UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

OSNOVNE KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE ENAČB Z ORIGAMIJEM (BWO?)

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Osnovna literatura

1. T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

2. K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

Podpis mentorja:

Osnovne konstrukcije in reševanje enačb z origamijem (bwo?)

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

Angleški prevod slovenskega naslova dela

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: integracija, kompleks, C^*-algebre

Keywords: integration, complex, C^*-algebras

1 Uvod

Začnimo z odzivom mojih prijateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le – že tako izjemno širokega – področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebre, diferencialne topologije . . . Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [12, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, pred letom 1600 po Kr. ni). Oblikovanje oblik iz lista papirja se je do konca 20. stoletja hitro razširilo po vsem svetu [24]. Matematični vidik origamija je v ospredje prišel nekoliko kasneje. V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852) v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri poučevanju osnovne geometrije v vrtcu. Indijski matematik Tandalam Sundara Row je nato l. 1893 izdal obsežno knjigo *Geometric Exercises in Paper Folding* [29], v kateri popisuje konstrukcije raznolikih geometrijskih likov in celo krivulj. Velik prelom je dosegla italijanska matematičarka Margherita P. Beloch, ki je v 30-ih letih 20. st. odkrila, da lahko s prepogibanjem papirja rešujemo celo kubične enačbe. Vseeno je preteklo še pol stoletja, da je origami začel zanimati tudi širšo znanost, od takrat pa se je na tem področju odprlo veliko priložnosti za raziskovanje koncepta origamija in uporabo prepogibanja v najrazličnejših strokah [12, str. 10].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da lahko praktična izkušnja prepogibanja papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa vključuje neko motorično aktivnost in spretnost. Poleg fine motorike krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih nekaj člankov in seminarskih nalog ter diplomskih in magistrskih del, strokovnih knjig iz tega področja pa nisem našla. Ta naloga zajema predvsem uporabo origamija za namene raziskovanja geometrije ter reševanja enačb in vključuje veliko slik z orisanimi konstrukcijami. Zato je tudi daljša, vendar je tako tudi zaradi namena kasnejše uporabe pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih večinoma da predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

(Nekej sprememb je blo v vsebini in vrstnem redu, na koncu popravi še tukej pri uvodu!)

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe evklidskih orodij (neoznačeno ravnilo ter šestilo) raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali osnovne evklidske ter origami operacije in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo še kaj, česar z evklidskimi orodji ne moremo. V drugem poglavju se bomo ukvarjali s konstrukcijami tangent na stožnice. V tretjem poglavju sledi prepogibanje kvadratnega lista papirja, ki nam lahko stranice kvadrata razdeli v zanimivih razmerjih. Pogledali si bomo Hagove izreke in se naučili, kako stranico razdelimo na poljubno število enako dolgih delov. Poleg kvadrata je zanimiva tudi konstrukcija enakostraničnega trikotnika, ki ga lahko dobimo na več načinov, poleg teh pa si bomo v četrtem poglavju pogledali še konstrukcije tudi kakih drugih pravilnih n-kotnikov.

Po tej bolj osnovni geometriji se bomo v petem poglavju podali na vznemirljivo reševanje dveh starogrških problemov, ki ju z evklidskimi orodji – dokazano – ne znamo rešiti; to sta *podvojitev kocke* (oz. konstrukcija $\sqrt[3]{2}$) in *trisekcija kota*. Izkaže se, da se da vsakega od njiju rešiti celo na več kot en način!

Nazadnje pa se bomo posvetili še najbolj obsežnemu poglavju, ki deloma zapusti področje geometrije. Pogledali si bomo, kako lahko s pomočjo prepogibanja papirja rešujemo kvadratne in kubične enačbe, za bolj zahtevne pa bosta zanimivi podpoglavji o reševanju enačb 4. in 5. stopnje.

Zapustimo sedaj malo jezerce umetelno zloženih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Verjetno so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga [24]. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja ("oru" – prepogibati, "kami" – papir) se je na Daljnem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvom, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [30]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastalo poimenovanje "*origamics*". V slovenščini uradnega prevoda še ni, Grahor pa v [21, str. 5] po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physics* – fizika itd.) predlaga termin "origamika".

2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida[1], ki je napisal zelo znano zbirko trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi*. V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij[2], aksiomov[3] in postulatov[4]. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definiral osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat . . . ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic [11]. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov, iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

Postulat P1. Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

Postulat P2. Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

Postulat P3. Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

Postulat P4. Vsi pravi koti so med seboj skladni.

[1] O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [4, str. 61].

[2] *Definicija* je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

[3] *Aksiom* je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

[4] *Postulat* je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [11, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmoma ne ločujemo [22, str. 2].

Postulat P5. Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

Opomba 2.1. Vemo že, da je postulat P5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

Definicija 2.2. *Evklidske konstrukcije* so konstrukcije točk, daljic, premic, krožnic in tistih geometrijskih objektov, ki jih je mogoče konstruirati le z uporabo t. i. *evklidskih orodij*:

- neoznačeno in neskončno dolgo ravnilo (angl. *straightedge*) in
- šestilo, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj).

Opomba 2.3. Da se pokazati, da lahko za konstrukcije ekvivalentno uporabimo tudi šestilo, ki prenaša razdalje [22, str. 6–7]. Zato imamo odslej z izrazom *šestilo* v mislih kar moderno šolsko šestilo.

Konstrukcije iz definicije temeljijo na postulatih P1–P3. Vendar je to dovolj, da lahko le z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo premice, kote, simetrale kotov in daljic, krožnice, nekatere geometrijske like in še kaj.

Izkaže pa se, da z evklidskim orodjem ne moremo konstruirati česarkoli – kot zelo znane primere lahko tu naštejemo tri starogrške probleme. Pri *kvadraturi kroga* nam evklidsko orodje ne zmore konstruirati razdalje $\sqrt{\pi}$, pri *podvojitvi kocke* razdalje $\sqrt{2}$, pri *trisekciji kota* ne zmore poljubnega kota razdeliti na tri enake dele. Drugi in tretji problem sta, verjetno za marsikoga presenetljivo, rešljiva z origamijem. V razdelku 3.4 si bomo pogledali njuni rešitvi, sedaj pa podrobneje spoznajmo še konstrukcije, ki jih dobimo s prepogibanjem papirja.

2.2 Origami konstrukcije

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini in se z trodimenzionalni modeli ne ukvarjamo. Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije praktično preizkusi tudi sam. Pri izbiri papirja je priporočljiv rahlo prosojen papir, skozi katerega se vidijo morebitne označbe točk in premic s svinčnikom (npr. navaden kuhinjski papir za peko).

Bistvo origamija je, da prepogibamo list papirja, ki nam služi kot model evklidske ravnine, vendar si moramo določiti nekaj pravil:

- konstruiramo le *ravne* pregibe,
- pregibe opravljamo *po enega naenkrat*, torej po vsakem pregibu papir nazaj razgrnemo,
- ne uporabljamo drugih orodij, kot so škarje, lepilo ipd.,

- pomožne točke, za katere vemo, da jih znamo konstruirati, ampak bi nam pomožni pregibi zmanjšali preglednost konstrukcije, lahko označimo s pisalom (npr. zrcaljene točke v nadaljevanju). Prav tako lahko že konstruirane točke in premice s pisalom in s pomočjo ravnila močneje poudarimo.

Ker so pregibi ravni, nam služijo kot modeli premic, modeli točk pa so njihova presečišča. Dogovorimo se še, da ne opravljamo naključnih pregibov, temveč papir prepogibamo tako, da se objekti na njem (točke in premice) prekrijejo. Zato moramo na začetku imeti na listu že nekaj danih objektov (npr. dve različni točki ali premico in točko, ki ne leži na njej). Če poskusimo razmisliti, kaj so potem vsi možni dovoljeni prepogibi, pridemo do sledečih petih možnosti (za njihov slikovni prikaz gl. [12, str. 25–26]):

- točko prepognemo na drugo točko (en možen pregib),
- točko prepognemo samo vase (neskončno možnih pregibov),
- točko prepognemo na premico (neskončno možnih pregibov),
- premico prepognemo na drugo premico (en ali dva možna pregiba) in
- premico prepognemo samo vase (neskončno možnih pregibov).

Definicija 2.4. *Origami konstrukcije* so konstrukcije točk, premic in tistih geometrijskih objektov, ki jih je mogoče konstruirati le z ravnimi in enkratnimi prepogibi iz zgornjega seznama.

2.2.1 Origami operacije

V zadnjem stoletju se je preko več matematikov (Jacques Justin, Peter Messer, Benedetto Scimemi, Humiaki Huzita, Koshiro Hatori, George E. Martin idr.; nekateri so med seboj sodelovali, drugi so delovali neodvisno) skozi čas izoblikoval seznam t. i. *origami operacij*[5], ki zajamejo vseh pet možnosti prepogibanja. Da so to zadostne operacije za katerokoli origami konstrukcijo, si bomo pogledali v razdelku 2.2.2.

Seznam se je med avtorji razlikoval v številu (gl. [12, str. 29–30]), kot končen seznam pa bomo tu navedli vseh osem naštetih – na prvi pogled različnih – operacij. Najprej jih naštejmo, potem pa si ob sledečih slikah poglejmo še prikaz opisanih konstrukcij. Videli bomo, da moramo pri nekaterih operacijah ločiti več primerov [25, 30].

Operacija O1. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p, ki gre skoznju.

Operacija O2. Za poljubni premici lahko določimo njuno presečišče, če obstaja.

Operacija O3. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p, da se točki pokrijeta.

[5] Najbolj znanih pod imenom *Huzita-Hatori aksiomi*, vendar izraz *aksiom* tu ni primeren, saj bomo kmalu pokazali, da se med seboj prepletajo so nekateri izmed njih kombinacija drugih. Prav tako v nalogi opustimo ime avtorjev, ker je seznam delo veliko več matematikov kot le Hatorije in Huzite.

Operacija O4. Za poljubni premici a in b obstaja pregib p, ki ju položi eno na drugo.

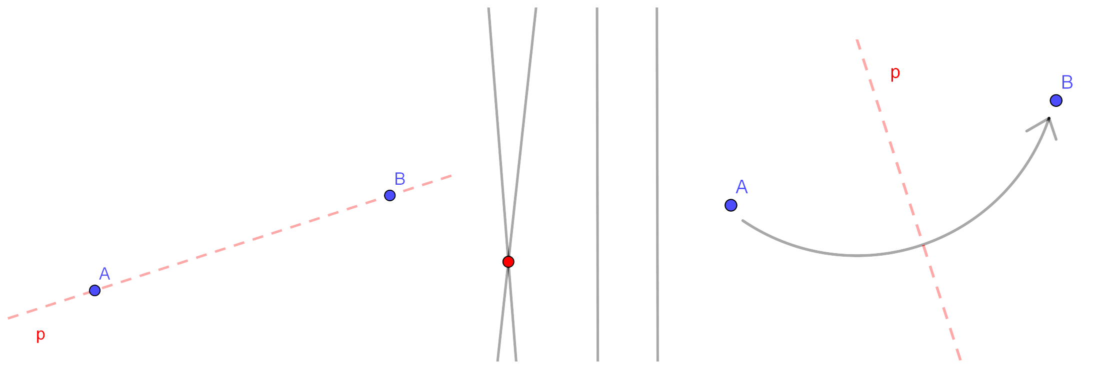
Operacija O5. Za poljubno točko A in premico a obstaja natanko en pregib p skozi točko A, ki je pravokoten na premico a.

Operacija O6. Za primerno izbrani točki A in B ter premico a obstaja pregib p skozi točko B, ki točko A položi na premico a.

Operacija O7. Za primerno izbrani točki A in B ter premici a in b obstaja pregib p, ki točko A položi na premico a in točko B na premico b.

Operacija O8. Za poljubno točko A ter nevzporedni premici a in b obstaja pregib p, ki je pravokoten na premico b in točko A položi na premico a.

Sedaj za vsako operacijo posebej poglejmo njeno konstrukcijo. Takoj opazimo, da je operacija O1 ekvivalentna postulatu P1, kar nam lahko vzbudi zanimanje za povezavo med evklidskimi in origami konstrukcijami. Operacija O2 je izvedljiva v vsakem primeru nevzporednih pregibov in nam omogoča določitev novih točk v našem modelu ravnine. Operacija O3 pa nam poda konstrukcijo simetrale daljice AB (slika 1) – ko opravimo pregib in pustimo papir še zapognjen, je očitno, da so točke na pregibu enako oddaljene od točk A in B.

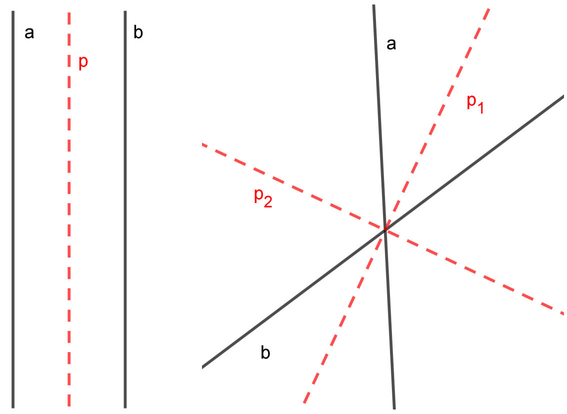


Slika 1: Operacije (od leve proti desni) O1, O2 in O3.

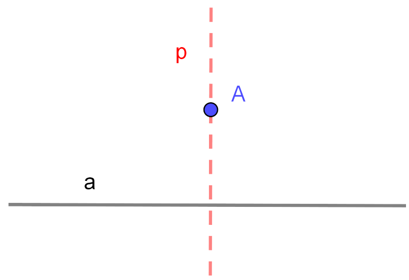
Nadalje opazimo, da nam operacija O4 konstruira obe simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče, v primeru vzporednih premic pa dobimo tretjo vzporednico, ki leži na sredi med njima (slika 2). Zato sta tu možna po dva ali, v posebnem primeru, en pregib.

Operacija O5 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko (slika 3). Pri tem je vseeno, ali točka leži na premici ali ne. Pregib opravimo tako, da premico položimo samo nase in pazimo, da je točka A v pregibu. Zaradi simetrije je pregib res pravokoten na premico in tako tudi en sam.

Operacija O6 je še posebej zanimiva. Najprej si poglejmo njeno konstrukcijo. Vzemimo točki A in B ter premico a. Iščemo pregib skozi B, ki A položi na premico a. Ker točka B leži na pregibu, je enako oddaljena tako od točke A kot tudi njene slike A' na premici a, torej je A' ravno presečišče premice a in krožnice s središčem v B ter polmerom AB. Pregib je simetrala daljice AA', ki po konstrukciji poteka skozi točko B. Če velja $d(A, B) > d(B, a)$, sta presečišči s premico a dve (in s tem

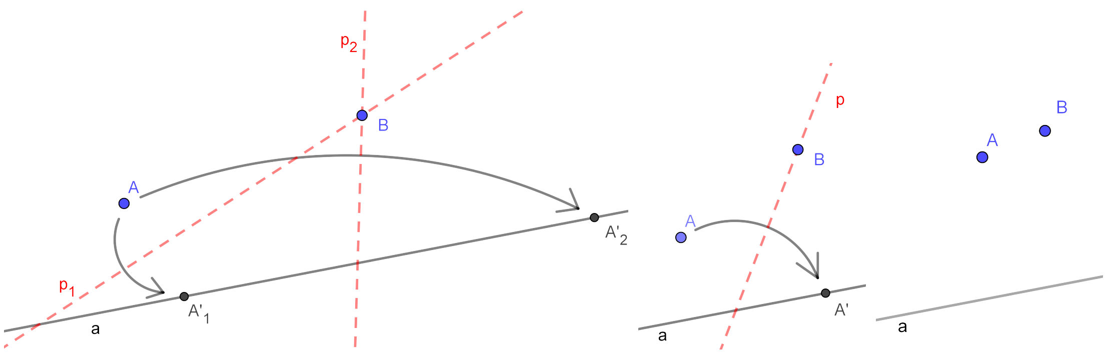


Slika 2: Operacija O4 v obeh možnih primerih.



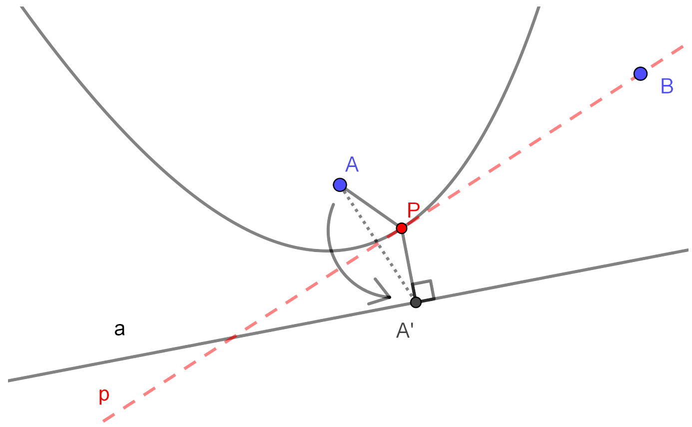
Slika 3: Operacija O5.

tudi dva možna pregiba, gl. sliko 4 levo), v primeru $d(A, B) = d(B, a)$ je presečišče eno samo (in s tem en možen pregib, gl. sliko 4 na sredi) in je premica a takrat tangentna na omenjeno krožnico, v zadnjem primeru, ko velja $d(A, B) < d(B, a)$, pa presečišč ni (in s tem tudi pregiba, gl. sliko 4 desno).



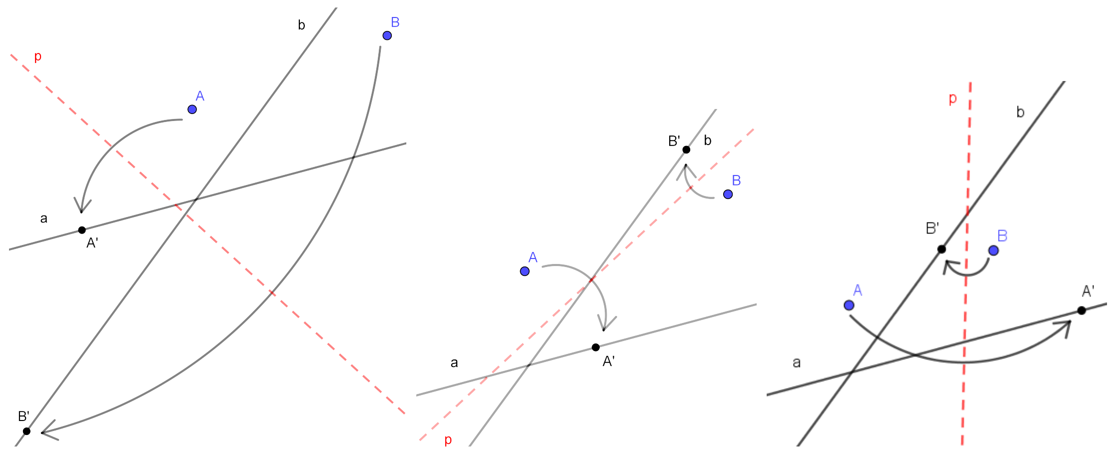
Slika 4: Operacija O6 v vseh treh primerih.

Zgodba operacije O6 se tu še ne zaključi. Ker na pregibu ležijo vse točke, ki so enako oddaljene od točke A in A', to velja tudi za točko P, ki jo dobimo kot presečišče pregiba in pravokotnice na premico a skozi A' (slika 5). Zanjo velja $d(A, P) = d(P, a)$ in je enolično določena (v srednjem primeru na sliki 4 je to kar točka B). Torej točka P leži na paraboli z goriščem A in premico vodnico a. Bralec lahko sam premisli, da je P edina točka na pregibu, ki je enako oddaljena od gorišča in premice vodnice. Pregib torej seka parabolo le v eni točki, kar pomeni, da je to *tangenta na to parabolo.* V levem primeru na sliki 4 smo dobili dve tangenti.



Slika 5: Operacija O6 kot konstrukcija tangente na parabolo z goriščem v A in premico vodnico a.

Poglejmo si naslednjo operacijo. Konstrukcijo O7 začnemo z upogibom papirja, ki točko A položi na premico a, potem pa točko premikamo po premici, dokler se tudi točka B ne stakne s premico b. Takrat naredimo pregib. Na sliki 6 so prikazani trije pregibi, kar je tudi največje možno število pregibov za iste točke in premice. Več o številu pregibov sledi v razdelku 6.2.

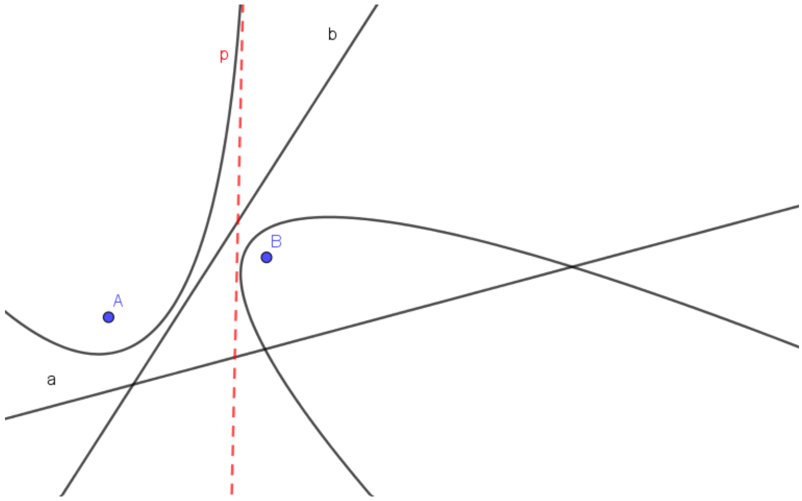


Slika 6: Operacija O7 (primer treh pregibov za isti točki in premici).

Kaj je geometrijski pomen te operacije? Če smo pri operaciji O6 dobili tangento na parabolo, potem lahko takoj vidimo, da pri operaciji O7 dobimo *skupno tangento na dve paraboli* – ena ima gorišče v točki A in premico vodnico a, druga pa gorišče v točki B ter premico vodnico b (slika 7).

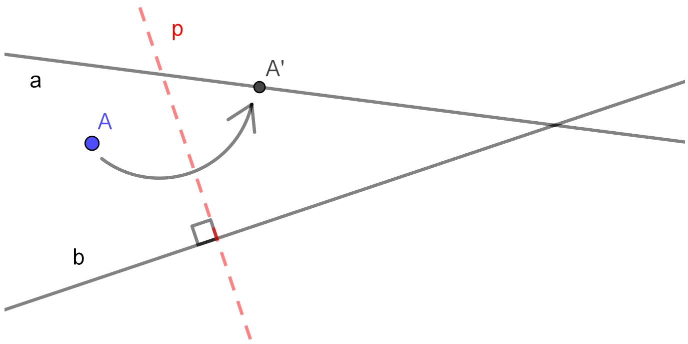
Opomba 2.5. O operaciji O7 naj bi prva pisala italijanski matematičarki Margherita P. Beloch, po kateri operacijo imenujemo tudi *Belochin pregib*.

Zadnja operacija O8 zahteva nevzporedni premici, saj v nasprotnem primeru ne moremo konstruirati pregiba, ki bi bil pravokoten na obe premici in točko A položil na premico a (razen če le-ta že leži na njej). Premislimo geometrijsko konstrukcijo:



Slika 7: Operacija O7 kot konstrukcija skupne tangente na dve paraboli.

ker mora biti pregib pravokoten na premico b, bo slika točke A (označena z A') ležala na vzporednici skozi točko A k premici b. Prav tako mora točka A' ležati na premici a, torej je slika ravno presečišče omenjene vzporednice in premice a. Iskan pregib je simetrala daljice AA', ki je po konstrukciji pravokoten na premico b (slika 8).



Slika 8: Operacija O8.

Opomba 2.6. Natančen bralec lahko opazi, da nam origami operacije ne podajajo konstrukcije slik točk, temveč samo pregibe, ki točke preslikajo na premice. Sliko točke konstruiramo šele po uporabi operacije O5 – skozi originalno točko naredimo pregib, pravokoten na prvi pregib (iz O6), in slika je potem presečišče pravokotnice in premice, na katero smo prepognili originalno točko.

2.2.2 Zadostne in potrebne origami operacije

Omenili smo že, da je teh osem operacij zadostnih za katerokoli origami konstrukcijo.

Izrek 2.7. *Če dovolimo le enkratne in ravne pregibe, so edine možne operacije prepogibanja operacije O1–O8.*

Ideja dokaza je, da za vsak možen prepogib, ki prekrije točko ali premico s točko ali premico (gl. seznam petih možnosti na začetku razdelka 2.2) pogledamo vse možnosti. Izkaže se, da res dobimo prepogibe iz operacij O1–O8. Za natančen dokaz s slikovno ponazoritvijo gl. [12, str. 24–26 (izrek 1.1)] (Lahko tu dokažeš?).

Vendar ali so vse te operacije tudi potrebne ali lahko kakšno izpustimo? Operacija O2 je očitno potrebna, saj nam določa nove točke. Če podrobneje opazujemo ostale konstrukcije, pa opazimo, da so vse posebni primeri operacije O7 (t. j. konstrukcija pregiba, ki točko A položi na premico a in točko B na premico b), ko premici a in b sovpadata ali ko ena ali obe izmed točk A in B ležita na premici:

- Operacija O1: Naj točka A leži na premici a, točka B pa na premici b. Pregib skozi točki A in B točko A ohrani na premici a in točko B na premici b.
- Operacija O3: Naj točka A leži na premici b, točka B pa na premici a. Pregib, ki položi točki drugo na drugo, točko A položi na premico a in hkrati točko B na premico b .
- Operacija O4: Naj točka A leži na premici b, točka B pa na premici a. Simetrala kota v presečišču premic (ali vmesna vzporednica, če sta premici a in b vzporedni), točko A položi na premico a in hkrati točko B na premico b.
- Operacija O5: Naj točka A leži na premici a, točka B pa na premici b. Pregib skozi točko A (ali B), ki je pravokoten na premico b (ali a), točko A ohrani na premici a in točko B na premici b.
- Operacija O6: Naj točka B leži na premici b. Pregib skozi točko B, ki točko A preslika na premico a (če tak pregib obstaja), točko B ohrani na premici b.
- Operacija O8: Naj točka B leži na premici b. Pregib, ki točko A položi na premico a in je pravokoten na premico b, točko B ohrani na premici b.

Ker lahko vse konstrukcije po izreku 2.7 opišemo z operacijami O1–O8, smo s tem dokazali spodnji izrek:

Izrek 2.8. *Če imamo dani vsaj dve točki in dve nevzporedni (lahko tudi identični) premici, ki vsebujeta dane točke, potem lahko vse origami konstrukcije z enkratnimi in ravnimi pregibi opišemo s kombinacijo operacij O2 in O7.*

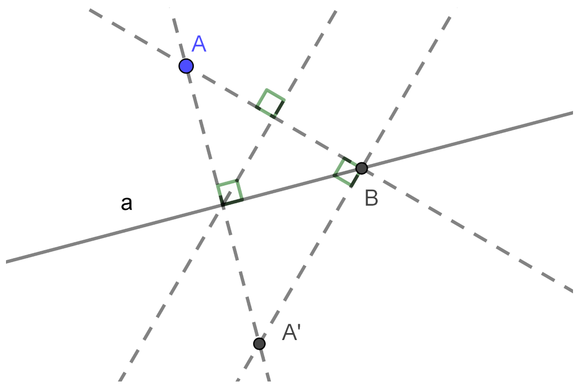
Vseeno bomo ohranili vseh osem aksiom operacij, saj bomo kakšen pregib lažje razložili preko ene od ostalih petih operacij kot pa opisovali, na kakšen način je to operacija O7.

2.2.3 Zrcaljenje točke čez premico

Operacija O3 nam poda simetralo daljice AB. Torej je točka B zrcalna slika točke A čez to premico. Kaj pa, če imamo za neko točko A že dano premico a in iščemo njeno zrcalno sliko? Naravna rešitev je, da naredimo pregib po premici in s svinčnikom označimo zrcalno sliko. A definicija 2.4 pravi, da lahko točke dobimo le kot presečišča pregibov, poleg tega pa je uporaba pisala dovoljena le za vidnejšo označbo že konstruiranih točk.

Zato moramo najti zaporedje pregibov, kjer na koncu kot presečišče nekih dveh premic dobimo želeno točko. Za dano premico a in točki A, ki ne leži na tej premici (sicer je točka A zrcalna slika sama sebi), lahko zrcalno sliko točke konstruiramo z naslednjimi koraki (prikazani na sliki 9, postopek vzet iz [12, str. 28]):

1. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na premico a skozi točko A.
2. Z operacijo O4 prepognemo simetralo kota, ki ga oklepata premica a in pravokotnica iz prvega koraka.
3. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na simetralo skozi točko A. Njeno presečišče s premico a označimo z B.
4. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na pregib iz tretjega koraka skozi točko B. Presečišče novega pregiba in pravokotnice iz prvega koraka označimo z A'.



Slika 9: Zrcaljenje točke A čez premico a s prepogibanjem papirja.

Trditev 2.9. *Točka A' iz opisane konstrukcije je zrcalna slika točke A.*

Dokaz. Trikotnik, ki ga dobimo po 3. koraku, je pravokoten in enakokrak, saj je simetrala (pravega kota) iz 2. koraka pravokotna na njegovo osnovnico. Zato kot ob točki A znaša 45°. Ker je trikotnik $\triangle A'BA$ pravokoten, je zato tudi enakokrak, torej premica a razpolavlja daljico AA', torej je A' res zrcalna slika točke A. □

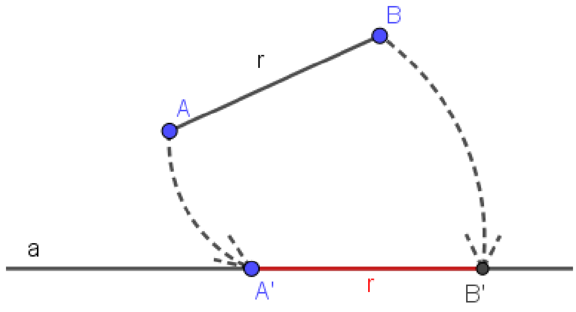
Ker lahko čez premico zrcalimo točke, lahko čeznjo zrcalimo tudi daljice oz. premice – to storimo tako, da zrcalimo dve točki z daljice in naredimo pregib čez njuni sliki. Zrcaljenje pa nam omogoča še nekaj več, kar nam pove naslednja trditev.

Trditev 2.10. *Z upoštevanjem pravil iz 2.2 in origami operacij lahko s prepogibanjem papirja prenašamo razdalje.*

Dokaz. V ravnini si izberimo poljubni točki A in B, ki določata daljico z neko dolžino r. Naj bo a poljubna premica in A' poljubna točka na njej. Trditev pravi, da lahko z origami operacijami konstruiramo točko $B' \in a$, da je $d(A', B') = r$ (slika 10). Pri tem ni pomembno, na kateri strani točke A' leži točka B', saj jo lahko vedno zrcalimo čeznjo.

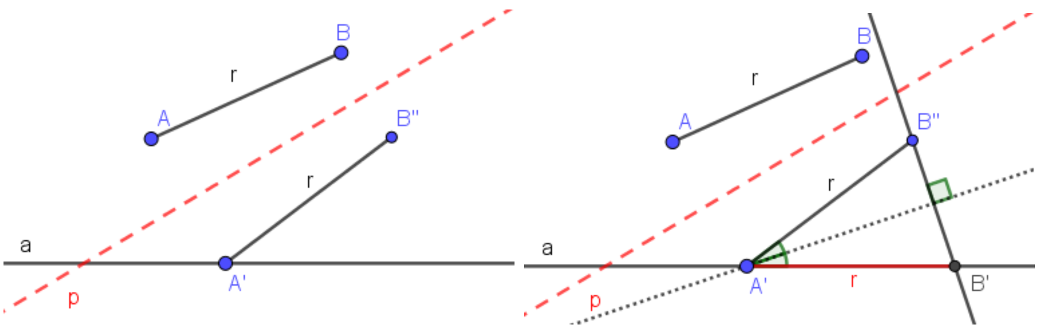
Prenos razdalje razdelimo na dva koraka:

1. Če $A \neq A'$, daljico AB zrcalimo čez tisto premico p, ki točko A preslika v točko A' (po O3 je tak pregib oz. premica ena sama). Zrcalno sliko točke B označimo z B'' (slika 11 levo). V posebnem primeru, ko daljica AB leži na premici a, je to že konec konstrukcije.



Slika 10: Prenos dolžine daljice AB na premico a k izbrani točki A'.

2. Daljico $A'B''$ rotiramo okoli točke A', da se točka B'' preslika na premico a. To storimo tako, da z operacijo O4 konstruiramo simetralo kota med daljico $A'B''$ in premico a in čeznjo zrcalimo točko B'' (slika 11 desno). S tem dobimo točko $B' \in a$, ki je po konstrukciji od točke A' oddaljena za dolžino r.



Slika 11: Zrcaljenje daljice AB (levo) in rotacija daljice čez eno krajišče (desno).

S tem smo razdaljo r prenesli na poljubno mesto v ravnini. □

Tako lahko s prepogibanjem papirja zrcalimo točke (in premice), prenašamo razdalje pa tudi – po 2. koraku iz zgornjega dokaza – rotiramo točke (in premice). To novo znanje bomo uporabili v razdelku 2.3.2, od sedaj naprej pa bomo pri konstrukcijah, ki vključujejo zrcaljenje točk, zaradi preglednosti izpustili potrebne pregibe in zrcaljene točke označili kar s svinčnikom skozi papir.

2.3 Zakaj origami konstrukcije nadvladajo evklidske

Prišli smo do ključnega dela poglavja – reševanje vprašanja, zakaj se nam z origami konstrukcijami sploh splača ukvarjati.

Tako z evklidskim orodjem kot s prepogibanjem papirja lahko konstruiramo premice in točke ter prenašamo razdalje. Le evklidskim orodjem lahko konstruiramo tudi krožne loke, ker pa znamo rotirati točke okoli druge točke, lahko tudi s prepogibanjem papirja konstruiramo katerokoli točko na krožnici z danim središčem in polmerom. Tako lahko vse evklidske konstrukcije opravimo tudi z origamijem (za natančnejši dokaz gl. [6]).

Bralec je ob zgornjih opisih posamezne operacije povabljen, da premisli, kako je mogoče operacije O1, O3, O4, O5, O6 in O8 opraviti tudi z evklidskim orodjem (operacija O2 le določa nove točke, zato tu o konstrukciji ne moremo govoriti). Do tu nam torej origami konstrukcije niso dale ničesar novega.

Ključna je sedma operacija. Izkaže se namreč, da operacije O7 oz. Belochinega pregiba ne moremo opraviti z evklidskim orodjem. Kako lahko to dokažemo? V razdelku 3.4.1 bomo spoznali več origami postopkov, ki nam poljuben kot razdelijo na tri skladne dele, pri tem pa uporabimo pregib iz operacije O7. Ker *trisekcija kota z evklidskim orodjem ni mogoča* (dokaz v [15, str. 77–78]), posledično tudi konstrukcija operacije O7 s tem orodjem ne obstaja. Prav tako bomo v razdelku 6.2 videli več načinov uporabe operacije O7 za reševanje kubične enačbe, za katero prav tako vemo, da je v splošnem z evklidskim orodjem ne moremo rešiti.

Sedaj vemo, da je množica evklidskih konstrukcij *prava* podmnožica origami konstrukcij. V naslednjem razdelku si bomo pogledali, kako lahko evklidske in origami konstrukcije prevedemo v jezik algebre in tudi na algebrski način pokažemo premoč origamija nad evklidskim orodjem.

2.3.1 Algebrski pogled na evklidske konstrukcije

Definicija 2.11. Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine $\mathbb{C}$, imejmo dano izhodišče O in število 1 na realni osi. Če lahko z neoznačenim ravnilom in šestilom s končnim številom potez konstruiramo kompleksno število α, rečemo, da je α *evklidsko-konstruktibilno* število. Pri tem upoštevamo tri pravila, ki izhajajo iz Evklidovih aksiomov in postulatov:

- nove točke dobimo s presečišči dveh premic, dveh krožnic ali premice in krožnice,
- skozi vsaki točki lahko z ravnilom potegnemo ravno črto ter
- za vsako točko in razdaljo r lahko s šestilom zarišemo krožnico, ki ima središče v tej točki in polmer r.

Jerman bralca v [15] na zelo strukturiran in nazoren način popelje čez dokaz, da lahko z evklidskim orodjem na realni osi konstruiramo natanko vsa racionalna števila, njihove vsote, razlike, zmnožke, količnike, kvadratne korene ter linearne kombinacije vsega naštetega. To je množica

$$\mathbb{Q}(r) = \{a + b\sqrt{r}; a, b, r \in \mathbb{Q}; r > 0 \text{ in } \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}\},$$

ki je komutativen obseg oz. polje in hkrati tudi dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$ z bazo $\{1, \sqrt{r}\}$.

Da pokažemo, da so to vsa možna realna evklidsko-konstruktibilna števila, je potrebna natančna obravnava vseh možnih enačb, ki jih dobimo pri iskanju presečišč dveh krožnic, dveh premic ter krožnice in premice, potem pa je potrebno še dokazati, da nam vse nadaljne rabe konstruiranih presečišč res podajo najmanjšo razširitev polja racionalnih števil, ki je zaprta za operacijo kvadratnega korenjenja. Jerman s tem dokaže naslednji izrek.

Izrek 2.12. *Število $r \in \mathbb{R}$ se da konstruirati le s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je r algebraičen nad $\mathbb{Q}$ in je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom $\mathbb{Q}$, enaka 2^n za nek $n \in \mathbb{N}_0$.*

Opomba 2.13. Razsežnosti obsega $\mathbb{Q}(r)$ pravimo tudi *stopnja razširitve obsega* $\mathbb{Q}$. Izkaže se, da je enaka stopnji minimalnega polinoma števila r nad $\mathbb{Q}$ [15, str. 77].

Izreku takoj sledita dokaza, da trisekcija kota v splošnem ter konstrukcija števila $\sqrt[3]{2}$ z evklidskim orodjem nista mogoči [15, str. 77–78].

Iz izreka sledi tudi, da lahko vsa realna evklidsko-konstruktibilna števila analitično zapišemo kot rešitve kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti. O reševanju enačb se bomo natančneje ukvarjali v poglavju 6.

Ker med kompleksno in evklidsko ravnino obstaja bijekcija, lahko tako konstruiramo poljubno število $\alpha = x + yi$, kjer sta $x \in \mathbb{Q}(r)$ in $y \in \mathbb{Q}(s)$ za neka $r, s \in \mathbb{Q}^+; \sqrt{r}, \sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$. S tem lahko zapišemo tudi kompleksne rešitve kvadratne enačbe. Torej lahko z evklidskim orodjem konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe.

2.3.2 Origami števila

Poiščimo še množico števil, ki jih lahko konstruiramo z origamijem. Definiramo jih na enak način kot *evklidsko-konstruktibilna* števila.

Definicija 2.14. Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine $\mathbb{C}$, imejmo dano izhodišče O in število 1 na realni osi. Premice predstavljajo pregibi papirja, nove točke pa njihova presečišča. Če lahko s končnim številom enkratnih ravnih prepogibov in upoštevanjem operacij O1– O8 konstruiramo kompleksno število α, rečemo, da je α *origami število.* Množico origami števil označimo z $\mathcal{O}$.

Opomba 2.15. Po izreku 2.7 operacije O1– O8 zajamejo vse možne pregibe, zato so origami števila dobro definirana.

Definicija 2.16. Če lahko v evklidski ravnini z origamijem po zgornjih pravili konstruiramo točko A, pravimo, da je A *origami-konstruktibilna točka.* Če lahko z origamijem konstruiramo premico p, pravimo, da je premica p *origami-konstrukcibilna premica.*

Preko sledečih izrekov in trditev bomo še na algebrski način pokazali, da je množica števil, ki jih lahko konstruiramo z evklidskim orodjem, prava podmnožica množice origami števil.

Trditev 2.17. *Naj bo $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, kjer $a, b \in \mathbb{R}$. Potem je $\alpha \in \mathcal{O}$ če in samo če $a, b \in \mathcal{O}$.*

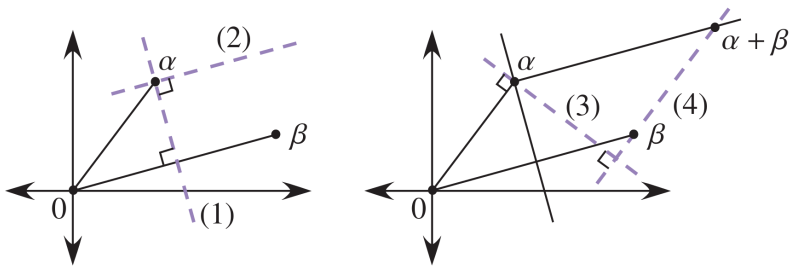
Dokaz. Ker sta a in b pravokotni projekciji števila α na realno in imaginarno os (operacija O5), je trditev očitna. $\square$

Izrek 2.18. *Množica $\mathcal{O}$ je podpolje polja $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Za dokaz izreka moramo pokazati, da je $1 \in \mathcal{O}$ (kar velja že po definiciji), da za poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ velja $\alpha - \beta, \alpha\beta \in \mathcal{O}$ in da je $1/\alpha \in \mathcal{O}$ za vsak $\alpha \in \mathcal{O}\backslash\{0\}$. Spomnimo se, da lahko kompleksna števila ponazorimo z vektorji in zato lahko računske operacije grafično izvajamo kar preko njih.

Vzemimo poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Ker število $-\beta$ dobimo po zaporednem zrcaljenju čez obe osi, velja $-\beta \in \mathcal{O}$. Ker je odštevanje v resnici seštevanje nasprotnega elementa, je za dokaz $\alpha - \beta \in \mathcal{O}$ dovolj pokazati, da je množica $\mathcal{O}$ zaprta za seštevanje.

Če α, β in O ležijo na isti premici, ni veliko za dokazovati, temveč samo prenesemo razdaljo na primerno mesto na premici. Predpostavimo sedaj, da α, β in O ne ležijo na isti premici in s paralelogramskim pravilom konstrirajmo število $\alpha + \beta$ (slika 12). Štirikrat uporabimo operacijo O5: preko pravokotnice (1) na vektor $\overrightarrow{O\beta}$ skozi α konstruiramo vzporednico (2) k taistemu vektorju skozi α in na enak način preko pravokotnice (3) konstruiramo vzporednico (4) k vektorju $\overrightarrow{O\alpha}$ skozi β. V presečišču vzporednic dobimo $\alpha + \beta$.



Slika 12: Konstrukcija $\alpha + \beta$.

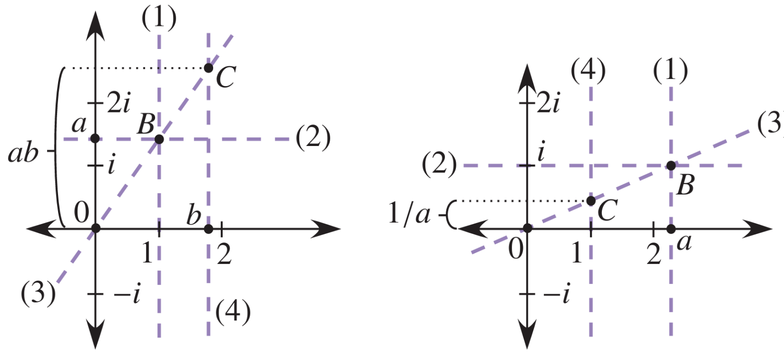
Za dokaz preostalih dveh zahtev najprej dokažimo, da za neničelna $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ velja $ab, 1/a \in \mathcal{O}$, potem pa s pomočjo trditve 2.17 to dokažemo še za poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.

Naj bosta $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ poljubna in neničelna (če je katerikoli od njiju enak 0, je produkt ničeln in že po definiciji origami število). Ker sta a in b origami števili, ju lahko konstruiramo. Naj b leži na realni osi, ai pa na imaginarni (slika 13 levo). Z dvakratno uporabo operacije O5 konstruiramo origami število $1 + ai$ (točka B). Konstruiramo pregib skozi O in B (premica z naklonom a) ter v presečišču s pravokotnico skozi b dobimo število $b + abi$ (točka C). Pravokotnica skozi C na imaginarno os na njej konstruira origami število ab.

Podobno konstruiramo še število $1/a$. Na realni osi konstruiramo število a (slika 13 desno), s pomočjo O5 pa še število $a + i$ (točka B). Pregib skozi O in B ima naklon ravno $1/a$. V presečišču tega pregiba s pravokotnico na realno os v točki ! dobimo število $1 + (1/a)i$ (točka C). Tako nam pravokotnica na imaginarno os skozi točko C konstruira origami število $1/a$.

Vzemimo sedaj poljubna $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Če je $\alpha = a + bi, \beta = c + di$, potem po trditvi 2.17 velja $a, b, c, d \in \mathcal{O}$. Število $\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ima v svojem realnem in imaginarnem delu njihove vsote, razlike in produkti, za katere že vemo, da so v $\mathcal{O}$. Torej je $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.

Za neničeln $\alpha = a + bi \in \mathcal{O}$ je $1/\alpha = a/(a^2 + b^2) + (-b)/(a^2 + b^2)i$. Ker sta po trditvi 2.17 $a, b \in \mathcal{O}$, sta zopet realni in imaginarni del tega števila origami števili,



Slika 13: Konstrukcija ab in $1/a$ za neničelna $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$.

torej $1/\alpha \in \mathcal{O}$. □

Trditev 2.19. *Naj bo $\alpha \in \mathcal{O}$. Potem $\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{O}$.*

Dokaz. Naj bo $\alpha = re^{i\theta}$ za neka $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (v ničelnem primeru ni kaj dokazovati) in θ poljuben kot. Torej imamo za kvadratni in kubični koren števila α skupno pet rešitev:

- $\sqrt{\alpha} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ in
- $\sqrt[3]{\alpha}_1 = \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}$, $\sqrt[3]{\alpha}_2 = \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$, $\sqrt[3]{\alpha}_3 = \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$

Torej moramo dokazati, da $\sqrt{r}, \sqrt[3]{r} \in \mathcal{O}$, da znamo razpolavljati in tretjiniti kote ter rotirati origami število za kot $60°$ okoli izhodišča O. Potem bomo po izreku 2.18 lahko konstruirali zgornjih pet števil in tako dokazali to trditev.

Najprej se še prepričajmo, da $r \in \mathcal{O}$. Ker je to ravno razdalja števila α do izhodišča, jo lahko prenesemo na realno os in tako konstruiramo realno število r, torej je res $r \in \mathcal{O}$.

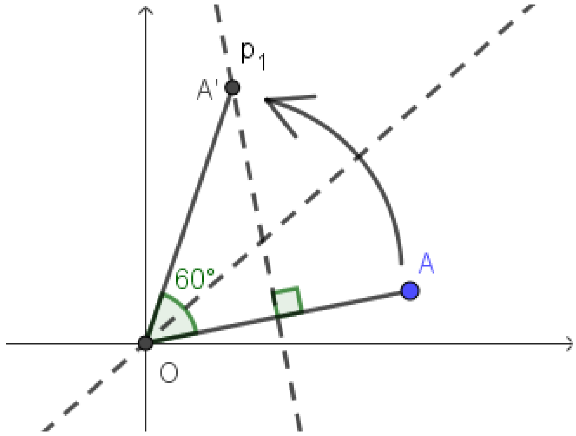
V razdelku 6 bomo pogledali, kako z origamijem rešujemo splošne kvadratne in kubične enačbe, torej bomo znali konstruirati tudi rešitve enačb $x^2 - r = 0$ in $x^3 - r = 0$. Konkretne konstrukcije števil $\sqrt{r}$ in $\sqrt[3]{r}$ opisane tudi v poglavju 3. Z operacijo O4 znamo razpoloviti kot, postopek tretjinjenja kota pa je, kot že omenjeno, opisan v razdelku 3.4.1. Ostane nam samo še rotacija točke za kot $60°$ okoli izhodišča. Na sliki 14 je prikaz enostavne konstrukcije – najprej prepognemo simetralo p_1 daljice OA in konstruiramo pregib p_2 skozi O, ki točko A preslika v točko A' na simetrali p_1. Trikotnik $\triangle OAA'$ je enakostraničen. □

Množica origami števil $\mathcal{O}$ je tako zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje ter za kvadratno in kubično korenjenje. Ker so cela števila očitno origami števila (po definiciji imamo dano enoto, ki jo znamo prenašati po realni osi), so zaradi zaprtosti za deljenje origami števila tudi vsa racionalna števila. Zato za vsak $r \in \mathbb{Q}^+$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$ in vsaka $a, b \in \mathbb{Q}$ velja $a + b\sqrt{r} \in \mathcal{O}$, torej za vsak tak r velja

$$\mathbb{Q}(r) \subseteq \mathcal{O}.$$

S tem je dokazana naslednja trditev.

Trditev 2.20. *Vsa evklidsko-konstruktibilna števila so origami števila.*



Slika 14: Rotacija točke za kot 60° okoli izhodišča.

Da so evklidsko-konstruktibilna števila *prava* podmnožica origami števil, je potrebno najti samo en $r \in \mathcal{O} \cap \mathbb{Q}^+, \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$, za katerega velja $\sqrt[3]{r} \notin \mathbb{Q}(r)$. Bralec je povabljen k enostavnemu dokazu, da že za $r = 2$ ne obstajata $a, b \in \mathbb{Q}$, da bi veljalo $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$ – če začnemo reševati to enačbo za a in b, se hitro izkaže, da nima niti realnih rešitev.

Izrek 2.21. *Množica evklidsko-konstruktibilnih števil je prava podmnožica množice origami števil, t. j.*

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+, \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}} \mathbb{Q}(r) \subset \mathcal{O}$$

Tako smo še na algebraičen način dokazali prevlado origamija nad evklidskim orodjem.

(a potem so origami števila enaka množici $\{a + b\sqrt{r} + c\sqrt[3]{q}\}$ za poljubne $a, b, c, r, q \in \mathbb{Q}$? Je kakšna oznaka?)

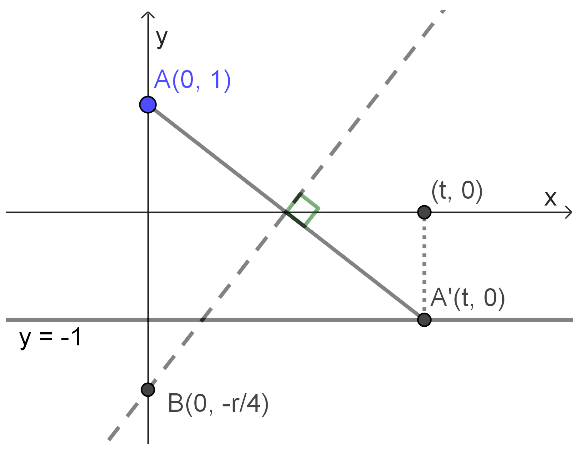
3 Prepogibanje kvadrata

Vzemimo v roke kvadraten list papirja in poglejmo, kaj lahko z njegovim prepogibanjem dobimo. V tem poglavju se bomo ukvarjali s preprostimi konstrukcijami, kot so konstrukcija enakostraničnega trikotnika, razdalje $\sqrt{k}$ za poljuben $k \in \mathcal{O}$, razdelitve daljice na enako število delov; pogledali si bomo vse tri Hagove izreke o razmerjih, na katere specifični pregibi kvadratnega lista papirja razdelijo njegove stranice; na koncu pa si bomo končno pogledali še konstrukcije rešitev dveh starogrških problemov, zaradi katerih smo se sploh začeli ukvarjati s temo origamija.

3.1 Nekaj kratkih in zanimivih konstrukcij za uvod

Konstrukcija $\sqrt{r}$

Vzemimo $r \in \mathbb{Q}^+$ in si poglejmo naslednjo konstrukcijo (vzeto iz [13, str. 58]): Imejmo točko $A(0,1)$ in premico $y = -1$. Na ordinatni osi označimo točko $B(0, -\frac{r}{4})$ in naredimo pregib skoznjo, ki točko A položi na premico $y = -1$. Njena zrcalna slika je $A'(t, 0)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 15).



Slika 15: Konstrukcija števila $\sqrt{r}$ za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$.

Pregib poteka skozi točko B in razpolovišče daljice AA', torej je njegov koeficient $k_B = \frac{r}{2t}$ (izpeljavo prepuščamo bralcu). Ker je pregib simetrala daljice AA', njena nosilka pa ima koeficient $k_A = -\frac{2}{t}$, dobimo enačbo

$$
\begin{aligned}
k_B &= -\frac{1}{k_A} \\
\frac{r}{2t} &= \frac{t}{2} \\
r &= t^2 \text{ oz. } t = \sqrt{r}.
\end{aligned}
$$

Na koncu le še prepognemo pravokotnico na abscisno os skozi točko A' in tako dobimo točko $(\sqrt{r}, 0)$. Torej smo konstruirali število $\sqrt{r}$ za poljuben $r \in \mathbb{Q}^+$.

3.2 Razdelitev daljice na n enakih delov

Stranico kvadrata želimo razdeliti na n enakih delov, kjer je $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Za $n = 2^t, t \in \mathbb{N}_0$ je to čisto enostavno, saj samo prepolavljamo razdalje med pregibi, dokler ne dosežemo cilja. Če je n sod, vendar ni potenca 2, torej $n = 2^t(2m+1)$, kjer sta $t, m \in \mathbb{N}$, stranico najprej razdelimo na 2^t delov, nato pa moramo vsakega izmed njih razdeliti na $2m+1$ (liho število) delov. Izziv tega problema je torej v razdelitvi daljice na liho število delov. Ko bomo zo zmogli, jo bomo znali razdeliti na n delov za vsak $n \in \mathbb{N}$.

V dokazu izreka 2.18 smo za poljuben $a \in \mathbb{R}$ znali konstruirati razdaljo $1/a$, kar bi lahko uporabili za razdelitev neke daljice na a enakih delov – konstruirano razdaljo $1/a$ bi a-krat prenesli naprej. Načinov reševanja tega problema pa se je skozi zadnja desetletja oblikovalo še veliko več; tu si bomo pogledali še koliko? metode.

Metoda križajočih se diagonal

Metoda nima uradnega prevoda niti uradnega imena, jo pa tako imenuje Robert J. Lang v svojem članku [16]. Njena konstrukcija je prikazana na sliki referenca na sliko, ustvari sliko al pej kopirej hull2020 str. 14 al pej hull2018 str. 38. Najprej kvadrat dvakrat prepognimo na pol – enkrat po diagonali skozi oglišči A in C in drugič po vertikali. Nato prepognemo po diagonali (skozi oglišče B) še desni pokončen pravokotnik. Presečišče obeh diagonal označimo s točko P in naredimo skoznjo prepogib, ki je pravokoten na horizontalno stranico kvadrata.

Trditev 3.1. *Zadnji pregib iz zgornjega opisa konstrukcije razdeli horizontalno stranico kvadrata v razmerju* $2:1$.

Dokaz. Dokazujemo lahko na več načinov:

1. *Analitičen pristop:* Kvadrat postavimo v evklidsko ravnino tako, da je spodnje levo oglišče kvadrata v koordinatnem izhodišču in spodnje desno v točki $(1, 0)$. Obe diagonali izrazimo z enačbama premic. Glavna diagonala ima enačbo $y = x$, diagonala pravokotnika pa $y = -2x + 2$. Točka P je njuno presečišče in ima tako koordinati $(2/3, 2/3)$.

2. *Preko podobnih trikotnikov:* Z opisanimi prepogibi v tem kvadratu konstruiramo več trikotnikov. Njihova oglišča označimo tako, kot kaže slika naredi in referiraj sliko, str. 38 v hull2013; ampak predrugači imena oglišč (glej nadaljevanje tega dokaza). Iz podobnosti trikotnikov $\triangle AGP$ in $\triangle ABC$ sledi, da je trikotnik $\triangle AGP$ enakokrak. Naj bo dolžina njegovih krakov x. Potem je $|AG| = |GP| = x$ in $|GB| = 1 - x$. Iz podobnosti trikotnikov $\triangle EFB$ in $\triangle PGB$ sledi

$$\frac{|EF|}{|FB|} = \frac{|PG|}{|GB|} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

$\square$

Po konstrukciji pregiba, ki zgornjo stranico kvadrata razdeli v razmerju $2:1$, desni pravokotnik (s stranico DE) po vertikali prepognemo še na pol. S tem smo stranico kvadrata razdelili na tri enake dele.

Razdelitev stranice kvadrata na štiri dele je očitna – kvadrat v vertikalni smeri dvakrat prepognemo na pol.

Stranico razdelimo na pet delov na podoben način kot na tri. Naredimo enak pregib po glavni diagonali, nato pa zgornjo stranico razdelimo v razmerju $3:1$ (to znamo storiti). S tem smo na desni strani kvadrata dobili pokončen pravokotnik s horizontalno stranico, dolgo četrt stranice kvadrata. Naslednji pregib je, kot prej, diagonala tega pravokotnika (tista skozi oglišče B). Presečišče te in glavne diagonale je točka, ki je od desne stranice oddaljena za $1/5$ (dokaz je analogen tistemu za trditev 3.1). Naredimo vertikalen pregib skozi točko P in s tem zgornjo stranico kvadrata razdelimo v razmerju $4:1$. Na koncu še levi del te stranice razdelimo na štiri dele. S tem smo celotno stranico razdelili na pet skladnih delov.

Zgornji postopek lahko posplošimo na poljuben $n \in \mathbb{N}$. Kot smo videli v konkretnih primerih za $n = 3, 4$ in 5, smo si pomagali z vnajprejšnjo razdelitvijo stranice na $n-1$ število enakih delov (kar smo zmogli storiti). Dokaz naslednje trditve bo tako temeljil na indukciji.

Trditev 3.2 (Metoda križajočih se diagonal za splošen $\boldsymbol{n}$)**.** *Naj bo $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 1 prepognemo po diagonali AC, potem pa stranico DC s točko E razdelimo v razmerju $(n-2):1$. Naredimo pregib novonastalega pravokotnika skozi točki B in E. Presečišče te in glavne diagonale je točka P, ki je od desne stranice kvadrata oddaljena za $1/n$.*

Dokaz. Za $n = 1$ in $n = 2$ ni kaj dokazovati – v prvem primeru pregiba sploh ni, v drugem primeru stranico prepolovimo.

Baza indukcije: Vemo že, da trditev drži za $n = 3, 4, 5$.

Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da znamo stranico razdeliti na n enakih delov.

Indukcijski korak: Dokazujemo, da znamo stranico razdeliti na $n+1$ enakih delov. Po navodilih za konstrukcijo najprej stranico DC s točko E razdelimo v razmerju $(n-1):1$ (kot če bi jo razdelili na n skladnih delov, ampak označimo le zadnji prpogib). To po indukcijski predpostavki znamo storiti. S prepogibom skozi oglišče B in točko E dobimo, kot presečišči obeh diagonal, točko P. Potem pa podobno kot pri dokazu trditve 3.1 dokažimo, da leži točka P na želeni razdalji od desne stranice kvadrata:

1. *Analitičen pristop:* Naj bo oglišče A koordinatno izhodišče in oglišče B točka $(1, 0)$. Premica, ki je nosilka diagonale AC, ima tako enačbo $y = x$, nosilka diagonale CE pa $y = -nx + n$. Točka P je njuno presečišče in ima tako koordinate $(n/(n+1), n/(n+1))$. Torej je od desne stranice kvadrata res oddaljena za $1/(n+1)$.

2. *Preko podobnih trikotnikov:* Označimo oglišča trikotnikov, kot kaže slika SLIKA plus REFERENCA. Trikotnik $\triangle AGP$ je enakokrak in njegova kraka označimo z x. Iz razmerij dolžin stranic podobnih trikotnikov $\triangle EFB$ in $\triangle PGB$ sledi

$$\frac{|EF|}{|FB|} = \frac{|PG|}{|GB|} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow n - nx = x \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}.$$

Točka P je od desne stranice kvadrata res oddaljena za $x - 1 = 1/(n+1)$.

□

Posledica 3.3. *Poljubno daljico znamo razdeliti na n skladnih delov za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vzemimo neko daljico poljubne dolžine. Ker znamo konstruirati pravokotnice skozi točke in prenašati razdalje, lahko konstruiramo kvadrat, katereda zgornja stranica dana daljica (spet kakšna slikca več korakov). Po zgornji trditvi jo znamo razdeliti v razmerju $(n-1):1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem moramo njen daljši del razdeliti na $n-1$ skladnih delov. To storimo na enak način kot prej – konstruiramo manjši kvadrat s to novo stranico in ponovimo postopek. Ustavimo se, ko na nekem koraku stranico kvadrata razdelimo v ramerju $1:1$. Takrat bo zgornja stranica oz. dana daljica razdeljena na n skladnih delov. □

Metoda2

Metoda3

Metoda4

Več metod (vsaj tri?), na koncu daš Hagovo metodo in iz tega začneš z novim podpoglavjem – Hagovi izreki. Matode pred tem: Hull2013 (str. 36–40)

3.3 Hagovi izreki

S prepogibanjem kvadratnega lista papirja se je veliko ukvarjal Kazuo Haga, sicer japonski profesor biologije. V svojem delu *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding* [9] je tako med drugim formuliral tri izreke, ki jih poznamo pod imenom *Hagovi izreki*.

Konstrukcija poljubnega $a/b \in \mathbb{Q}$ [17, str. 20–21]
Hull2013, activity 11 (str. 103–)

3.3.1 Prvi Hagov izrek

PLUS posplošitev.

3.3.2 Drugi Hagov izrek

PLUS posplošitev.

3.3.3 Tretji Hagov izrek

PLUS posplošitev.

3.4 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

3.4.1 Trisekcija kota

Motivacija za ta problem?

Kot 90° znamo tretjiniti z neoznačenim ravnilom in šestilom, saj znamo konstruirati kot 30°. Težava je, da ne obstaja konstrukcija, s katero na tri skladne kote razdelimo *poljuben* kot. V [15, str. 77–78] je dokaz o nezmožnosti trisekcije kota 60°. Avtor se pri tem sklicuje na izrek 2.12 in opombo 2.13 in podpoglavja 2.3.1.

Grki so to reševali z uporabo hiperbole – glej [27, str. 9]. V tem članku so opisane vse točke, ki se jih da kosntruirati s stožnicami (in gre za ista števila kot z origamijem?) dobimo množico, zaprto za korenjenje in tretji koren ...

Z origamijem pa obstaja celo več načinov, kako poljuben kot razdeliti na tri skladne dele.

Neka origami konstrukcija je v [22, str. 155]

Avtor Abe:

- naloga 10.14 [22, str. 158 spodaj]
- [17, str. 33]

Avtor Justin:

- [17, str. 34]

Gleason's trisection [8]

Pappus [22, str. 154–155]

3.4.2 Podvojitev kocke

V prostoru imamo kocko. Ali se da samo z ravnilom in šestilom narisati stranico kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot dana kocka?

Če je stranica kocke dolga 1, je stranica podvojene kocke dolga $\sqrt[3]{2}$. Ker je obseg $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad obsegom $\mathbb{Q}$ (enačba $x^3 - 2 = 0$ nima racionalne rešitve), podvojitev kocke ni mogoča [15, str. 78].

Grki so to rešili s presečiščem dveh parabol – glej [27, str. 5–6], kar je zelo podobno oni iz [22, str. 156] (za poljuben k!). Tukej daj samo slikco 10.7 in napiši, da za dokaz gledajo tistega pri konstrukciji preko Belochinega kvadrata (v razdelku 6.2.1). No, lahko pa tukaj dokažeš in v poglavju z enačbami referiraš, da je možno s kvadratom konstruirati in je to isto kot tle. Sam da tukaj ne zarišeš kvadrat. Ker ga v resnici ni treba. Če se tko odločiš, pol spremeni tisto podpoglavje v samo omembo.

Messerjeva konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ v [**land2013**]

Še ena konstrukcija $\sqrt[3]{a/b}$ je v [7, str. 366–367].

4 Konstrukcija pravilnih n-kotnikov

.

Izrek: Pravilni n-kotnik lahko narišemo le s šestilom in ravnilom natanko tedaj, ko je število n oblike $n = 2^r(2^{2^s} + 1)$, kjer sta r in s nenegativni celi števili, število $2^{2^s} + 1$ pa je praštevilo.

Fermat je domneval, da je vsako število oblike $2^{2^s} + 1$ praštevilo. To pa ni res. Že Euler je ugotovil, da je število $2^{2^5} + 1$ sestavljeno. Deljivo je s številom 641.

To vse je iz [15, str. 78].

5 Pregibanje tangent na stožnice

Iz didaktičnega vidika zelo zanimivo poglavje nam predstavlja konstrukcije tangent na stožnice s prepogibanjem papirja. Vsebina je tu predstavljena tako, da je bralec najprej povabljen, da vzame list papirja in ga prepogiba po navedenih korakih. Po opažanju, kaj se na papirju pri tem prikaže, preidemo na matematični del, kjer dokažemo, da so prepogibi res tangente na določeno stožnico.

Učitelji matematike so povabljeni, da si pri obravnavi stožnic vzamejo čas in izvedejo spodnje aktivnosti. Dijaki bodo z veliko verjetnostjo presenečeni nad rezultati zgibanja, kar jih lahko bolj motivira za obravnavo geometričnih lastnosti stožnic. Priporočljiva je tudi izvedba ure v računalniški učilnici, kjer lahko vsak dijak z ustreznim programskim orodjem (npr. Geogebra) sam poskusi zgraditi opisano konstrukcijo. S tem lahko znanje o stožnicah le še bolj utrdi.

Z origamijem ne moremo konstruirati gladkih krožnih lokov. Kljub temu pa lahko z upoštevanjem določenih korakov konstruiramo premice, ki so tangentne na neko krivuljo. Več takih tangent nam poda nekakšno lomljenko, če pa bi konstrukcije pregibov ponavljali v nedogled, bi teoretično v limiti res dobili gladko krivuljo.

Definicija 5.1. Naj bo dana družina krivulj s parametrizacijo $F(t, x, y) = 0$, kjer je t njen parameter in F diferenciabilna za vsak t. *Ovojnica* te družine je krivulja, ki je tangentna na vsako krivuljo iz družine v neki točki, unija točk tangentnosti pa je ravno cela ovojnica.

Opomba 5.2. Vsaka krivulja iz družine mora biti diferenciabilna in med krivuljami mora biti gladek prehod (kako to bolj strokovno napisat?). Vendar to ni zadosten pogoj, da ovojnica te družine družine obstaja – protiprimer je družina krožnic s skupnim središčem in polmerom, ki se zvezno povečuje [28]. Ovojnica je dana kot rešitev enačb

$$F(t, x, y) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, y) = 0,$$

kjer je $\partial F/\partial t$ parcialni odvod funkcije F po parametru t.

Opomba 5.3. Ker so pregibi ravni, bodo v našem primeru krivulje v družini kar premice. Te premice so torej ravno tangente na ovojnico te družine.

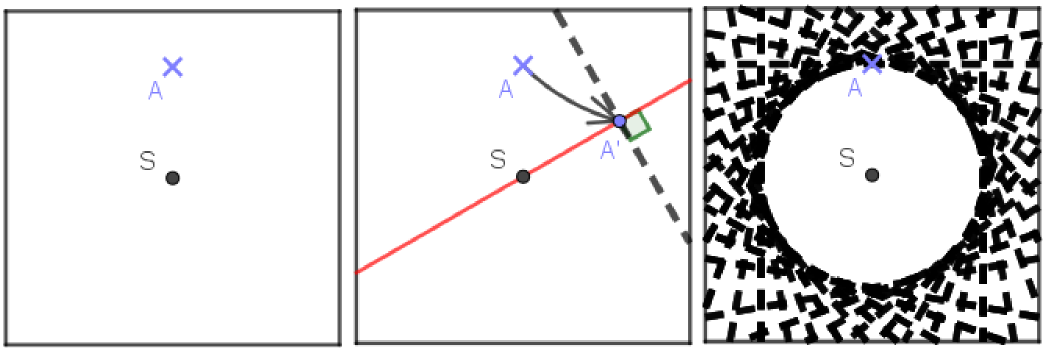
Pa si poglejmo, kako s prepogibi dobimo tangente na vse štiri stožnice.

5.1 Krožnica

Aktivnost: *Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredi označi točko S. Nato drugje označi še točko A. Skozi točko S prepogni poljubno premico in na njej označi točko A', da velja $|SA| = |SA'|$. Nato skozi točko A' prepogni pravokotnico na premico SA'. To je iskan pregib. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro premice skozi točko S (gl. sliko 16). Kaj opaziš?*

Opomba 5.4. V podpoglavju 2.2.3 smo se naučili prenašati razdalje, zato je zgornja konstrukcija mogoča, zahteva pa še nekaj dodatnih vmesnih pregibov (gl. dokaz trditve 2.10).

Iz konstrukcije pregiba kot pravokotnice na premico SA' skozi točko A' je naslednja trditev očitna in ne potrebuje zapisanega dokaza.



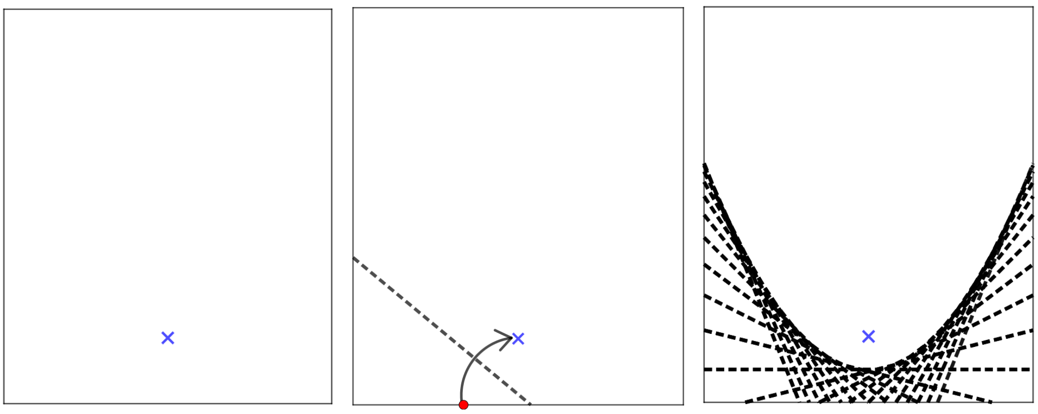
Slika 16: Sukanje izbrane točke okoli središča.

Trditev 5.5. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na krožnico s središčem v točki S in polmerom SA.*

Za različno izbiro premic skozi točko S dobimo različne tangente. S ponavljanjem konstrukcije tangente v neskončnost dobimo družino tangent, katere ovojnica je krožnica s središčem v točki S in polmerom SA.

5.2 Parabola

Aktivnost: *Vzemi pravokoten list papirja in svinčnik ter nekje sredi spodnje polovice lista s pisalom označi točko. Nato si izberi točko še na spodnji stranici lista in ga prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na spodnji stranici papirja (gl. sliko 17). Kaj opaziš?*



Slika 17: Prepogibanje spodnje stranice papirja na izbrano točko.

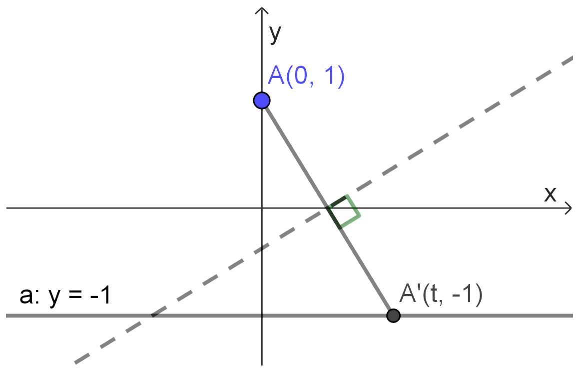
Omenjen pregib je origami operacija O3, lahko pa nanjo gledamo tudi kot na operacijo O6. Za le-to smo v poglavju 2 že premislili, da nam pregib, ki poteka skozi dano točko B in točko A položi na premica a, poda tangento na parabolo z goriščem A in premico vodnico a (gl. sliko 5 in premislek nad njo). Tukaj pa take točke B ni, kar pomeni le to, da smo s pregibom konstruirali neko tangento – pregib je namreč simetrala daljice, ki ima za krajišči obe izbrani točki iz navodila aktivnosti, torej obstaja točka (točka P na sliki 5), ki je enako oddaljena od spodnje stranice lista in prve izbrane točke. Nadaljni premislek, da je to edino presečišče pregiba in parabole, je enak kot prej. Spodnja trditev je tako že dokazana.

Trditev 5.6. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na parabolo z goriščem v izbrani točk in premico vodnico, ki jo predstavlja spodnja stranica lista.*

Ker je vsak pregib tangenten na isto parabolo, je obris, ki bi nastal po neskončno pregibih, res ta parabola.

To je bil intuitiven premislek. Poglejmo si, kako lahko to dokažemo na bolj matematični način.

Začnimo kar s parametrizacijo družine konstruiranih pregibov. V ta namen v model poljubne točke in spodnje stranice lista vpeljimo nekaj oznak. Naj bo $c \in \mathcal{O}$. Vzemimo točko $A(0, c)$ in premico $a : y = -c$, ki sta origami-konstruktibilni, in naredimo pregib, ki točko A preslika na premico a v točko $A'(t, -c)$ za nek $t \in \mathbb{R}$ (slika 18 v primeru $c = 1$).



Slika 18: Pregib točke $A(0, 1)$ na premico $a : y = -1$ (primer za $c = 1$).

Ker je pregib oz. konstruirana premica simetrala daljice AA', lahko hitro določimo njeno enačbo. Koeficient nosilke daljice AA' je $k_A = -\frac{2c}{t}$, središče pa $(\frac{t}{2}, 0)$. Tako hitro določimo enačbo pregiba:

$$y = \frac{t}{2c}x - \frac{t^2}{4c}. \tag{5.1}$$

Dobili smo iskano parametrizacijo družine pregibov z enačbo

$$F(t, x, y) = \frac{t}{2c}x - y - \frac{t^2}{4c} = 0.$$

Za vsak $t \in \mathbb{R}$ torej dobimo drugo tangento na parabolo z goriščem v točki A in premico vodnico a z zgornjo enačbo 5.1. Izrazimo sedaj enačbo ovojnice preko sistema enačb iz opombe pod definicijo 5.1. Iz enačbe $(\partial/\partial t)F(t, x, y) = 0$ dobimo $x/(2c) - 0 - (2t)/(4c) = 0$ oz. $x = t$. Ko to vstavimo v enačbo $F(t, x, y) = 0$, dobimo

$$y = \frac{x^2}{4c}, \tag{5.2}$$

torej je ovojnica res parabola. Njeno enačbo lahko dobimo tudi brez definicije ovojnice. Ker so vse točke na pregibu enako oddaljene od točk A in A', na pregibu obstaja le ena točka T, za katero velja $d(T, A) = d(T, a)$. Njena abscisa je $x = t$ (točka T leži na pregibu točno nad točko A') in iz enačbe 5.1, dobimo še ordinato

$y = t^2/(4c)$. Ker točka T za vsak $t \in \mathbb{R}$ leži na paraboli, pri menjavi $x = t$ dobimo ravno enačbo 5.2.

Preden gremo na naslednji način dokaza, si poglejmo še vpliv parametra c na parabolo. Razdalja med njenim goriščem in premico vodnico je $2c$ in iz enačbe 5.2 je razvidno, da bo z manjšanjem c parabola vedno ožja.

Hull v [13, str. 55–56] poda prefinjen dokaz preko kvadratne formule. Vemo, da pregib O6 ne obstaja vedno (slika 4 desno). Poglejmo, ali obstajajo v ravnini našega modela kakšne točke, skozi katere ne moremo konstruirati pregiba oz. tangente. Vzemimo našo parametrizacijo družine tangent (enačba 5.1) in za lažje reševanje privzemimo $c = 1$. Če jo rešimo za t, nam dobljena formula pove, za katere vrednosti t pregib poteka skozi točko (x, y):

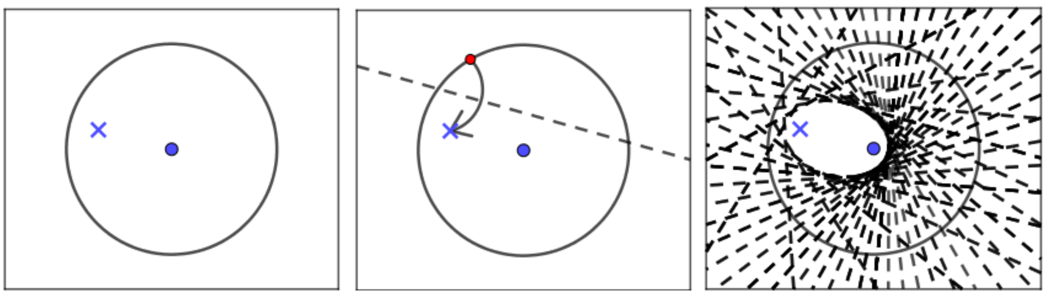
$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{x}{2}t + y = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - y}}{\frac{1}{2}}.$$

Enačba ima dve realni rešitvi pri pogoju $x^2/4 - y > 0$, kar pomeni, da vsako točko (x, y), za katero ta pogoj velja, sekata dva pregiba. To so ravno točke pod parabolo $y = x^2/4$. Za točke *na* paraboli velja $y = x^2/4$, iz česar dobimo eno rešitev $t = x$, torej to točko seka natanko en pregib. Nazadnje nam ostane še območje, za katerega velja $y > x^2/4$, t. j. območje nad parabolo $y = x^2/4$, kar nam ne poda realnih rešitev za t, torej ga ne seka noben izmed konstruiranih pregibov. Tako je obris, ki ga dobimo v nalogi, res parabola $y = x^2/4$.

Aktivnosti za naslednji dve podpoglavji sta enaki kot v tem, le da namesto spodnje tranice lista v izbrano točko prepogibamo krožnico.

5.3 Elipsa

Aktivnost: *Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na notranji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 19). Kaj opaziš?*



Slika 19: Prepogibanje krožnice na izbrano točko znotraj nje.

Opomba 5.7. Za izris poljubne krožnice tu lahko uporabimo šestilo. Prej smo videli, da znamo lomljeno krožnico prepogniti tudi z origamijem, vendar imamo potem na listu papirja veliko pregibov, ki nam ovirajo pogled na ciljno sliko. Zato je uporaba šestila v ta namen dovoljena predvsem iz praktičnega vidika.

Izgleda, kot da se nam izriše elipsa, ki ima za gorišči središče krožnice in izbrano točko znotraj nje. Spomnimo se, da na elipsi ležijo vse točke, katerih vsota razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi (t. j. dvakratnik velike polosi). V našem primeru je elipsa natančno določena, kar nam pove naslednja trditev [13, str. 60–61].

Trditev 5.8. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na elipso z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo, enako polmeru izbrane krožnice.*

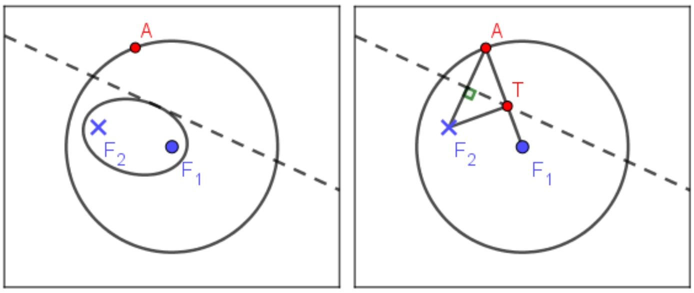
Dokaz. Naj bo točka F_1 središče krožnice s polmerom r in točka F_2 poljubna točka znotraj krožnice. Potem je elipsa, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako r, natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko A (slika 20 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to elipso.

Označimo s T presečišče pregiba in daljice AF_1 (slika 20 desno). (Ali presečišče vedno obstaja? Ja, samo še dokaži to) Ker je pregib simetrala daljice AF_2, velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

$$|TF_1| + |TF_2| = |TF_1| + |TA| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke A. Ker je r velika os elipse, točka T leži na njej.

Pokažimo še, da je pregib tangenten na elipso. Opazimo, da so vsi trije koti z vrhom v točki T, ki imajo za enega od krakov pregib, skladni. Značilnost tangent na elipso pa je ravno ta, da se žarek, ki ga izstrelimo iz enega gorišča v rob elipse, vedno pod istim kotom odbije v drugo gorišče. Torej je pregib tangenten na dano



Slika 20: Dokaz tangentnosti pregibov na elipso.

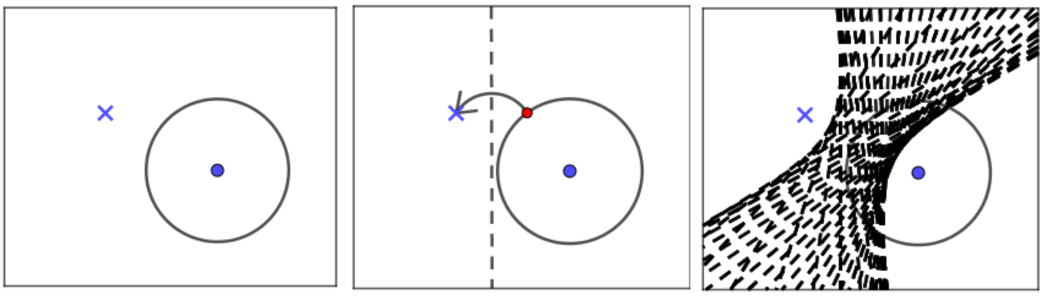
elipso v točki T. □

Bi se dalo dobit enačbo preko ovojnice?

Kaj se zgodi, če točko izberemo *zunaj* krožnice, pa si pogledamo v naslednjem razdelku.

5.4 Hiperbola

Aktivnost: *Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na zunanji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 21). Kaj opaziš?*



Slika 21: Prepogibanje krožnice na izbrano točko zunaj nje.

Podobno kot prej lahko sklepamo, da se nam izriše obris hiperbole. Spomnimo se, da na hiperboli ležijo vse točke, katerih absolutna vrednost razlike razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi. Tako kot pri elipski je tudi tu hiperbola natančno določena. Naslednja trditev in dokaz sta zato zelo podobna kot za elipso.

Trditev 5.9. *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na hiperbolo z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo (t. j. dvakratnik velike polosi), enako polmeru izbrane krožnice.*

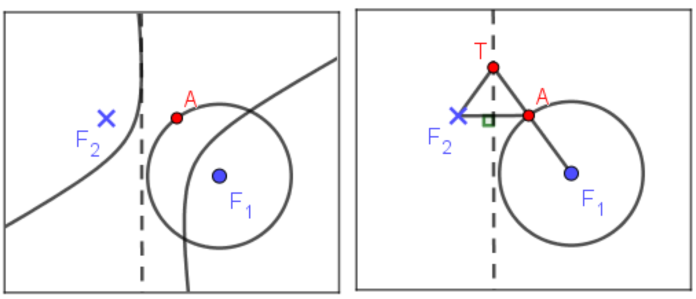
Dokaz. Naj bo točka F_1 središče krožnice s polmerom r in točka F_2 poljubna točka zunaj krožnice. Potem je hiperbola, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako r, natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko A (slika 22 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to hiperbolo.

Označimo s T presečišče pregiba in nosilke daljice AF_1 (slika 22 desno). (Ali presečišče vedno obstaja? NE, V 2 PRIMERIH DOBIMO ASIMPTOTO - ko je premica vzporedna k pregibu) Ker je pregib simetrala daljice AF_2, velja $|TA| = |TF_2|$, torej je

$$||TF_1| - |TF_2|| = ||TF_1| - |TA|| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke A. Ker je r velika os hiperbole, točka T leži na njej.

Pokažimo, da je to res tangenta. Ker je pregib simetrala daljice F_2A, prepolavlja kot $\angle ATF_2$, ki je enak kotu $\angle F_1TF_2$. Torej pregib skozi točko T na hiperboli prepolavlja kot, ki ga ta točka oklepa z goriščema, to pa je ravno značilnost tangent na hiperbolo (zase: pokazi de je to rejs).



Slika 22: Dokaz tangentnosti pregibov na hiperbolo.

Torej je pregib tangenten na dano hiperbolo v točki T. □

Bi se dalo dobit enačbo preko ovojnice?

Bolj analitičen dokaz, kjer se izračuna splošno enačbo elipse in hiperbole glede na izbrano krožnico in točko znotraj oz. zunaj nje, najdemo v [26, str. 204–206]. Tudi Lotka v [20] iz opisane konstrukcije izpelje splošno enačbo elipse in tudi nastavi popravek, ki nam da splošno enačbo hiperbole. S tem oba dokažeta, da je ogrinjača teh pregibov res elipsa oz. hiperbola. Nekaj je tudi v [12, str. 34 spodaj].

6 Reševanje enačb

popravi da so captioni slik, ki so v več kot eni vrstici, poravbnani na sredini

Zapustimo deloma področje geometrije in si poglejmo, kako lahko s prepogibanjem papirja rešujemo enačbe z racionalnimi koeficienti.

Spomnimo se še, da smo origami števila definirali kot vsa števila, ki jih lahko s prepogibanjem konstruiramo preko na začetku danega izhodišča O in števila 1 na realni osi (definicija 2.14). V evklidski ravnini (ki je v bijekciji s kompleksno ravnino, dano v definiciji) bomo konstruirali rešitve naših enačb, da pa bo pregibov čim manj in s tem preglednost večja, za označbo pomožnih točk in premic dopuščamo uporabo pisala (saj bi jih tako ali tako znali konstruirati s pregibi).

Začnimo z najbolj osnovno, t. j. linearno enačbo. Enačba $ax + b = 0$, kjer $a, b \in \mathbb{Q}$ in $a \neq 0$ ima rešitev $x = -b/a$, ki je racionalno število, torej origami število in samo po sebi konstruktibilno. Če bi želeli rešitev konstruirati geometrijsko preko pregibov, v ravnini prepognemo premico $y = ax + b$ (napravimo pregib npr. skozi točki (0, b) in (1, a+b)) in njeno presečišče z abscisno osjo nam da iskano rešitev.

Uporaba origamija je za reševanje linearne enačbe očitno manj praktična kot računanje rešitve. Bolj zanimivo je reševanje kvadratne in kubične enačbe. Ker za njune rešitve obstajata splošni formuli, bi jih lahko najprej izračunali in nato preko operacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in korenjenja konstruirali s prepogibanjem, vendar je to časovno preveč potratno. Pogledali si bomo, kako se z origamijem lahko temu izognemo in rešitev konstruiramo brez uporabve računskih operacij.

Ključno vlogo bosta v nadaljevanju odigrali origami operaciji O6 in O7. Prva nam hkrati s konstrukcijo tangente na parabolo določi tudi točko na paraboli, skozi katero je pregib tangenten na stožnico, to pa je ekvivalentno reševanju kvadratne enačbe. Druga s konstrukcijo skupne tangente na dve paraboli omogoča reševanje kubične enačbe. Alperin v [1, str. 129] pokaže, kako izpeljati koeficient skupne tangente na dani paraboli in izkaže se, da je iskani koeficient rešitev kubične enačbe. Število skupnih tangent je torej enako številu rešitev kubične enačbe, kar pomeni, da imata paraboli v evklidski ravnini največ tri skupne tangente.

V teoriji bi nam prepogibanje papirja pomagalo tudi pri reševanju kvartičnih enačb, saj zanje še obstaja splošna formula (vendar zaradi dolžine praktično neuporabna) in tudi vemo, da lahko enačbo četrte stopnje prevedemo na enačbe nižje stopnje (gl. [5], [2]). Geometrično pa je to reševanje potem težje izvedljivo in zato manj motivacijsko, saj bi postopek reševanja zahteval veliko več pregibov kot pri reševanju ene kubične ali kvadratne enačbe, pa tudi vmesne rezutate bi morali računati. Tako bi se lahko tu z reševanjem enačb preko origamija ustavili, vendar obstajajo alternativne rešitve. V [3] je opisan postopek, ki preko projektivne geometrije in dualnih stožnic ter z Belochinim pregibom reši splošno kubično in nato tudi kvartično enačbo neke določene oblike. Postopek si bomo tudi sami pogledali, saj je zelo zanimiv iz vidika projektivne geometrije.

Za enačbe pete in višjih stopenj pa splošna formula za rešitve ne obstaja več (*Abel-Ruffinijev* izrek, gl. [23]). Kljub temu se da z origamijem še vedno konstruirati rešitve nekaterih enačb višjih stopenj, vendar ne obstaja postopek z enkratnimi prepogibi – potrebno se je poslužiti dvojnih (*two fold*) ali večkratnih (*multi-fold*) prepogibov (gl. poglavje 8).

6.1 Reševanje kvadratne enačbe preko tangente na parabolo

Rešujemo enačbo oblike

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{Q}$ in velja $a \neq 0$. Njeni splošni rešitvi sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

vendar so konstrukcije vseh teh števil časovno potratno, zato iščemo hitrejši način reševanja.

Postopek, ki si ga bomo pogledali v nadaljevanju, predpostavlja $a = 1$. Ker je vodilni koeficient neničeln, lahko z njim enačbo delimo in pri tem še vedno dobimo racionalne koeficiente, zato lahko predpostavko brez škode za splošnost sprejmemo. Nova oblika enačbe je tako

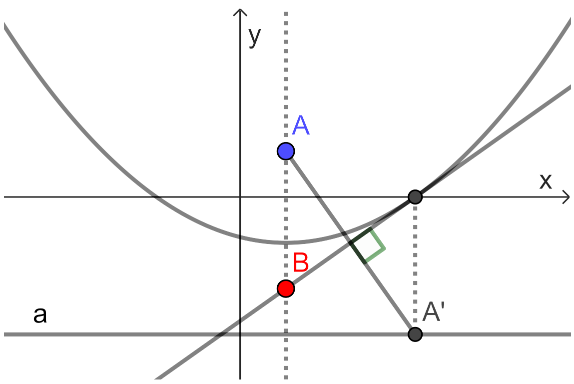
$$x^2 + bx + c = 0. \tag{6.1}$$

Predpostavimo, da ima enačba dve različni realni rešitvi oz. da je diskriminanta enačbe pozitivna, t. j. $D = b^2 - 4c > 0$. Če realnih ničel ni, o origami konstrukciji rešitev namreč nima smisla razpravljati. Če je rešitev ena, je podana kot $x = -b/2$, kar je origami-konstruktibilno število in se ga lahko takoj konstruira.

Enačba 6.1 nam poda pokončno parabolo $y = x^2 + bx + c$ z vodoravno premico vodnico in dvema ničlama, ki sta rešitvi naše enačbe. Iščemo absciso presečišča parabole z abscisno osjo.

Zopet se bomo poslužili dosedanjega znanja o operaciji O6. Ta nam s pregibom skozi dano točko B, ki točko A položi na premico a, konstruira tangento na parabolo z goriščem v točki A in premico vodnico a.

Naša parabola je z enačbo seveda natančno določena. Ideja iskane konstrukcije rešitev enačbe je določiti tako točko B (najlažje kar na osi parabole), da bi nam izvedba operacije O6 podala tangento na parabolo ravno v njeni ničli. Željeni pregib mora potekati skozi točko B in gorišče A položiti na tisto točko A' na premici vodnici a, ki ima enako absciso kot ničla parabole. (gl. sliko 23). Taka točka B je z osjo parabole in katerokoli izmed ničlama (zaradi simetrije) natanko določena.



Slika 23: Operacijo O6 skozi iskano točko B poda rešitev kvadratne enačbe.

Edina nevarnost, da ta konstrukcija ne bo delovala, je možnost, da točka B kdaj ne bo origami-konstruktibilna točka. Zato sedaj izračunajmo njene koordinate in se prepričajmo, da se to nikoli ne bo zgodilo.

Najprej iz dane enačbe parabole določimo njeno gorišče A in premico vodnico a. Spomnimo se, da iz enačbe parabole oblike

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

takoj razberemo koordinati gorišča (x_0, y_0) in enačbo premice vodnice $y = y_0 - p$. V našem primeru enačbo $y = x^2 + bx + c$ preoblikujemo v

$$\left(x - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\right).$$

S tem sta gorišče A in premica vodnica a določena:

$$A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2 - 1}{4}\right) \text{ in } a : y = c - \frac{b^2 + 1}{4}.$$

Naj bo t ena izmed rešitev enačbe 6.1. Na premici a z A' označimo točko z absciso t. Poiščimo enačbo pregiba, ki gorišče A položi v točko A'. Ta pregib bo tangenten na parabolo ravno v njeni ničli, njegovo presečišče z osjo parabole $x = -b/2$ pa nam bo določilo točko B.

Koeficient nosilke daljice AA' je $-1/(2t+b)$, torej je koeficient pregiba $k = 2t+b$. Pregib je po konstrukciji tangenten na parabolo v ničli $(t, 0)$, torej je njegova enačba

$$y = (2t + b)(x - t) = (2t + b)x - 2t^2 - bt = (2t + b)x - t^2 + c.$$

Pri tem smo upoštevali, da velja $t^2 + bt + c = 0$. Presečišče pregiba in osi parabole je tako točka B z absciso $x = -b/2$ in ordinato

$$y = (2t + b)\left(-\frac{b}{2}\right) - t^2 + c = -t^2 - tb + c - \frac{b^2}{2} = c + c - \frac{b^2}{2} = 2c - \frac{b^2}{2}.$$

Obe koordinati sta racionalni, torej je točka B konstruktibilna točka. Ker leži na osi parabole, nam poda obe rešitvi enačbe – pregiba sta si simetrična glede na os. Povzemimo sedaj postopek konstrukcije rešitve kvadratne enačbe 6.1:

1. V koordinatnem sistemu označimo gorišče $A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$, premico vodnico $a : y = c - \frac{b^2+1}{4}$ in točko $B(-\frac{b}{2}, 2c - \frac{b^2}{2})$.

2. Z operacijo O6 naredimo pregib skozi točko B, ki točko A položi na premico a (če je diskriminanta enačbe pozitivna, sta možna pregiba dva).

3. Skozi sliko točke A naredimo vertikalen pregib in abscisa njegovega presečišča z abscisno osjo je ničla dane enačbe.

Primer: Poiščimo rešitve enačbe $x^2 - x - 1 = 0$. Določimo obe točki in premico: $A(\frac{1}{2}, -1)$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ in $a : y = -\frac{3}{2}$.. Opravimo operacijo O6 in označimo presečišče abscisne osi in pravokotnice nanjo skozi sliko točke A. Če smo bili pri pregibanju natančni, dobimo presečišči pri $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (gl. sliko v [12, str. 37]).

To še zdaleč ni edini postopek za reševanje kvadratne enačbe. Kot še en lep primer Hull v [12, str. 38] navaja Lillovo konstrukcijo preko krožnice, lahek dokaz pa je prepuščen bralcu. Hkrati je to primer, kako za rešitev nekega problema najprej najdemo (bolj domačo) evklidsko konstrukcijo, ki jo lahko nato preko origami operacij preobrazimo v origami konstrukcijo – saj že vemo, da lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo vse in še več, kar se da z evklidskim orodjem. Pri obravnavi kubične enačbe bomo spoznali Belochino metodo, ki se jo da aplicirati tudi na kvadratno enačbo, in prilagojen postopek je tako opisan v razdelku 6.2.2.

6.2 Lillova metoda in Belochin pregib

V tem poglavju se bomo spoznali z Lillovo metodo, s katero lahko v teoriji rešimo enačbo poljubne stopnje. V središču naše pozornosti bo origami postopek za reševanje kubične enačbe, ki ga je odkrila že večkrat omenjena Belocheva, vendar se da po Lillovi metodi z uporabo operacije O6 rešiti tudi kvadratno enačbo, kar si bomo tudi na hitro pogledali proti koncu razdelka. Poleg tega bomo spoznali tudi več sadov Belochinega pregiba.

Sedaj pa vzemimo enačbo oblike

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ in velja $a \neq 0$. Tu je navedena ena oblika zapisa njene splošne rešitve:

$$\begin{aligned}
Q &= \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \\
C &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(Q + 2b^3 - 9abc + 27a^2d)} \\
x_1 &= -\frac{b}{3a} - \frac{C}{3a} - \frac{b^2 - 3ac}{3aC} \\
x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 + i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \\
x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 - i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC}
\end{aligned}$$

Operacija O6 nam je preko konstrukcije tangente na parabolo pomagala rešiti kvadratno enačbo. Spomnimo se, da je Belocheva to v 30-ih letih prejšnjega stoletja nadgradila z operacijo O7, ki nam konstruira skupno tangento na dve paraboli hkrati. Po njej jo tudi imenujemo *Belochin pregib*. Z njim je kot prva odkrila resnično moč origami konstrukcij, a je žal trajalo več kot pol stoletja, da so matematiki začeli ceniti njeno odkritje.

6.2.1 Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom

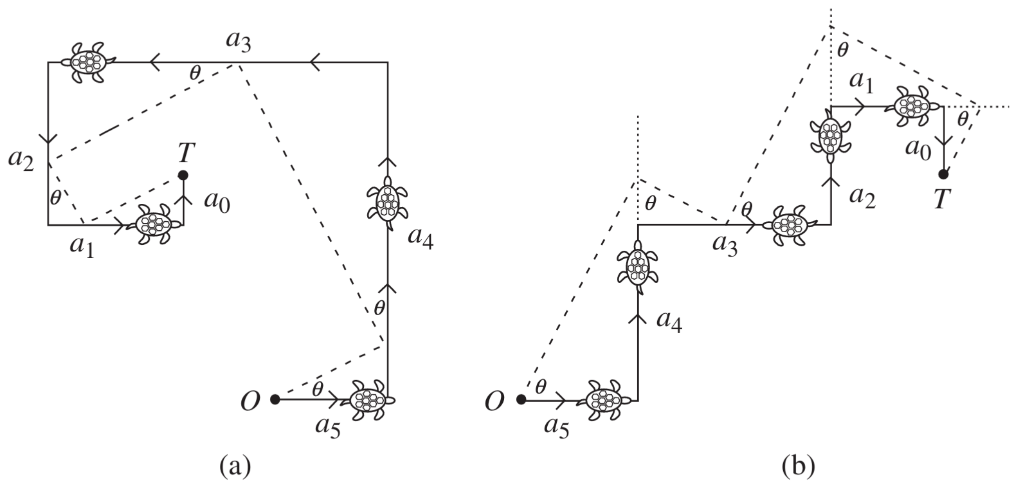
Belocheva je sama odkrila naslednjo metodo reševanja kubične enačbe, kjer nam vsak Belochin pregib poda eno izmed rešitev. Iz začetka poglavja že vemo, da je število rešitev enako številu skupnih tangent, torej številu možnih Belochinih pregibov.

Belocheva v svojem postopku izhaja iz Lillove genialne metode iskanja ničel poljubnih polinomov z realnimi koeficienti, ki si jo bomo v naslednjem razdelku podrobneje pogledali, za njeno aplikacijo pa uporabi avtorsko konstrukcijo – Belochin kvadrat.

Lillova metoda

Njen avtor je avstrijski inženir Eduard Lill, ki jo je l. 1867 opisal v svojem članku [19]. Gre za inovativen postopek, ki je v svoji osnovi čisto enostaven. Imejmo poljuben polinom $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ z realnimi koeficienti in iščemo njegove realne ničle, če obstajajo. Lill je iz njegovih koeficientov s sledečim postopkom v ravnini ustvaril enolično pot. Običajno se za njeno konstrukcijo uporablja figuro želve, ki nam kaže, v katero smer se premika pa tudi kam je usmerjena.

Na začetku želvo postavimo v koordinatno izhodišče O tako, da gleda v pozitivno smer x-osi. Želva najprej v to smer prehodi razdaljo, enako koeficientu a_n. Nato se obrne za 90° v nasprotno smer urinega kazalca in prehodi naslednjo razdaljo a_{n-1}. To ponovi za vsak koeficient polinoma in po prehojeni razdalji a_0 se ustavi v neki točki T (slika 24). Če je kateri od koeficientov negativen, želva hodi ritensko (primer (b) na sliki 24 za koeficiente a_3, a_2 in a_0), v primeru ničelnega koeficienta pa obstoji na mestu in se samo obrne. S potjo želve dobimo lomljeno črto iz največ $n+1$ daljic, ki jih brez škode označujmo kar z njihovimi "pripadajočimi" koeficienti.



Slika 24: Primera želvine poti za polinoma pete stopnje. Vzeto iz [14, str. 311].

Sedaj se v izhodišče O postavimo še mi in z laserskim žarkom poskusimo zadeti želvo v točki T. Žarek najprej usmerimo daljico a_{n-1}, od katere se odbije v daljico a_{n-2}, od te v daljico a_{n-3} in tako naprej. (slika 24). Pri tem upoštevamo troje:

- laserski žarek ne upošteva odbojnega zakona in se od daljice vedno odbije pod kotom 90°, zato so vpadni koti žarka na vse daljice med seboj enaki in prav tako to velja za odbojne kote;
- žarek se lahko odbije tudi od nosilke daljice;
- vsakič sta možni dve smeri odboja – na isto stran daljice (oz. njene nosilke) ali skoznjo – izberemo pa tisto, ki nam omogoči, da sploh lahko zadenemo naslednjo daljico.

ecimo, da smo zmogli zadeti želvo. Kot, ki ga v točki O oklepata laserski žarek in abscisna os, označimo z θ.

Trditev 6.1. *$x_\theta = -\tan\theta$ je ničla polinoma $p(x)$.*

Dokaz. Vzemimo primer, ko so vsi koeficienti polinoma $p(x)$ pozitivni. Želvina pot je v tem primeru sestavljena iz $n+1$ daljic, pot laserskega žarka (ki se vedno odbije od daljice in ne njene nosilke) pa iz n daljic. Slednje so ravno hipotenuze pravokotnih trikotnikov. Za vsako od njih je nasprotna kateta kota θ del daljice a_i, priležno kateto pa označimo z y_i ($n \geq i \geq 1$). dobimo

$$\begin{aligned}
y_n &= \tan\theta \cdot a_n = -x_\theta a_n \\
y_{n-1} &= \tan\theta \cdot (a_{n-1} - y_n) = -x_\theta(a_{n-1} + xa_n) = -(a_{n-1}x_\theta + a_n x_\theta^2) \\
y_{n-2} &= \tan\theta \cdot (a_{n-2} - y_{n-1}) = -x_\theta(a_{n-2} + a_{n-1}x_\theta + a_n x_\theta^2) = \\
&= -(a_{n-2}x_\theta + a_{n-1}x_\theta^2 + a_n x_\theta^3) \\
&\vdots \\
y_1 &= -(a_1 x_\theta + a_2 x_\theta^2 + \ldots + a_{n-1}x_\theta^{n-1} + a_n x_\theta^n).
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti desno stran premaknimo na levo in upoštevamo $y_1 = a_0$. Dobimo ravno $p(x_\theta) = 0$, torej je $x_\theta = -\tan\theta$ res ničla tega polinoma.

Primer negativnih koeficientov: [30, str. 36].

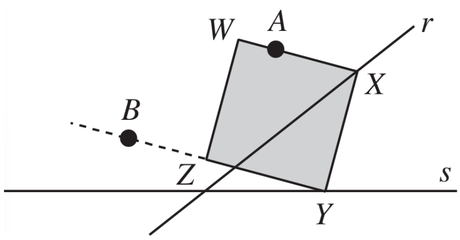
Primer ničelnih koeficientov: isto kot prej, samo se spusti y_i za tisti i, za katerega je $a_i = 0$. (???) □

Če pod nobenim kotom θ ne moremo zadeti želve, je polinom $p(x)$ brez realnih ničel.

Pojavi se nam vprašanje, kako določiti kot θ. Za polinom tretje stopnje je Belocheva preko svojega pregiba našla zelo preprosto rešitev, ki si jo bomo sedaj pogledali.

Belochin kvadrat

Imejmo dani točki A in B ter premici r in s. Z origamijem konstruirajmo kvadrat $WXYZ$, kjer oglišče X leži na premici r, njegovo sosednje oglišče Y pa na premici s. Velja še, da točka A leži na stranici WX (ali njeni nosilki), točka B pa na stranici ZY (ali njeni nosilki, slika 25).

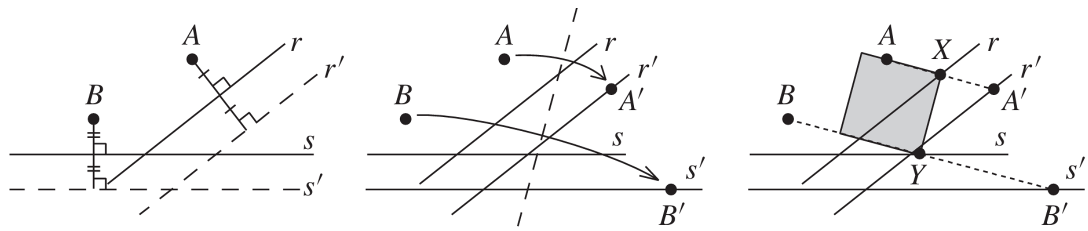


Slika 25: Belochin kvadrat. Vzeto iz [14, str. 309].

Belocheva je iznašla naslednji postopek, ki nam konstruira ta kvadrat:

- Najprej konstruiramo premico r', ki je vzporedna premici r in od nje enako oddaljena kot točka A, tako da premica r leži med točko A in premico r'. Na enak način premici s konstruiramo njeno vzporednico s' (slika 26 levo). To konstrukcijo opravimo s prepogibi iz operacije O5, zrcaljenja točke čez premico ter ponovne uporabe operacije O5. Zaradi preglednosti seveda dopuščamo, da namesto zrcaljenja preprosto prepognemo po premici in s svinčnikom označimo sliko točke.

- Nato opravimo Belochin pregib, ki točko A slika v točko A' na premici r', točko B pa v točko B' na premici s' (slika 26 na sredi).
- Naj bo točka X središče daljice AA' in točka Y središče daljice BB'. Ker je pregib simetrala teh dveh daljic AA' in BB', sta njuni središči po konstrukciji[6] ravno presečišči pregiba s premicama r in s (slika 26 desno).
- Daljica XY – ena izmed stranic kvadrata – je po konstrukciji pravokotna na daljici AX in BY, zato samo še določimo točki W in Z na daljicah ali njunih nosilkah in tako dobimo Belochin kvadrat.



Slika 26: Konstrukcija Belochinega kvadrata z origamijem. Vzeto iz [14, str. 310].

Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ z Belochinim kvadratom

Preden ravno naučeno znanje uporabimo za reševanje kubičnih enačb, si še na hitro poglejmo, kako lahko tudi z Belochinim kvadratom rešimo starogrški problem podvojitve kocke.

Za premico r vzemimo ordinatno os, za premico s pa abscisno os. Določimo še $A = (-1, 0)$ in $B = (0, -2)$. Vzporednici sta torej $r' : x = 1$ in $s' : y = 2$. Belochin pregib seka premico r v točki X, premico s pa v točki Y (slika 27). Z O označimo koordinatno izhodišče in opazimo podobne pravokotne trikotnike OAX, OXY in OYB. Z upoštevanjem $|AO| = 1$ in $|OB| = 2$ dobimo sledeča razmerja:

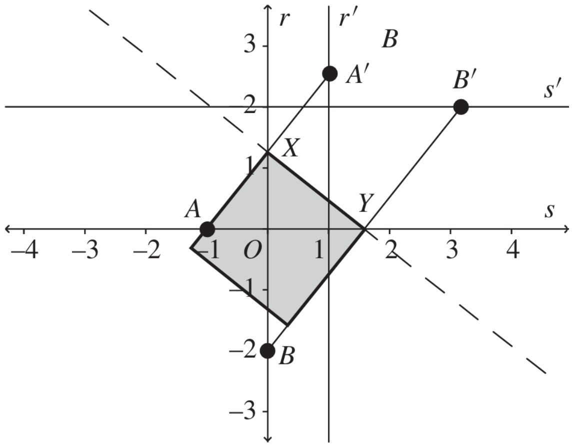
$$\frac{|OX|}{|AO|} = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{|OB|}{|OY|} \Longrightarrow |OX| = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{2}{|OY|},$$

iz česar sledi

$$|OX|^3 = |OX| \cdot \frac{|OY|}{|OX|} \cdot \frac{2}{|OY|} = 2 \Longrightarrow |OX| = \sqrt[3]{2}.$$

Vidimo lahko, da je to enaka konstrukcija kot jo je 50 let kasneje neodvisno od Belocheve odkril G. Martin (razdelek 3.4.2), le da je za točko B vzel točko $(0, -k)$ in s tem konstruiral dolžino $\sqrt[3]{k}$ za poljuben origami-konstruktibilen k.

[6]Gledamo lahko dva podobna pravokotna trikotnika s skupnim ogliščem v točki A (oz. B), enega dvakrat večjega od drugega



Slika 27: Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ preko Belochinega kvadrata. Vzeto iz [14, str. 310].

Združitev Lillove metode in Belochinega kvadrata

Za poljubno enačbo $ax^3+bx^2+cx+d=0$, kjer $a \neq 0$, povežimo sedaj Lillovo metodo s konstrukcijo primernega Belochinega kvadrata, ki nam bo natančno določil kot θ. Postopek je sledeč (gl. tudi sliko 28):

1. Za točko A vzemimo izhodišče O. Začrtamo želvino pot za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ki se začne v točki A in konča v točki B. V primeru neničelnih koeficientov je pot sestavljena iz štirih stranic, pot laserskega žarka pa iz treh.

2. Premica r naj bo nosilka daljice b ($r : x = a$), premica s pa nosilka daljice c ($s : y = b$).

3. Določimo premici $r' : x = 2a$ in $s' : b + d$ ter opravimo Belochin pregib, ki točko A položi na premico r' in točko B na premico s'.

4. Presečišči pregiba s premicama r in s zaporedoma označimo s točkama X in Y.

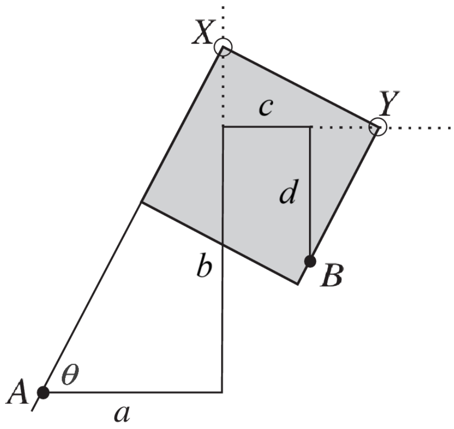
5. Zarišemo daljice AX, XY in YB.

Ker po konstrukciji velja $AX \perp XY \perp YB$, je to iskana pot laserskega žarka, ki se odbija pod pravim kotom in zadene želvo. Kot θ je kot, ki ga oklepata daljici a_3 in AX. Rešitev je torej $x_\theta = -\tan\theta$.

Če ima enačba še dve realni rešitvi, sta možna tudi še dva Belochina pregiba (enačba namreč ne more imeti dveh realnih rešitev, saj kompleksne rešitve nastopajo v konjugiranih parih).

Opomba 6.2. V resnici nikoli do sedaj nismo potrebovali konstruirati celega kvadrata; potrebovali smo le stranico XY in dejstvo, da je pregib pravokoten na daljici AX in BY.

Opomba 6.3. Enačbe premic r, s, r' in s' so univerzalne in zgornja konstrukcija tako deluje tudi v primeru, ko je kakšen od koeficientov b, c, d ničeln.



Slika 28: Konstrukcija želvine poti za Lillovo metodo preko Belochinega kvadrata. Vzeto in preurejeno iz [14, str. 313].

Za konkretne primere uporabe Belochinega postopka za reševanje kubičnih enačb glej [30, str. 38–44].

Kot zanimivost Lavričeva v [18, str. 10–13] s postopkom, ki je malo preurejen Belochin postopek, še analitično pokaže, da je ob primerno izbranih točkah A in B ter premicah r in s koeficient tangentnega pregiba rešitev kubične enačbe. Točki in premici izbere tako, da sta točki X in Y ravno presečišči z ordinatnima osema, iz česar lahko takoj razberemo koeficient tangente. V dokazu izpelje enačbi pripadajočih parabol in splošno enačbo njunih tangent ter iz tega dokaže rečeno. To je lahko odlična vaja za dijake, ki si želijo kakšnega izziva.

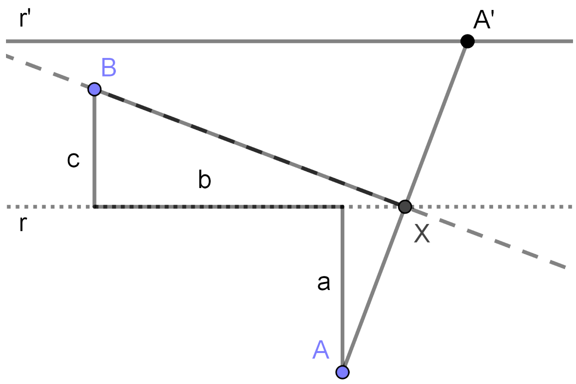
6.2.2 Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo

Lillovo lahko uporabimo tudi za reševanje kvadratne enačbe $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$. Na enak način v koordinatni sistem zarišemo želvino pot, ki se začne v točki A in konča v točki B. Za razliko od prej tu ne uporabimo Belochinega pregiba, temveč pregib iz operacije O6. Namesto dveh premic r in s imamo le eno – naj bo r nosilka daljice b. Kot prej – na razdalji a na drugi strani točke A – označimo še njeno vzporednico r'. Konstruiramo pregib, ki gre skozi točko B in točko A položi na premico r'. Njegovo presečišče s premico r nam določi točko X, kjer se žarek iz točke A pod pravim kotom odbije v točko B. Na sliki 29 je primer kosntrukcije pri negativnem koeficientu c. S tem je kot θ določen. Premislili smo tudi že, da sta možna največ dva pregiba in da je število pregibov enako številu realnih rešitev enačbe.

6.2.3 Hatorijeva konstrukcija

Japonski matematik Koshiro Hatori navaja postopek, ki je zelo podoben Belochinem postopku, vendar ga je avtor iznašel neodvisno od Belochinega dela. Brez škode za splošnost predpostavi $a=1$ in za reševanje enačbe $x^3+bx^2+cx+d=0$ sledi naslednjim korakom:

- Vkoordinatnem sistemu označimo točki $A=(b,1)$ in $B=(d,c)$ ter premici $a: y=-1$ in $b: x=-d$.



Slika 29: Reševanje kvadratne enačbe po Lillovi metodi z operacijo O6 ($c < 0$).

- Opravimo pregib, ki točko A položi na premico a ter točko B na premico b (kar je ravno Belochin pregib).

Avtor zaključi, da je koeficient opravljenega pregiba rešitev naše enačbe.

Bralec lahko sam premisli, da je to v resnici ravno Belochin postopek, le da se želva na začetku svoje poti ne nahaja v koordinatnem izhodišču in je najprej usmerjena navzdol. Prav tako lahko izrazi koeficient pregiba s kotom ob začetni točki A in res dobi $k = -\tan\theta$. (to si tudi sama preverila in res drži). Za geometrijsko razlago preko parabol gl. [10].

Opomba 6.4. Seveda bi lahko vzeli katerikoli $a \in \mathbb{Q}$ in vzeli premico $a : y = -a$.

6.3 Alperinova rešitev

Poglej kej sploh to rešuje, kakšne enačbe, če to spada pod Lillovo metodo, dej to kot podpoglavje v prejšnje poglavje (dodaj še en "sup")

Tudi on neodvisno od Belocheve, je pa pri njem $a = 1, b = 0$, kar se da nardit z vsako kubično enačbo, pač z uvedno nove spremenljivke al neki, da se kvadratni člen uniči. (gl. Hull 2020 str. 43, hull2013 str. 78 spodej) - prevedba kubične enačbe na kvadratno al neki tazga.

6.4 Kubična in kvartična enačba v afini ravnini

A je naslov ok?

Kot že omenjeno v uvodu tega poglavja, se Edwards in Shurman v [3] ukvarjata z reševanjem enačb tretje in četrte stopnje preko iskanja skupnih tangent na določene stožnice, pri tem pa uporabljata Belochin pregib. Pri kubični enačbi iz njenih koeficientov določita gorišči in premici vodnici dveh parabol, rešitve enačbe pa so koeficienti skupnih tangent. Postopek za reševanje kvartične enačbe je podoben, le da iz njenih koeficientov določita parabolo in krožnico, rešitve pa so začetne vrednosti skupnih tangent.

Pri tem se najprej vprašamo, kako lahko z origamijem določimo skupno tangento na parabolo in stožnico – do sedaj to namreč znamo le za dve paraboli, preko Belochinega pregiba. Postopek je v svojem bistvu zelo enostaven. Pri danem gorišču in premici vodnici parabole ter krožnici s središčem v točki S in polmerom r zarišemo krožnico z istim središčem ter dvakratnim polmerom, torej $2r$. Nato opravimo Belochin pregib, ki gorišče parabole položi na njeno premico vodnico, središče S pa na rob krožnice s polmerom $2r$. Pregib je skupna tangenta na parabolo in krožnico s polmerom r (slika dej kakšen slikovni primeeeeer). V tem razdelku torej za potrebe reševanja izjemoma potrebujemo šestilo za konstrukcijo krožnice.

Postopek se trenutno lahko dozdeva enostaven, vendar nas do enačb iskanih stožnic čaka še dolga pot. (Nekej od tega de se moramo spomnit splošne enačbe stožnic in afine pa projektivne geometrije blablabla)

Definicija projektivne geometrije nad vektorskim prostorom V (mi bomo imeli $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$.)

Stožnica $\mathcal{S}$ ima v $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ enačbo

$$\mathcal{S} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0, \tag{6.2}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\mathcal{S} : v^\intercal M v = 0, \text{ kjer sta } v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ in } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Pri tem je simetrična matrika M definirana do neničelnega skalarnega večkratnika natančno. Stožnica $\mathcal{S}$ je *neizrojena* (ni unija dveh premic ali ene dvojno štete premice), če ima poln rang, t. j. rang – dej v matematično okolje? $M = 3$ oz. ekvivalentno, $\det M \neq 0$. V nadaljevanju bomo delali le z neizrojenimi stožnicami, torej vedno obstaja inverz matrike M, ki je prav tako simetričen.

Dualno stožnico stožnice $\mathcal{S}$ definiramo z inverzno matriko:

$$\hat{\mathcal{S}} : v^\intercal M^{-1} v = 0.$$

Naj bo $p \in \mathcal{S}$ in naj bo $q = Mp$. Potem je

$$q^\intercal M^{-1} q = (Mp)^\intercal M^{-1}(Mp) = p^\intercal M^\intercal M^{-1} M p = p^\intercal M^{-1} p = 0,$$

kar pomeni, da je $q \in \hat{\mathcal{S}}$.

7 Alhazenov problem

Vir: članek od Vavšetiča in tudi [22, str. 137–139].

8 Origami konstrukcije z več hkratnimi prepogibi

Kvartična enačba (str. 386, https://www.researchgate.net/publication/255578688_One_Two_and_Multi-Fold_Origami_Axioms#pf16)

Alperin, Lang, Lucero so neki delali, 2-fold origami za teve enačbe.

Kvintična enačba

petinjenje kota

9 Zaključek

Prepogibanje z enkratnimi pregibi, brez svinčnika. Znamo zrcalit, rotirati točke, prenašati razdalje (simulacija krožnice).

Origami konstrukcije so močnejše od evklidskih – medtem ko lahko z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti (oz. poljubna števila oblike $a + b\sqrt{r}; a, b, r \in \mathbb{Q}$), zmoremo s prepogibanjem papirja poleg tega reševati še kubične in kvartične enačbe, tretjiniti poljubne kote, konstruirati tretje korene poljubnih origami-konstruktibilnih števil ter konstruirati N-kotnike za vsak N oblike $2^i3^j(2^k3^l + 1)$, kjer je število v oklepaju praštevilo. Zaslugo za nadvlado origamija nad evklidskim orodjem ima Belochin pregib, ki edina od origami operacij ne more biti konstruirana z neoznačenim ravnilom in šestilom.

Zelo didaktičen pripomoček za popestritev pouka in pokazat, kako se matematiki skriva v malih stvareh, kako jo opaziti, kako sam izpeljati stvari, raziskovati, kako konstrukcija deluje (preko podvprašanj ipd. kot ima hull2013).

10 Naloge

1. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo vzporednico k dani premici skozi točko, ki ne leži na tej premici.

2. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo kvadrat z dano stranico AB.

3. Z origami operacijami zapiši korake, ki konstruirajo enakostraničen trikotnik z dano stranico.

Literatura

[1] R. C. Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York Journal of Mathematics **6** (2000) 119–133, dostopno na `https://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf`.

[2] R. F. Amir Fathi Pooya Mobadersany, *A simple method to solve quartic equations*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences **6**(6) (2012) 331–336.

[3] J. S. B. Carter Edwards, *Folding quartic roots*, Mathematics Magazine **74**(1) (2001) 19–25.

[4] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.

[5] W. contributors, *Quartic equation – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2024, dostopno na `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quartic_equation&oldid=1262196167`.

[6] R. Geretschläger, *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine **68**(5) (1995) 357–371, dostopno na `http://www.jstor.org/stable/2690924`.

[7] R. Geretschläger, *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine **68**(5) (1995) 357–371, [ogled 29. 12. 2024], dostopno na `http://www.jstor.org/stable/2690924`.

[8] A. M. Gleason, *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon*, The American Mathematical Monthly **95**(3) (1988) 185–194.

[9] K. Haga, *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

[10] K. Hatori, *Origami Construcions*, 2003, dostopno na `https://origami.ousaan.com/library/conste.html`.

[11] T. L. Heath, *The thirteen books of euclid's elements, Vol. 1 (books i and ii)*, Dover Publications, Inc., 1956.

[12] T. C. Hull, *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

[13] T. C. Hull, *Project origami: activities for exploring matmehatics*, Taylor & Francis Group, 2013.

[14] T. C. Hull, *Solving cubics with creases: the work of beloch and lill*, The American Mathematical Monthly **118**(4) (2011) 307–315.

[15] M. Jerman, *O konstrukcijah z ravnilom in šestilom*, Obzornik za matematiko in fiziko **3**(45) (1998) 73–78.

[16] R. J. Lang, *British origami*, Four Problems **132**(3) (1988) 7–11.

[17] R. J. Lang, *Origami and geometric constructions*, v: 2013, dostopno na https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf.

[18] P. Lavrič, *Hagovi izreki za srebrne pravokotnike*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2013, dostopno na http://pefprints.pef.uni-lj.si/1534/1/Hagovi_izreki_za_srebrne_pravokotnike_PetraLavric.pdf.

[19] E. Lill, *Résolution graphique des equations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*, Nouvelles Annales de Mathématiques **6**(2) (1867) 359–362.

[20] A. J. Lotka, *Construction of conic sections by paper-folding*, School Science and Mathematics **7**(7) (1907) 595–597.

[21] S. Maraž, T. Božič in M. Torkar, *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.

[22] G. E. Martin, *Geomteric constructions*, Springer New York, 1997.

[23] M. Mrinal, *Galois theory and the abel-ruffini theorem*, v: 2019, dostopno na https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Mrinal.pdf.

[24] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami.

[25] M. Hvidsten, *Geometry with geometry explorer* (ur. R. E. Ross), The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.

[26] S. G. Smith, *Paper folding and conic sections*, The Mathematics Teachers **96**(3) (2003) 202–207.

[27] C. R. Videla, *On points constructible from conics*, The Mathematical Intelligencer **19**(2) (1997).

[28] Wikipedia contributors, *Envelope (mathematics) — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2024, dostopno na https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Envelope_(mathematics)&oldid=1223619712.

[29] T. S. Row, *Geometric exercises in paper folding* (ur. D. E. S. Wooster WOoodruff Beman), The Open Court Publishing Company, 1917, dostopno na https://ia800907.us.archive.org/7/items/tsundararowsgeo00rowrich/tsundararowsgeo00row pdf.

[30] T. Zore, *Origami geometrija*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2022, dostopno na http://pefprints.pef.uni-lj.si/7209/1/Origami_geometrija_-_Tja%C5%A1a_Zore.pdf.