UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

OSNOVNE KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE ENAČB Z ORIGAMIJEM (BWO?)

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Osnovna literatura

1. T. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

2. K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

Podpis mentorja:

Osnovne konstrukcije in reševanje enačb z origamijem (bwo?)

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

Angleški prevod slovenskega naslova dela

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99
Ključne besede: integracija, kompleks, C^*-algebre
Keywords: integration, complex, C^*-algebras

1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

Začnimo z odzivom mojih prijateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le (že tako izjemno širokega) področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebre, diferencialne topologije ... Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [2].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, pred l. 1600 po Kr. ni). V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852), izumitelj vrtca, v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri izobraževanju in origami se je kot umetnost oblikovanja oblik iz lista papirja do konca 20. stoletja hitro razširil po vsem svetu [3].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da prepogibanje papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa vključuje neko motorično aktivnost in spretnost. Poleg fine motorike krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem iz geometrijskega področja.

V geometriji preko Evklidovih aksiomov ter uporabe evklidskih orodij (neoznačeno ravnilo ter šestilo) raziskujemo, kaj vse lahko skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali povezavo med evklidskimi ter origami konstrukcijami in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo še kaj, česar z evklidskimi orodji ne moremo. Nato si bomo v naslednjem poglavju pogledali, kako konstruiramo tangente na stožnice in zakaj konstrukcije tako delujejo. V tretjem poglavju sledi prepogibanje kvadratnega lista papirja, ki nam lahko stranice kvadrata razdeli v zanimivih razmerjih. Pogledali si bomo Hagove izreke in se naučili, kako stranico razdelimo na poljubno število enako dolgih delov. Poleg kvadrata je zanimiva tudi konstrukcija enakostraničnega trikotnika, ki ga lahko dobimo na več načinov, poleg teh pa si bomo v četrtem poglavju pogledali še konstrukcije tudi kakih drugih pravilnih n-kotnikov.

Po tej bolj osnovni geometriji se bomo v petem poglavju podali na vznemirljivo reševanje dveh starogrških problemov, ki ju z evklidskimi orodji – dokazano – ne znamo rešiti; to sta *podvojitev kocke* (oz. konstrukcija $\sqrt[3]{2}$) in *trisekcija kota*. Izkaže se, da se da vsakega od njiju rešiti celo na več kot en način!

Nazadnje pa se bomo posvetili še najbolj obsežnemu poglavju, ki deloma zapusti področje geometrije. Pogledali si bomo, kako lahko s pomočjo prepogibanja papirja rešujemo kvadratne in kubične enačbe, za bolj zahtevne pa bosta zanimivi podpoglavji o reševanju enačb 4. in 5. reda.

Literature v slovenskem jeziku, ki opisuje uporabo origamija pri pouku matematike, še nisem zasledila. Na to temo je sicer že spisanih nekaj seminarskih, diplomskih in magistrskih del, vendar je tematika v njih ožja. Ta naloga zajema širše področje, zaradi česar je tudi daljša, vendar je tako tudi zaradi namena kasnejše uporabe pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih da večinoma pregledati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov način.

2 Origami aksiomi in povezava z evlikdskimi konstrukcijami

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Možno je, da so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja ("oru" – prepogibati, "kami" – papir) se je na Daljnem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja. Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvom, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [4]

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini, tj. list papirja vzamemo za model evklidske ravnine, s prepogibanjem pa v tej ravnini tudi ostanemo. Nadalje pregibe konsktruiramo le po enega naenkrat in v ravni črti, prepovedana pa je uporaba katerega drugega orodja (npr. škarje in lepilo). Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije tudi sam preizkusi na listu papirja, sicer pa se jih da brez večjih težav predstavljati tudi brez materiala.

povezava me dprepogibi in premicami

3 Zlaganje stožnic

4 Prepogibanje kvadrata

5 Konstrukcija pravilnih n-kotnikov

6 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

Naštev vse tri. Onega od π se ne da rešiti?

7 Reševanje enačb

Literatura

[1] K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

[2] T. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

[3] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na `https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami`.

[4] T. Zore, *Origami geometrija*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2022.