UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

OSNOVNE KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE ENAČB Z ORIGAMIJEM (BWO?)

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Osnovna literatura

1. T. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.
2. K. Haga, *ORIGAMICS: Mathematical Explorations Through Paper Folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

Podpis mentorja:

Osnovne konstrukcije in reševanje enačb z origamijem (bwo?)

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

Angleški prevod slovenskega naslova dela

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: integracija, kompleks, C^*-algebre

Keywords: integration, complex, C^*-algebras

1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

Začnimo z odzivom mojih prijateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le (že tako izjemno širokega) področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebre, diferencialne topologije . . . Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [4, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, pred l. 1600 po Kr. ni). V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852), izumitelj vrtca, v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri izobraževanju in origami se je kot umetnost oblikovanja oblik iz lista papirja do konca 20. stoletja hitro razširil po vsem svetu [7].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da prepogibanje papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa vključuje neko motorično aktivnost in spretnost. Poleg fine motorike krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih le nekaj seminarskih, diplomskih in magistrskih del, vendar je tematika v njih ožja. Ta naloga tako zajema širše področje, zaradi česar je tudi daljša, vendar je tako tudi zaradi namena kasnejše uporabe pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih da večinoma predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe evklidskih orodij (neoznačeno ravnilo ter šestilo) raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali povezavo med evklidskimi ter origami konstrukcijami in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo še kaj, česar z evklidskimi orodji ne moremo. Nato si bomo v naslednjem poglavju pogledali, kako konstruiramo tangente na stožnice in zakaj konstrukcije tako delujejo. V tretjem poglavju sledi prepogibanje kvadratnega lista papirja, ki nam lahko stranice kvadrata razdeli v zanimivih razmerjih. Pogledali si bomo Hagove izreke in se naučili, kako stranico razdelimo na poljubno število enako dolgih delov. Poleg kvadrata je zanimiva tudi konstrukcija enakostraničnega trikotnika, ki ga lahko dobimo na več načinov, poleg teh pa si bomo v četrtem poglavju pogledali še konstrukcije tudi kakih drugih pravilnih n-kotnikov.

Po tej bolj osnovni geometriji se bomo v petem poglavju podali na vznemirljivo reševanje dveh starogrških problemov, ki ju z evklidskimi orodji – dokazano – ne znamo rešiti; to sta *podvojitev kocke* (oz. konstrukcija $\sqrt[3]{2}$) in *trisekcija kota*. Izkaže se, da se da vsakega od njiju rešiti celo na več kot en način!

Nazadnje pa se bomo posvetili še najbolj obsežnemu poglavju, ki deloma zapusti področje geometrije. Pogledali si bomo, kako lahko s pomočjo prepogibanja papirja rešujemo kvadratne in kubične enačbe, za bolj zahtevne pa bosta zanimivi podpoglavji o reševanju enačb 4. in 5. reda.

Zapustimo sedaj malo jezerce umetelno zloženih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Možno je, da so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja ("oru" – prepogibati, "kami" – papir) se je na Daljnem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvom, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [8]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastal izraz "*origamics*", ki bi ga lahko po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physisc* – fizika itd.) prevedli kot "origamika" [5] (uradnega izraza v slovenščini še ni).

2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida[1], ki je napisal zelo znano zbirko trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi.* V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij[2], aksiomov[3] in postulatov[4]. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definiral osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat ... ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov [3], iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

Postulat 1. Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

Postulat 2. Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

Postulat 3. Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

Postulat 4. Vsi pravi koti so med seboj skladni.

[1] O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [1, str. 61].

[2] *Definicija* je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

[3] *Aksiom* je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

[4] *Postulat* je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [3, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmoma ne ločujemo [6, str. 2].

Postulat 5. Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

Opomba 2.1. Vemo že, da je postulat 5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

Evklidske konstrukcije so konstrukcije premic, kotov, krožnic in drugih geometrijskih figur, ki jih je mogoče konstruirati le z uporabo t.i. *evklidskih orodij*:

- neoznačeno in neskončno dolgo ravnilo (anlg. *straightedge*)
- šestilo, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj)

Formalno so torej edine dovoljene konstrukcije tiste iz postulatov 1– 3. Seveda privzamemo, da so konstruktibilne tudi točke.

Velika motivacija za uvedbo origami konstrukcij je ta, da lahko z njimi rešimo kar dva od treh znamenitih problemov, ki jih z evklidskim orodjem ne moremo. Več o tem sledi v poglavju 6.

2.2 Origami aksiomi

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini, tj. list papirja vzamemo za model evklidske ravnine, s prepogibanjem pa v tej ravnini tudi ostanemo. Nadalje pregibe konsktruiramo le po enega naenkrat in v ravni črti, prepovedana pa je uporaba kakršnegakoli orodja (npr. škarje in lepilo). Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije tudi sam preizkusi na listu papirja, sicer pa se jih da brez večjih težav predstavljati tudi brez materiala.

Ker so pregibi torej ravne črte, nam služijo kot modeli premic. Kaj so potem modeli točk? Ravno presečišča premic, torej presečišča pregibov.

Japonski matematik Humiaki Huzita je l. 1992 (REFERENCA 26 v uni knjigi, pa v bistvu ugotovi, kdo je original avtor in kdo je kasneje koliko aksiomov rediscoveral!) zapisal seznam pravil, s katerimi lahko opišemo vse operacije, ki jih lahko naredimo s prepogibanjem papirja. (najprej 6, pol 7, kako je to blo?????) . Ta pravila so znana pod imenom . . . aksiomi, vendar je izbira izraza "aksiom" mogoče manj primerna, saj za nekatere od njih opisana konstrukcija ob neprimerno izbranih točkah in premicah sploh ne obstaja. Kljub temu bomo zaradi razširjenosti rabe to ime ohranili [8, str. 7]. Sedaj pa si jih podrobneje poglejmo:

Aksiom 1 (O1)**.** Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p, ki gre skoznju.

Aksiom 2 (O2)**.** Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p, da se točki pokrijeta.

Aksiom 3 (O3)**.** Za poljubni premici a in b obstaja pregib, ki ju položi eno na drugo.

Opomba 2.2. Če sta premici vzporedni, je tak pregib en sam, sicer pa sta pregiba dva.

Aksiom 4 (O4)**.** Za poljubno točko A in premico a obstaja natanko en pregib skozi točko A, ki je pravokoten na premico a.

Aksiom 5 (o5)**.** Za primerno izbrani točki A in B ter premico a obstaja pregib p skozi točko B, ki točko A postavi na premico a.

Aksiom 6 (06)**.** Za primerno izbrani točki A in B ter premici a in b obstaja pregib p, ki točko A postavi na premico a ter točko B na premico b.

Aksiom 7 (O7)**.**

Hitro lahko vidimo, da je aksiom O1 ekvivalenten postulatu 1. popravi reference za aksiome ... PLUS Še ostala povezava s postulati!!!!. Aksiom O2 nam poda konstrukcijo simetrale daljice AB, aksiom O3 pa simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče (v primeru vzporednosti dobimo premico, ki je enako oddaljena od obeh premic). Aksiom O4 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko. tukej še manjka povezava prou z EVKLIDSKIMI konstrukcijami.

3 Zlaganje stožnic

4 Prepogibanje kvadrata

5 Konstrukcija pravilnih n-kotnikov

6 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

Naštev vse tri. Onega od π se ne da rešiti?

7 Reševanje enačb

Literatura

[1] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.

[2] K. Haga, *ORIGAMICS: Mathematical Explorations Through Paper Folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

[3] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1 (Books I and II)*, Dover Publications, Inc., 1956.

[4] T. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

[5] S. Maraž, T. Božič in M. Torkar, *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.

[6] G. E. Martin, *Geomteric Constructions*, Springer New York, 1997.

[7] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na `https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami`.

[8] T. Zore, *Origami geometrija*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2022.