. Premici, ki predstavljata X -pregiba FG in HI , imata enačbi

$$y_{FG} = -ax + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad y_{HI} = (1-a)x + \frac{a^2}{2}.$$

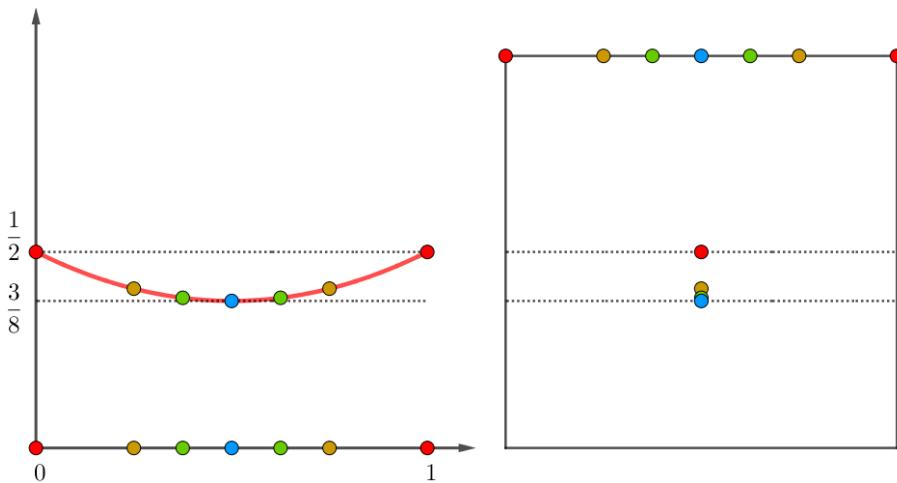
Njuno presečišče je točka J , katere abscisa je $1/2$ po konstrukciji. Vstavimo to v eno izmed enačb premic in dobimo še njeno ordinato, ki je odvisna od a :

$$y_J(a) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8}.$$

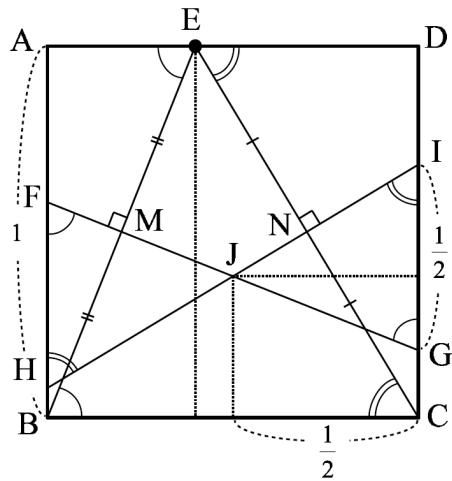
Ker velja $a \in [0, 1]$, je ordinata točke J omejena z $3/8 \leq y_J \leq 1/2$. Na sliki 39 je levo je prikazan graf funkcije $y_J(a)$, na desni pa primerjava ordinat presečišča J glede na izbran a . Najnižja vrednost je dosežena pri $a = 1/2$, torej če za točko E izberemo središče daljice AD , najvišja pa pri $a \in \{0, 1\}$, torej pri izbiri oglišč A oziroma D .

Tu še ni konec – poglejmo si trikotnika $\triangle FGH$ in $\triangle GIJ$ (slika 40). Ker imata enak kot v vrhu J in sta osnovnici vzporedni, sta podobna, ker pa točka J razpolavlja pregiba FG in HI , sta celo skladna, torej $|FH| = |GI|$. Ker sta kraka kotov $\angle HFJ$ in $\angle CBE$ paroma pravokotna, sta kota skladna. Na enak način se prepričamo še o skladnosti kotov $\angle GIJ$ in $\angle BCE$. Torej je trikotnik $\triangle BCE$ podoben trikotnikoma $\triangle FGH$ in $\triangle GIJ$. Ker je v trikotniku $\triangle BCE$ njegova višina enako dolga kot osnovica, to velja tudi za ostala trikotnika. Njuna višina je (ker točka J leži na navpični simetrali kvadrata $ABCD$) enaka $1/2$, torej velja

$$|FH| = |GI| = \frac{1}{2}.$$



Slika 39: Višina presečišča X -pregibov glede na absciso izbrane točke E .



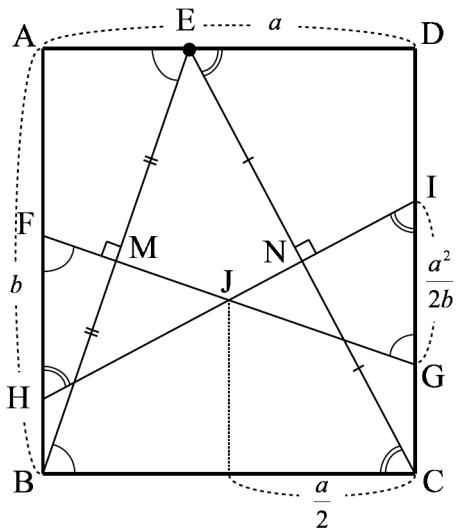
Slika 40: Dokaz, da X -pregiba na vertikalnih stranicah kvadrata odrežeta enaka odseka. Vzeto iz [8, str. 41].

Haga lastnosti X -pregibov raziskuje tudi na pravokotnikih. Izkaže se, da zanje veljajo enake lastnosti razen zadnje – z daljšanjem daljše stranice pravokotnika se namreč (sicer še vedno skladni) daljici FH in GI vedno krajšata. Matematični premislek prepustimo bralcu, skica pa se od kvadratne različice razlikuje le za malo (slika 41).

3.5 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

Z evklidskimi konstrukcijami se je seveda pojavilo konstruktibilnih ugank – vprašanj, ali je specifično število konstruktibilno (in na kakšnen način) ali ne. Zelo znani so trije t. i. "starogrški" problemi, ki so matematike bremenili več kot tisočletje, začenši s časom Evklida (300 pr. Kr.), končno pa sta nanje dokončno odgovorila Niels Henrik Abel (1802–1829) in Evariste Galois (1811–1832) v začetku 19. stoletja. Gre za sledeče tri probleme:

- Podvojitev kocke Imejmo že konstruktibilno kocko. Konstruiraj novo kocko,



Slika 41: *X*-pregiba v pravokotniku. Vzeto iz [8, str. 44].

ki ima dvakrat večji volumen od prve (problem se poenostavi na iskanje konstrukcije števila $\sqrt[3]{2}$).

- **Trisekcija kota** Dan je poljuben konstruktibilen kot. Konstruiraj kot, ki prvega deli na tri skladne dele.
- **Kvadratura kroga** Za dan konstruktibilen krog konstruiraj kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog (problem se poenostavi na konstrukcije števila $\sqrt{\pi}$).

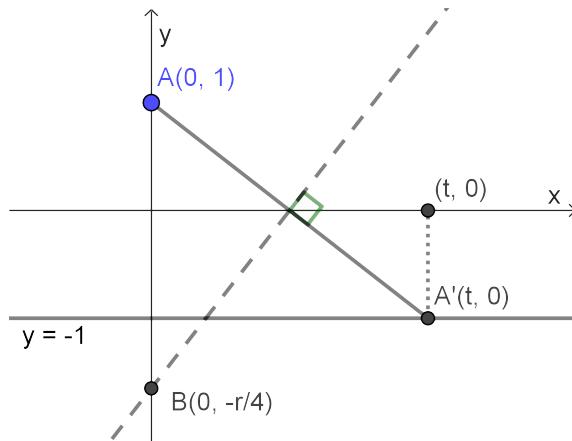
Z znanjem, ki sta ga znanosti posredovala Abel in Galois, se da pokazati, da ti trije problemi z evklidskim orodjem niso rešljivi. V nalogi smo do sedaj že večkrat omenili, da pa obstajajo origami konstrukcije (celo več metod za isti problem!), ki nam konstruirajo kubični koren origami števila ter razdelijo kot na tri skladne dele. Vse metode, ki bodo sedaj naštete, zahtevajo uporabo Belochinega pregiba (operacije O7), kar je logično, saj so vse ostale origami operacije dovolj za vse evklidske konstrukcije. Žal pa tudi tu ostajamo nemočni glede konstrukcije števila $\sqrt{\pi}$, saj je transcendentno.

Konstrukcija števila \sqrt{r}

Preden si pogledamo konstrukcijo kubičnega korena, vzemimo origami število $r \in \mathcal{O}$ in konstruirajmo njegov kvadratni koren (postopek je vzet iz [12, str. 58]).

Imejmo točko $A(0, 1)$ in premico $y = -1$. Na ordinatni osi označimo točko $B(0, -r/4)$ in z operacijo O6 skozenjo naredimo pregib, ki točko A položi na premico $y = -1$. Njena zrcalna slika je $A'(t, 0)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 42).

Pregib po konstrukciji poteka skozi točko B in razpolovišče daljice AA' , torej je njegov koeficient $k_B = \frac{r}{2t}$ (izpeljavo prepuščamo bralcu). Ker je pregib simetrala



Slika 42: Konstrukcija števila \sqrt{r} za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$.

daljice AA' , njeni nosilci pa imata koeficient $k_A = -\frac{2}{t}$, dobimo

$$\begin{aligned} k_B &= -\frac{1}{k_A}, \\ \frac{r}{2t} &= \frac{t}{2}, \\ r &= t^2 \text{ oz. } t = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Na koncu le še prepognemo pravokotnico na abscisno os skozi točko A' in tako dobimo točko $(\sqrt{r}, 0)$. Torej smo konstruirali število \sqrt{r} za poljuben $r \in \mathcal{O}$.

3.5.1 Podvojitev kocke

Po legendi iz grške mitologije je bog Apolon po oraklu prebivalcem svojega rojstnega otoka Delosa sporočil, da mu morajo, če se želijo znebiti smrtonosne kuge, zgraditi nov oltar v obliki kocke, ki je enak prejšnjemu, le da mora biti dvakrat večji po prostornini. Torej je bilo potrebno konstruirati kocko s stranico, ki je za faktor $\sqrt[3]{2}$ večja od stranice originalne kocke. Po drugi legendi pa naj bi Platon izjavil, da je ta problem, ki so ga prejeli na njegovi Akademiji v Atenah, poslan od bogov samih z namenom osramotiti Grke zaradi njihovega zanemarjanja in prezira do matematike (ker z evklidskim orodjem niso znali konstruirati poljubnih dolžin) [22, str. 29].

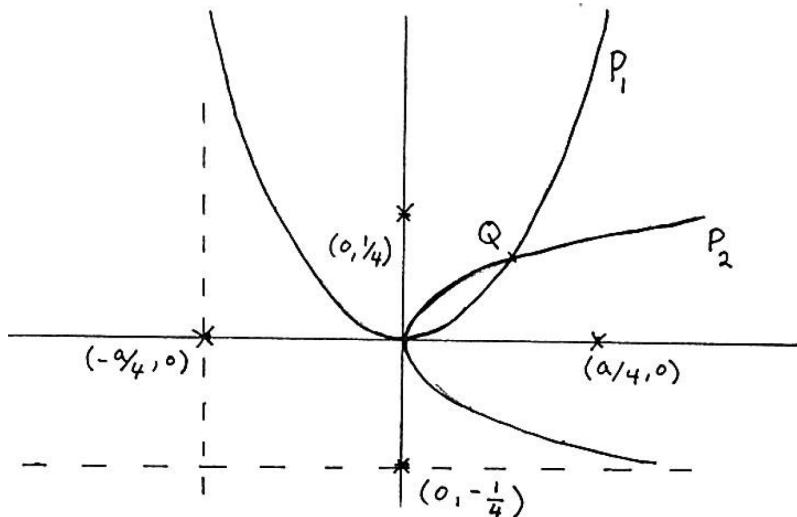
Ne vemo, ali so bili Grki prepričani, da se problema z neoznačenim ravnalom in šestilom ne da rešiti. Vsekakso pa jim je manjkalo algebrsko znanje. Če je stranica kocke dolga 1, je stranica podvojene kocke dolga $\sqrt[3]{2}$ in ker je obseg $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad obsegom \mathbb{Q} (enačba $x^3 - 2 = 0$ nima racionalne rešitve), podvojitev kocke po izreku 2.13 z evkliskim orodjem res ni mogoča [14, str. 78].

Starogrška rešitev preko presečišča dveh parabol

Mogoče Grkom ni uspelo priti do tega premisleka, vendar so problem vseeno uspeli rešiti, čeprav po drugi poti; uporabili so še eno močno matematično orodje – stožnice. Videla v [28] dokaže izrek, ki je identičen izreku 2.23 (ki govori, katera števila so origami števila), le da namesto origamija uporabi stožnice. V bistvu s tem dokaže, da so origami konstrukcije ekvivalentne konstrukcijam s stožnicami!

V istem viru Videla tudi navaja konstrukcijo s parabolami, ki za dano dolžino a podajo dolžino c , za katero velja $c^3 = a$. Njen avtor je Menehmo (prb. 350 pr. Kr.), tutor Aleksandra Velikega. Vzel je sledeči paraboli (slika 43):

- $\mathcal{P}_1 : y = x^2$ z goriščem v točki $(0, \frac{1}{4})$ in premico vodnico $y = -\frac{1}{4}$ in
- $\mathcal{P}_1 : x = \frac{y^2}{a}$ z goriščem v točki $(\frac{a}{4}, 0)$ in premico vodnico $x = -\frac{a}{4}$.



Slika 43: Menehmova konstrukcija števila $\sqrt[3]{2}$ preko parabol. Vzeto iz [28, str. 6].

Presečišči teh dveh parabol dobimo preko enakosti

$$y = x^2 = y^4/a^2,$$

kar nam da enačbo $y(a^2 - y^3) = 0$ z rešitvama $y = 0$ in $y = \sqrt[3]{a^2}$. Presečišči sta torej koordinatno izhodišče in točka $Q = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$. Njena abscisa je naša rešitev.

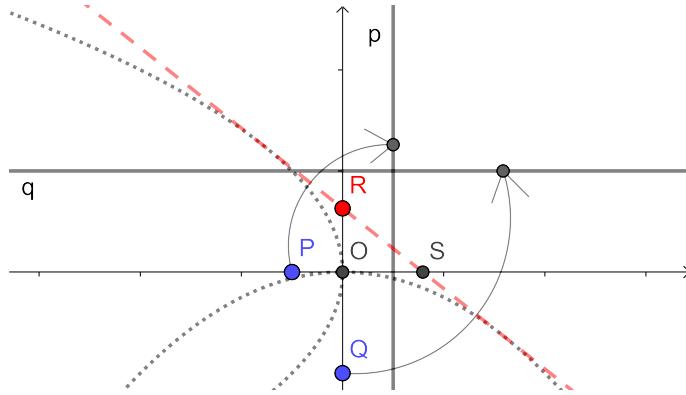
Opomba 3.7. Čeprav je konstrukcija enostavna in logična, je izvedljiva le v teoriji, saj z roko ne znamo natančno risati parabol.

Martinova konstrukcija

George E. Martin v [22, str. 156–157] poda preprosto konstrukcijo števila $\sqrt[3]{k}$ za poljubno origami število k . Tudi on pri tem uporabi dve parabol, vendar pri postopku potrebujemo le njuni gorišči in premici vodnici. Ne bomo iskali njunih presečišč, temveč bomo z Belochinim pregibom konstruirali njuno skupno tangento, ki nam bo podala željeni rezultat.

Naj bo $k \in \mathcal{O}$ poljuben. Vzemimo parabol z goriščema v točkah $P = (-1, 0)$ in $Q = (0, -k)$ ter premici vodnici $p : x = 1$ in $q : y = k$. Parabol imata skupno gorišče v koordinatnem izhodišču in sta pravokotni druga na drugo, torej imata eno samo skupno tangento. Prepognimo točko P na premico p in točko Q na premico q . Pregib seka y -os v točki R (slika 44).

Trditev 3.8. Točka R iz zgornje konstrukcije ima koordinate $(0, \sqrt[3]{k})$.



Slika 44: Martinova konstrukcija števila $\sqrt[3]{k}$.

Dokaz. Označimo z O koordinatno izhodišče in s S presečišče pregiba z x -osjo. Točki R in S sta zaradi take izbire gorišč in premic vodnic ravno središči daljic z enim krajiščem v točkah P in Q ter drugim krajiščem v njunih slikah. Torej velja $PR \perp RS \perp SQ$. Zato so trikotniki $\triangle POR$, $\triangle ROS$ in $\triangle SOQ$ podobni. Iz tega ob upoštevanju $|OP| = 1$ in $|OQ| = k$ dobimo razmerje

$$\frac{|OR|}{|OP|} = \frac{|OS|}{|OR|} = \frac{|OQ|}{|OS|} \implies |OR| = \frac{|OS|}{|OR|} = \frac{k}{|OS|},$$

iz česar sledi

$$|OR|^3 = |OR| \cdot \frac{|OS|}{|OR|} \cdot \frac{k}{|OS|} = k \implies |OR| = \sqrt[3]{k}.$$

□

Opomba 3.9. V razdelku 6.2 bomo spoznali konstrukcijo števila $\sqrt[3]{2}$ preko Belochinega kvadrata, ki je v bistvu poseben primer Martinove konstrukcije.

Messerjeva konstrukcija

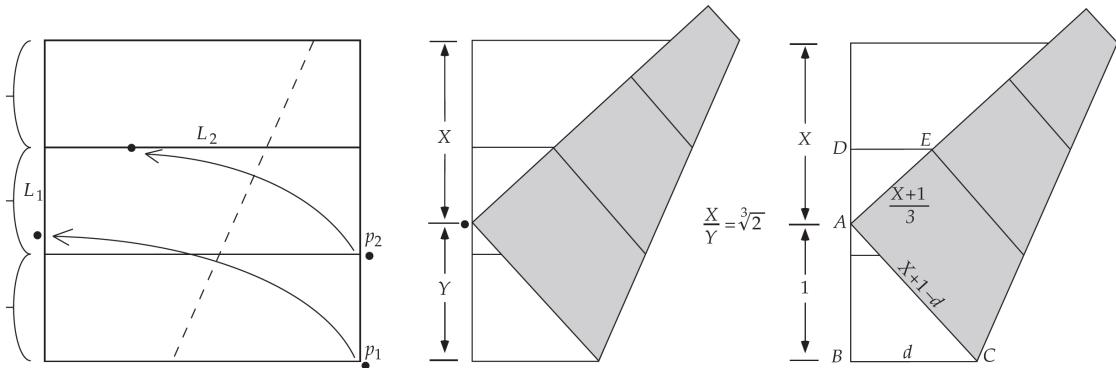
Peter Messer v [23] navaja avtorski postopek, ki sicer ne konstruira števila $\sqrt[3]{2}$ kot razdaljo, temveč kot razmerje: kvadraten list papirja po horizontali razdelimo na tri dele (to sedaj že znamo storiti) ter točki p_1 in p_2 s prepogibom položimo na premici L_1 in L_2 , kot kaže slika 45 (levo).

Trditev 3.10. Slika točke p_1 deli levo stranico kvadrata v razmerju $\sqrt[3]{2}$.

Dokaz. Vpeljimo označke X, Y, A, B, C, D, E ter $d = |BC|$, kot kaže slika 45. Dokazati moramo $X/Y = \sqrt[3]{2}$, za lažje računanje pa brez škode privzemimo $Y = 1$. Stranica kvadrata je tako dolga $X+1$, zato je $|AC| = X+1-d$ in $|AE| = (X+1)/3$.

Opazimo podobna pravokotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ADE$. Iz trikotnika $\triangle ABC$ s pomočjo Pitagorovega izreka izrazimo $d = (X^2 + 2X)/(2X + 2)$, preko leve stranice pa še $|AD| = X - (X+1)/3 = (2X-1)/3$. Iz podobnosti omenjenih trikotnikov izrazimo razmerje katete in hipotenuze z enačbo $|BC|/|AC| = |AD|/|AE|$. Ko vstavimo noter vse vrednosti, odvisne od X , dobimo enačbo

$$\frac{X^2 + 2X}{X^2 + 2X + 2} = \frac{2X-1}{X+1},$$



Slika 45: Messerjeva konstrukcija razmerja $\sqrt[3]{2}$. Vzeto iz [12, str. 67–68].

ki se nam poenostavi prav v $X^3 = 2$. Torej je $X = \sqrt[3]{2}$. \square

Opomba 3.11. Lahko bi rekli, da poleg razmerja v primeru $Y = 1$ Messer konstruira razdaljo $\sqrt[3]{2}$, vendar je razdalja Y odvisna od stranice kvadrata. V tem primeru bi morali vzeti kvadraten list papira s stranico $1 + \sqrt[3]{2}$, za kar bi pač potrebovali že konstrukcijo kubičnega korena števila 2. Da bi pri splošnem kvadratnem listu papirja dobili to dolžino, moramo razdalji X in Y z origamijem še deliti, to pa že znamo.

3.5.2 Trisekcija kota

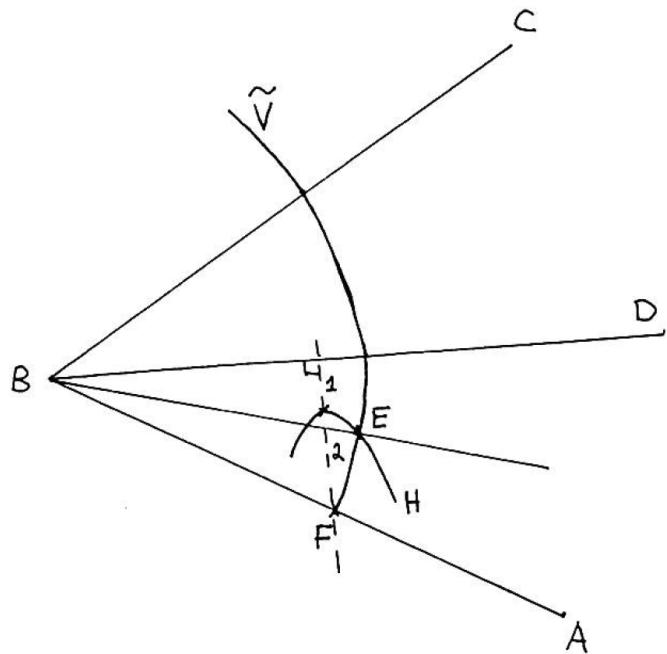
Kot 90° znamo tretjiniti z neoznačenim ravnih in šestih, saj znamo konstruirati kot 30° . Težava je, da ne obstaja konstrukcija, s katero na tri skladne kote razdelimo *poljuben* kot. V [14, str. 77–78] je dokaz o neobstoju konstrukcije za trisekcijo kota 60° . Avtor se pri tem sklicuje na izrek 2.13 in opombo 2.14 iz razdelka 2.3.1. Na kratko – iz zveze $1/2 = \cos 60^\circ = \cos(3 \cdot 20^\circ) = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$, z zamenjavo $x = \cos 20^\circ$ dobimo enačbo $8x^3 - 6x - 1 = 0$, ki nima racionalne rešitve. Razsežnost prostora $\mathbb{Q}(x)$ nad obsegom \mathbb{Q} je tako enaka 3 in števila $\cos 20^\circ$ se ne da narisati le z ravnih in šestih. Zato trisekcija z evklidskim orodjem v splošnem ni mogoča.

Starogrška rešitev preko presečišča krožnice in hiperbole

Grki so tudi ta problem uspeli rešiti s stožnicami. Videla v [28, str. 6–7] opisuje Pappusovo konstrukcijo iz 3. stoletja po Kr., ki je tu ne bomo dokazali. Gre za sledeč postopek: Na kraku BA poljubnega kota $\angle ABC$ izberemo poljubno točko F in zarišemo krožnico s središčem v točki B in polmerom BF . Naj bo BD simetrala kota $\angle ABC$. Naj bo presečišče krožnice in hiperbole z ekscentričnostjo 2, ki ima gorišče v točki F in premico vodnico BD , točka E (slika 46). Potem poltrak BE tretjini kot $\angle ABC$.

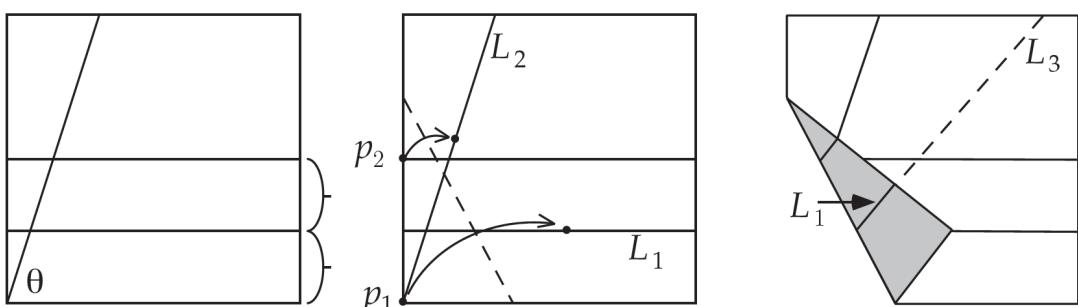
Abejeva metoda

Sledеča metoda ima ime po japonskemu matematiku Hisashiju Abeju, ki jo je odkril v 80-ih letih prejšnjega stoletja. Postopek vključuje Belochin pregib, torej se ga ne da izvesti z evklidskim orodjem, edina pomankljivost metode pa je, da deluje le za ostre kote. Postopek je sledeč:



Slika 46: Pappusova trisekcija kota preko stožnic. Vzeto iz [28, str. 7].

1. Na kvadratnem listu papirja konstruiramo poljuben kot θ , ki ima vrh v spodnjem desnem vogalu in en krak na spodnji stranici. Nato konstruiramo še dva horizontalna in ekvidistančna pregiba na dnu papirja (slika 47 levo).
2. Točko p_1 prepognemo na spodnji horizontalen pregib, označen L_1 , točko p_2 pa na pošeiven krak kota, označen z L_2 (slika 47 na sredi).
3. Preden pregib razgrnemo, podaljšamo pregib L_1 do konca in nov pregib označimo z L_3 (slika 47 desno).
4. Papir razgrnemo in tokrat v spodnji levi kot podaljšamo pregib L_3 .



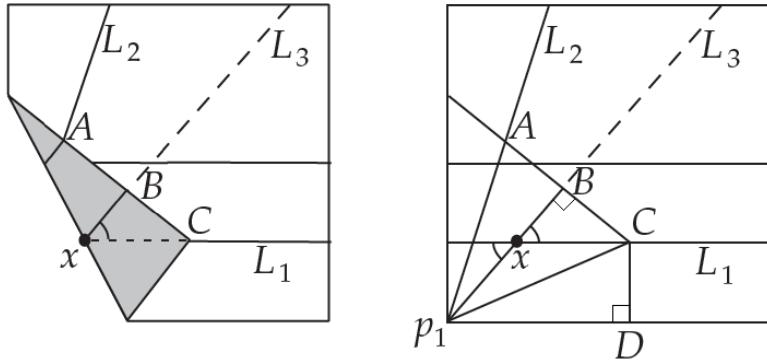
Slika 47: Trisekcija kota po Abejevi metodi. Vzeto iz [12, str. 64].

Opomba 3.12. V 3. koraku opravimo pregib še preden smo razgrnili prvega. To je za nas načeloma prepovedana poteza, vendar bi se dalo L_3 konstruirati tudi po klasični poti z enkratnimi prepogibi – označili bi sliko točke, ki leži hkrati na L_1 in levi stranici kvadrata, ter točko v pregibu iz 2. koraka, ki leži na L_1 in skozinju naredili pregib L_3 – zato zaradi lažje izvedbe brez škode dopustimo tak postopek.

Trditev 3.13. Pregib L_3 poteka skozi točko p_1 . Kot s krakoma L_2 in L_3 ter vrhom v točki p_1 je velik $\theta/3$.

Posledica 3.14. Ko spodnji rob kvadrata prepognemo na pregib L_3 , razdelimo kot θ na tri skladne kote.

Dokaz. Posledica logično sledi, zato dokazujemo le trditev. Označimo z x točko, ki leži na presečišču pregiba L_1 in pregiba iz 2. koraka Abejeve metode. Z A, B , in C označimo še slike točk z leve stranice kvadrata, kot kaže slika 48. Ker je točka



Slika 48: Dokazovanje Abejeve metode. Vzeto in predelano iz [12, str. 65].

C slika točke p_1 in x leži na L_1 , daljica xC leži na L_1 . Po konstrukciji daljica xB leži na L_3 , zato sta kota ob x , ko papir razgrnemo, skladna. Zaradi sovršnosti kotov daljica p_1x leži na L_3 , s čimer je prvi del trditve dokazan.

Na razgrnjenem papirju zarišemo (ali prepognemo) še nekaj daljic (slika 48 desno). Ker velja $|AB| = |BC| = |CD|$ in imata pravokotna trikotnika $\triangle p_1AB$ in $\triangle p_1BC$ skupno še drugo kateto, trikotnika $\triangle p_1BC$ in $\triangle p_1CD$ pa skupno hipotenizo, so vsi trije trikotniki skladni z enakim kotom v točki p_1 , torej nam pregiba skozi daljici p_1B (kar je ravno L_3) in p_1C kot θ razdelijo na tri skladne kote. \square

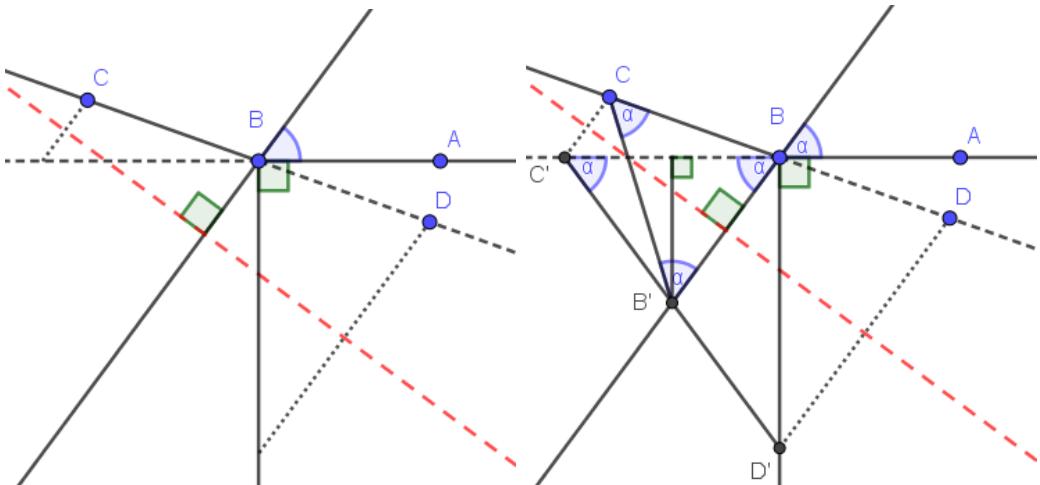
Ker ta postopek deluje le za ostre kote, si poglejmo naslednjo metodo, ki jo lahko uporabljamamo tako za ostre kot tudi tope kote.

Justinova metoda

Francoski matematik Jacques Justin za svojo metodo trisekcije ne zahteva kvadratnega lista papirja, ampak je dovolj kakršenkoli list. Lang v [17, str. 34] takole navaja njegovo kosntrukcijo:

Na sredo narišemo poljuben kot $\angle ABC$ (oster ali top) in njuna kraka podaljšamo skozi vrh B . Skozi vrh tudi konstruiramo poltrak, pravokoten na krat BA . Točko C prezrcalimo čez vrh v točko D ter nato obe točki prepognemo na nosilko kraka BA in pravokotnico, kot kaže slika 49 (levo). Nazadnje na Belochin pregib konstruiramo še pravokotnico skozi točko B .

Trditev 3.15. Kot, ki v točki B oklepata zadnja pravokotnica iz zgornje konstrukcije in krak BA , je tretjina kota $\angle ABC$.



Slika 49: Justinova trisekcija kota (levo) in njen geometrijski dokaz (desno).

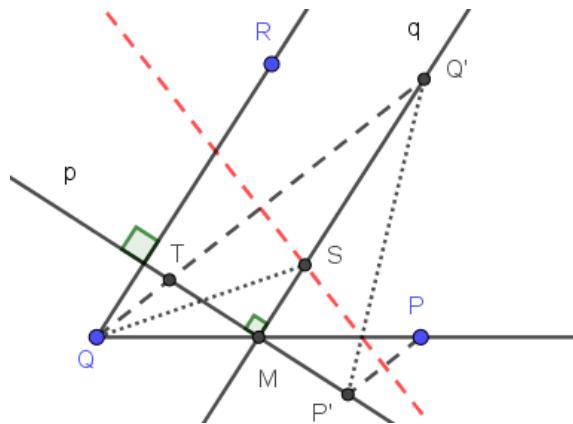
Dokaz. Označimo z α kot iz trditve. Naj bosta točki C' in D' slike točk C in D , točka B' pa presečišče daljice $C'D'$ s pravokotnico iz trditve. Po konstrukciji Belochinega pregiba je daljica $C'D'$ slika daljice CD , torej je točka B' slika točke B . Točka B' je tako središče daljice $C'D'$ in zato je vzporednica k poltraku BD' skozi točko B' simetrala daljice $C'B$. Trikotnik $\triangle C'B'B$ je tako enakokrak in velja $\angle C'BB' = \angle B'C'B = \alpha$.

Ker sta trikotnika $\triangle C'B'B$ in $\triangle CBB'$ zaradi simetričnosti glede Belochin pregib skladna, velja tudi $\angle B'CB = \angle CB'B = \alpha$. Iz vsote notranjih kotov trikotnike $\triangle CB'B$ sledi $\angle C'BC = 180^\circ - 3\alpha$, torej je $\angle ABC = 180^\circ - \angle C'BC = 3\alpha$. \square

Martinovi konstrukciji za trisekcijo ostrega kota

George E. Martin v [22, poglavje 10] navaja še dve metodi za trisekcijo ostrega kota.

Pri prvi vzamemo oster kot $\angle PQR$ in s točko M označimo središče daljice PQ . Skozi M konstruiramo pravokotnico p na QR , nato pa še pravokotnico na p . Opravimo tisti Belochin pregib (od treh možnih), ki seka daljico PM in točko Q položi na premico q (v točko Q'), točko P pa na premico p (v točko P'). S T označimo presečišče daljice QQ' s premico p in s S presečišče pregiba s premico q (slika 50).



Slika 50: Martinov postopek za trisekcijo kota iz [22, str. 154].

Trditev 3.16. Daljici QT in QS tretjinita kot $\angle PQR$.

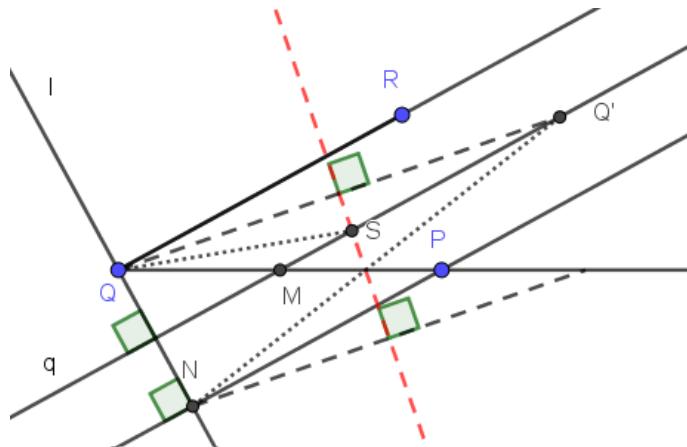
Dokaz. Ker velja $|QM| = |MP|$, $\angle PMP' = \angle TMQ$ in $QT \parallel PP'$, sta trikotnika $\triangle QMT$ in $\triangle PMP'$ skladna in je $|TM| = |MP'|$. Potem sta skladna tudi pravokotna trikotnika $\triangle TMQ'$ in $\triangle P'MQ'$, zato je $\angle MQ'P' = \angle TQ'M = \angle RQQ'$ (zaradi izmeničnih kotov ob vzporednicah QR in q) $= \angle Q'QS$ (ker je trikotnik $\triangle QSQ'$ enakokrak).

Bralec se lahko hitro prepriča, da daljica $Q'P'$ seka pregib ravno v njegovem presečišču z daljico MP (vsi koti ob tem presečišču so zaradi konstrukcija pregiba in sovršnosti skladni). Zato velja še $\angle PQQ' = \angle P'Q'Q$, iz česar sledi

$$\angle MQS = \angle SQT = \angle TQR.$$

□

Druga metoda je prvi zelo podobna. Zopet vzamemo oster kot $\angle PQR$ in s točko M označimo središče daljice PQ . Naj bo l pravokotnica na QR skozi točko Q , točka N nožišče pravokotnice na premico l skozi točko P , s q označimo pa še pravokotnico na premico l skozi točko M . Opravimo tisti Belochin pregib, ki točko Q položi na premico q (v točko Q') in točko N na poltrak QR . Naj bo točka S presečišče pregiba s premico q (slika 51).



Slika 51: Martinov postopek za trisekcijo kota iz [22, str. 158–159].

Trditev 3.17. Daljici QQ' in QS tretjinita kot $\angle PQR$.

Dokaz. Zopet premislimo, da se pregib, poltrak QP in daljica NQ' sekajo v isti točki. Zato je $\angle QQ'N = \angle PQQ'$. Zaradi vzporednosti kraka QR in premice q sta skladna tudi izmenična kota $\angle RQQ'$ in $\angle QQ'S$, z njima pa je zaradi enakokrakosti trikotnika $\triangle QSQ'$ skladen tudi kot $\angle SQQ'$.

Ker velja $|QM| = |MP|$ in $q \parallel NP$, je premica q simetrala daljice QN , torej tudi simetrala kota $\angle QQ'N$. Iz tega sledi

$$\angle MQS = \angle SQQ' = \angle Q'QR.$$

□

4 Konstrukcija pravilnih n -kotnikov

Iz evklidske geometrije vemo, da lahko pravilni n -kotnik narišemo z neoznačenim ravnalom in šestilom natanko tedaj, ko je število n oblike $n = 2^r(2^{2^s} + 1)$, kjer sta r in s nenegativni celi števili, število $2^{2^s} + 1$ pa je praštevilo⁷ [14, str. 78].

Kdaj so n -kotniki konstruktibilni? izrek, dokaz???

⁷Fermat je domneval, da je vsako število oblike $2^{2^s} + 1$ praštevilo. To pa ni res. Že Euler je ugotovil, da je število $2^{2^5} + 1$ sestavljen. Deljivo je s številom 641.

5 Pregibanje tangent na stožnice

Iz didaktičnega vidika zelo zanimivo poglavje nam predstavlja konstrukcije tangent na stožnice s prepogibanjem papirja. Vsebina je tu predstavljena tako, da je bralec najprej povabljen, da vzame list papirja in ga prepogiba po navedenih korakih. Po opažanju, kaj se na papirju pri tem prikaže, preidemo na matematični del, kjer dokažemo, da so prepogibi res tangente na določeno stožnico.

Učitelji matematike so povabljeni, da si pri obravnavi stožnic vzamejo čas in izvedejo spodnje aktivnosti. Dijaki bodo z veliko verjetnostjo presenečeni nad rezultati zgibanja, kar jih lahko bolj motivira za obravnavo geometričnih lastnosti stožnic. Priporočljiva je tudi izvedba ure v računalniški učilnici, kjer lahko vsak dijak z ustreznim programskim orodjem (npr. Geogebra) sam poskusi zgraditi opisano konstrukcijo. S tem lahko znanje o stožnicah le še bolj utrdi.

Z origamijem ne moremo konstruirati gladkih krožnih lokov. Kljub temu pa lahko z upoštevanjem določenih korakov konstruiramo premice, ki so tangentne na neko krivuljo. Več takih tangent nam poda nekakšno lomljenko, če pa bi konstrukcije pregibov ponavljali v nedogled, bi teoretično v limiti res dobili gladko krivuljo.

Definicija 5.1. Naj bo dana družina krivulj s parametrizacijo $F(t, x, y) = 0$, kjer je t njen parameter in F diferenciabilna za vsak t . *Ovojnica* te družine je krivulja, ki je tangentna na vsako krivuljo iz družine v neki točki, unija točk tangentnosti pa je ravno cela ovojnica.

Opomba 5.2. Vsaka krivulja iz družine mora biti diferenciabilna in med krivuljami mora biti gladek prehod ([kako to bolj strokovno napisat?](#)). Vendar to ni zadosten pogoj, da ovojnica te družine družine obstaja – protiprimer je družina krožnic s skupnim središčem in polmerom, ki se zvezno povečuje [29]. Ovojnica je dana kot rešitev enačb

$$F(t, x, y) = 0 \text{ in } \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, y) = 0,$$

kjer je $\partial F / \partial t$ parcialni odvod funkcije F po parametru t ([A to lahko pustim kot dejstvo ali moram raziskati, s kje to pride?](#)).

Opomba 5.3. Ker so pregibi ravni, bodo v našem primeru krivulje v družini kar premice. Te premice so torej ravno tangente na ovojnico te družine.

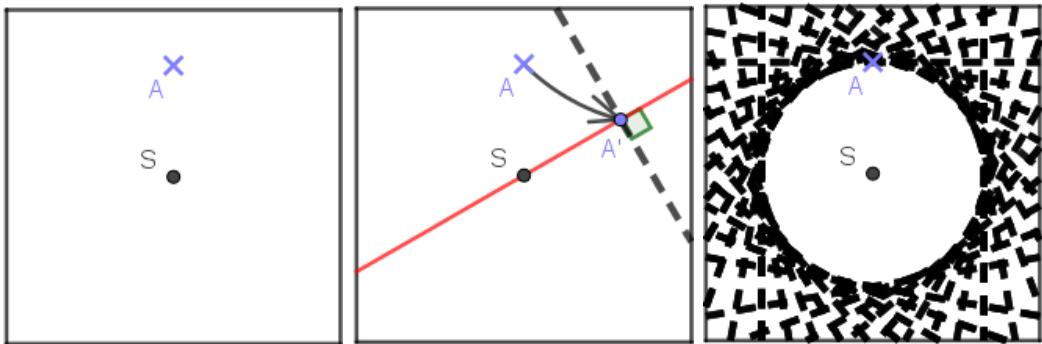
Pa si poglejmo, kako s prepogibi dobimo tangente na vse štiri stožnice.

5.1 Krožnica

Aktivnost: Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini označi točko S . Nato drugje označi še točko A . Skozi točko S prepogni poljubno premico in na njej označi točko A' , da velja $|SA| = |SA'|$. Nato skozi točko A' prepogni pravokotnico na premico SA' . To je iskan pregib. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro premice skozi točko S (gl. sliko 52). Kaj opaziš?

Opomba 5.4. V podpoglavlju ?? smo se naučili prenašati razdalje, zato je zgornja konstrukcija mogoča, zahteva pa še nekaj dodatnih vmesnih pregibov (gl. dokaz trditve 2.11).

Iz konstrukcije pregiba kot pravokotnice na premico SA' skozi točko A' je naslednja trditev očitna in ne potrebuje zapisanega dokaza.



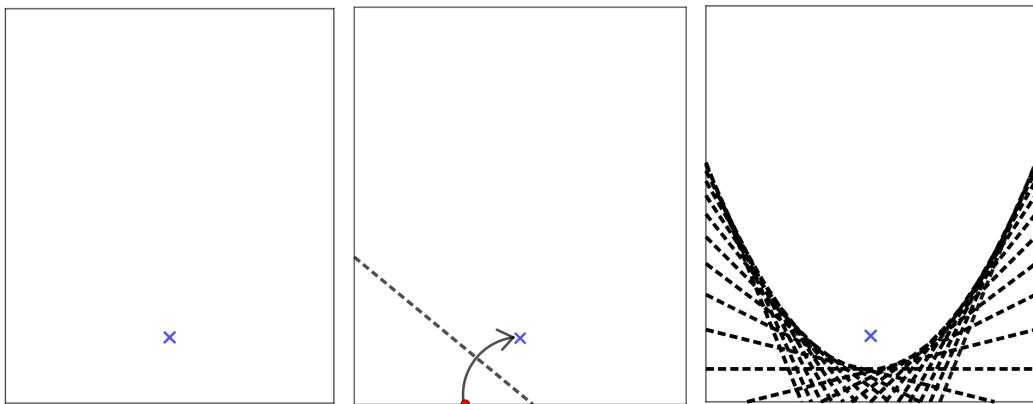
Slika 52: Sukanje izbrane točke okoli središča.

Trditev 5.5. Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na krožnico s središčem v točki S in polmerom SA .

Za različno izbiro premic skozi točko S dobimo različne tangente. S ponavljanjem konstrukcije tangent v neskončnost dobimo družino tangent, katere ovojnica je krožnica s središčem v točki S in polmerom SA .

5.2 Parabola

Aktivnost: Vzemi pravokoten list papirja in svinčnik ter nekje sredi spodnje polovice lista s pisalom označi točko. Nato si izberi točko še na spodnji stranici lista in ga prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na spodnji stranici papirja (gl. sliko 53). Kaj opaziš?



Slika 53: Prepogibanje spodnje stranice papirja na izbrano točko.

Omenjen pregib je origami operacija O3, lahko pa nanjo gledamo tudi kot na operacijo O6. Za le-to smo v poglavju 2 že premislili, da nam pregib, ki poteka skozi dano točko B in točko A položi na premica a , poda tangento na parabolo z goriščem A in premico vodnico a (gl. sliko 5 in premislek nad njo). Tukaj pa take točke B ni, kar pomeni le to, da smo s pregibom konstruirali neko tangentno – pregib je namreč simetrala daljice, ki ima za krajišči obe izbrani točki iz navodila aktivnosti, torej obstaja točka (točka P na sliki 5), ki je enako oddaljena od spodnje stranice lista in prve izbrane točke. Nadaljni premislek, da je to edino presečišče pregiba in parbole, je enak kot prej. Spodnja trditev je tako že dokazana.

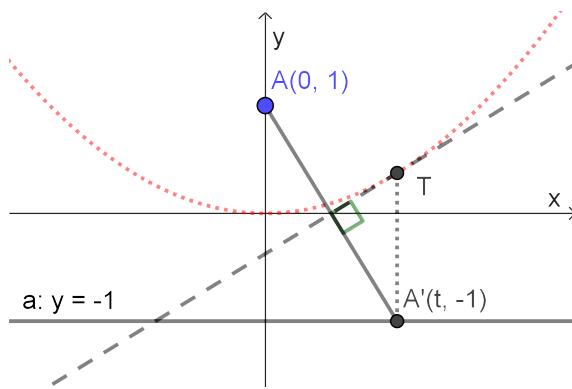
Trditev 5.6. Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na parabolo z goriščem v izbrani točki in premico vodnico, ki jo predstavlja spodnja stranica lista.

Ker je vsak pregib tangenten na isto parabolo, je obris, ki bi nastal po neskončno pregibih, res ta parabola.

To je bil intuitiven premislek. Poglejmo si, kako lahko to dokažemo na bolj matematični način.

Parametrizacija pregibov

Začnimo kar s parametrizacijo družine konstruiranih pregibov. V ta namen v model poljubne točke in spodnje stranice lista vpeljimo nekaj oznak. Naj bo $c \in \mathcal{O}$. Vzemimo točko $A(0, c)$ in premico $a : y = -c$, ki sta origami-konstruktibilni, in naredimo pregib, ki točko A preslika na premico a v točko $A'(t, -c)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 54 v primeru $c = 1$).



Slika 54: Pregib točke $A(0, 1)$ na premico $a : y = -1$ (primer za $c = 1$).

Ker je pregib oz. konstruirana premica simetrala daljice AA' , lahko hitro določimo njeno enačbo. Koeficient nosilke daljice AA' je $k_A = -\frac{2c}{t}$, središče pa $(\frac{t}{2}, 0)$. Tako hitro določimo enačbo pregiba:

$$y = \frac{t}{2c}x - \frac{t^2}{4c}. \quad (5.1)$$

Dobili smo iskanou parametrizacijo družine pregibov z enačbo

$$F(t, x, y) = \frac{t}{2c}x - y - \frac{t^2}{4c} = 0.$$

Za vsak $t \in \mathbb{R}$ torej dobimo drugo tangento na parabolo z goriščem v točki A in premico vodnico a z zgornjo enačbo 5.1. Izrazimo sedaj enačbo ovojnice preko sistema enačb iz opombe pod definicijo 5.1. Iz enačbe $(\partial/\partial t)F(t, x, y) = 0$ dobimo $x/2c - 0 - 2t/4c = 0$ oz. $t = x$. Ko t vstavimo v enačbo $F(t, x, y) = 0$, dobimo

$$y = \frac{x^2}{4c}, \quad (5.2)$$

torej je ovojnica res parabola. Preden gremo na naslednji način dokaza, si poglejmo še vpliv parametra c na parabolo. Razdalja med njenim goriščem in premico vodnico je $2c$ in iz enačbe 5.2 je razvidno, da bo z manjšanjem c parabola vedno ožja.

Drugi dokazi

Njeno enačbo lahko dobimo tudi brez definicije ovojnice. Ker so vse točke na pregibu enako oddaljene od točk A in A' , na pregibu obstaja le ena točka T , za katero velja $d(T, A) = d(T, a)$. Njena abscisa je $x = t$ (točka T leži na pregibu točno nad točko A' , gl. sliko 54) in iz enačbe 5.1, dobimo še ordinato $y = t^2/(4c)$. Ker točka T za vsak $t \in \mathbb{R}$ leži na paraboli, pri menjavi $x = t$ dobimo ravno enačbo 5.2.

Hull v [12, str. 55–56] poda prefijen dokaz preko kvadratne formule. Vemo, da pregib O6 ne obstaja vedno (slika 4 desno). Poglejmo, ali obstajajo v ravnini našega modela kakšne točke, skozi katere ne moremo konstruirati pregiba oz. tangente. Vzemimo našo parametrizacijo družine tangent (enačba 5.1) in jo rešimo za t . Dobljena formula nam pove, za katere vrednosti t pregib poteka skozi točko (x, y) :

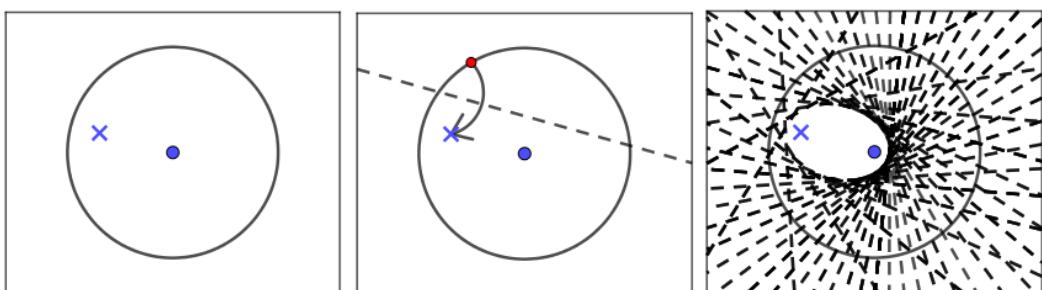
$$\frac{1}{4c}t^2 - \frac{x}{2c}t + y = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{x}{2c} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4c^2} - \frac{y}{c}}}{\frac{1}{2c}}.$$

Enačba ima dve realni rešitvi pri pogoju $x^2/4c^2 - y/c > 0$ oziroma $y < x^2/4c$, kar pomeni, da vsako točko (x, y) , za katero ta pogoj velja, sekata dva pregiba. To so ravno točke pod parabolo $y = x^2/4c$. Za točke na paraboli velja $y = x^2/4c$, iz česar dobimo eno rešitev $t = x$, torej to točko seka natanko en pregib. Nazadnje nam ostane še območje, za katerega velja $y > x^2/4c$, t. j. območje nad parabolo $y = x^2/4c$, kar nam ne poda realnih rešitev za t , torej ga ne seka noben izmed konstruiranih pregibov. Tako je obris, ki ga dobimo v nalogi, res parabola $y = x^2/4c$.

Aktivnosti za naslednji dve podpoglavlji sta enaki kot v tem, le da namesto spodnje stranice lista v izbrano točko prepogibamo krožnico.

5.3 Elipsa

Aktivnost: Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na notranji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 55). Kaj opaziš?



Slika 55: Prepogibanje krožnice na izbrano točko znotraj nje.

Opomba 5.7. Za izris poljubne krožnice tu lahko uporabimo šestilo. Prej smo videli, da znamo lomljeno krožnico prepogniti tudi z origamijem, vendar imamo potem na listu papirja veliko pregibov, ki nam ovirajo pogled na ciljno sliko. Zato je uporaba šestila v ta namen dovoljena predvsem iz praktičnega vidika.

Izgleda, kot da se nam izriše elipsa, ki ima za gorišči središče krožnice in izbrano točko znotraj nje. Spomnimo se, da na elipsi ležijo vse točke, katerih vsota razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi (t. j. dvakratnik velike polosi). V našem primeru je elipsa natančno določena, kar nam pove naslednja trditev [12, str. 60–61].

Trditev 5.8. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na elipso z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo, enako polmeru izbrane krožnice.*

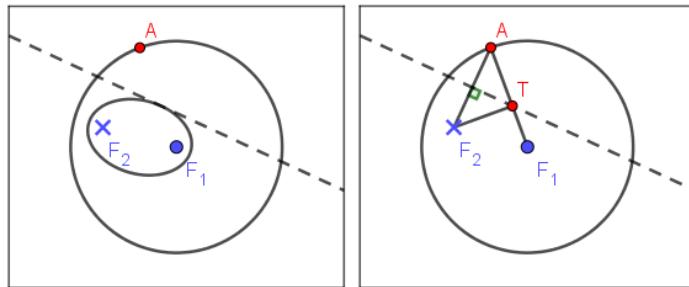
Dokaz. Naj bo točka F_1 središče krožnice s polmerom r in točka F_2 poljubna točka znotraj krožnice. Potem je elipsa, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako r , natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko A (slika 56 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to elipso.

Označimo s T presečišče⁸ pregiba in daljice AF_1 (slika 56 desno). Ker je pregib simetrala daljice AF_2 , velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

$$|TF_1| + |TF_2| = |TF_1| + |TA| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke A . Ker je r velika os elipse, točka T leži na njej.

Pokažimo še, da je pregib tangenten na elipso. Opazimo, da so vsi trije koti z vrhom v točki T , ki imajo za enega od krakov pregiba, skladni. Značilnost tangent na elipso pa je ravno ta, da se žarek, ki ga izstrelimo iz enega gorišča v rob elipse, vedno pod istim kotom odbije v drugo gorišče. Torej je pregib tangenten na dano



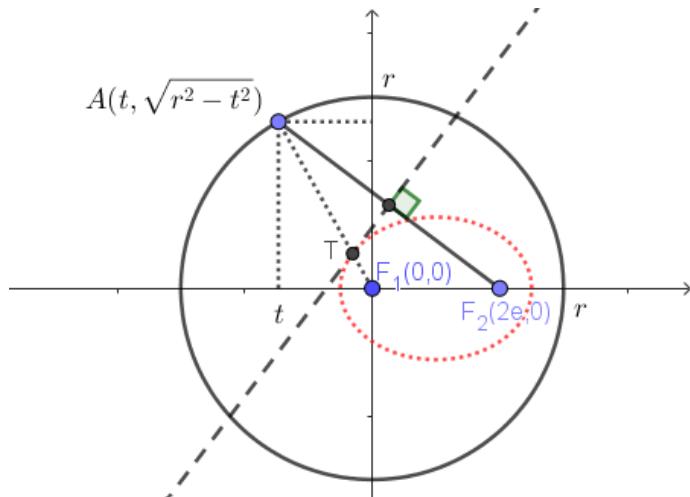
Slika 56: Dokaz tangentnosti pregibov na elipso.

elipso v točki T . □

Parametrizacija pregibov

Poščimo še parametrizacijo teh pregibov in izračunajmo enačbo njihove ovojnice – želimo si dobiti enačbo elipse. Naj bo točka $F_1 = (0, 0)$ središče krožnice z danim polmerom r in $F_2 = (2e, 0)$ neka točka znotraj krožnice za nek $0 < 2e < r$ (slika 57). Brez škode za splošnost naj bo A točka na zgornjem loku krožnice, torej $A = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ za nek $t \in [-r, r]$.

⁸Presečišče vedno obstaja, saj bi v primeru, da bi točki A in F_1 ležali na isti strani prepogiba, veljalo $|AF_1| \geq |F_2F_1|$ oziroma da točka F_2 leži na ali zunaj krožnice (kar po predpostavki ne drži).



Slika 57: Parametrizacija pregiba točke A na točko F_2 .

Z daljico povežemo točki A in F_2 in določimo njen središče v točki $((2e + t)/2, \sqrt{r^2 - t^2}/2)$, koeficient njene nosilke pa je $-\sqrt{r^2 - t^2}/(2e - t)$. Enačba pregiba je tako

$$y = \frac{2e - t}{\sqrt{r^2 - t^2}}x - \frac{(4e^2 - t^2)}{2\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{2}.$$

Iskana parametrizacija družine pregibov ima zato enačbo

$$F(t, x, y) = \frac{2e - t}{\sqrt{r^2 - t^2}}x - y - \frac{(4e^2 - t^2)}{2\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{2} = 0. \quad (5.3)$$

Iz enačbe $(\partial/\partial t)F(t, x, y) = 0$ dobimo⁹ $t = 2r^2x/(r^2 + 4ex - 4e^2)$. (To sem dala v Wolfram, a je potrebno priflikat kakšen screenshot za dokaz, da mi bojo verjeli?) Vstavimo t še v enačbo $F(t, x, y) = 0$ in po nekaj dela res dobimo

$$\frac{(x - e)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{r^2 - 4e^2}{4}} = 1,$$

kar ustreza začetni izbiri točk F_1 in F_2 ter polmera r .

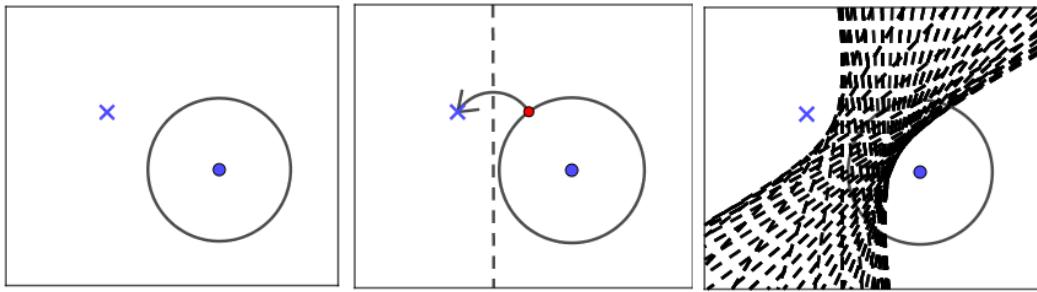
Kaj se zgodi, če točko izberemo zunaj krožnice, pa si pogledamo v naslednjem razdelku.

5.4 Hiperbola

Aktivnost: Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njen središče. Na zunanj strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 58). Kaj opaziš?

Podobno kot prej lahko sklepamo, da se nam izriše obris hiperbole. Spomnimo se, da na hiperboli ležijo vse točke, katerih absolutna vrednost razlike razdalj do

⁹Za računanje in poenostavitev izrazov priporočamo uporabo kalkulatorja npr. Wolfram Mathematica.



Slika 58: Prepogibanje krožnice na izbrano točko zunaj nje.

obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi. Tako kot pri elipski je tudi tu hiperbola natančno določena. Naslednja trditev in dokaz sta zato zelo podobna kot za elipso.

Trditev 5.9. Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na hiperbolo z goriščema v obih izbranih točkah in veliko osjo (t. j. dvakratnik velike polosi), enako polmeru izbrane krožnice.

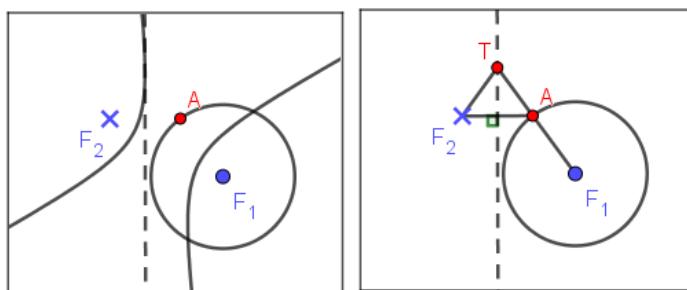
Dokaz. Naj bo točka F_1 središče krožnice s polmerom r in točka F_2 poljubna točka zunaj krožnice. Potem je hiperbola, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako r , natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko A (slika 59 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to hiperbolo.

Označimo s T presečišče¹⁰ pregiba in nosilke daljice AF_1 (slika 59 desno). Ker je pregib simetrala daljice AF_2 , velja $|TF_1| = |TF_2|$, torej je

$$||TF_1| - |TF_2|| = ||TF_1| - |TA|| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke A . Ker je r velika os hiperbole, točka T leži na njej.

Pokažimo, da je to res tangentna. Ker je pregib simetrala F_2A , prepolavlja kot $\angle ATF_2$, ki je enak kotu $\angle F_1TF_2$. Torej pregib skozi točko T na hiperboli prepolavlja kot, ki ga ta točka oklepa z goriščema, to pa je ravno značilnost tangent na hiperbolo (zase: pokazi de je to rejs).



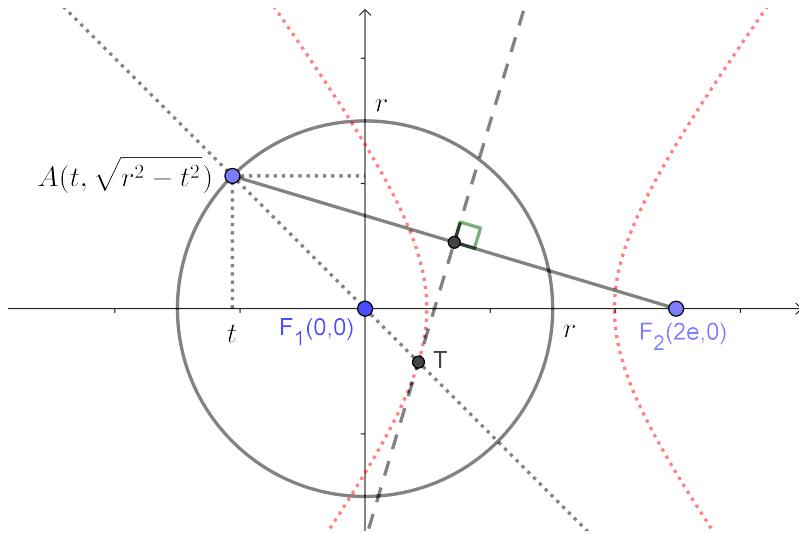
Slika 59: Dokaz tangentnosti pregibov na hiperbolo.

Torej je pregib tangenten na dano hiperbolo v točki T . □

¹⁰Presečišče ne obstaja le v dveh primerih, ko je nosilka daljice AF_2 tangentna na krožnico (pregib in nosilka AF_1 sta vzporedni). V tem primeru sta pregiba ravno asymptoti na hiperbolo.

Parametrizacija pregibov

Določimo še parametrizacijo družine pregibov. Postopek je identičen kot pri parametrizaciji tangent na elipso, edina sprememba je le, da tu velja $0 < r < 2e$. Ko v ravnino uvedemo točke, daljice in premice kot zgoraj (slika 60), dobimo enako parametrizacijo družine pregibov (enačba 5.3).



Slika 60: Parametrizacija pregiba točke A na točko F_2 .

Ker velja $r^2 - 4e^2 < 0$, v končni enačbi namesto tega zapišemo $-(-(r^2 - 4e^2))$ in prvi minus postavimo pred y^2 . Tako res dobimo enačbo hiperbole, ki ima enaki osi kot elipsa iz prejšnjega razdelka:

$$\frac{(x - e)^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{4e^2 - r^2}{4}} = 1.$$

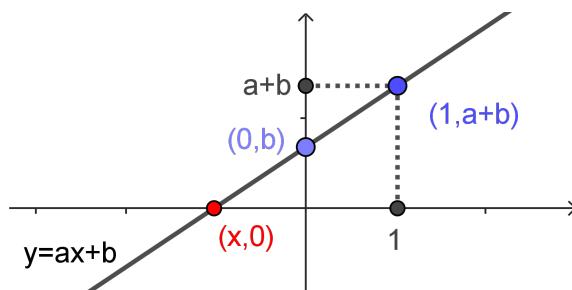
Dokazi v drugih virih

Dokaz, kjer se izračuna splošno enačbo elipse in hiperbole glede na izbrano krožnico in točko znotraj oz. zunaj nje najdemo tudi v [27, str. 204–206]. Tudi Lotka v [20] iz opisane konstrukcije izpelje splošno enačbo elipse in nastavi popravek, ki nam da splošno enačbo hiperbole. S tem oba dokažeta, da je ogrinjača teh pregibov res elipsa oz. hiperbola.

6 Reševanje enačb

V tem poglavju s prepogibanjem papirja rešujemo enačbe z racionalnimi koeficienti. Njihove rešitve bomo konstruirali v evklidski ravnini, ki jo predstavlja list papirja. Spomnimo se, da smo origami števila definirali kot vsa števila, ki jih lahko s prepogibanjem konstruiramo preko na začetku danega izhodišča O in števila 1 na realni osi (definicija 2.15), evklidska ravnina pa je v bijekciji s kompleksno ravnino, dano v definiciji. Zaradi večje preglednosti bomo lahko pomožne pregibe in točke (ki bi jih sicer znali konstruirati z origamijem, npr. zrcaljene točke) narisali kar z ravnalom in pisalom.

Začnimo z najbolj osnovno, t. j. linearno enačbo. Enačba $ax + b = 0$, kjer $a, b \in \mathbb{Q}$ in $a \neq 0$ ima rešitev $x = -b/a$, ki je racionalno število, torej origami število in samo po sebi konstruktibilno. Če bi želeli rešitev konstruirati geometrijsko preko pregibov, v ravnini prepognemo premico $y = ax + b$ (napravimo pregib npr. skozi točki $(0, b)$ in $(1, a+b)$) in njeno presečišče z abscisno osjo nam da iskano rešitev (slika 61).



Slika 61: Reševanje linearne enačbe $ax + b = 0$. Abscisa rdeče točke je iskana rešitev.

Uporaba origamija je za reševanje linearne enačbe očitno manj praktična kot računanje rešitve. Bolj zanimivo je reševanje kvadratne in kubične enačbe. Ker za njune rešitve obstajata splošni formuli, bi lahko rešitve najprej izračunali in nato preko operacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in korenjenja konstruirali s prepogibanjem, vendar je to časovno preveč potratno. Pogledali si bomo, kako se z origamijem lahko temu izognemo in rešitev konstruiramo brez uporabe računskih operacij.

Ključno vlogo bosta v nadaljevanju odigrali origami operaciji O6 in O7. Prva nam hkrati s konstrukcijo tangente na parabolo določi tudi točko na paraboli, skozi katero je pregib tangenten na stožnico, to pa je ekvivalentno reševanju kvadratne enačbe. Druga s konstrukcijo skupne tangente na dve paraboli omogoča reševanje kubične enačbe – to pokaže npr. Alperin v [1, str. 129], ko izpelje koeficient skupne tangente na dani paraboli, za katerega se izkaže, da je rešitev kubične enačbe. Število skupnih tangent je torej enako številu rešitev kubične enačbe, kar pomeni, da imata paraboli v evklidski ravnini največ tri skupne tangente.

V teoriji bi nam prepogibanje papirja pomagalo tudi pri reševanju kvartičnih enačb, saj zanje še obstaja splošna formula (vendar zaradi dolžine praktično neuporabna) in tudi vemo, da lahko enačbo četrte stopnje prevedemo na enačbe nižje stopnje (gl. [5], [2]). Geometrično pa je to reševanje potem težje izvedljivo in zato manj motivacijsko, saj bi postopek reševanja sistema dveh enačb zahteval veliko več

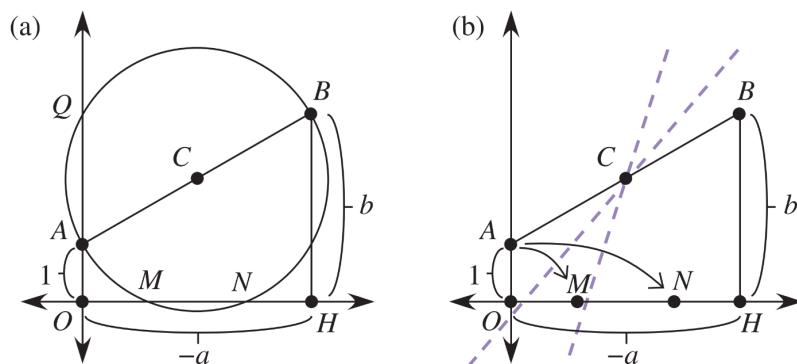
pregibov kot pri reševanju le ene kubične ali kvadratne enačbe, pa tudi vmesne rezultate bi morali računati. Tako bi se lahko tu z reševanjem enačb preko origamija ustavili, vendar obstajajo alternativne rešitve. V [3] je opisan postopek, ki preko **projektivne geometrije in dualnih stožnic** (malo preuredi izrazoslovje, če ni ok) ter z Belochinim pregibom reši splošno kubično in nato tudi kvartično enačbo neke dolocene oblike. Postopek si bomo tudi sami pogledali, saj je zelo zanimiv iz vidika projektivne geometrije.

Za enačbe pete in višjih stopenj pa splošna formula za rešitve ne obstaja več (to vemo po *Abel-Ruffinijev* izreku, gl. [24]). Kljub temu se da z origamijem še vedno konstruirati rešitve nekaterih enačb višjih stopenj, vendar ne obstaja postopek z enkratnimi prepogibi – potrebno se je poslužiti dvojnih (*two-fold*) ali večkratnih (*multi-fold*) prepogibov (gl. poglavje 8) (če ga boš vključila).

Reševanje enačb s prevedbo euklidskih konstrukcij

Z evklidskim orodjem lahko rešujemo enačbe druge stopnje, saj znamo konstruirati kvadratni koren poljubnega origami-konstruktibilnega števila. Ker vemo, da lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo vse (in še več), kar se da z evklidskim orodjem, je včasih lažje za rešitev nekega problema najti (bolj domačo) evklidsko konstrukcijo, ki jo lahko nato preko origami operacij preobrazimo v origami konstrukcijo.

Kot primer tega Hull v [11, str. 38] navaja Lillovo konstrukcijo rešitve kvadratne enačbe preko krožnice – na sliki 62 levo je prikaz evklidske konstrukcije, desno pa prevedba na origami konstrukcijo. Lahek dokaz, zakaj deluje, je prepustičen bralcu.



Slika 62: Reševanje enačbe $x^2 + ax + b = 0$. Vzeto iz [11, str. 38].

6.1 Reševanje kvadratne enačbe preko tangente na parabolo

Rešujemo enačbo oblike

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{Q}$ in velja $a \neq 0$. Njeni splošni rešitvi sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Postopek, ki si ga bomo pogledali v nadaljevanju, predpostavlja $a = 1$. Ker je vodilni koeficient nenihčeln, lahko z njim enačbo delimo in pri tem še vedno dobimo

racionalne koeficiente, zato lahko predpostavko brez škode za splošnost sprejmemo. Nova oblika enačbe je tako

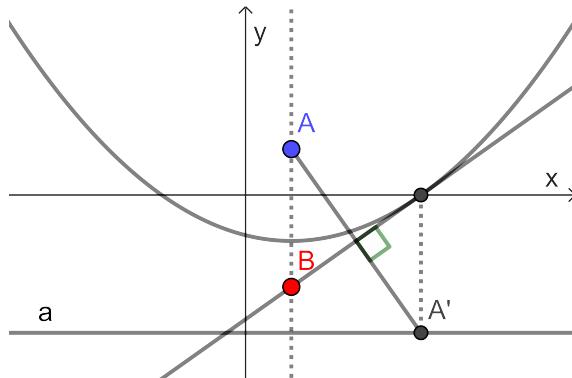
$$x^2 + bx + c = 0. \quad (6.1)$$

Predpostavimo, da ima enačba dve različni realni rešitvi oz. da je diskriminanta enačbe pozitivna, t. j. $D = b^2 - 4c > 0$. Če realnih ničel ni, o origami konstrukciji rešitev namreč nima smisla razpravljati. Če je rešitev ena, je podana kot $x = -b/2$, kar je origami-konstruktibilno število in se ga lahko takoj konstruira.

Enačba 6.1 nam ob teh predpostavkah torej poda pokončno parabolo $y = x^2 + bx + c$ z vodoravno premico vodnico in dvema ničlama, ki sta rešitvi naše enačbe. Iščemo abscisi presečišč parabole z abscisno osjo.

Zopet se bomo poslužili dosedanjega znanja o operaciji O6. Ta nam s pregibom skozi dano točko B , ki točko A položi na premico a , konstruira tangento na parabolo z goriščem v točki A in premico vodnico a .

Naša parabola je z enačbo seveda natančno določena. Ideja iskane konstrukcije rešitev enačbe je določiti tako točko B (najlažje kar na osi parabole), da bi nam izvedba operacije O6 podala tangento na parabolo ravno v njeni ničli. Želeni pregib mora potekati skozi točko B in gorišče A položiti na tisto točko A' na premici vodnici a , ki ima enako absciso kot ničla parabole. (gl. slika 63). Taka točka B je z osjo parabole in katerokoli izmed ničlama (zaradi simetrije) natanko določena.



Slika 63: Operacijo O6 skozi iskano točko B poda rešitev kvadratne enačbe.

Edina nevarnost, da ta konstrukcija ne bo delovala, je možnost, da točka B kdaj ne bo origami-konstruktibilna točka. Zato sedaj izračunajmo njene koordinate in se prepričajmo, da se to nikoli ne bo zgodilo.

Najprej iz dane enačbe parabole določimo njen gorišče A in premico vodnico a . Spomnimo se, da iz enačbe oblike

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

razberemo njen teme (x_0, y_0) , gorišče $(x_0, y_0 + p/2)$ in enačbo premice vodnice $y = y_0 - p/2$. V našem primeru enačbo $y = x^2 + bx + c$ preoblikujemo v

$$\left(x - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\right).$$

S tem sta gorišče A in premica vodnica a določena:

$$A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \text{ in } a : y = c - \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Naj bo t ena izmed rešitev enačbe 6.1. Na premici a z A' označimo točko z absciso t . Poiščimo enačbo pregiba, ki gorišče A položi v točko A' . Ta pregib bo tangenten na parabolo ravno v njeni ničli, njegovo presečišče z osjo parabole $x = -b/2$ pa nam bo določilo točko B .

Koeficient nosilke daljice AA' je $-1/(2t+b)$, torej je koeficient pregiba $k = 2t+b$. Pregib je po konstrukciji tangenten na parabolo v ničli $(t, 0)$, torej je njegova enačba

$$y = (2t+b)(x-t) = (2t+b)x - 2t^2 - bt = (2t+b)x - t^2 + c.$$

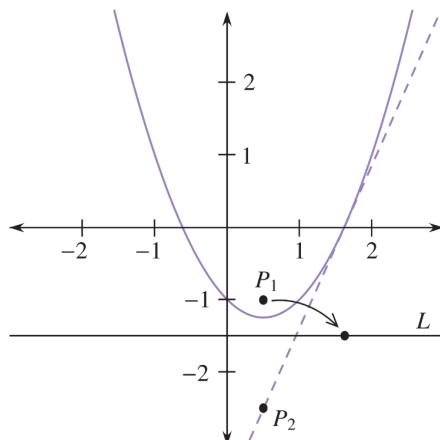
Pri tem smo upoštevali, da velja $t^2 + bt + c = 0$. Presečišče pregiba in osi parabole je tako točka B z absciso $x = -b/2$ in ordinato

$$y = (2t+b)\left(-\frac{b}{2}\right) - t^2 + c = -t^2 - tb + c - \frac{b^2}{2} = c + c - \frac{b^2}{2} = 2c - \frac{b^2}{2}.$$

Obe koordinati sta racionalni, torej je točka B konstruktibilna točka. Ker leži na osi parabole, nam poda obe rešitvi enačbe – pregiba sta si simetrična glede na os. Povzemimo sedaj postopek konstrukcije rešitve kvadratne enačbe 6.1:

1. V koordinatnem sistemu označimo gorišče $A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$, premico vodnico $a : y = c - \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}$ in točko $B\left(-\frac{b}{2}, 2c - \frac{b^2}{2}\right)$.
2. Z operacijo O6 naredimo pregib skozi točko B , ki točko A položi na premico a (če je diskriminanta enačbe pozitivna, sta možna pregiba dva).
3. Skozi sliko točke A naredimo vertikalnen pregib in abscisa njegovega presečišča z abscisno osjo je ničla dane enačbe.

Primer: Poiščimo rešitve enačbe $x^2 - x - 1 = 0$. Določimo obe točki in premico: $A(\frac{1}{2}, -1)$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ in $a : y = -\frac{3}{2}$ (na sliki 64 so zaporedoma uporabljeni oznake P_1 , P_2 in L). Opravimo operacijo O6 in označimo presečišče abscisne osi in pravokotnice nanjo skozi sliko točke A . Če smo bili pri pregibanju natančni, dobimo presečišči pri $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.



Slika 64: Reševanje enačbe $x^2 - x - 1 = 0$ preko tangente na parabolo. Vzeto iz [11, str. 37].

Metoda je enostavna, vendar v resnici zopet ne najbolj praktično izvedljiva, saj so lahko točki A in B ter premica a težje origami-konstruktibilni. V naslednjem poglavju bomo med drugim spoznali Lillovo metodo, preko katere bomo z operacijo O6 do rešitve prišli hitreje in enostavneje (gl. razdelek 6.2.3).

6.2 Belochin postopek z Lillovo metodo

Vzemimo enačbo oblike

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ in velja $a \neq 0$. Tu je navedena ena oblika zapisa njene splošne rešitve:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \\ C &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(Q + 2b^3 - 9abc + 27a^2d)} \\ x_1 &= -\frac{b}{3a} - \frac{C}{3a} - \frac{b^2 - 3ac}{3aC} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 + i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 - i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \end{aligned}$$

Operacija O6 nam je preko konstrukcije tangente na parabolo pomagala rešiti kvadratno enačbo. Spomnimo se, da je Belocheva to v tridesetih letih prejšnjega stoletja nadgradila z operacijo O7, ki nam konstruira skupno tangento na dve paraboli, pregib pa imenujemo *Belochin pregib*. Z njim je kot prva odkrila resnično moč origami konstrukcij, a je žal trajalo več kot pol stoletja, da so matematiki začeli ceniti njeno odkritje. Zgodilo se je celo, da so nekateri neodvisno od nje odkrili ta pregib in iznašli svoje postopke, ne da bi sploh poznali njeno delo.

Seznanili se bomo z Lillovo metodo, s katero lahko v teoriji rešimo enačbo poljubne stopnje. V središču naše pozornosti bo Belochin origami postopek za reševanje kubične enačbe, na koncu pa bomo Lillovo metodo uporabili tudi za reševanje kvadratne enačbe.

6.2.1 Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom

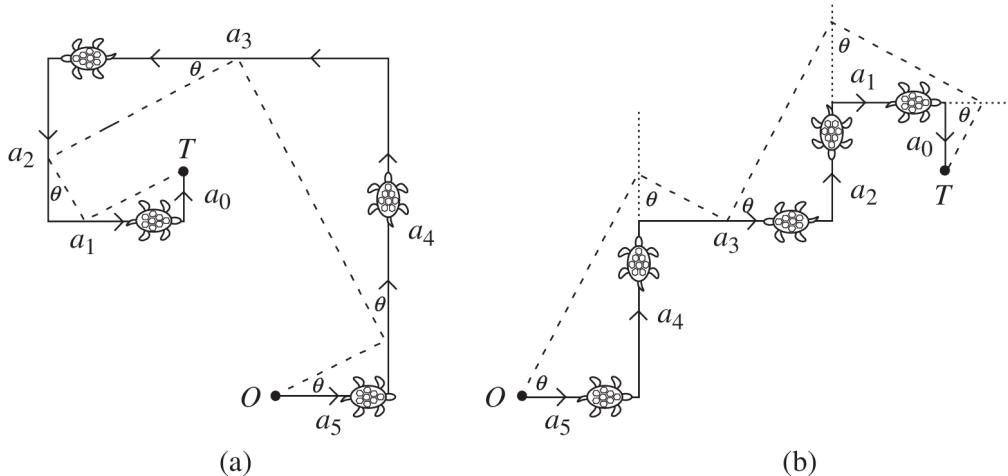
Belocheva je sama odkrila naslednji postopek reševanja kubične enačbe, kjer nam vsak Belochin pregib poda eno izmed rešitev. Število teh pregibov pa je, kot smo premislili že v uvodu poglavja, enako številu rešitev dane enačbe. Postopek temelji na Lillovi genialni metodi iskanja ničel poljubnih polinomov z realnimi koeficienti, ki si jo bomo v naslednjem razdelku podrobneje pogledali, avtorica pa je zaslužna za to, da se jo zelo enostavno konstruira tudi v praksi.

Lillova metoda

Avstrijski inženir Eduard Lill je l. 1867 v svojem članku [19] opisal inovativen postopek, ki je v svoji osnovi čisto enostaven. Imejmo poljuben polinom $p(x) =$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ z realnimi koeficienti in iščemo njegove realne ničle, če obstajajo. Lill je iz njegovih koeficientov v ravnini ustvaril enolično pot.

Običajno pri opisovanju poteka konstrukcije uporabljam figuro želve, katere pot nas zanima. Želva nam v vsakem trenutku kaže, kam je usmerjena in v katero smer se premika. Na začetku jo postavimo v koordinatno izhodišče O tako, da gleda v pozitivno smer x -osi. Želva najprej v to smer prehodi razdaljo, enako koeficientu a_n . Nato se obrne za 90° v pozitivno smer (nasprotno smer urinega kazalca) in prehodi naslednjo razdaljo a_{n-1} . To ponovi za vsak koeficient polinoma in po prehodeni razdalji a_0 se ustavi v neki točki T (slika 65). Če je kateri od koeficientov negativen, želva hodi ritensko (primer (b) na sliki 65 za koeficiente a_3, a_2 in a_0), v primeru ničelnega koeficiente pa obstoji na mestu in se samo obrne. S potjo želve dobimo lomljeno črto iz največ $n+1$ daljic, ki jih brez škode označujmo kar z njihovimi "pripadajočimi" koeficienti.



Slika 65: Primera želvine poti za polinoma pete stopnje. Vzeto iz [13, str. 311].

Sedaj se v izhodišče O postavimo še mi in z laserskim žarkom poskusimo zadeti želvo v točki T tako, da žarek najprej usmerimo daljico a_{n-1} , od katere se odbije v daljico a_{n-2} , od te v daljico a_{n-3} in tako naprej (slika 65). Pri tem upoštevamo troje:

- laserski žarek ne upošteva odbojnega zakona in se od daljice vedno odbije pod kotom 90° , zato so vpadni koti žarka na vse daljice med seboj enaki in prav tako to velja za odbojne kote;
- žarek se lahko odbije tudi od nosilke daljice;
- vsakič sta možni dve smeri odboja – na isto ali drugo stran daljice oz. njene nosilke – izberemo pa tisto, ki nam omogoči, da sploh lahko zadenemo naslednjou daljico.

Taka pot žarka vedno obstaja in je enolična. Vpadni kot, ki ga v točki O oklepata laserski žarek in abscisna os, označimo z θ .

Trditev 6.1. $\text{Število } x_\theta = -\tan \theta \text{ je ničla polinoma } p(x).$

Dokaz. Vzemimo primer, ko so vsi koeficienti polinoma $p(x)$ pozitivni. Želvina pot je v tem primeru sestavljena iz $n+1$ daljic, pot laserskega žarka –ki se vedno odbije od daljice in ne njene nosilke – pa iz n daljic. Slednje so ravno hipotenuze pravokotnih trikotnikov. Za vsak $i \in \{n, \dots, 1\}$ označimo z y_i kotu θ nasprotno kateto. Dobimo

$$\begin{aligned} y_n &= \tan \theta \cdot a_n = -x_\theta a_n \\ y_{n-1} &= \tan \theta \cdot (a_{n-1} - y_n) = -x_\theta (a_{n-1} + x_\theta a_n) = -(a_{n-1} x_\theta + a_n x_\theta^2) \\ y_{n-2} &= \tan \theta \cdot (a_{n-2} - y_{n-1}) = -x_\theta (a_{n-2} + a_{n-1} x_\theta + a_n x_\theta^2) = \\ &\quad = -(a_{n-2} x_\theta + a_{n-1} x_\theta^2 + a_n x_\theta^3) \\ &\vdots \\ y_1 &= -(a_1 x_\theta + a_2 x_\theta^2 + \dots + a_{n-1} x_\theta^{n-1} + a_n x_\theta^n). \end{aligned}$$

V zadnji enakosti desno stran premaknimo na levo in upoštevamo $y_1 = a_0$. Dobimo ravno $p(x_\theta) = 0$, torej je $x_\theta = -\tan \theta$ res ničla tega polinoma.

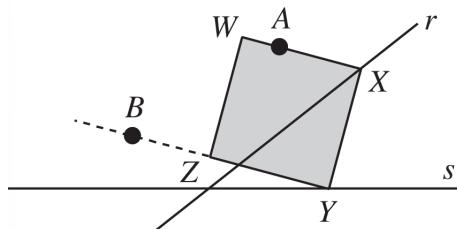
Primer negativnih koeficientov: [31, str. 36].

Primer ničelnih koeficientov: isto kot prej, samo se spusti y_i za tisti i , za katerega je $a_i = 0$. (???) \square

Če pod nobenim kotom θ ne moremo zadeti želve, je polinom $p(x)$ brez realnih ničel. Zato je na mestu vprašanje, kako določiti kot θ . Za polinom tretje stopnje je Belocheva preko svojega pregiba našla zelo preprosto rešitev, ki si jo bomo sedaj pogledali.

Belochin kvadrat

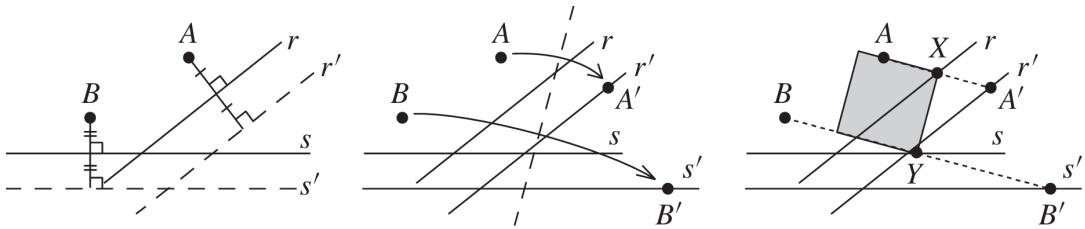
Imejmo dani točki A in B ter premici r in s . Z origamijem konstruirajmo kvadrat $WXYZ$, kjer oglišče X leži na premici r , njegovo sosednje oglišče Y pa na premici s . Velja še, da točka A leži na stranici WX (ali njeni nosilki), točka B pa na stranici ZY (ali njeni nosilki). Kvadrat po avtorici njegove konstrukcije imenujemo Belochin kvadrat (slika 66).



Slika 66: Belochin kvadrat. Vzeto iz [13, str. 309].

Opomba 6.2. V resnici nam v Belochinem postopku ne bo koristila konstrukcija samega kvadrata, pač pa bo dovolj le poiskati točki X in Y . Skozinju bo namreč potekala želvina pot od točke A do točke B , ki je po konstrukciji res sestavljena iz treh med seboj pravokotnih daljic. Belocheva pri postopku za konstrukcijo kvadrata navaja naslednje korake:

1. Najprej konstruiramo premico r' , ki je vzporedna premici r in od nje enako oddaljena kot točka A , tako da premica r leži med točko A in premico r' . Na enak način premici s konstruiramo njeno vzporednico s' (slika 67 levo).
2. Opravimo Belochin pregib, ki točko A slika v točko A' na premici r' , točko B pa v točko B' na premici s' (slika 67 na sredi).
3. Naj bo točka X središče daljice AA' in točka Y središče daljice BB' . Po konstrukciji novi točki sovpadata s presečščem pregiba in premice r oz. s . (slika 67 desno). Daljica XY je pravokotna na daljici AX in BY , zato samo še določimo točki W in Z na daljicah ali njunih nosilkah in tako dobimo Belochin kvadrat.



Slika 67: Konstrukcija Belochinega kvadrata z origamijem. Vzeto iz [13, str. 310].

Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ z Belochinim kvadratom

Preden ravno naučeno znanje uporabimo za reševanje kubičnih enačb, si še na hitro poglejmo, kako lahko tudi z Belochinim kvadratom rešimo starogrški problem podvojitve kocke.

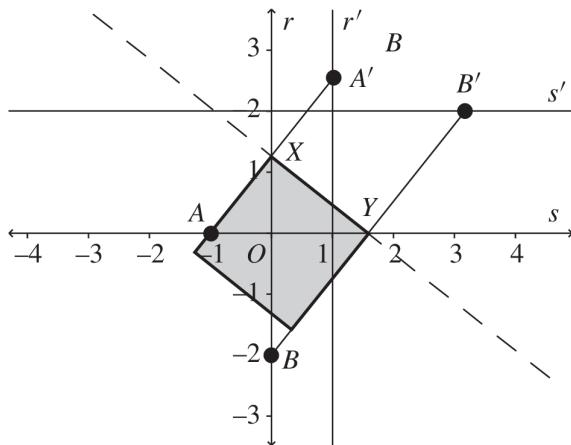
Za premico r vzemimo ordinatno os, za premico s pa abscisno os. Določimo še $A = (-1, 0)$ in $B = (0, -2)$. Vzporednici sta torej $r' : x = 1$ in $s' : y = 2$. Belochin pregib seka premico r v točki X , premico s pa v točki Y (slika 68). Z O označimo koordinatno izhodišče in opazimo podobne pravokotne trikotnike OAX , OXY in OYB . Z upoštevanjem $|AO| = 1$ in $|OB| = 2$ dobimo sledeča razmerja:

$$\frac{|OX|}{|AO|} = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{|OB|}{|OY|} \implies |OX| = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{2}{|OY|},$$

iz česar sledi

$$|OX|^3 = |OX| \cdot \frac{|OY|}{|OX|} \cdot \frac{2}{|OY|} = 2 \implies |OX| = \sqrt[3]{2}.$$

Vidimo lahko, da je to enaka konstrukcija, kot jo je 50 let kasneje neodvisno od Belocheve odkril G. Martin (gl. razdelek 3.5.1), le da je za točko B vzel točko $(0, -k)$ in s tem konstruiral dolžino $\sqrt[3]{k}$ za poljubno stevilo k .



Slika 68: Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ preko Belochinega kvadrata. Vzeto iz [13, str. 310].

Združitev Lillove metode in Belochinega kvadrata v Belochin postopek

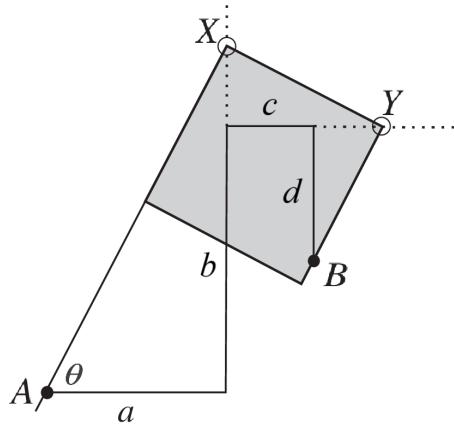
Za poljubno enačbo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ povežimo sedaj Lillovo metodo s konstrukcijo primerenega Belochinega kvadrata, ki nam bo natančno določil kot θ . Belochin postopek, ki je opisan v nadaljevanju, velja za vsako izbiro koeficientov enačbe (gl. tudi sliko 69):

1. Za točko A vzemimo izhodišče O . Začrtamo želvino pot za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ki se začne v točki A in konča v točki B .
2. Premica r naj bo nosilka daljice b ($r : x = a$), premica s pa nosilka daljice c ($s : y = b$).
3. Določimo premici $r' : x = 2a$ in $s' : y = b + d$ ter opravimo Belochin pregib, ki točko A položi na premico r' in točko B na premico s' .
4. Presečišči pregiba s premicama r in s zaporedoma označimo s točkama X in Y .
5. Zarišemo daljice AX , XY in YB .

Ker po konstrukciji velja $AX \perp XY \perp YB$, je to iskana pot laserskega žarka, ki se odbija pod pravim kotom in zadene želvo. Kot θ je kot, ki ga oklepata daljici a in AX . Rešitev je torej $x_\theta = -\tan \theta$.

Opomba 6.3. Če ima enačba še dve realni rešitvi, sta možna tudi še dva Belochina pregiba (enačba namreč ne more imeti točno dveh realnih rešitev, saj kompleksne rešitve nastopajo v konjugiranih parih).

Kot zanimivost Lavričeva v [18, str. 10–13] s postopkom, ki je malo preurejen Belochin postopek, še analitično pokaže, da je ob primerno izbranih točkah A in B ter premicah r in s koeficient premice, ki jo predstavlja Belochin pregib, rešitev kubične enačbe. Točki in premici izbere tako, da sta točki X in Y ravno presečišči z ordinatnima osema, iz česar lahko takoj razberemo koeficient premice. V dokazu izpelje enačbi pripadajočih parabol in splošno enačbo njunih tangent ter iz tega dokaže rečeno. To je lahko odlična vaja za dijake, ki si želijo dodatnega izziva.



Slika 69: Konstrukcija želvine poti za Lillovo metodo preko Belochinega kvadrata. Vzeto in preurejeno iz [13, str. 313].

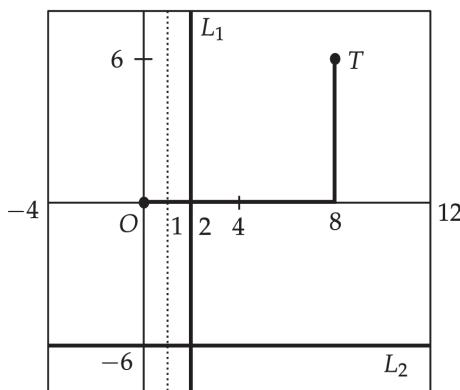
Primer reševanja kubične enačbe z Belochinim postopkom

Več primerov uporabe Belochinega postopka za reševanje kubičnih enačb je opisanih v [31, str. 38–44], tu pa si poglejmo, kako rešimo enačbo, ki ima tako pozitivne kot tudi negativne in ničelne koeficiente. Hull v [12, str. 90–92] obravnava enačbo

$$x^3 - 7x - 6 = 0.$$

Po Lillovi metodi za točko A vzamemo izhodišče O in začrtamo želvino pot. Najprej gremo za 1 v desno ($a = 1$), se obrnemo za 90° v pozitivno smer in obstojimo na mestu ($b = 0$), se zopet obrnemo 90° v pozitivno smer in se premaknemo za 7 v nasprotno smer, torej zopet v desno ($c = -7$), na koncu pa se po ponovnem obratu za 90° v pozitivno smer premaknemo za 6 navzgor ($d = -6$). Končamo v točki $T = (8, 6)$.

Označimo še premice $r : x = a = 1$, $r' : x = 2a = 2$ (na sliki 70 označena z L_1), $s : y = b = 0$ in $s' : y = b + d = -6$ (na sliki 70 označena z L_2).



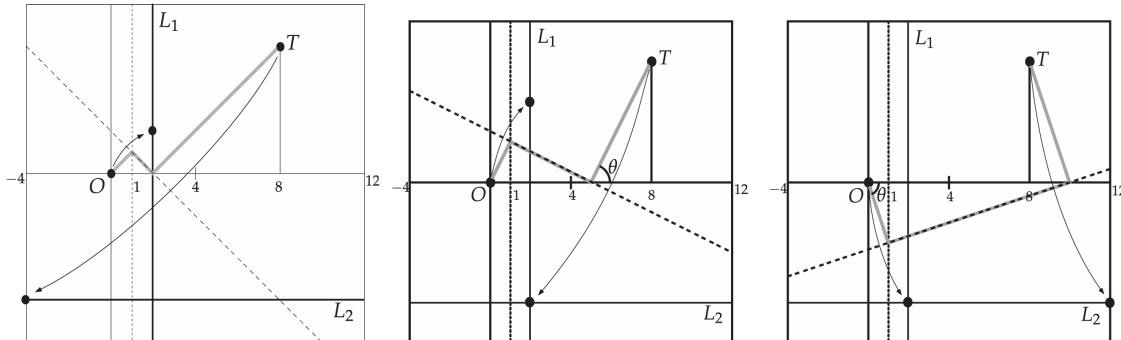
Slika 70: Priprava želvine poti in premic za reševanje enačbe z Lillovo metodo. Vzeto iz [12, str. 87].

Želvina pot je sedaj pripravljena, da točko O prepognemo na premico L_1 in hkrati točko T na premico L_2 . Presečišči pregiba s premicama r in s nam data točki, kjer

se laserski žarek za pravi kot odbije in na koncu zadane točko T . Kot, ki ga oklepa žarek z x -osjo ob koordinatnem izhodišču, nam podaja rešitev enačbe.

Na sliki 71 so konstrukcije vseh treh možnih pregibov. Začnimo z leve proti desni in za vsakega od njih pogledamo, kaj dobimo:

1. V prvem primeru se nam točka O preslika v točko $(2, 2)$, točka T pa v točko $(-4, -6)$, torej je kot $\theta = 45^\circ$, kar pomeni $x_{45^\circ} = -\tan 45^\circ = -1$. Preverimo, ali x_{45° res reši našo enačbo. Zares, $(-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = 0$.
2. Točka T se v drugem primeru preslika ravno v presečišče premic L_1 in L_2 , torej v točko $(2, -6)$. Pregib torej premico s , ki je v našem primeru kar x -os, seka v točki $(5, 0)$ (ker je presečišče središče doljice s krajišči v točki T in njeni sliki). Rešitev x_θ lahko preberemo kar iz zadnjega pravokotnega trikotnika preko definicije kotne funkcije tangens: $x_\theta = -\tan \theta = -6/3 = -2$. In res je $(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6 = 0$.
3. V zadnjem primeru pa se v presečišče premic L_1 in L_2 preslika izhodišče O . Zato pregib premico r seka v točki $(1, -3)$ in za kot θ gledamo prvi pravokotni trikotnik. Dobimo $x_\theta = -\tan \theta = -(-3)/1 = 3$. Preverimo rešitev in dobimo $3^3 - 7 \cdot 3 - 6 = 0$.



Slika 71: Pregibi, ki rešijo kubično enačbo $x^3 - 7x - 6 = 0$. Vzeto iz [12, str. 91–92].

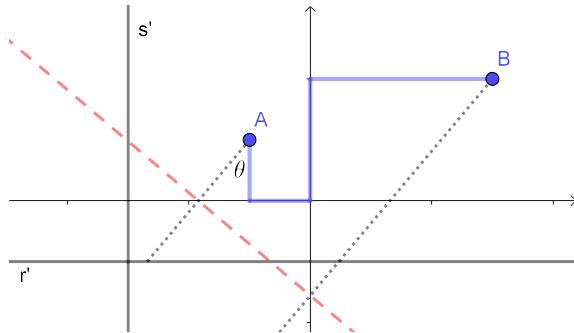
Seveda se da enačbo $x^3 - 7x - 6 = 0$ hitreje rešiti z računanjem, vendar je ravno zaradi tega lep primer za uporabo Lillove metode z Belochinim pregibom, saj se da rešitve iz konstrukcije (ob natančnih prepogibih) takoj prebrati.

6.2.2 Hatorijeva konstrukcija

Japonski matematik Koshiro Hatori navaja postopek, ki je zelo podoben Belochinem postopku, vendar ga je avtor iznašel neodvisno od Belochinega dela in to kar pol stoletja za tem. Brez škode za splošnost predpostavi $a = 1$ in za reševanje enačbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sledi naslednjim korakom (slika 72):

1. V koordinatnem sistemu označimo točki $A = (b, 1)$ in $B = (d, c)$ ter premici $r' : y = -1$ in $s' : x = -d$.
2. Opravimo pregib, ki točko A položi na premico r' ter točko B na premico s' (to je ravno Belochin pregib).

3. Koeficient opravljenega pregiba je rešitev dane enačbe.



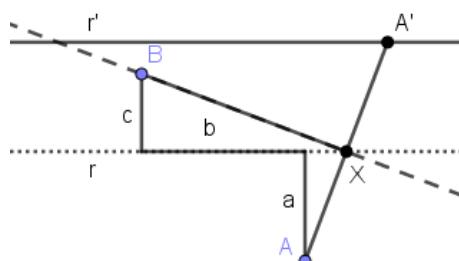
Slika 72: Hatorijeva konstrukcija za enačbo $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$.

Tako vidimo, da je to v resnici ravno Belochin postopek, le da Hatori ne omeni premic r in s ter da se želva na začetku svoje poti ne nahaja v koordinatnem izhodišču temveč v točki A , je najprej usmerjena navzdol in se obrača v negativno smer (njena pot je na sliki 72 označena z modro). Če izrazimo koeficient pregiba preko kota θ , ki ga ob začetni točki A omejujeta modra in črna prekinjena doljica, res dobimo $k = -\tan \theta$. Za geometrijsko razlago preko parabol gl. [9].

Opomba 6.4. Seveda bi lahko vzeli katerikoli $a \in \mathbb{Q}$ in vzeli premico $r' : y = -a$.

6.2.3 Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo

Lillovo metodo lahko uporabimo tudi za reševanje kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, kjer $a, b, c \in \mathbb{Q}$ in $a \neq 0$. Na enak način v koordinatni sistem zarišemo želvino pot, ki se začne v točki A in konča v točki B . Za razliko od Belochinega postopka tu ne uporabimo Belochinega pregiba, temveč pregib iz operacije O6. Namesto dveh premic r in s imamo le eno – naj bo r nosilka doljice b . Kot prej – na razdalji a na drugi strani točke A – označimo še njeno vzporednico r' . Konstruiramo pregib, ki gre skozi točko B in točko A položi na premico r' . Njegovo presečišče s premico r nam določi točko X , kjer se žarek iz točke A pod pravim kotom odbije v točko B (primer na sliki 73). S tem je kot θ določen. Vemo že, da sta možana največ dva pregiba in da je število pregibov enako številu realnih rešitev enačbe.



Slika 73: Reševanje kvadratne enačbe po Lillovi metodi z operacijo O6 ($c < 0$).

6.3 Alperinova in Geretschlägerjeva metoda za reševanje kubičnih enačb

V razdelku 6.1 smo reševali kvadratno enačbo preko konstrukcije tangente na parabolo (operacija O6), ki je bila določena s koeficienti iz dane enačbe. Nato smo spoznali Belochin postopek, ki se poslužuje Belochinega pregiba (operacije O7), vendar brez povezave s parabolami. To povezavo bomo pogledali sedaj.

Alperin v [1, str. 129] sicer namesto splošne kubične enačbe vzame zreducirano¹¹ obliko $x^3 + cx + d = 0$, kjer sta $c, d \in \mathbb{Q}$. Iz njenih koeficientov izbere naslednji paraboli:

- $\mathcal{P}_1 : \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = 2dx$ z goriščem v točki $(\frac{d}{2}, \frac{c}{2})$ in premico vodnico $x = -\frac{d}{2}$ in
- $\mathcal{P}_2 : x^2 = 2y$ z goriščem v točki $(0, \frac{1}{2})$ in premico vodnico $y = -\frac{1}{2}$.

Avtor nato opravi Belochin pregib, ki gorišče vsake parabole položi na njeno premico vodnico in tako konstruira skupno tangentno. Ker sta paraboli pravokotni, je tak pregib en sam. Sedaj pa se ne poslužimo uporabe matrik kot v zgornjem postopku, temveč analitično izrazimo koeficient skupne tangente. Naj bodo k iskani koeficient, (x_0, y_0) točka tangentnosti na prvi in (x_1, y_1) točka tangentnosti na drugi paraboli. Iz enačbe prve parabole z implicitnim odvajanjem in upoštevanjem $dy/dx = k$ dobimo

$$2\left(y - \frac{c}{2}\right) \frac{dy}{dx} = 2d, \quad \text{torej } y_0 = \frac{d}{k} + \frac{c}{2} \quad \text{in} \quad x_0 = \frac{\left(y_0 - \frac{c}{2}\right)^2}{2d} = \frac{d}{2k^2},$$

iz enačbe druge parabole pa

$$2x = 2\frac{dy}{dx}, \quad \text{torej } x_1 = k \quad \text{in} \quad y_1 = \frac{k^2}{2}.$$

Ko koordinate vstavimo še v formulo za koeficient premice skozi dve točki, dobimo

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{k^2}{2} - \frac{d}{k} - \frac{c}{2}}{k - \frac{d}{2k^2}}.$$

Enačbo poenostavimo in res dobimo $k^3 + ck + d = 0$, torej je koeficient skupne tangentne rešitev izvorne zreducirane kubične enačbe.

Opomba 6.5. Na enak način je do rešitve kubične enačbe še pred Alperinom prišel Robert Geretschläger (gl. [7, str. 368–369]). V članku pa za razliko od Alperina postopek posploši na reševanje splošne kubične enačbe oblike $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Pri tem se izbiro parabole \mathcal{P}_2 ohrani, enačbo prve parabole \mathcal{P}_1 pa nastavi na $(y - c/2)^2 = 2d(x + b/2)$, torej dobimo gorišče v točki $(-b/2 + d/2, c/2)$ in premico vodnico $x = -b/2 - d/2$.

¹¹V splošno kubično enačbo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ vpeljemo novo spremenljivko $z = x - (1/3)b$. Bralec lahko za vajo izračuna, da s tem dobimo splošno kubično enačbo za z brez kvadratnega člena.

6.4 Reševanje starogrških problemov preko reševanja enačb

V razdelku 3.5 smo si že pogledali več konstrukcij, ki z Belochinim pregibom rešijo problem podvojitve kocke in trisekcije kota. Poglejmo na problema še pod lučjo novega znanja reševanja enačb z origamijem.

Pri podvojitvi kocke rešujemo enačbo $x^3 - 2 = 0$. Bralec je povabljen, da jo reši z Belochinim postopkom preko Lillove metode. V resnici smo to že storili v v razdelku, kjer smo spoznali Belochin kvadrat. Konstrukcija kubičnega korena števila 2, ki smo jo takrat spoznali (gl. slika 68), je ravno konstrukcija po Belochinem postopku, le da je zrcaljena preko abscisne osi in premaknjena za enoto v levo.

Eračbo lahko rešimo tudi z Alperinovim postopkom ali katerokoli drugo metodo za reševanje kubičnih enačb, ki je omenjena v tem poglavju. Videli smo že veliko podobnih metod in ni nemogoče, da kakšni postopki izhajajo iz drugih.

Pri problemu trisekcije kota se spomnimo zveze $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$. Naj bo za dan kot 3θ označena konstanta $k = \cos 3\theta$ (npr. za $3\theta = 60^\circ$, ki se ga z evklidskim orodjem ne da tretjiniti, je $k = 1/2$), iščemo pa $x = \cos \theta$. Torej rešujemo enačbo $4x^3 - 3x - k = 0$. Zopet lahko izberemo poljubno metodo; v [7, str. 370] je zapisana konstrukcija gorišč in premic vodnic za uporabo Geretschlägerjeve oz. Alperinove metodo.

6.5 Kubična in kvartična enačba v projektivni ravnini

Matematika Edwards in Shurman se v [3] ukvarjata z reševanjem enačb tretje in četrte stopnje preko iskanja skupnih tangent na določene stožnice, pri tem pa uporabljata princip Belochinega pregiba. Tematike se lotevata na celovit način z obravnavo splošnih enačb stožnic v projektivni ravnini.

Pri kubični enačbi iz njenih koeficientov določita gorišči in premici vodnici dveh parabol, rešitve enačbe pa so *koeficienti* skupnih tangent. Tak postopek smo sicer spoznali že v razdelku 6.3, tu pa ga bomo pogledali pod malo drugačno lučjo.

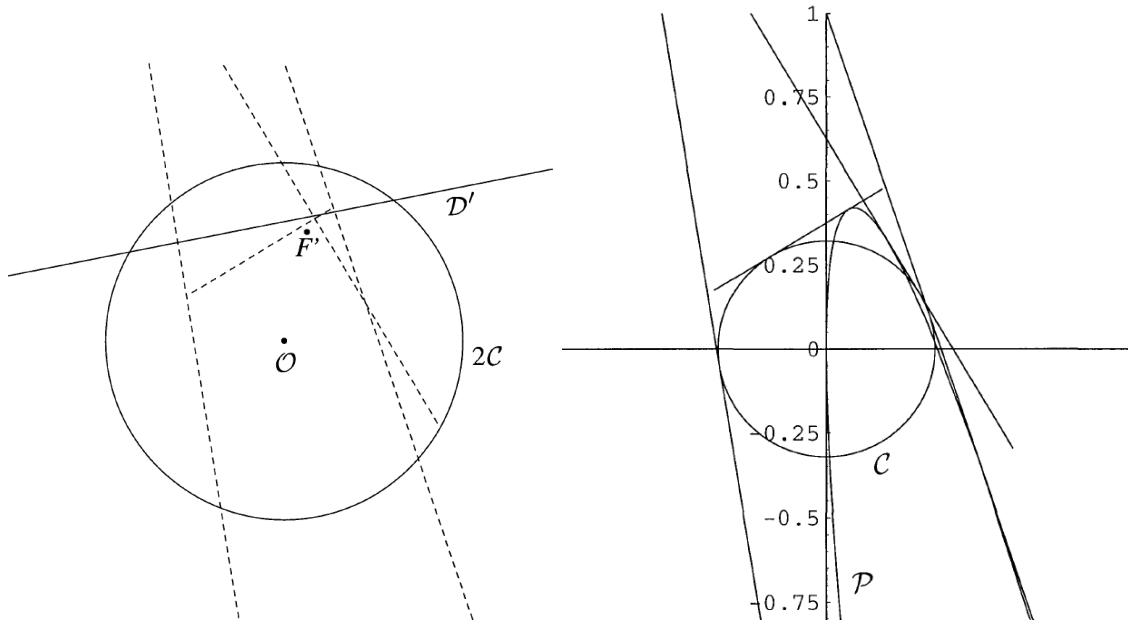
Postopek za reševanje kvartične enačbe je podoben, vendar avtorja z njim rešita le kvartične enačbe v reducirani obliki. Iz njenih koeficientov določita parabolo in krožnico, rešitve pa so *začetne vrednosti* skupnih tangent.

Konstrukcija skupne tangente na parabolo in krožnico

Ker do sedaj poznamo le konstrukcijo skupne tangente na dve paraboli, je na mestu vprašanje, kako postopati v primeru, ko imamo namesto ene parabole krožnico. Postopek je v svojem bistvu zelo enostaven:

- Naj bosta dani parabola z goriščem F in premico vodnico a ter krožnica s središčem v točki S in polmerom r . Teh dveh stožnic ni potrebno risati, ker potrebujemo samo točki F in S , premico a in razdaljo r .
- Zarišemo krožnico s središčem v točki S in polmerom $2r$.
- Po zgledu Belochinega pregiba točko F položimo na premico a in točko S na rob ravnokar narisane krožnice.

Po operaciji O6 je pregib tangenten na dano parabolo, ker pa je po konstrukciji pravokoten na polmer večje krožnice, je tangenten tudi na krožnico s polmerom r . Na sliki 74 sta desno prikazani dani parabola \mathcal{P} in krožnica \mathcal{C} , levo pa le konstrukcije iz danih podatkov – gorišče F' , premica vodnica D' , središče O ter krožnica $2\mathcal{C}$ z dvakrat večjim polmerom. Na obeh slikah so konstruirani vsi štirje pregibi oz. skupne tangente.



Slika 74: Konstrukcija skupnih tangent na krožnico in parabolo. Vzeto iz [3, str. 24–25].

Opomba 6.6. V tem razdelku za potrebe reševanja izjemoma potrebujemo šestilo, s katerim iz koeficientov kvartične enačbe konstruiramo krožnico.

Skupne tangente zato znamo zlahka konstruirati, pravo vprašanje pa je, kateri stožnici določa dana kubična oz. kvartična enačba. Kot omenjeno že v uvodu razdelka, si avtorja pri tem pomagata s projektivno ravnino.

Stožnice v projektivni ravnini

Definicija projektivne geometrije nad vektorskim prostorom V (mi bomo imeli $V = \mathbb{R}^3$.)

Stožnica \mathcal{S} ima v $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ (A ta “P” je normalen font al tak kot tle?) homogenizirano (?) enačbo

$$\mathcal{S} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0, \quad (6.2)$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\mathcal{S} : v^\top M v = 0, \text{ kjer sta } v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ in } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Pri tem je simetrična matrika M definirana do neničelnega skalarnega večkratnika natančno. Stožnica \mathcal{S} je *neizrojena* (ni unija dveh premic ali ene, dvojno štete premice), če ima poln rang, t. j. rang (*– dej v matematično okolje?*) $M = 3$ oz. ekvivalentno, $\det M \neq 0$. V nadaljevanju bomo delali le z neizrojenimi stožnicami, torej vedno obstaja inverz matrike M , ki je prav tako simetričen.

Iz prvega minorja matrike M lahko takoj preberemo, za katero vrsto neizrojene stožnice gre. Naj bo $A_M = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ (*Vir tega je Wikipedia: Matrix representation of conic sections. Kakšen bolj zanesljiv vir?*):

- \mathcal{S} je hiperbola, če in samo če $A_M < 0$,
- \mathcal{S} je parabola, če in samo če $A_M = 0$ in
- \mathcal{S} je elipsa, če in samo če $A_M > 0$. Če poleg tega velja še $a_{11} = a_{22}$ in $a_{12} = 0$, je \mathcal{S} krožnica.

(Definicija dualnosti?)

Dualno stožnico (a je prevod ok?) stožnice \mathcal{S} definiramo z inverzno matriko:

$$\hat{\mathcal{S}} : v^\top M^{-1} v = 0.$$

Naj bo $p \in \mathcal{S}$ točka na stožnici \mathcal{S} in naj bo $q = Mp$. Potem je

$$q^\top M^{-1} q = (Mp)^\top M^{-1} (Mp) = p^\top M^\top M^{-1} M p = p^\top M p = 0,$$

kar pomeni, da je $q \in \hat{\mathcal{S}}$. Ker je M obrnljiva, je preslikava $\mathcal{S} \longrightarrow \hat{\mathcal{S}}$ s predpisom $p \mapsto Mp$ bijekcija med stožnico \mathcal{S} in njeno dualno stožnico $\hat{\mathcal{S}}$. Kaj pa so točke dualne stožnice $\hat{\mathcal{S}}$? (*Dokončaj; zakaj je q ravno tangenta na \mathcal{S} ?*)

Naj bosta \mathcal{S}_1 in \mathcal{S}_2 stožnici s pripadajočima simetričnima obrnljivima matrikama M_1 in M_2 . Potem je njuna skupna tangenta skupna točka njunih dualnih stožnic $\hat{\mathcal{S}}_1$ in $\hat{\mathcal{S}}_2$. Torej iščemo $q \in \hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2$, (*a je q res prou tangenta? to je pač točka od dualne stožnice*) ki reši sistem enačb

$$q^\top M_1^{-1} q = 0 \quad \text{in} \quad q^\top M_2^{-1} q = 0. \tag{6.3}$$

kakšne oblike je q ? oziroma tangenta?

Reševanje kubične enačbe

Zopet rešujemo kubično enačbo oblike $x^3 + bx^2 + cx + d = 0, d \neq 0$. Za stožnici vzamemo naslednji paraboli:

- $\mathcal{P}_1 : (y + c)^2 = -4d(x - b)$ z goriščem $F_1(b - d, -c)$ in premico vodnico $L_1 : x = b + d$,
- $\mathcal{P}_2 : x^2 = -4y$ z goriščem $F_2(0, -1)$ in premico vodnico $L_2 : y = 1$.

Opomba 6.7. Opazimo, da gre za enako izbiro parabol kot pri Geretschlägerjevi metodi (opomba 6.5.), le da so tu spremenljivke pomnožene za faktor -2 .

Iz enačb parabol zapišemo njuni matriki

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2d \\ 0 & 1 & c \\ 2d & c & c^2 - 4bd \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ter izračunamo njuna inverza

$$M_1^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} b & -c/2 & 1/2 \\ -c/2 & d & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $q = [A \ B \ C]^\top \in \hat{\mathcal{P}}_1, \hat{\mathcal{P}}_2$ skupna tangenta (je to res "tangenta" al kako se temu reče?) na paraboli \mathcal{P}_1 in \mathcal{P}_2 . Iz sistema enačb 6.3 dobimo nov sistem

$$bA^2 - cAB + AC + dB^2 = 0 \quad \text{in} \quad -BC = A^2. \quad (6.4)$$

Da dobimo nevertikalno afino skupno tangento na paraboli \mathcal{P}_1 in \mathcal{P}_2 , normaliziramo $B = -1$ in $z = 1$, s čimer dehomogeniziramo (? poglej kako je z izrazi, pa $z = 1$ je verjetno pač k je afina ravnina, zakaj pa je $B = -1$?) tangento $Ax + By + Cz = 0$ v $y = Ax + C$. S tem se druga enačba v sistemu 6.4 preuredi v $C = A^2$, prva pa v

$$A^3 + bA^2 + cA + d = 0,$$

kar pomeni, da nam A , koeficient skupne tangente, reši izvorno kubično enačbo.

Opomba 6.8. S konstrukcijo pregibov pa še ne dobimo njegovega koeficiente. V praksi lahko to storimo tako, da poiščemo presečišče pregiba z x -osjo, npr. točko $(x_0, 0)$ in na razdalji 1 v desno konstruiramo pravokotnico na x -os skozi točko $(x_0 + 1, 0)$, ki bo tangento sekala ravno v točki $(x_0 + 1, A)$. Sedaj lahko tudi uradno potrdimo konstrukcijo realne rešitve kubične enačbe. Lahko daš eno sliko za izi prikaz.

Dodaj konkreten primer iz članka, origami pregibe si tudi fizično sprobala na enem listi.

Reševanje kvartične enačbe

Kot že povedano, sledeči postopek ne rešuje splošne enačbe četrte stopnje, temveč njeni zreducirano obliko

$$x^4 + bx^2 + 2cx + d = 0 \quad (6.5)$$

(Omeni, da se da vsako kvartično enačbo zreducirat v to?) Smiselno predpostavimo $d \neq 0$, saj bi se v nasprotnem primeru pri eliminaciji ničle $x = 0$ enačba prevedla na kubično. Poleg tega predpostavimo še $c \neq 0$, ki nam prepreči, da bi se enačba z uvedbo nove spremenljivke za x^2 prevedla celo na kvadratno enačbo.

omeni Bezuatov izrek al kaj je že in da dualne stožnice imajo kvadratno enačbo, kar pomeni, da imata dve največ štiri skupne točke (tangente) v kompleksni projektivni ravnini; ker so inverzne matrike realne, nastopajo v konjugiranih parih, torej imata po nič, dve ali štiri skupne tangente (šteto z večkratnostjo). A je tu not tudi tangenta v neskončnosti všteta? Skratka, dve paraboli pa imata skupno tangento

v neskončnosti, kar pomeni, da potem ne pustita dovolj afinih tangent, ki bi rešile kvartično enačbo (ker so affine tangente največ tri). Zato ne moremo vzeti dveh parabol.

Zgornjo metodo bi lahko uporabili tudi tu. Avtorja pri predpostavki $bd - c^2 \neq 0$ vzameta naslednji stožnici:

- $\mathcal{S} : dx^2 + 2cxy + by^2 + bd - c^2 = 0$ in
- parabolo od prej, t. j. $\mathcal{P} : x^2 = -4y$.

Bralec je povabljen, da po enakem postopku kot pri kubični enačbi izpelje, da koeficient skupne tangente $y = Ax + C$ reši enačbo 6.5. ([To si izpeljala](#)). Stožnicama \mathcal{S} in \mathcal{P} zaporedoma pripadata matriki

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} d & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & bd - c^2 \end{bmatrix} \text{ in } M_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker za glavni minor matrike $M_{\mathcal{S}}$ velja $A_{M_{\mathcal{S}}} = bd - c^2 \neq 0$, stožnica \mathcal{S} ni parabola in ker velja $c \neq 0$, ne more biti niti krožnica. Torej je lahko le elipsa ali hiperbola. Tu pa nastane težava, saj avtorja nista uspela najti splošne geometrijske metode za konstrukcijo skupne tangente na parabolo in elipso oz. hiperbolo. Ker pa znamo konstruirati skupno tangento na parabolo in krožnico, predlagata malo prilagojen postopek, ki je sicer algebraično manj eleganten, vendar geometrijsko toliko lažje izveden.

Pri danih koeficientih b, c, d enačbe 6.5 vpeljimo novi oznaki

$$e = \frac{\sqrt{bd - c^2}}{d} \text{ in } r = |e|\sqrt{-d},$$

iz česar sledita relaciji, ki ju bomo kasneje uporabili pri izpeljavi:

$$b = de^2 + \frac{c^2}{d^2} \text{ in } -\frac{de^2}{r^2} = 1. \quad (6.6)$$

Opomba 6.9. Smiselno za koeficiente b, c, d predpostavimo $bd - c^2 > 0$ in $d < 0$. Zato s tem postopkom ne moremo reševati poljubnih enačb četrte stopnje. Avtorja nato predlagata naslednji matriki za dualni stožnici $\hat{\mathcal{C}}$ in $\hat{\mathcal{P}}$:

$$M_{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 \end{bmatrix} \text{ in } M_{\mathcal{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & de/2 \\ 0 & -d & c/2 \\ de/2 & c/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če izračunamo njuna inverza, dobimo matriki

$$M_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{bmatrix} \text{ in } M_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{d^3 e^2} \begin{bmatrix} c^2 & -cde & -2d^2 e \\ -cde & d^2 e^2 & 0 \\ -2d^2 e & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz njiju zapišemo predpisa stožnic v affini ravnini ($z = 1$) in dobimo:

- krožnico $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ s središčem v $S(0, 0)$ in polmerom r ter
- parabolo $\mathcal{P} : c^2x^2 - 2cdexy + d^2e^2y^2 - 4d^2ex = 0$ (ker je $A_{M_{\mathcal{P}}} = 0$, je \mathcal{P} res parabola).

Z določitvijo gorišča in premice vodnice parabole \mathcal{P} se bomo ukvarjali pozneje; najprej algebraično poiščimo skupno tangento na dani stožnici.

Naj bo $q = [A \ B \ C]^\top$ presečišče dualnih stožnic $\hat{\mathcal{C}}$ in $\hat{\mathcal{P}}$. Iz sistema enačb 6.3 dobimo nov sistem

$$A^2 + B^2 = \frac{C^2}{r^2} \text{ in } deAC - dB^2 + cBC = 0. \quad (6.7)$$

Z določitvijo $B = -1$ in $z = 1$ zopet dobimo afino obliko skupne tangente kot $y = Ax + C$. Ko B vstavimo v sistem 6.7, prvo enačbo množimo z de^2C^2 , drugo kvadriramo, delimo z d in vstavimo v prvo enačbo, dobimo

$$-\frac{de^2}{r^2}C^4 - (de^2 + \frac{c^2}{d})C^2 + 2cC + d = 0.$$

V dobljeno enačbo vstavimo relaciji 6.6 in dobimo

$$C^4 + bC^2 + 2cC + d = 0,$$

kar pomeni, da nam C , začetna vrednost tangente oz. njeno presečišče z ordinatno osjo reši izvorno kvartično enačbo.

Sedaj poiščimo še gorišče in premico vodnico parabole \mathcal{P} . Potem bo postopek konstrukcije skupne tangente, kot smo ga opisali že zgoraj – najprej narišemo krožnico s središčem S in polmerom $2r$ ter gorišče in premico vodnico parabole. Nato opravimo pregib, ki hkrati položi gorišče na premico vodnico in središče krožnice na njen rob. Presečišče pregiba z ordinatno osjo je rešitev naše enačbe (seveda poiščemo vse možne pregibe, ki so največ štirje).

Iz enačbe parabole $\mathcal{P} : c^2x^2 - 2cdexy + d^2e^2y^2 - 4d^2ex = 0$ ne moremo enostavno prebrati gorišča in premice vodnice, zato (x, y) -sistem prevedimo v (a je izraz primeren?) (z, w) -sistemu s sledečo preslikavo (od kje pride ta P ?):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} z \\ w \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } P = \begin{bmatrix} c/bd & de & c^2e/b^2 \\ -e/b & c & -(bc + cde^2)/b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ko to vstavimo v matrično enačbo parabole $[x \ y \ 1]P[x \ y \ 1]^\top$, po računanju in poenostavljanju¹² na koncu dobimo

$$\mathcal{P} : z^2 = 4d^3e^2w.$$

V (z, w) sistemu ima parabola gorišče v $F_{zw}(0, d^3e^2)$ in premico vodnico $L_{zw} : w = -d^3e^2$ oziroma $L_{zw} : (z, w) = (0, -d^3e^2) + t(1, 0), t \in \mathbb{R}$. Izhodišče v (x, y) -sistemu je tako v točki $O_{xy}(c^2e/b^2, -(bc + cde^2)/b^2)$. Iz tega lahko izračunamo še gorišče in premico vodnico v (x, y) -sistemu:

$$F_{xy} = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ d^3e^2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow F_{xy} = O_{xy} + d^3e^2(de, c) = \left(\frac{c^2e}{b^2} + d^4e^3, -\frac{bc + cde^2}{b^2} + cd^3e^2 \right),$$

¹²Za izračun je potrebna programska oprema, kot je npr. Wolfram Mathematica. [imaš zračunano](#), lahko vstavim [Screenshot za dokaz, da sem zračunala?](#)

$$L_{xy} = P \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -d^3e^2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow L_{xy} : (x, y) = O_{xy} - d^3e^2(de, c) + t(c, -de), t \in R.$$

V eksplisitni obliki je enačba za premico vodnico

$$L_{xy} : y = -\frac{de}{c} \cdot x - \frac{1}{bc}(c^2 + bc^2d^3e^2 + bd^5e^4).$$

Kot vidimo, gorišče in premica vodnica nimata lepih predpisov, vendar je po eni strani ta metoda precej bolj zanimiva kot pretvorba kvartične enačbe na enačbe nižje stopnje in reševanje z običajno Lillovo metodo.

lahko daš še slikovni primer (slika 4 iz istega vira) poleg konkretne enačbe, samo za okus. Sta pa slika 3 in slika 4 povezani med sabo, gre za iste podatke.

7 Alhazenov problem

Vir: članek od mentorja in tudi [22, str. 137–139].

Problem se prevede na iskanje elipse, ki je tangentna na dano krožnico in ima uni dve točki za gorišče. Zaenkrat ta tema ni povezana s tem, kar smo do zdaj delali, bom videla, ali jo vključim ali ne.

8 Origami konstrukcije z več hkratnimi prepogibi

Kvartična enačba (str. 386, https://www.researchgate.net/publication/255578688_One_Two_and_Multi-Fold_Origami_Axioms#pf16)

Alperin, Lang, Lucero so neki delali, 2-fold origami za teve enačbe.

Kvintična enačba
petinjenje kota

9 Zaključek

Prepogibanje z enkratnimi pregibi, brez svinčnika. Znamo zrcalit, rotirati točke, prenašati razdalje (simulacija krožnice).

Origami konstrukcije so močnejše od evklidskih – medtem ko lahko z neoznačenim ravnalom in šestilom konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti (oz. poljubna števila oblike $a + b\sqrt{r}$; $a, b, r \in \mathbb{Q}$), zmoremo s prepogibanjem papirja poleg tega reševati še kubične in kvartične enačbe, tretjiniti poljubne kote, konstruirati tretje korene poljubnih origami-konstruktibilnih števil ter **konstruirati N -kotnike za vsak N oblike $2^i3^j(2^k3^l + 1)$** , kjer je število v oklepaju **praštevilo**. Zaslugo za nadvlado origamija nad evklidskim orodjem ima Belochin pre gib, ki edina od origami operacij ne more biti konstruirana z neoznačenim ravnalom in šestilom.

Zelo didaktičen pripomoček za popestritev pouka in pokazat, kako se matematiki skriva v malih stvareh, kako jo opaziti, kako sam izpeljati stvari, raziskovati, kako konstrukcija deluje (preko podvprašanj ipd. kot ima hull2013).

The Influence of Origami on mathematics Study by Yutian Wong (script.org) ima lepe misli in zaključek, lohk kej ponucaš. Maš to na telefonu v enem zavihu.

Literatura

- [1] R. C. Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York Journal of Mathematics **6** (2000) 119–133, dostopno na <https://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf>.
- [2] R. F. Amir Fathi Pooya Mobadersany, *A simple method to solve quartic equations*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences **6**(6) (2012) 331–336.
- [3] J. S. B. Carter Edwards, *Folding quartic roots*, Mathematics Magazine **74**(1) (2001) 19–25.
- [4] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.
- [5] W. contributors, *Quartic equation – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2024, dostopno na https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quartic_equation&oldid=1262196167.
- [6] R. Geretschläger, *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine **68**(5) (1995) 357–371, dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2690924>.
- [7] R. Geretschläger, *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine **68**(5) (1995) 357–371, [ogled 29.12.2024], dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2690924>.
- [8] K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [9] K. Hatori, *Origami Construccions*, 2003, dostopno na <https://origami.ousaan.com/library/conste.html>.
- [10] T. L. Heath, *The thirteen books of euclid's elements, Vol. 1 (books i and ii)*, Dover Publications, Inc., 1956.
- [11] T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na <https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ>.
- [12] T. C. Hull, *Project origami: activities for exploring matmehatics – second edition*, Taylor & Francis Group, 2013.
- [13] T. C. Hull, *Solving cubics with creases: the work of beloch and lill*, The American Mathematical Monthly **118**(4) (2011) 307–315.
- [14] M. Jerman, *O konstrukcijah z ravnilom in šestilom*, Obzornik za matematiko in fiziko **3**(45) (1998) 73–78.
- [15] D. Johnson, *Paper folding for the mathematics class*, National Council of Teachers of Mathematics, 1957.
- [16] R. J. Lang, *British origami*, Four Problems **132**(3) (1988) 7–11.

- [17] R. J. Lang, *Origami and geometric constructions*, v: 2013, dostopno na https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf.
- [18] P. Lavrič, *Hagovi izreki za srebrne pravokotnike*, 2013, dostopno na http://pefprints.pef.uni-lj.si/1534/1/Hagovi_izreki_za_srebrne_pravokotnike_PetraLavric.pdf.
- [19] E. Lill, *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*, Nouvelles Annales de Mathématiques **6**(2) (1867) 359–362.
- [20] A. J. Lotka, *Construction of conic sections by paper-folding*, School Science and Mathematics **7**(7) (1907) 595–597.
- [21] S. Maraž, T. Božič in M. Torkar, *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.
- [22] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Springer New York, 1997.
- [23] P. Messer, *Problem 1054*, Crux Mathematicorum **12**(10) (1986) 284–285, dostopno na https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v12n10_Dec.pdf.
- [24] M. Mrinal, *Galois theory and the abel-ruffini theorem*, v: 2019, dostopno na <https://math.uchicago.edu/~may/REUPapers/Mrinal.pdf>.
- [25] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na <https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami>.
- [26] M. Hvidsten, *Geometry with geometry explorer* (ur. R. E. Ross), The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.
- [27] S. G. Smith, *Paper folding and conic sections*, The Mathematics Teachers **96**(3) (2003) 202–207.
- [28] C. R. Videla, *On points constructible from conics*, The Mathematical Intelligencer **19**(2) (1997).
- [29] Wikipedia contributors, *Envelope (mathematics)* — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2024, dostopno na [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Envelope_\(mathematics\)&oldid=1223619712](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Envelope_(mathematics)&oldid=1223619712).
- [30] T. S. Row, *Geometric exercises in paper folding* (ur. D. E. S. Wooster WOo-druff Beman), The Open Court Publishing Company, 1917, dostopno na <https://ia800907.us.archive.org/7/items/tsundararowsgeo00rowrich/tsundararowsgeo00row.pdf>.
- [31] T. Zore, *Origami geometrija*, 2022, dostopno na http://pefprints.pef.uni-lj.si/7209/1/Origami_geometrija_-_Tja%C5%A1a_Zore.pdf.