

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

**ORIGAMI KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE  
ENAČB S PREPOGIBANJEM PAPIRJA**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025



## Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ... **DOPIŠI**



# Kazalo

<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Evklidske in origami konstrukcije</b>	<b>3</b>
2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije . . . . .	3
2.2 Origami konstrukcije . . . . .	4
2.2.1 Origami operacije in origami konstrukcije . . . . .	5
2.2.2 Zrcaljenje točke čez premico . . . . .	10
2.3 Zakaj origami konstrukcije nadvladajo evklidske . . . . .	13
2.3.1 Algebrski pogled na evklidske konstrukcije . . . . .	13
2.3.2 Origami števila . . . . .	17
2.3.3 Origami-konstruktibilnost pravilnih $n$ -kotnikov . . . . .	21
<b>3 Prepogibanje lista različnih geometrijskih oblik</b>	<b>23</b>
3.1 Nekaj kratkih in zanimivih konstrukcij za uvod . . . . .	23
3.2 Hagovi izreki za prepogibanje kvadrata . . . . .	27
3.2.1 Prvi Hagov izrek . . . . .	28
3.2.2 Drugi Hagov izrek . . . . .	30
3.2.3 Tretji Hagov izrek . . . . .	32
3.3 Razdelitev daljice na $n$ skladnih delov . . . . .	33
3.4 $X$ -pregibi . . . . .	37
<b>4 Reševanje nerešljivih starogrških problemov</b>	<b>41</b>
4.1 Podvojitev kocke . . . . .	42
4.2 Trisekcija kota . . . . .	45
<b>5 Pregibanje tangent na stožnice</b>	<b>50</b>
5.1 Krožnica . . . . .	50
5.2 Parabola . . . . .	51
5.3 Elipsa . . . . .	53
5.4 Hiperbola . . . . .	55
<b>6 Reševanje enačb</b>	<b>58</b>
6.1 Reševanje kvadratne enačbe preko tangente na parabolo . . . . .	59
6.2 Belochin postopek z Lillovo metodo . . . . .	62
6.2.1 Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom . . . . .	62
6.2.2 Hatorijeva konstrukcija . . . . .	68
6.2.3 Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo . . . . .	69
6.3 Alperinova in Geretschlägerjeva metoda za reševanje kubičnih enačb .	69
6.4 Reševanje starogrških problemov preko reševanja enačb . . . . .	71
6.5 Kubična in kvartična enačba v projektivni ravnini . . . . .	71
<b>7 Alhazenov problem</b>	<b>79</b>
<b>8 Zaključek</b>	<b>90</b>
<b>Literatura</b>	<b>91</b>



## Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. **ZA DOPISAT!**

## Osnovna literatura

1. Hull, T. C., *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na <https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ>.

Podpis mentorja:



# Origami konstrukcije in reševanje enačb s prepogibanjem papirja

## POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razлага vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano. NAPIŠI!

# Origami constructions and solving equations by paper-folding

## ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work. NAPIŠI!

**Math. Subj. Class. (2020):** 51M05, 11R04, 14N05

**Ključne besede:** prepogibanje papirja, origami operacije, origami konstrukcije, origami števila, Hagovi izreki, trisekcija kota, podvojitev kocke, prepogibanje tangent na stožnice, Belochin pregib, Lillova metoda, reševanje enačb

**Keywords:** Dopolni po slovensko in prevedi tujej



# 1 Uvod

Začnimo z odzivom mojih priateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le – že tako izjemno širokega – področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebре, diferencialne topologije ... Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [19, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, do pred letom 1600 po Kr. ni). Oblikovanje oblik iz lista papirja se je do konca 20. stoletja hitro razširilo po vsem svetu [34]. Matematični vidik origamija je v ospredje prišel nekoliko kasneje. V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852) v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri poučevanju osnovne geometrije v vrtcu. Indijski matematik Tandalam Sundara Row je nato l. 1893 izdal obsežno knjigo *Geometric Exercises in Paper Folding* [2], v kateri popisuje konstrukcije raznolikih geometrijskih likov in celo krivulj. Velik prelom je doseglj italijanska matematičarka Margherita P. Beloch, ki je v 30-ih letih 20. st. odkrila, da lahko s prepogibanjem papirja rešujemo celo kubične enačbe. Vseeno je preteklo še pol stoletja, da je origami začel zanimati tudi širšo znanost, od takrat pa se je na tem področju odprlo veliko priložnosti za raziskovanje koncepta origamija in njegovo uporabo v najrazličnejših strokah [19, str. 10].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da lahko praktična izkušnja prepogibanja papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa zahteva spretnost in natančnost. Poleg fine motorike z origamijem krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem tistih iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih nekaj člankov, seminarskih nalog ter diplomskeih in magistrskih del, strokovnih knjig v slovenščini iz tega področja pa nisem našla. Ta naloga zajema predvsem uporabo origamija za namene raziskovanja geometrije ter reševanja enačb in vključuje veliko slik z orisanimi konstrukcijami. Me drugim je namenjena uporabi pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih večinoma da predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe znamenitih evklidskih orodij raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali podobnosti med evklidskimi in origami konstrukcijami in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo več, kot lahko z neoznačenim ravnalom in šestilom. To bomo pokazali tudi s spustom na algebraično ozadje konstrukcij in dokazali, katera števila in kateri pravilni  $n$ -kotniki so konstruktibilni z origamijem.

V drugem poglavju bomo v roke prijeli liste papirja različnih geometrijskih oblik in spoznali nekaj osnovnih konstrukcij – preko osnovnošolskega dokazovanje lastnosti geometrijskih likov do konstrukcije treh pravilnih  $n$ -kotnikov; pogledali si bomo tudi vse tri Hagove izreke, s katerimi njihov avtor raziskuje, v kakšnem razmerju lahko z določenimi prepogibi razdelimo stranice kvadrata, potem pa bomo to posplošili na iskanje postopka razdelitve stranice na poljubno število enakih delov. Na kratko bomo spoznali tudi  $X$ -pregibe.

V tretjem poglavju bomo po konstrukciji kvadratnega korena poljubnega origami števila spoznali več različnih origami postopkov, ki nam rešijo dva starogrška problema, nerešljiva z evklidskim orodjem – problem trisekcije kota ter podvojitve kocke, torej konstrukcije števila  $\sqrt[3]{2}$ .

Sledi kratko poglavje v katerem spoznamo (ali osvežimo spomin), kako s prepogibanjem papirja točke na določeno premico ali krožnico konstruiramo tangente na vse štiri stožnice in s tem na papirju dobimo njihov obris.

Najbolj zanimivo in obsežno poglavje pa je reševanje enačb s prepogibanjem papirja. Ko v prvem poglavju spoznamo, katera števila lahko konstruiramo z origamijem, tu znanje nadgradimo in spoznamo več metod, s katerimi lahko rešujemo splošne kvadratne in kubične enačbe ter celo nekatere enačbe četrte stopnje. V tem poglavju so zbrane metode in postopki več avtorjev, kot so Lill, Beloch, Alperin in Geretschläger, spoznali pa se bomo tudi z uporabnostjo dualnih stožnic za iskanje presečišč, skupnih tangent in posledično reševanjem enačb tretje in četrte stopnje pod določenimi pogoji.

Na koncu je predstavljen še optični Alhazenov problem, ki se ga da reševati tako na algebrski kot geometrijski način. Pogledali si bomo, kako lahko z origamijem poiščemo točko odboja na sferičnem zrcalu, v kateri se svetlobni žarek iz ene izbrane točke odbije natanko v drugo izbrano točko.

Ker je naloga spisana z namenom morebitne uporabe pri pouku srednješolske (lahko tudi osnovnošolske) matematike, je v njej zajetih veliko tem, ki bi bile razumljive tudi bralcem, ki nimajo veliko znanja univerzitetne matematike. Vseeno se na nekaterih področjih dotaknemo tudi konceptom, ki dijakom načeloma niso znani (npr. afina in projektivna geometrija pri metodi reševanja enačbe četrte stopnje). **(in mogoče še potem, če vključiš zadnji dve poglavji, ki res nista enostavni)**

Zapustimo sedaj znano jezerce umetelno prepognjenih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

popravi da so captioni slik, ki so v več kot eni vrstici, poravnani na sredini

## 2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Verjetno so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga [34]. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja (“oru” – prepogibati, “kami” – papir) se je na Dalnjem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvo, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [45]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastalo poimenovanje “*origamics*”. V slovenščini uradnega prevoda še ni, Grahor pa v [12, str. 5] po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physics* – fizika itd.) predlaga termin “origamika”.

### 2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida<sup>1</sup>, ki je napisal zelo znano zbirkovo trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi*. V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij<sup>2</sup>, aksiomov<sup>3</sup> in postulatov<sup>4</sup>. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definiral osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat ... ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic [16]. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov, iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

**Postulat P1.** Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

**Postulat P2.** Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

**Postulat P3.** Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

**Postulat P4.** Vsi pravi koti so med seboj skladni.

<sup>1</sup>O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [3, str. 61].

<sup>2</sup>Definicija je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

<sup>3</sup>Aksiom je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

<sup>4</sup>Postulat je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [16, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmom ne ločujemo [30, str. 2].

**Postulat P5.** Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

**Opomba 2.1.** Vemo že, da je postulat P5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

**Definicija 2.2.** *Euklidske konstrukcije* so konstrukcije točk, daljic, poltrakov, premic, krožnih lokov in krožnic, ki jih je iz danih točk in razdalj mogoče konstruirati le z uporabo t. i. *euklidskih orodij* – neoznačenega in neskončno dolgega ravnila (angl. *straightedge*) ter šestila, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj). Vsak korak konstrukcije je eden od naštetih:

- risanje premice skozi dve dani točki,
- risanje krožnice s središčem v dani točki, ki poteka skozi drugo dano točko,
- določitev nove točke kot presečišče dveh danih premic, dveh danih krožnic ali danih premice in krožnice.

**Opomba 2.3.** Da se pokazati, da lahko za konstrukcije ekvivalentno uporabimo tudi šestilo, ki prenaša razdalje [30, str. 6–7]. Zato imamo odslej z izrazom *šestilo* v mislih kar moderno šolsko šestilo.

Izkaže se, da z evklidskim orodjem ne moremo konstruirati poljubno dolgih daljic – kot zelo znane protiprimere lahko tu naštejemo tri starogrške probleme. Pri *kvadraturi kroga* nam evklidsko orodje ne zmore konstruirati razdalje  $\sqrt{\pi}$ , pri *podvojitvi kocke* razdalje  $\sqrt{2}$ , pri *trisekciji kota* ne zmore poljubnega kota razdeliti na tri enake dele. Drugi in tretji problem sta, verjetno za marsikoga presenetljivo, rešljiva z origamijem. V poglavju 4 si bomo pogledali njuni rešitvi, sedaj pa podrobneje spoznajmo še konstrukcije, ki jih dobimo s prepogibanjem papirja.

## 2.2 Origami konstrukcije

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini in se z trodimenzionalni modeli ne bomo ukvarjali. Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije v praksi preizkusiti tudi sam. Pri izbiri papirja je priporočljiv rahlo prosojen papir, skozi katerega se vidijo morebitne označbe točk in premic s svinčnikom (npr. navadenkuhinjski papir za peko).

Bistvo origamija je, da prepogibamo list papirja. Zato je tudi naravno, da ga vzamemo za model euklidske ravnine. V njej si za modele premic vzamemo *ravne pregibe*, modeli točk pa naj bodo presečišča premic, t. j. *presečišča pregibov*. Dolgočimo še nekaj pravil:

- pregibe opravljamo po enega naenkrat, torej po vsakem pregibu papir nazaj razgrnemo,
- ne uporabljamo drugih orodij, kot so ravnilo, šestilo, škarje, lepilo ipd.,

- pisalo je dovoljeno le pogojno – z njim lahko označimo pomožne točke, za katere vemo, da jih znamo konstruirati z origamijem, ampak bi nam pomožni pregibi zmanjšali preglednost konstrukcije (npr. zrcaljene točke, gl. razdelek 2.2.2); prav tako lahko s pomočjo ravnila močneje poudarimo že konstruirane točke in premice.

Papir prepogibamo tako, da se objekti na njem (točke in premice) prekrijejo. Zato moramo na začetku imeti na listu že nekaj danih objektov (npr. dve različni točki ali premico in točko, ki ne leži na njej). Hull v [19, str. 24–26] navaja spodnji seznam vseh mogočih pregibov:

- točko prepognemo na drugo točko (en možen pregib),
- točko prepognemo samo vase (neskončno možnih pregibov),
- točko prepognemo na premico (neskončno možnih pregibov),
- premico prepognemo na drugo premico (en ali dva možna pregiba) in
- premico prepognemo samo vase (neskončno možnih pregibov).

Vidimo lahko, da je pri nekaterih primerih pregibov neskončno možno in tega si ne želimo. Tako kot pri evklidskih konstrukcijah na primer ne dovolimo konstrukcij premic, ki potekajo skozi eno samo točko (dobimo šop neskončno premic), bomo tudi tu možne pregibe omejili na končno število možnosti. V ta namen sedaj definirajmo vse možne pregibe.

### 2.2.1 Origami operacije in origami konstrukcije

V zadnjem stoletju se je preko več matematikov (Jacques Justin, Peter Messer, Benedetto Scimemi, Humiaki Huzita, Koshiro Hatori, George E. Martin idr.; nekateri so med seboj sodelovali, drugi so delovali neodvisno) skozi čas izoblikoval seznam t. i. *origami operacij*<sup>5</sup>, ki zajamejo vseh pet možnosti prepogibanja iz zgornjega Hullovega seznama. Da so to zadostne operacije za katerokoli origami konstrukcijo, si bomo pogledali v razdelku 2.6.

Seznam se je med avtorji razlikoval v številu (gl. [19, str. 29–30]), kot končen seznam pa bomo tu navedli vseh osem naštetih – na prvi pogled različnih – operacij. Najprej jih naštejmo, potem pa si ob sledečih slikah poglejmo še prikaz opisanih konstrukcij. Videli bomo, da moramo pri nekaterih operacijah ločiti več primerov [35, 45].

**Operacija O1.** Za poljubni točki  $A$  in  $B$  obstaja natanko en pregib  $p$ , ki gre skoznju.

**Operacija O2.** Za poljubni premici lahko določimo njuno presečišče, če obstaja.

**Operacija O3.** Za poljubni točki  $A$  in  $B$  obstaja natanko en pregib  $p$ , da se točki pokrijeta.

---

<sup>5</sup>Najbolj znanih pod imenom *Huzita-Hatori aksiomi*, vendar izraz *aksiom* tu ni primeren, saj bomo kmalu pokazali, da se med seboj prepletajo so nekateri izmed njih kombinacija drugih. Prav tako v nalogi opustimo ime avtorjev, ker je seznam delo veliko več matematikov kot le Hatorija in Huzite.

**Operacija O4.** Za poljubni premici  $a$  in  $b$  obstaja pregib  $p$ , ki ju položi eno na drugo.

**Operacija O5.** Za poljubno točko  $A$  in premico  $a$  obstaja natanko en pregib  $p$  skozi točko  $A$ , ki je pravokoten na premico  $a$ .

**Operacija O6.** Za primerno izbrani točki  $A$  in  $B$  ter premico  $a$  obstaja pregib  $p$  skozi točko  $B$ , ki točko  $A$  položi na premico  $a$ .

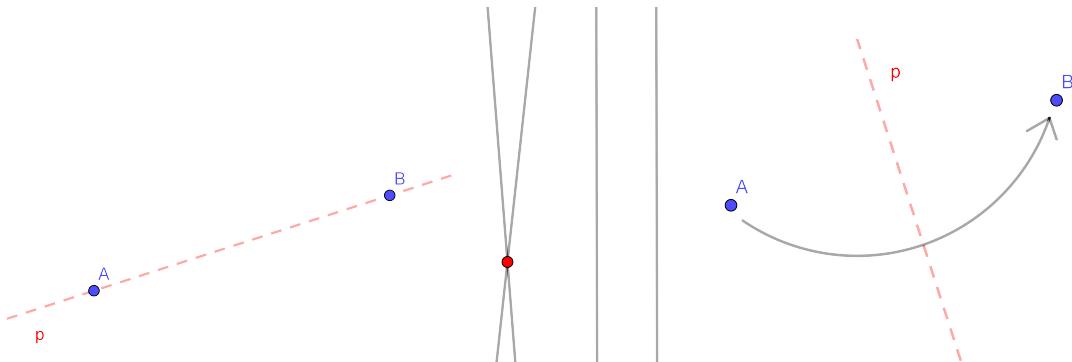
**Operacija O7.** Za primerno izbrani točki  $A$  in  $B$  ter premici  $a$  in  $b$  obstaja pregib  $p$ , ki točko  $A$  položi na premico  $a$  in točko  $B$  na premico  $b$ .

**Operacija O8.** Za poljubno točko  $A$  ter nevzporedni premici  $a$  in  $b$  obstaja pregib  $p$ , ki je pravokoten na premico  $b$  in točko  $A$  položi na premico  $a$ .

Iz teh operacij sledi naravna definicija origami konstrukcij.

**Definicija 2.4.** *Origami konstrukcije* so konstrukcije točk in premic, ki jih je iz danih točk in razdalj mogoče konstruirati le z ravnimi in enkratnimi prepogibi iz operacij O1–O8. Pri tem premico predstavlja pregib skozi dve dani točki, vsako presečišče dveh pregibov pa določa novo točko.

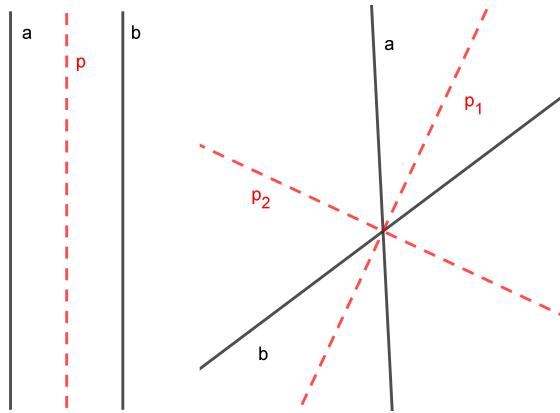
Sedaj za vsako operacijo posebej poglejmo njen konstrukcijo. Tako opazimo, da je operacija O1 ekvivalentna postulatu P1, kar nam lahko vzbudi zanimanje za povezavo med evklidskimi in origami konstrukcijami. Operacija O2 je izvedljiva v vsakem primeru nevzporednih pregibov in nam omogoča določitev novih točk v našem modelu ravnine. Operacija O3 pa nam poda konstrukcijo simetrale daljice  $AB$  (slika 1) – ko opravimo pregib in pustimo papir še zapognjen, je očitno, da so točke na pregibu enako oddaljene od točk  $A$  in  $B$ .



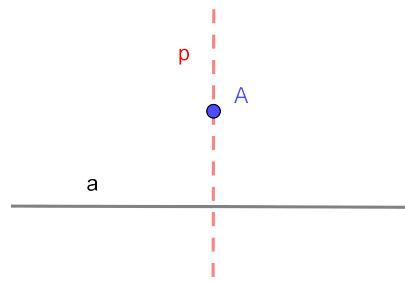
Slika 1: Operacije (od leve proti desni) O1, O2 in O3.

Nadalje opazimo, da nam operacija O4 konstruira obe simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče, v primeru vzporednih premic pa dobimo tretjo vzporednico, ki leži na sredi med njima (slika 2). Zato sta tu možna po dva ali, v posebnem primeru, en pregib.

Operacija O5 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko (slika 3). Pri tem je vseeno, ali točka leži na premici ali ne. Pregib opravimo tako, da premico položimo samo nase in pazimo, da je točka  $A$  v pregibu. Zaradi simetrije je pregib res pravokoten na premico in tako tudi en sam.

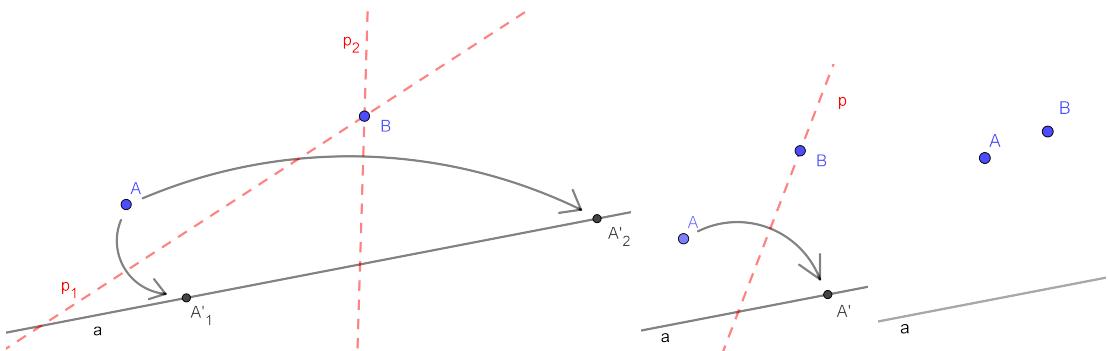


Slika 2: Operacija O4 v obeh možnih primerih.



Slika 3: Operacija O5.

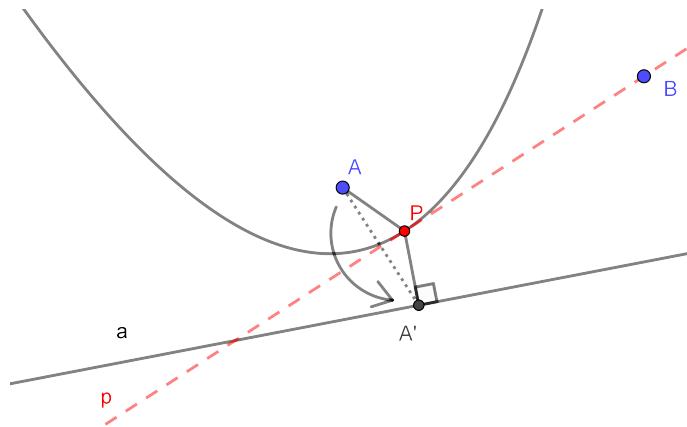
Operacija O6 je še posebej zanimiva. Najprej si poglejmo njeno konstrukcijo. Vzemimo točki  $A$  in  $B$  ter premico  $a$ . Iščemo pregib skozi  $B$ , ki  $A$  položi na premico  $a$ . Ker točka  $B$  leži na pregibu, je enako oddaljena tako od točke  $A$  kot tudi njene slike  $A'$  na premici  $a$ , torej je  $A'$  ravno presečišče premice  $a$  in krožnice s središčem v  $B$  ter polmerom  $AB$ . Pregib je simetrala daljice  $AA'$ , ki po konstrukciji poteka skozi točko  $B$ . Če velja  $d(A, B) > d(B, a)$ , sta presečišči s premico  $a$  dve (in s tem tudi dva možna pregiba, gl. sliko 4 levo), v primeru  $d(A, B) = d(B, a)$  je presečišče eno samo (in s tem en možen pregib, gl. sliko 4 na sredi) in je premica  $a$  takrat tangentna na omenjeno krožnico, v zadnjem primeru, ko velja  $d(A, B) < d(B, a)$ , pa presečišč ni (in s tem tudi pregiba, gl. sliko 4 desno).



Slika 4: Operacija O6 v vseh treh primerih.

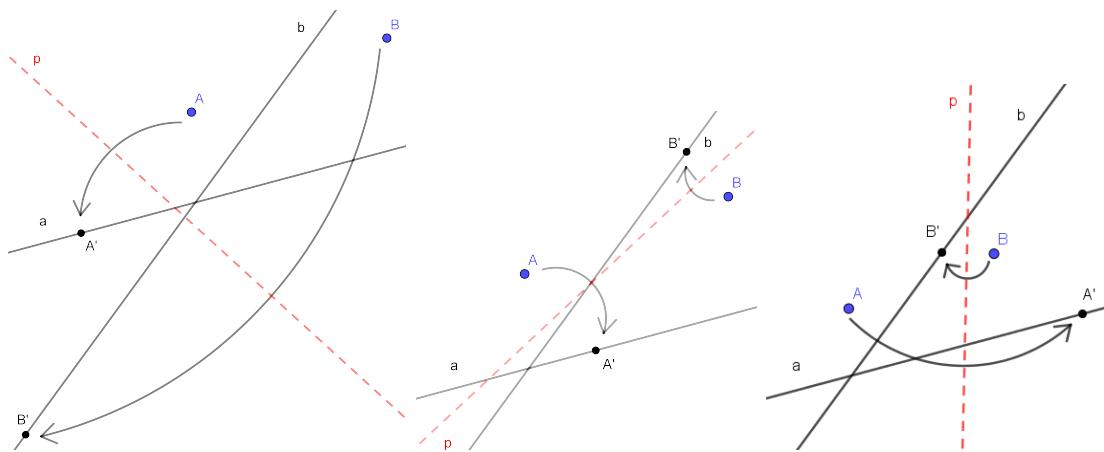
Zgodba operacije O6 se tu še ne zaključi. Ker na pregibu ležijo vse točke, ki

so enako oddaljene od točke  $A$  in  $A'$ , to velja tudi za točko  $P$ , ki jo dobimo kot presečišče pregiba in pravokotnice na premico  $a$  skozi  $A'$  (slika 5). Zanjo velja  $d(A, P) = d(P, a)$  in je enolično določena (v srednjem primeru na sliki 4 je to kar točka  $B$ ). Torej točka  $P$  leži na paraboli z goriščem  $A$  in premico vodnico  $a$ . Bralec lahko sam premisli, da je  $P$  edina točka na pregibu, ki je enako oddaljena od gorišča in premice vodnice. Pregib torej seka parabolo le v eni točki, kar pomeni, da je to *tangenta na to parabolo*. V levem primeru na sliki 4 smo dobili dve tangenti.



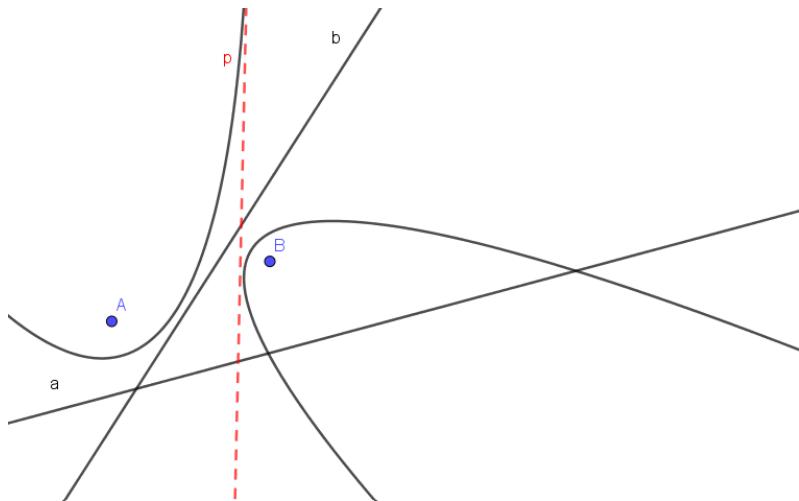
Slika 5: Operacija O6 kot konstrukcija tangente na parabolo z goriščem v  $A$  in premico vodnico  $a$ .

Poglejmo si naslednjo operacijo. Konstrukcijo O7 začnemo z upogibom papirja, ki točko  $A$  položi na premico  $a$ , potem pa točko premikamo po premici, dokler se tudi točka  $B$  ne stakne s premico  $b$ . Takrat naredimo pregib. Na sliki 6 so prikazani trije pregibi, kar je tudi največje možno število pregibov za iste točke in premice. Več o številu pregibov sledi v razdelku 6.2.



Slika 6: Operacija O7 (primer treh pregibov za isti točki in premici).

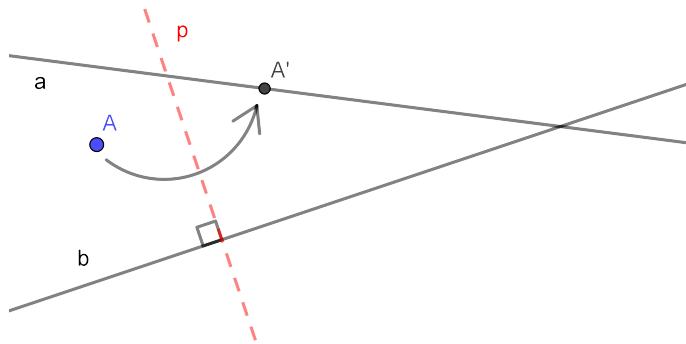
Kaj je geometrijski pomen te operacije? Če smo pri operaciji O6 dobili tangento na parabolo, potem lahko takoj vidimo, da pri operaciji O7 dobimo *skupno tangento na dve paraboli* – ena ima gorišče v točki  $A$  in premico vodnico  $a$ , druga pa gorišče v točki  $B$  ter premico vodnico  $b$  (slika 7).



Slika 7: Operacija O7 kot konstrukcija skupne tangente na dve paraboli.

**Opomba 2.5.** O operaciji O7 naj bi prva pisala italijanski matematičarki Margherita P. Beloch, po kateri operacijo imenujemo tudi *Belochin pregib*.

Zadnja operacija O8 zahteva nevzporedni premici, saj v nasprotnem primeru ne moremo konstruirati pregiba, ki bi bil pravokoten na obe premici in točko  $A$  položil na premico  $a$  (razen če le-ta že leži na njej). Premislimo geometrijsko konstrukcijo: ker mora biti pregib pravokoten na premico  $b$ , bo slika točke  $A$  (označena z  $A'$ ) ležala na vzporednici skozi točko  $A$  k premici  $b$ . Prav tako mora točka  $A'$  ležati na premici  $a$ , torej je slika ravno presečišče omenjene vzporednice in premice  $a$ . Iskan pregib je simetrala daljice  $AA'$ , ki je po konstrukciji pravokoten na premico  $b$  (slika 8).



Slika 8: Operacija O8.

**Opomba 2.6.** Natančen bralec lahko opazi, da nam origami operacije ne podajajo konstrukcije slik točk, temveč samo pregibe, ki točke preslikajo na premice. Sliko točke konstruiramo šele po uporabi operacije O5 – skozi originalno točko naredimo pregib, pravokoten na prvi pregib (iz O6), in slika je potem presečišče pravokotnice in premice, na katero smo prepognili originalno točko.

### Zadostne in potrebne origami operacije

Omenili smo že, da je teh osem operacij zadostnih za katerokoli origami konstrukcijo. Dokaz spodnjega izreka izpustimo (bralec si ga skupaj s slikovno ponazoritvijo lahko

pogleda v [19, str. 24–26 (izrek 1.1)]), njegova ideja pa je, da vsak možen pregib, ki prekrije točko ali premico s točko ali premico (gl. seznam petih možnosti v začetku razdelka 2.2) uvrstimo v eno izmed origami operacij O1–O8.

**Izrek 2.7.** *Če dovolimo le enkratne in ravne pregibe, so edine možne operacije prepogibanja operacije O1–O8.*

Vendar ali so vse te operacije tudi potrebne ali lahko kakšno izpustimo? Operacija O2 je očitno potrebna, saj nam določa nove točke. Če podrobnejše opazujemo ostale konstrukcije, pa opazimo, da so vse posebni primeri operacije O7 (t. j. konstrukcija pregiba, ki točko  $A$  položi na premico  $a$  in točko  $B$  na premico  $b$ ), ko premici  $a$  in  $b$  sovpadata ali ko ena ali obe izmed točk  $A$  in  $B$  ležita na premici:

- Operacija O1: Naj točka  $A$  leži na premici  $a$ , točka  $B$  pa na premici  $b$ . Pregib skozi točki  $A$  in  $B$  točko  $A$  ohrani na premici  $a$  in točko  $B$  na premici  $b$ .
- Operacija O3: Naj točka  $A$  leži na premici  $b$ , točka  $B$  pa na premici  $a$ . Pregib, ki položi točki drugo na drugo, točko  $A$  položi na premico  $a$  in hkrati točko  $B$  na premico  $b$ .
- Operacija O4: Naj točka  $A$  leži na premici  $b$ , točka  $B$  pa na premici  $a$ . Simetrala kota v presečišču premic (ali vmesna vzporednica, če sta premici  $a$  in  $b$  vzporedni), točko  $A$  položi na premico  $a$  in hkrati točko  $B$  na premico  $b$ .
- Operacija O5: Naj točka  $A$  leži na premici  $a$ , točka  $B$  pa na premici  $b$ . Pregib skozi točko  $A$  (ali  $B$ ), ki je pravokoten na premico  $b$  (ali  $a$ ), točko  $A$  ohrani na premici  $a$  in točko  $B$  na premici  $b$ .
- Operacija O6: Naj točka  $B$  leži na premici  $b$ . Pregib skozi točko  $B$ , ki točko  $A$  preslika na premico  $a$  (če tak pregib obstaja), točko  $B$  ohrani na premici  $b$ .
- Operacija O8: Naj točka  $B$  leži na premici  $b$ . Pregib, ki točko  $A$  položi na premico  $a$  in je pravokoten na premico  $b$ , točko  $B$  ohrani na premici  $b$ .

Ker lahko vse konstrukcije po izreku 2.7 opišemo z operacijami O1–O8, smo s tem dokazali spodnji izrek:

**Izrek 2.8.** *Če imamo dani vsaj dve točki in dve nevzporedni (lahko tudi identični) premici, ki vsebujujo dane točke, potem lahko vse origami konstrukcije z enkratnimi in ravnimi pregibi opišemo s kombinacijo operacij O2 in O7.*

Vseeno bomo ohranili vseh osem aksiom operacij, saj bomo kakšen pregib lažje razložili preko ene od ostalih petih operacij kot pa opisovali, na kakšen način je to operacija O7.

### 2.2.2 Zrcaljenje točke čez premico

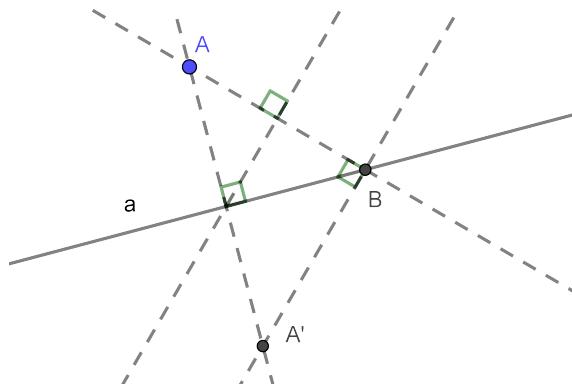
Operacija O3 nam poda simetralo daljice  $AB$ . Torej je točka  $B$  zrcalna slika točke  $A$  čez to premico. Kaj pa, če imamo za neko točko  $A$  že dano premico  $a$  in iščemo njeni zrcalni slike? Naravna rešitev je, da naredimo pregib po premici in s svinčnikom označimo zrcalno sliko. A definicija 2.4 pravi, da lahko točke dobimo le kot

presečišča pregibov, poleg tega pa je uporaba pisala dovoljena le za vidnejšo označbo že konstruiranih točk.

Zato moramo najti zaporedje pregibov, kjer na koncu kot presečišče nekih dveh premic dobimo želeno točko. Za dano premico  $a$  in točki  $A$ , ki ne leži na tej premici (sicer je točka  $A$  zrcalna slika sama sebi), lahko zrcalno sliko točke konstruiramo z naslednjimi koraki (prikazani na sliki 9, postopek vzet iz [19, str. 28]):

1. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na premico  $a$  skozi točko  $A$ .
2. Z operacijo O4 prepognemo simetralo kota, ki ga oklepata premica  $a$  in pravokotnica iz prvega koraka.
3. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na simetralo skozi točko  $A$ . Njeno presečišče s premico  $a$  označimo z  $B$ .
4. Z operacijo O5 prepognemo pravokotnico na pregib iz tretjega koraka skozi točko  $B$ . Presečišče novega pregiba in pravokotnice iz prvega koraka označimo z  $A'$ .

(Na spodnji sliki označi s številkami zaporedje pregibov)



Slika 9: Zrcaljenje točke  $A$  čez premico  $a$  s prepogibanjem papirja.

**Trditev 2.9.** Točka  $A'$  iz opisane konstrukcije je zrcalna slika točke  $A$ .

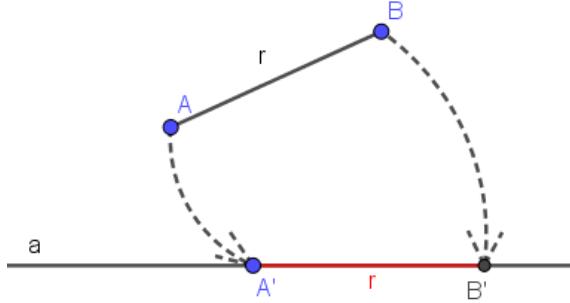
*Dokaz.* Trikotnik, ki ga dobimo po 3. koraku, je pravokoten in enakokrak, saj je simetrala (pravega kota) iz 2. koraka pravokotna na njegovo osnovnico. Zato kot ob točki  $A$  znaša  $45^\circ$ . Ker je trikotnik  $\triangle A'BA$  pravokoten, je zato tudi enakokrak, torej premica  $a$  razpolavlja daljico  $AA'$ , torej je  $A'$  res zrcalna slika točke  $A$ .  $\square$

Ker lahko čez premico zrcalimo točke, lahko čeznjo zrcalimo tudi daljice oz. premice – to storimo tako, da zrcalimo dve točki z daljice in naredimo pregib čez njuni sliki. Zrcaljenje pa nam omogoča še nekaj več, kar nam pove naslednja trditev.

(Moja avtorska trditev in dokaz:)

**Trditev 2.10.** Z ravnnimi in enkratnimi prepogibi ter upoštevanjem origami operacij lahko s prepogibanjem papirja prenašamo razdalje.

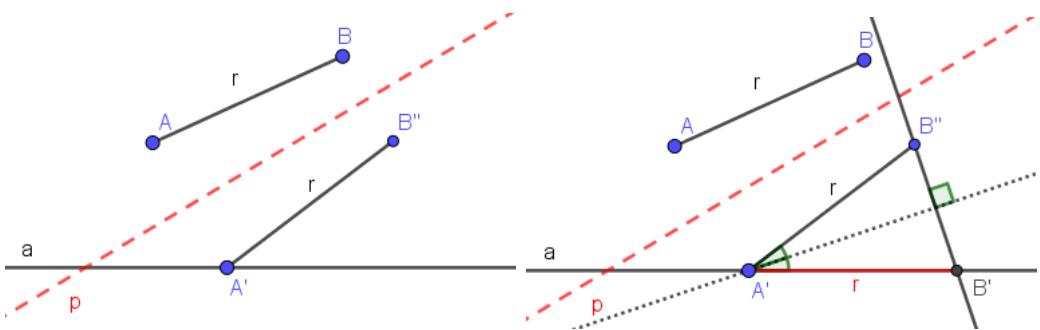
*Dokaz.* V ravnini si izberimo poljubni točki  $A$  in  $B$ , ki določata doljico z neko dolžino  $r$ . Naj bo  $a$  poljubna premica in  $A'$  poljubna točka na njej. Trditev pravi, da lahko z origami operacijami konstruiramo točko  $B' \in a$ , da je  $d(A', B') = r$  (slika 10). Pri tem ni pomembno, na kateri strani točke  $A'$  leži točka  $B'$ , saj jo lahko vedno zrcalimo čeznjo.



Slika 10: Prenos dolžine doljice  $AB$  na premico  $a$  k izbrani točki  $A'$ .

Prenos razdalje razdelimo na dva koraka:

1. Če  $A \neq A'$ , doljico  $AB$  zrcalimo čez tisto premico  $p$ , ki točko  $A$  preslika v točko  $A'$  (po O3 je tak pregib oz. premica ena sama). Zrcalno sliko točke  $B$  označimo z  $B''$  (slika 11 levo). V posebnem primeru, ko doljica  $AB$  leži na premici  $a$ , je to že konec konstrukcije.
2. Daljico  $A'B''$  rotiramo okoli točke  $A'$ , da se točka  $B''$  preslika na premico  $a$ . To storimo tako, da z operacijo O4 konstruiramo simetralo kota med doljico  $A'B''$  in premico  $a$  in čeznjo zrcalimo točko  $B''$  (slika 11 desno). S tem dobimo točko  $B' \in a$ , ki je po konstrukciji od točke  $A'$  oddaljena za dolžino  $r$ .



Slika 11: Zrcaljenje doljice  $AB$  (levo) in rotacija doljice čez eno krajišče (desno).

S tem smo razdaljo  $r$  prenesli na poljubno mesto v ravnini.  $\square$

Tako lahko s prepogibanjem papirja zrcalimo točke (in premice), prenašamo razdalje pa tudi – po 2. koraku iz zgornjega dokaza – rotiramo točke (in premice). To novo znanje bomo uporabili v razdelku 2.3.2, od sedaj naprej pa bomo pri konstrukcijah, ki vključujejo zrcaljenje točk, zaradi preglednosti izpustili potrebne pregibe in zrcaljene točke označili kar s svinčnikom skozi papir.

## 2.3 Zakaj origami konstrukcije nadvladajo evklidske

Prišli smo do ključnega dela poglavja – reševanje vprašanja, zakaj se nam z origami konstrukcijami sploh splača ukvarjati.

Tako z evklidskim orodjem kot s prepogibanjem papirja lahko konstruiramo premice in točke ter prenašamo razdalje. Le evklidskim orodjem lahko konstruiramo tudi krožne loke, ker pa znamo rotirati točke okoli druge točke, lahko tudi s prepogibanjem papirja konstruiramo katerokoli točko na krožnici z danim središčem in polmerom. Tako lahko vse evklidske konstrukcije opravimo tudi z origamijem (za natančnejši dokaz gl. [10, str. 362–365]).

Bralec je ob zgornjih opisih posamezne operacije povabljen, da premisli, kako je mogoče operacije O1, O3, O4, O5, O6 in O8 opraviti tudi z evklidskim orodjem (operacija O2 le določa nove točke, zato tu o konstrukciji ne moremo govoriti). Do tu nam torej origami konstrukcije niso dale ničesar novega.

Ključna je sedma operacija. Izkaže se namreč, da operacije O7 oz. Belochinega pregiba ne moremo opraviti z evklidskim orodjem. Kako lahko to dokažemo? V razdelku 4.2 bomo spoznali več origami postopkov, ki nam poljuben kot razdelijo na tri skladne dele, pri tem pa uporabimo pregib iz operacije O7. Ker *trisekcija kota z evklidskim orodjem ni mogoča* (dokaz v [23, str. 77–78]), posledično tudi konstrukcija operacije O7 s tem orodjem ne obstaja. Prav tako bomo v poglavju 6 videli več načinov uporabe operacije O7 za reševanje kubične enačbe, za katero prav tako vemo, da je v splošnem z evklidskim orodjem ne moremo rešiti.

Sedaj vemo, da je množica evklidskih konstrukcij *prava* podmnožica origami konstrukcij. V naslednjem razdelku si bomo pogledali, kako lahko evklidske in origami konstrukcije prevedemo v jezik algebre in tudi na algebrski način pokažemo premoč origamija nad evklidskim orodjem. Raziskovali bomo, katere dolžine (in s tem katera števila) lahko z obema orodjem konstruiramo. Tak pogled je imel že Evklid, ki je na števila gledal kot končni rezultat niza konstrukcij z evklidskim orodjem pri dani daljici enotske dolžine [35, str. 164].

### 2.3.1 Algebrski pogled na evklidske konstrukcije

**Definicija 2.11.** Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine  $\mathbb{C}$ , imejmo dano izhodišče  $O$  in število 1 na realni osi. Če lahko z neoznačenim ravnilom in šestilom s končnim številom potez konstruiramo kompleksno število  $\alpha$ , rečemo, da je  $\alpha$  *evklidsko-konstruktibilno* število.

Kompleksna ravnina  $\mathbb{C}$  je v bijekciji z ravnino  $\mathbb{R}^2$ . Če lahko z evklidskim orodjem konstruiramo število  $\alpha = a + bi$ , lahko torej konstruiramo točko  $(a, b)$  in obratno. Tako je dovolj obravnavati evklidske konstrukcije v realni ravnini.

Iz definicije 2.2 evklidskih konstrukcij se spomnimo, da lahko premoč konstruiramo le skozi poljubni dve dani točki, krožnico s središčem v poljubni dani točki in in poljubno dano točko na njej, točke z evklidskim orodjem pa dobimo le kot presečišče dveh premic, dveh krožnic ali premice in krožnice.

**Definicija 2.12.** Točki, ki jo lahko v ravnini  $\mathbb{R}^2$  konstruiramo z evklidskim orodjem, pravimo *evklidsko-konstruktibilna točka*. Enako definiramo *evklidsko-konstruktibilno premico* in *evklidsko-konstruktibilno krožnico*.

Radi bi določili množico vseh evklidsko-konstruktibilnih števil. Torej iščemo, katere vse možne točke v ravnini  $\mathbb{R}^2$  lahko konstruiramo z evklidskim orodjem. Naslednja lema nam iskanje še poenostavi.

**Lema 2.13.** *Naj bo  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ , kjer  $a, b \in \mathbb{R}$ . Potem je  $\alpha$  evklidsko-konstruktibilno število, če in samo če sta  $a, b$  evklidsko-konstruktibilni števili.*

*Dokaz.* Ker sta  $a$  in  $b$  pravokotni projekciji števila  $\alpha$  na realno in imaginarno os – bralec naj premisli, kako ju lahko konstruiramo z evklidskim orodjem –, je trditev očitna.  $\square$

Iščemo, katere realne koordinate so evklidsko-konstruktibilne, torej v resnici iščemo množico *realnih* evklidsko-konstruktibilnih števil. Označimo jo z  $\mathbb{E}$ . Po definiciji 2.11 velja  $0, 1 \in \mathbb{E}$ , po lemi 2.13 pa  $\alpha = a + bi$  je evklidsko-konstruktibilno število  $\iff a, b \in \mathbb{E}$ .

**Trditev 2.14.** *Naj bodo  $a, b, c \in \mathbb{E}, c \neq 0$ . Potem so tudi števila  $a+b, a-b, ab, a/c$  in  $\sqrt{a}$  elementi množice  $\mathbb{E}$ .*

Dokaz tu opustimo. Bralec si ga lahko ogleda v [23], [35, str. 165–170] ali pa v dokazovanju podobnega izreka za števila, konstruktibilna z origamijem (gl. izrek 2.28 v nadaljevanju). Iz trditve sledi, da je množica  $\mathbb{E}$ , ki je podmnožica polja realnih števil, tudi sama polje.

**Posledica 2.15.** *Množica  $\mathbb{E}$  je podpolje polja  $\mathbb{R}$ .*

Velja še več – to, da iz  $a \in \mathbb{E}$  sledi  $\sqrt{a} \in \mathbb{E}$ , je lastnost *evklidskih polj*. Primer evklidskega polja je množica realnih števil, medtem ko npr. množica racionalnih števil te lastnosti nima – za  $2 \in \mathbb{Q}$  velja  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Še vedno pa moramo določiti realna števila, ki sestavljajo množico  $\mathbb{E}$ . Očitno je, da iz danih števil 0 in 1 s seštevanjem in odštevanjem dobimo vsa cela števila, z deljenjem vsa racionalna števila, s korenjenjem pa še njihove kvadratne korene. Naslednja lema je zato očitna.

**Lema 2.16.** *Naj bo  $a \in \mathbb{Q}$ . Potem velja  $a, \sqrt{a} \in \mathbb{E}$ .*

**Posledica 2.17.** *Velja  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Očitno je množica racionalnih števil prava podmnožica množice  $\mathbb{E}$ . Ovreči moramo samo možnost  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ . Vsako število iz množice  $\mathbb{E}$  je rezultat seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in korenjenja elementov iz te množice (z začetnima številoma 0 in 1), zato je algebraično nad  $\mathbb{Q}$  – je rešitev neke enačbe z racionalnimi koeficienti. Torej v množici  $\mathbb{E}$  ne morejo biti transcendentna število, kot je na primer število  $\pi$ . Zato je  $\mathbb{E}$  res prava podmnožica množice  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Ker je polje  $\mathbb{Q}$  podpolje polja  $\mathbb{E}$ , je  $\mathbb{E}$  razširitev polja  $\mathbb{Q}$ . Ideja je, da poiščemo najmanjšo razširitev polja racionalnih števil, ki je zaprta za operacijo kvadratnega korenjenja. To bo naša množica  $\mathbb{E}$ . V pomoč nam je naslednja trditev.

**Trditev 2.18.** *Naj bo  $r \in \mathbb{Q}^+, \sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$ . Potem je množica  $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \{a + b\sqrt{r}; a, b \in \mathbb{Q}\}$  razširitev polja  $\mathbb{Q}$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $r$  poljubno racionalno število po predpostavki trditve. Očitno velja  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{r})$ , saj so v  $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$  med drugim tudi vsa števila oblike  $a + 0 \cdot \sqrt{r} = a$ , kjer je  $a \in \mathbb{Q}$  poljubno. Dokazati moramo, da je  $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$  polje.

Očitno je  $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{r})$ , če vzamemo  $a \in \{0, 1\}$  in  $b = 0$ . Bralcu prepustimo lahek računski preostanek dokaza, kjer mora pokazati, da so vsota, razlika, produkt in količnih števil  $a_1 + b_1\sqrt{r}$  in  $a_2 + b_2\sqrt{r}$  oblike  $a_3 + b_3\sqrt{r}$ .  $\square$

Za ustrezni  $r$  lahko na enak način poiščemo razširitev polja  $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ . Vzamemo  $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{r})^+$ ,  $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{r})$ . Potem so elementi nove razsiritve polja  $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$  oblike  $(a_1 + b_1\sqrt{r}) + (a_2 + b_2\sqrt{r})\sqrt{q}$ . Pri tem velja  $a_1 + b_1\sqrt{r}, a_2 + b_2\sqrt{r} \in \mathbb{Q}(\sqrt{r})$  in  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ .

Primer (vzeto iz [30, str. 36]): Naj bo  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , torej so njegovi elementi oblike  $a + b\sqrt{5}$ , kjer sta  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Za število  $q = (35 - 15\sqrt{5})/2 \in F^+$  je njegov koren enak številu  $\sqrt{q} = (5 - 3\sqrt{5})/2 \in F$ , zato  $F(\sqrt{q}) = F$  ni razširitev polja  $F$ . Za število  $2 \in F^+$  pa ne obstajata  $a, b \in \mathbb{Q}$ , da bi veljalo  $\sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$ , torej  $\sqrt{2} \notin F$  in je  $F(\sqrt{2})$  razširitev polja  $F$ . Pišemo  $F(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2})$ .

**Definicija 2.19.** Naj bo  $F_0$  polje in  $r \in F_0^+, \sqrt{r} \notin F_0$ . Potem polje

$$F_0(\sqrt{r}) = \{a + b\sqrt{r}; a, b \in F_0\}$$

imenujemo *kvadratna razširitev* polja  $F_0$ . Če je

$$F_1 = F_0(\sqrt{r_1}), F_2 = F_1(\sqrt{r_2}), \dots, F_n = F_{n-1}(\sqrt{r_n}),$$

potem pišemo  $F_n = F_0(\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_n})$  in vsako od polj  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$  imenujemo *iterativna kvadratna razširitev* polja  $F_0$ .

Velja  $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$ . Za vsak  $i \in \{1, \dots, n\}$  je stopnja razsiritve polja  $F_i$  nad poljem  $F_{i-1}$  enaka  $[F_i : F_{i-1}] = [F_{i-1}(\sqrt{r_i}) : F_{i-1}] = 2$ , saj je  $x^2 - r_i$  minimalni polinom števila  $\sqrt{r_i}$  nad  $F_{i-1}$ . Iz algebre se spomnimo naslednjega izreka.

**Izrek 2.20.** *Naj bo polje  $L$  končna razširitev polja  $F$  in naj bo polje  $E$  končna razširitev polja  $L$ . Potem je  $E$  končna razširitev  $F$  in velja*

$$[E : F] = [E : L] \cdot [L : F].$$

**Posledica 2.21.** *Naj bodo  $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$  kvadratne razsiritve obsega  $F_0$ . Potem je  $[F_n : F_0] = 2^n$ .*

*Dokaz.* Po izreku 2.20 preko indukcije dobimo

$$\begin{aligned} [F_n : F_0] &= [F_n : F_{n-1}] \cdot [F_{n-1} : F_0] \\ &= 2 \cdot [F_{n-1} : F_0] \\ &= 2^2 \cdot [F_{n-2} : F_0] \\ &\vdots \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

$\square$

Naj bo  $F_0 = \mathbb{Q}$ . Iz trditve 2.18 takoj vidimo, da velja  $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) \subset \mathbb{E}$ . Bralec je povabljen k induktivnemu razmisleku, da za vsako razširitev  $F_n = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_n})$ , kjer  $r_i$  ustrezajo predpostavkam iz definicije 2.19, velja  $F_n \subseteq \mathbb{E}$ .

**Izrek 2.22.** *Množica realnih evklidsko-konstruktibilnih števil  $\mathbb{E}$  je unija vseh končnih iterativnih kvadratnih razširitev polja  $\mathbb{Q}$ .*

Da je vsako število iz neke iterativne razširitve  $F_n$  evklidsko-konstruktibilno, smo lahko razmislili tik pred navedbo tega izreka. Da velja tudi obrat, pa je potrebna obravnava vseh možnih enačb, ki jih dobimo pri iskanju presečišč dveh krožnic, dveh premic ter krožnice in premice. Bralec si lahko natančen dokaz ogleda v [30, str. 38–39] ali v [23].

Kako potem izgledajo realna evklidsko-konstruktibilna števila? To so vsa realna števila, ki jih lahko v kalkulator zapišemo z uporabo tipk

$$( ) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 + - \times \div \sqrt,$$

kot je na primer število (primer iz [30, str. 37])

$$\frac{915\sqrt{1+26546\sqrt{\sqrt{67}}}-\sqrt{5+\sqrt{6-\sqrt{7}+5\sqrt{10-3\sqrt{\sqrt{6}}}}}}{\frac{614159}{100000}\sqrt{\sqrt{8-\sqrt{57-\sqrt{11}}}}}.$$

**Izrek 2.23.** *Naj bo  $a \in \mathbb{R}$  algebraično nad  $\mathbb{Q}$ . Potem se da število  $a$  konstruirati le s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko obstaja iterativna kvadratna razširitev  $F$  polja  $\mathbb{Q}$ , kjer je*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \dots \subset F_n = F$$

za nek  $n \in \mathbb{N}_0$ , da je  $a \in F$  in stopnja razširitve polja  $F$  nad  $\mathbb{Q}$  enaka  $2^n$  za nek  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Jerman v [23, str. 77–78] tako z lahkoto dokaže, da trisekcija kota v splošnem ter konstrukcija števila  $\sqrt[3]{2}$  z evklidskim orodjem nista mogoči, saj obakrat dobimo, da je stopnja razširitve polja  $\mathbb{Q}$  enaka 3:

- *Trisekcija kota  $60^\circ$  – iz zvezе  $1/2 = \cos 60^\circ = \cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$ , z zamenjavo  $x = \cos 20^\circ$  dobimo enačbo  $8x^3 - 6x - 1 = 0$ , ki nima racionalne rešitve.*
- *Konstrukcija števila  $\sqrt[3]{2}$  – enačba  $x^3 - 2 = 0$  nima racionalne rešitve.*

**Posledica 2.24.** *Kompleksno število  $\alpha = a + bi$  se da konstruirati z evklidskim orodjem natanko tedaj, ko velja  $(a, b) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ .*

Iz izreka med drugim sledi tudi, da lahko vsa realna evklidsko-konstruktibilna števila analitično zapišemo kot rešitve kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti. Ker med kompleksno in evklidsko ravnino obstaja bijekcija, lahko z evklidskim orodjem konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe.

### 2.3.2 Origami števila

Poiščimo število, ki jih lahko konstruiramo z origamijem. Definiramo jih na podoben način kot *evklidsko-konstruktibilna* števila.

**Definicija 2.25.** Na listu papirja, ki nam služi kot model ravnine  $\mathbb{C}$ , imejmo dano izhodišče  $O$  in število 1 na realni osi. Če lahko s končnim številom enkratnih ravnih prepogibov in upoštevanjem operacij O1–O8 konstruiramo kompleksno število  $\alpha$ , rečemo, da je  $\alpha$  *origami število*. Množico origami števil označimo z  $\mathbb{O}$ .

Spomnimo se, da premice v ravnini predstavljajo pregibi papirja, nove točke pa njihova presečišča. Po izreku 2.7 operacije O1–O8 zajamejo vse možne pregibe, zato so origami števila dobro definirana.

**Definicija 2.26.** Točki, ki jo lahko v kompleksni ravnini konstruiramo z origamijem, pravimo *origami-konstruktibilna točka*. Enako definiramo *origami-konstruktibilno premico*.

Preko sledečih izrekov in trditev bomo še na algebrski način pokazali, da je množica števil, ki jih lahko konstruiramo z evklidskim orodjem, prava podmnožica množice origami števil. Najprej navedimo lema, ki je analogna lemi 2.13 iz razdelka o evklidsko-konstruktibilnih številih.

**Lema 2.27.** *Naj bo  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ , kjer  $a, b \in \mathbb{R}$ . Potem je  $\alpha \in \mathbb{O}$ , če in samo če  $a, b \in \mathbb{O}$ .*

Dokaz je enak, le da tu za konstrukcijo pravokotnih projekcij uporabimo operacijo O5, ki je bolj enostavna od evklidske.

**Izrek 2.28.** *Množica  $\mathbb{O}$  je podpolje polja  $\mathbb{C}$ .*

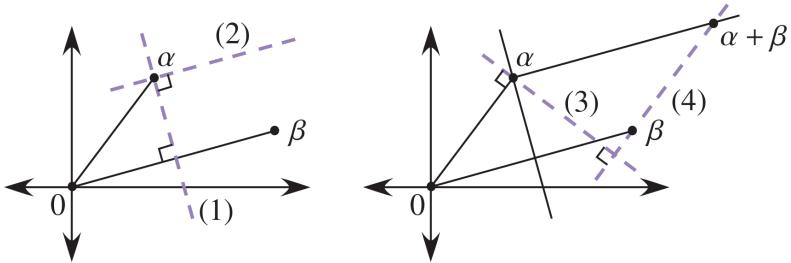
*Dokaz.* Za dokaz izreka moramo pokazati, da velja  $0, 1 \in \mathbb{O}$  (kar velja že po definiciji), da za poljubna  $\alpha, \beta \in \mathbb{O}$  velja  $\alpha - \beta, \alpha\beta \in \mathbb{O}$  in da je  $1/\alpha \in \mathbb{O}$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ . Spomnimo se, da lahko kompleksna števila ponazorimo z vektorji in zato lahko računske operacije grafično izvajamo kar preko njih.

Vzemimo poljubna  $\alpha, \beta \in \mathbb{O}$ . Ker število  $-\beta$  dobimo po zaporednem zrcaljenju čez obe osi, velja  $-\beta \in \mathbb{O}$ . Ker je odštevanje v resnici seštevanje nasprotnega elementa, moramo za dokaz  $\alpha - \beta \in \mathbb{O}$  pokazati še zaprtost množice  $\mathbb{O}$  za seštevanje.

Če števila  $\alpha, \beta$  in izhodišče  $O$  ležijo na isti premici, samo prenesemo razdaljo na pravljeno mesto na premici. Predpostavimo sedaj, da  $\alpha, \beta$  in  $O$  ne ležijo na isti premici in s paralelogramskim pravilom konstruirajmo število  $\alpha + \beta$  (slika 12). Štirikrat uporabimo operacijo O5: preko pravokotnice (1) na vektor  $\overrightarrow{O\beta}$  skozi  $\alpha$  konstruiramo vzporednico (2) k taistemu vektorju skozi  $\alpha$  in na enak način preko pravokotnice (3) konstruiramo vzporednico (4) k vektorju  $\overrightarrow{O\alpha}$  skozi  $\beta$ . V presečišču vzporednic dobimo  $\alpha + \beta$ .

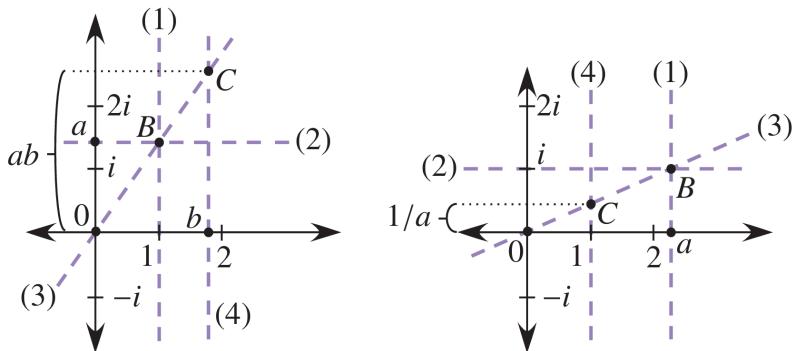
Za dokaz preostalih dveh zahtev najprej dokažimo, da za neničelna  $a, b \in \mathbb{O} \cap \mathbb{R}$  velja  $ab, 1/a \in \mathbb{O}$ , potem pa s pomočjo leme 2.27 to dokažemo še za poljubna  $\alpha, \beta \in \mathbb{O}$ .

Naj bosta  $a, b \in \mathbb{O} \cap \mathbb{R}$  poljubna in neničelna (če je katerikoli od njiju enak 0, je produkt ničeln in že po definiciji origami število). Ker sta  $a$  in  $b$  origami



Slika 12: Konstrukcija  $\alpha + \beta$ .

števili, ju lahko konstruiramo. Naj  $b$  leži na realni osi,  $ai$  pa na imaginarni (slika 13 levo). Z dvakratno uporabo operacije O5 konstruiramo origami število  $1 + ai$  (točka  $B$ ). Konstruiramo pregib skozi  $O$  in  $B$  (premica z naklonom  $a$ ) ter v presečišču s pravokotnico skozi  $b$  dobimo število  $b + abi$  (točka  $C$ ). Pravokotnica skozi  $C$  na imaginarno os na njej konstrira origami število  $ab$ .



Slika 13: Konstrukcija  $ab$  in  $1/a$  za neničelna  $a, b \in \mathbb{B} \cap \mathbb{R}$ .

Podobno konstruiramo še število  $1/a$ . Na realni osi konstruiramo število  $a$  (slika 13 desno), s pomočjo O5 pa še število  $a + i$  (točka  $B$ ). Pregib skozi  $O$  in  $B$  ima naklon ravno  $1/a$ . V presečišču tega pregiba s pravokotnico na realno os v točki  $C$  dobimo število  $1 + (1/a)i$  (točka  $C$ ). Tako nam pravokotnica na imaginarno os skozi točko  $C$  konstrira origami število  $1/a$ .

Vzemimo sedaj poljubna  $\alpha, \beta \in \mathbb{B}$ . Če je  $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ , potem po lemi 2.27 velja  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ . Število  $\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$  ima v svojem realnem in imaginarnem delu vsote, razlike in produkte origami števil, ki so prav tako origami števila. Torej je  $\alpha\beta \in \mathbb{B}$ .

Za neničeln  $\alpha = a + bi \in \mathbb{B}$  je  $1/\alpha = a/(a^2 + b^2) + (-b)/(a^2 + b^2)i$ . Ker sta po lemi 2.27  $a, b \in \mathbb{B}$ , sta zopet realni in imaginarni del tega števila origami števili, torej  $1/\alpha \in \mathbb{B}$ .  $\square$

**Trditev 2.29.** *Naj bo  $\alpha \in \mathbb{B}$ . Potem  $\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha} \in \mathbb{B}$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $\alpha = re^{i\theta}$  za neka  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (v ničelnem primeru ni kaj dokazovati) in  $\theta$  poljuben kot. Torej imamo za kvadratni in kubični koren števila  $\alpha$  skupno pet rešitev:

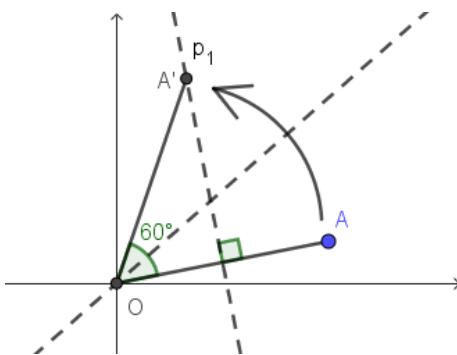
- $\sqrt{\alpha} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  in

- $\sqrt[3]{\alpha_1} = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta}{3}}$ ,  $\sqrt[3]{\alpha_2} = \sqrt[3]{r} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})}$ ,  $\sqrt[3]{\alpha_3} = \sqrt[3]{r} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})}$ .

Torej moramo dokazati, da  $\sqrt[3]{r}, \sqrt[3]{r} \in \mathbb{O}$ , da znamo razpolavljiati in tretjiniti kote ter rotirati origami število za kot  $60^\circ$  okoli izhodišča  $O$ . Potem bomo po izreku 2.28 lahko konstruirali zgornjih pet števil in tako dokazali to trditev.

Najprej se še prepričajmo, da  $r \in \mathbb{O}$ . Ker je to ravno razdalja števila  $\alpha$  do izhodišča, jo lahko prenesemo na realno os in tako konstruiramo realno število  $r$ , torej je res  $r \in \mathbb{O}$ .

V razdelku 6 bomo pogledali, kako z origamijem rešujemo splošne kvadratne in kubične enačbe, torej bomo znali konstruirati tudi rešitve enačb  $x^2 - r = 0$  in  $x^3 - r = 0$ . Konkretno konstrukcije števil  $\sqrt[3]{r}$  in  $\sqrt[3]{r}$  opisane tudi v poglavju 4. Z operacijo O4 znamo razpoloviti kot, postopek tretjinjenja kota pa je, kot že omenjeno, opisan v razdelku 4.2. Ostane nam samo še rotacija točke za kot  $60^\circ$  okoli izhodišča. Na sliki 14 je prikaz enostavne konstrukcije – najprej prepognemo simetralo  $p_1$  daljice  $OA$  in konstruiramo pregib  $p_2$  skozi  $O$ , ki točko  $A$  preslika v točko  $A'$  na simetrali  $p_1$ . Trikotnik  $\triangle OAA'$  je enakostraničen.  $\square$



Slika 14: Rotacija točke za kot  $60^\circ$  okoli izhodišča.

Množica origami števil  $\mathbb{O}$  je tako zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje ter za kvadratno in kubično korenjenje. Z origamijem zrcaliti točke, zato je očitno zaprta tudi za konjugiranje. Z njim tako lahko poleg kvadratnih rešujemo tudi poljubne kubične enačbe (izračun rešitev po Cardanovi formuli ne potrebuje več kot ravno naštete operacije), a s tem se bomo natančneje ukvarjali v poglavju 6.

**Posledica 2.30.** *Množica origami števil  $\mathbb{O}$  je najmanjši podobseg polja  $\mathbb{C}$ , ki vsebuje racionalna števila in je zaprt za kvadratno in kubično korenjenje ter kompleksno konjugiranje.*

Na množici  $\mathbb{O}$  torej lahko uporabimo vse tiste operacije, ki jih lahko izvajamo na množici evklidsko-konstruktibilnih števil; ker pa lahko origami števila tudi kubično korenimo, je origami števil še več (vemo že na primer, da  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{E}$ , je pa origami število).

**Posledica 2.31.** *Množica evklidsko-konstruktibilnih števil je prava podmnožica množice origami števil.*

Kaj je naša množica origami števil? Po zgledu posledice 2.17 očitno velja  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{C}$ . Kot pri evklidsko-konstruktibilnih številih bomo tudi tu iskali razširitev polja racionalnih števil, ki so zaprte za operacijo kvadratnega korena, za razliko od prej pa tu dodamo še zaprtost za operacijo kubičnega korena.

Znamo konstruirati kompleksno število  $i$ . Naj bo  $\mathbb{Q}(i)$  razširitev polja  $\mathbb{Q}$ , tj.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$  in velja  $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$ , saj je  $x^2 + 1$  minimalni polinom števila  $i$  nad  $\mathbb{Q}$ . Polje nadalje razširimo z origami številom  $\sqrt[3]{2}$ . Dobimo zaporedje  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$  in velja  $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}(i)] = 3$ , saj je  $x^3 - 2$  minimalni polinom števila  $\sqrt[3]{2}$  nad  $\mathbb{Q}(i)$ .

**Definicija 2.32.** Naj bosta  $E \subset F$  polji. Če velja  $[F : E] = 2$  ali  $3$ , polju  $F$  pravimo  $2, 3$ -razširitev polja  $E$ .

**Izrek 2.33.** Število  $\alpha \in \mathbb{C}$  se da konstruirati le s prepogibanjem papirja natanko tedaj, ko obstaja zaporedje  $2, 3$ -razširitev polja  $\mathbb{Q}$  oblike

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

za nek  $n \in \mathbb{N}_0$ , da je  $\alpha \in F_n$ .

*Dokaz.* V zaporedju razširitev torej za vsak  $1 \leq i \leq n$  velja  $[F_i : F_{i-1}] \in \{2, 3\}$ .

Naj bo  $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$  zaporedje  $2, 3$ -razširitev polja  $\mathbb{Q}$  in naj bo  $\alpha \in F_n$ . Z indukcijo dokažimo  $F_n \subset \mathbb{O}$ . Za  $n = 0$  je to očitno ( $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}$ ). Recimo, da velja  $F_{n-1} \subset \mathbb{O}$ . Naj bo  $f$  minimalni polinom števila  $\alpha$  nad poljem  $F_{n-1}$ , ki je stopnje največ  $3$ , saj velja  $[F_n : F_{n-1}] \in \{2, 3\}$ . Število  $\alpha$ , ki je ničla tega polinoma, lahko potem z navadnimi računskimi operacijami izrazimo iz enačbe – pomagamo si lahko s kvadratno formulo ali Cardanovimi formulami za kubično enačbo. Iz tega sledi  $\alpha \in \mathbb{O}$ .

Naj bo sedaj  $\alpha = a + bi \in OR$ . Želimo konstruirati zaporedje  $2, 3$ -razširitev  $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n$ , da bo veljalo  $a, b \in F_n$ . Iz tega bo sledilo  $\alpha \in F_n(i)$ , ki je stopnje razširitev  $2$  in nam dopolni iskano zaporedje razširitev.

Po izreku 2.8 vemo, da lahko kakršnokoli origami konstrukcijo opravimo z operacijama O2 in O7. Z indukcijo na številu  $N$  uporabe operacije O2 na konstrukciji števila  $\alpha$  poiščimo zaporedje  $2, 3$ -razširitev.

Operacija O2 nam določi novo origami konstruktibilno točko oz. origami število kot presečišče dveh premic. Za  $N = 0$  nismo konstruirali nove točke, torej je  $\alpha$  že dano število in je  $\mathbb{Q} = F_0 \subset \mathbb{C}$  naša  $2, 3$ -razširitev. Recimo sedaj, da za vsako konstrukcijo origami števila preko končnega števila uporabe operacij O2 ali O7, od tega  $(N - 1)$ -tne uporabe operacije O2, obstaja končno zaporedje  $2, 3$ -razširitev obsega  $\mathbb{Q}$ .

Naj bo  $M$  število uporabe operacij O2 ali O7 za konstrukcijo števila  $\alpha$ , pri čemer smo prvo operacijo uporabili  $N$ -krat. V konstrukciji števila  $\alpha$  je to očitno zadnja izvedena operacija. Naj bo  $\alpha$  presečišče origami-konstruktibilnih premic  $p_1$  in  $p_2$ . Obe premici sta bili lahko konstruirani le z operacijo O7, torej za vsako od njiju obstajata točki  $\alpha_i, \beta_i, i \in \{1, 2\}$  (in še dve premici), da je  $p_i$  njihov ustrezni Belochin pregib. Števila  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  so bila konstruirana iz največ  $(N - 1)$ -kratne uporabe operacije O2, torej obstaja zaporedje  $2, 3$ -razširitev polja  $\mathbb{Q}$  oblike  $\mathbb{Q} = F_0 \subset \dots \subset F_n$ , da so realni in imaginarni deli teh štirih števil vsebovani v  $F_n$ . Polje  $F_n$  razširimo s poljem  $F_{n+1}$ , ki vsebuje koeficiente premic  $p_1$  in  $p_2$ . Hull v [19, str. 51–52] dokaže, da ima Belochin pregib koeficiente iz razširitev polja, iz katerega

izhajajo koeficienti osnovnih dveh premic, s stopnjo razširitve največ 3. Presečišče Belochinih pregibov  $p_1$  in  $p_2$ , ki je naše število  $\alpha$ , se izračuna iz linearne enačbe, torej bo veljalo  $\alpha \in F_{n+1}$ .  $\square$

Iz tega izreka sledi končna klasifikacija origami števil.

**Definicija 2.34.** Naj bo  $E$  razširitev polja  $F$ . Pravimo, da polinom  $f(X) \in F[X]$  razпадa v  $E$ , če je  $f(X)$  enak produktu linearnih polinomov iz  $E[X]$ . Če  $f(X)$  razпадa v  $E$  in v nobenem drugem podpolju polja  $E$ , ki vsebuje  $F$ , potem polju  $E$  pravimo *razpadno polje* polinoma  $f(X)$  nad poljem  $F$ .

**Izrek 2.35.** *Naj bo  $\alpha \in \mathbb{C}$  algebraično nad poljem  $\mathbb{Q}$  in naj bo  $L$  razpadno polje minimalnega polinoma števila  $\alpha$  nad  $\mathbb{Q}$ . Potem je  $\alpha$  origami število natanko takrat, ko velja  $[L : \mathbb{Q}] = 2^m 3^n$  za neka  $m, n \in \mathbb{N}_0$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $\alpha \in OR$ . Polje origami števil  $\mathbb{O}$  je zaprto za kvadratne in kubične korene, torej vsebuje rešitve vseh polinomov iz  $\mathbb{Q}[X]$  stopnje 3 ali manj, tj. vsak polinom nad  $\mathbb{Q}$  stopnje največ 3 razпадa v polju  $\mathbb{O}$ . Množica origami števil je normalna razširitev polja  $\mathbb{Q}$ , torej  $L \subseteq \mathbb{O}$ . Če vzamemo primitivni element razširitve  $L$ , nam zaporedje 2, 3-razširitev iz izreka 2.33 da  $[L : \mathbb{Q}] = 2^m 3^n$  za neka  $m, n \in \mathbb{N}_0$ .

Za dokaz obrata je potrebno nekaj znanja Galoisove teorije. Za Galoisovo grupo  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  velja  $|\text{Gal}(L/\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 2^m 3^n$ , kar pomeni, da je taka grupa rešljiva (glej [4]). Iz tega se lahko zgradi zaporedje 2, 3-razširitev polja  $\mathbb{Q}$  za število  $\alpha$ , ki je po izreku 2.33 zato origami število.  $\square$

Origami števila so torej vsa števila, ki jih lahko iz danih kompleksnih števil 0 in 1 dobimo s končnim številom uporabe uporabe uperacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja, konjugiranja, kvadratnega ter kubičnega korenjenja. Z njimi lahko posledično rešujemo kvadratne in kubične enačbe. Kako pa je s konstrukcijo kakšnih posebnih geometrijskih oblik, kot so pravilni večkotniki?

### 2.3.3 Origami-konstruktibilnost pravilnih $n$ -kotnikov

Iz evklidske geometrije vemo, za katere  $n$  lahko z evklidskim orodjem konstruiramo pravilni  $n$ -kotnik. Spodnjega izreka tako ne bomo dokazali, ga pa bomo razširili na origami konstrukcije.

**Definicija 2.36.** Praštevilo  $p$  se imenuje *Fermatovo praštevilo*, če je oblike  $p = 2^{2^m} + 1$  kjer je  $m \in \mathbb{N}_0$ .

Prvih nekaj Fermatovih praštevilo<sup>6</sup> je (zaporedje A000215 v OEIS – *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*):

$$3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617, \dots$$

**Izrek 2.37** (Gauss-Wantzelov izrek). *Pravilni  $n$ -kotnik se lahko konstruira z neoznačenim ravnalom in šestilom natanko takrat, ko je  $n = 2^a p_1 \cdots p_k$  za neka  $a, k \in \mathbb{N}_0$ , kjer so  $p_1, \dots, p_k$  različna Fermatova praštevila.*

<sup>6</sup>Fermat je domneval, da je vsako število oblike  $2^{2^s} + 1$  praštevilo. To pa ni res. Že Euler je ugotovil, da je število  $2^{2^5} + 1$  sestavljen. Deljivo je s številom 641.

Za  $n \leq 20$  pravilni  $n$ -kotnik ni evklidsko-konstruktibilenv primeru

$$n \in \{7, 9, 11, 13, 14, 18, 19\}.$$

Za origami-konstruktibilnost pravilnega večkotnika se namesto Fermatovih praštevil poslužimo pomnožice praštevil, ki sta jo definirala Cox in Shurman v [5].

**Definicija 2.38.** Praštevilo  $p$  se imenuje *Pierpontovo praštevilo*, če je  $p > 3$  in  $p = 2^m 3^n + 1$  za neka  $m, n \in \mathbb{N}_0$ .

**Izrek 2.39.** *Pravilni  $n$ -kotnik se lahko konstruira z origamijem natanko takrat, ko je  $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_k$  za neke  $a, b, k \in \mathbb{N}_0$ , kjer so  $p_1, \dots, p_k$  različna Pierpontova praštevila.*

*Dokaz.* Naj bo  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$   $n$ -ti koren enote. Pravilni  $n$ -kotnik lahko konstruiramo, če in samo če lahko konstruiramo kot  $2\pi/n$ , kar je ekvivalentno obstoju konstrukcije števila  $\zeta_n$ . To število je ničla polinoma  $z^n - 1 \in \mathbb{Q}[z]$ , katerega razpadno polje je  $\mathbb{Q}(\zeta)$ . Po izreku 2.35 je  $\zeta_n \in \mathbb{O}$  natanko takrat, ko je  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$  za neka  $a, b \in \mathbb{N}_0$ .

Minimalni polinoma števila  $\zeta_n$  nad  $\mathbb{Q}$  je oblike

$$\Phi_n(z) = \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ \gcd(i, n) = 1}} (z - \zeta_n^i).$$

To je dokazano v več matematičnih besedilih, ki govorijo o Galoisovi teoriji, npr. v [5, poglavje 9.1]. Sledi  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \deg(\Phi_n(z)) = \phi(n)$ , kjer je  $\phi(n)$  Eulerjeva funkcija, ki pove, koliko naravnih števil, manjših od  $n$ , je tujih temu številu. Ena od številnih formul za izračun Eulerjeve funkcije je  $\phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p)$  za  $n \in \mathbb{N}$ .

Naj bo sedaj  $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_k$  za neke  $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ , kjer so  $p_1, \dots, p_k$  različna Pierpontova praštevila. Potem je

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] &= \phi(n) \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \begin{cases} 2^a 3^{b-1} (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1), & a, b > 0, \\ 2^{a-1} (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1), & a > 0, b = 0, \\ 2 \cdot 3^{b-1} (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1), & a = 0, b > 0, \\ (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1), & a = b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Torej je  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^s 3^t$  za neka  $s, t \in \mathbb{N}_0$ , torej je  $\zeta_n \in \mathbb{O}$ .

Za dokaz obrata predpostavimo  $\zeta_n \in \mathbb{O}$ , torej je  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n) = 2^s 3^t$  za neka  $s, t \in \mathbb{N}_0$ . Faktorizirajmo število  $n$  v produkt potenc praštevil kot  $n = q_1^{a_1} \cdots q_r^{a_r}$ . Potem je

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = q_1^{a_1-1} (q_1 - 1) \cdots q_r^{a_r-1} (q_r - 1).$$

Če je kak  $q_i$  sod, je lahko le  $q_i = 2$ . Če je kateri izmed  $q_i$  lih, pa je lahko le  $q_i = 3$  ali  $a_i = 1$ . Poleg tega mora biti vsak faktor  $(q_i - 1)$  produkt potence števila 2 s potenco števila 3, torej je vsak  $q_i$  Piermontovo praštevilo. Tako je vsak prafaktor števila  $n$  lahko število 2, 3 ali Piermontovo praštevilo, s čimer je dokaz zaključen.  $\square$

Z origamijem sedaj lahko konstruiramo še 7-, 9-, 13-, 14-, 18- in 19-kotnik. Edini  $n$ -kotnik za  $n \leq 20$ , ki ni konstruktibilen tako z evklidskim orodjem kot z origamijem, je 11-kotnik.

### 3 Preogibanje lista različnih geometrijskih oblik

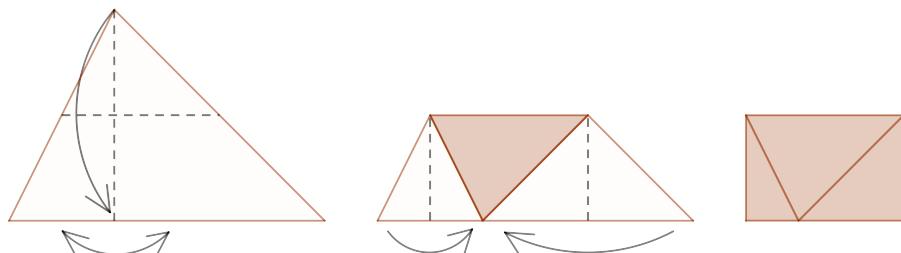
V tem poglavju bomo raziskovali, kaj lahko dobimo s preogibanjem listov papirja oblike trikotnika, pravokotnika in kvadrata. Za uvod si bomo pogledali nekaj najosnovnejših konstrukcij, ki jih lahko učitelj matematike uporabi tudi pri pouku v osnovni šoli, nato pa se bomo vrnili nazaj v malo bolj zanimive konstrukcije, kot so konstrukcija enakostraničnega trikotnika, šestkotnika in osemkotnika. Nato si bomo pogledali vse tri Hagove izreke o razmerjih, na katere specifični pregibi kvadratnega lista papirja razdelijo njegove stranice, nato pa to posplošili na iskanje metod za razdelitev daljice na poljubno število skladnih delov. Na kratko bomo spoznali tudi t. i.  $X$ -pregibe. Nekaj od naštetega bomo uporabili v naslednjem poglavju, kjer bomo po konstrukciji kvadratnega korena poljubnega origami števila preko več različnih postopkov končno rešili dva starogrška problema, zaradi katerih smo se sploh začeli ukvarjati s temo origamija.

#### 3.1 Nekaj kratkih in zanimivih konstrukcij za uvod

##### Ponazoritev lastnosti geometrijskih likov z origamijem

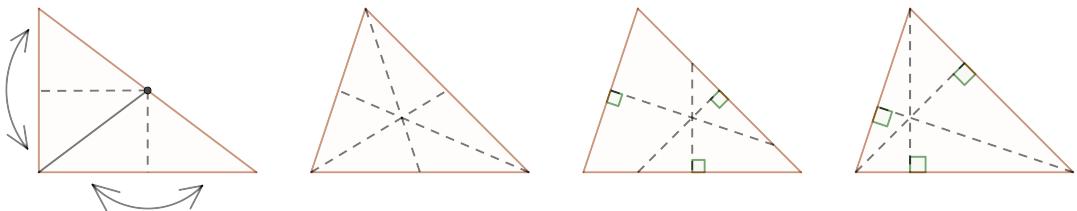
Johnson v [24] opisuje, kako lahko s preogibanjem lista papirja v obliki trikotnika, štirikotnika in kroga pokažemo določene lastnosti geometrijskih likov. Opisov, ki jih spremljajo nazorne skice konstrukcij, ne dokazuje, ampak rešitev nastavi z vprašanjji, na katera mora bralec sam pri sebi odgovoriti. Učitelji so povabljeni, da se pri pouku večkrat poslužujejo teh pripomočkov, saj bo to za učence zanimivo, hkrati pa zelo poučno. Pri tem naj se sami odločijo, na kakšen način bodo uporabili preogibanje papirja – ali kot že podana navodila iz knjige, iz katerih morajo učenci sami ugotoviti rezultat ali kot iskanje konstrukcije, ki dokaže želeno lastnost ipd. Sedaj bomo našteli bistvene konstrukcije, ki jih navaja avtor, večinoma pa bo lažji premislek, zakaj delujejo, prepuščen bralcu.

Avtor začne z osnovami – ki jih že poznamo – kot so pregibi skozi točko, pravokotnica na premico (skozi dano točko, ki leži na njej ali ne), simetrala daljice, simetrala kota in vzporednica premici. Z zložitvijo trikotnika v pravokotnik na način, kot kaže slika 15, pokaže, da je vsota notranjih kotov trikotnika res  $180^\circ$ . Iz te konstrukcije tudi sledi formula za ploščino trikotnika, saj je le-ta dvakrat večja od ploščine nastalega pravokotnika, ki ima za stranici polovico osnovnice trikotnika in polovico njegove višine. Prav tako lahko tu vidimo, da je srednjica trikotnika (pregib vrha trikotnika na sliki 15 levo) simetrala njegove višine in pol krajša od njegove osnovnice.



Slika 15: Pregib trikotnika, ki njegove notranje kote zloži skupaj v iztegnjeni kot.

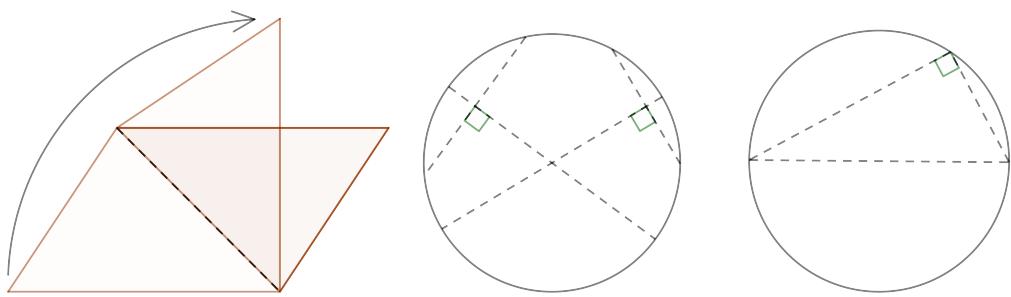
Nadalje z določitvijo središča hipotenuze pravokotnega trikotnika bralca povabi, da se s prepogibi prepriča, da nastala točka osnovni trikotnik razdeli na dva enako-kraka trikotnika (slika 16 levo). Prav tako se lahko prepriča, da se višine trikotnika, njegove težišnice, simetrale stranic ter simetrale kotov sekajo v isti točki (seveda vsaka skupina daljic zase; na sliki 16 so prikazani vsi primeri razen za simetralo kotov).



Slika 16: Prikaz še nekaj lastnosti trikotnika.

Če odložimo trikotnik in v roke vzamemo paralelogram, preko prepogib njegovih sosednjih stranic druge na drugo vidimo, da njegove diagonale v splošnem ne razpolavljajo notranjih kotov (slika 17 levo). Slednje velja le za romb, za katerega poleg tega lahko še takoj s pregibom po diagonalah pokažemo, da sta pravokotni druga na drugo.

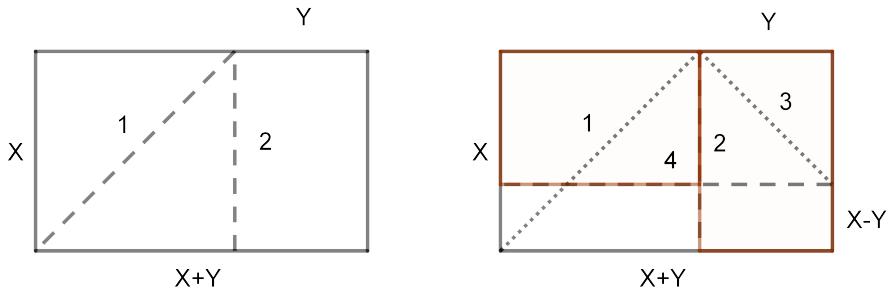
Nato se avtor posveti krogu. Vsak prepogib, ki prekrije njegove robove, ga očitno razdeli na pol in je njegov premer. Dva taka, a različna prepogiba določata središče kroga. Dobi se ga tudi tako, da prepognemo dve različni tetivi in skozi vsako izmed njiju še njeno simetralo, ki se sekata v središčni točki (slika 17 na sredi). Prav tako se dva različna premra in simetrala poljubne tetine sekajo v isti točki. Avtor ravnokar naštetega ne opiše tako, temveč poda navodila za konstrukcijo pregibov in bralca sprašuje, kaj nam končna konstrukcija da. Bralec šele po opravljenih prepogibih vidi, da gre za običajne evklidske konstrukcije. Razdelek se konča še s ponazoritvijo Talesovega izreka (slika 17 desno) in konstrukcijo tangente na krožnico.



Slika 17: Prikaz nekaj lastnosti paralelograma in kroga.

Nadalje lahko s prepogibanjem pravokotnika s stranicama  $X$  in  $X + Y$ , kjer krajšo stranico prepognemo na daljšo, ponazorimo odštevanje (slika 18 levo). Če nato prepognemo še drugi vogal, dobimo štiri manjše pravokotnike, iz česar lahko bralec sam dokaže formulo  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  (slika 18 desno).

Trije nevporedni pregibi, ki se ne sekajo v isti točki, nam na papirju konstruirajo trikotnik. S štirimi pravokotnimi prepogibi dobimo pravokotnik, če njegovo krajšo stranico prepognemo na daljšo, pa še kvadrat (kar smo že storili pri konstrukciji



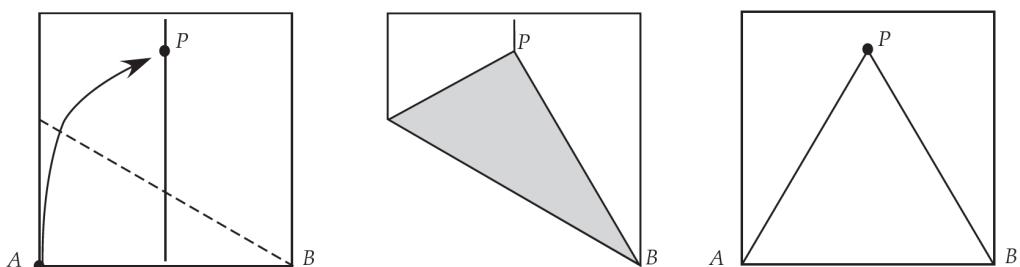
Slika 18: Prikaz odštevanja in dokaz formule  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  z označenim vrstnim redom prepogibov.

v prejšnjem odstavku). V slednjem lahko z določenimi prepogibi pokažemo, da se diagonali razpolavlja in sta pravokotni druga na drugo, in če oglišča prepognemo v presečišče diagonal, dobimo nov kvadrat s polovično ploščino originalnega.

### Konstrukcija enakostraničnega trikotnika, šestkotnika in osemkotnika

Konstrukcije poljubnega trikotnika, pravokotnika in kvadrata so zelo enostavne. Malo več premisleka pa je potrebnega za konstrukcije pravilnih  $n$ -kotnikov. Iz razdelka 2.3.3 vemo, da je edini pravilni  $n$ -kotnik, kjer je  $n \leq 20$  in se ga ne da konstruirati z origamijem, 11-kotnik. Postopkov za konstrukcije ostalih večkotnikov je več. Johnson se na primer v nadaljevanju iste knjige posveti konstrukciji preko večkratnega zvijanja traku, kar pa presega pravilo enkratnih prepogibov papirja.

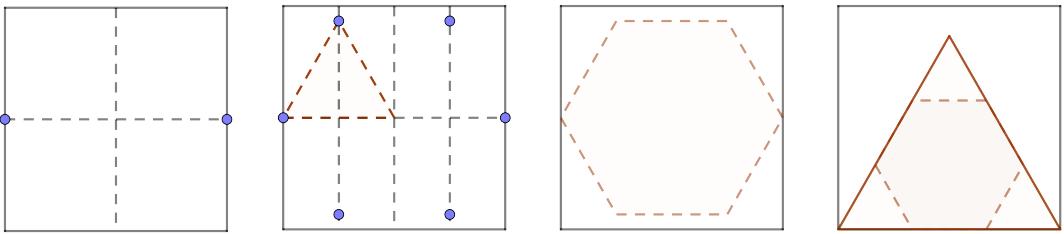
Kvadratni list papirja po višini prepognemo na pol in nanj položimo spodnje desno oglišče  $A$  kvadrata, da pregib poteka skozi spodnje levo oglišče  $B$  (slika 19). Sliko oglišča  $A$  označimo s točko  $P$ . Ker je po konstrukciji  $|AB| = |PB|$  in je vertikalnen prepogib simetrala spodnje stranice kvadrata, je trikotnik  $\triangle ABP$  enakostraničen.



Slika 19: Konstrukcija enakostraničnega trikotnika. Vzeto in predelano iz [20, str. 9].

Sedaj, ko znamo konstruirati enakostranične trikotnike, lahko konstruiramo tudi pravilni šestkotnik – kvadrat s simetralama stranic razdelimo na štiri dele, nato pa v vsakem od štirih manjših kvadratov po zgornjem postopku konstruiramo enakostranični trikotnik (oz. le eno njegovo stranico) z osnovnico na horizontalni simetrali (prve tri figure na sliki 20).

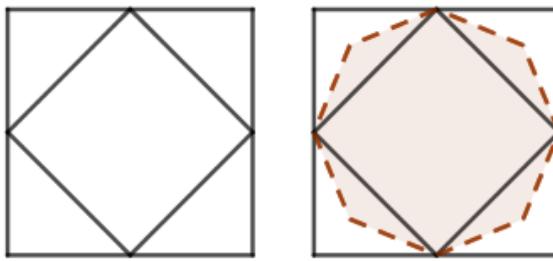
Še lažje pravilni šestkotnik konstruiramo preko enakostraničnega trikotnika, ki mu vrhove prepognemo v središče (slika 20 desno). Ker središče deli višine v raz-



Slika 20: Konstrukcija pravilnega šestkotnika na dva načina.

merju  $2 : 1$ , pregibi stranice razdelijo na tri skladne dele, sam trikotnik pa na tri manjše enakostranične trikotnike in šestkotnik na sredi.

V roke vzemimo nov kvadraten list papirja in konstruirajmo najprej središča njegovih stranic. S pregibi skozi sosednji središči dobimo manjši kvadrat. Sedaj razpolovimo še vsak kot, ki ga tvorita po ena stranica večjega in ena stranica manjšega kvadrata. Presečišča simetral dveh sosednjih kotonov nam data še preostale štiri oglišča pravilnega osemkotnika (slika 21). Bralec naj sam dokaže, da je to res.



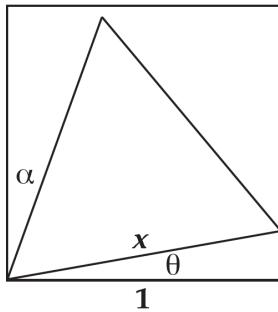
Slika 21: Konstrukcija pravilnega osemkotnika.

Vrnimo se nazaj na enakostranični trikotnik v danem kvadratnemu listu papirja. Ali znamo konstruirati največji tak trikotnik (in kako)? Recimo, da obstaja tak trikotnik. Najprej premislimo, da mora vsaj eno njegovo oglišče ležati v oglišču kvadrata. Če to ne drži, se trikotnik ne dotika ene stranice kvadrata – ker ima tri stranice, kvadrat pa štiri – recimo spodnje. Potem se z ostalimi tremi oglišči dotika preostalih treh stranic kvadrata, sicer to ne bi bil največji trikotnik – lahko bi ga še povečali. Potisnimo sedaj trikotnik navzdol po kvadratu, dokler se najnižje oglišče na eni od pokončnih stranic kvadrata ne dotakne njegove spodnje stranice – kar se zgodi ravno v oglišču kvadrata. Zaradi simetrije brez škode privzemimo, da je to spodnje levo oglišče.

Predpostavimo, da ima kvadrat stranico dolžine 1 in naj bo  $\theta$  kot med spodnjima stranicama kvadrata in trikotnika, kot kaže slika 22. Naj bo  $x$  dolžina stranice trikotnika. Iščemo tak kot  $\theta$ , da bo ploščina trikotnika največja. Ker je notranji kot trikotnika velik  $60^\circ$ , je kot  $\theta$  zaradi simetrije omejen z  $0 \leq \theta \leq 15^\circ$ . Ob upoštevanju  $x = 1/\cos \theta$  je njegova ploščina

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

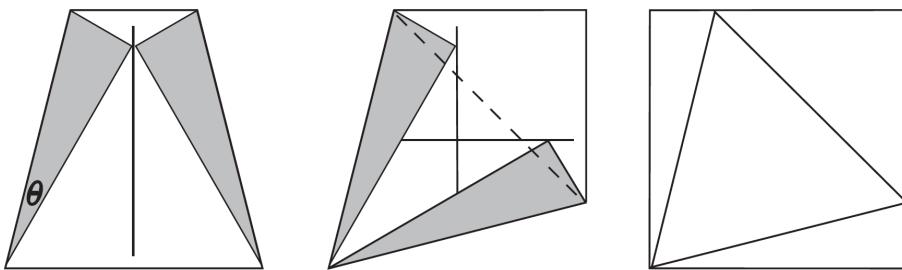
Funckijo bi lahko odvajali in preko iskanja njenega maksimuma izrazili kot, Hull pa v [20, str. 11] predlaga enostavnejšo rešitev. Ker je  $\cos x$  na intervalu  $[0^\circ, 15^\circ]$  oz.



Slika 22: Lega največjega enakostraničnega trikotnika znotraj kvadrata.

$[0, \pi/12]$  pozitivna in padajoča, je njena obratna vrednost naraščajoča, zato je tudi  $1/\cos^2 \theta$  naraščajoča funkcija. Ploščina  $P(\theta)$  torej narašča in maksimum doseže pri  $\theta = 15^\circ$ .

Trikotnik je simetričen glede na diagonalo kvadrata. Na sliki 23 (levo) je prikazana konstrukcija kota  $15^\circ$  – spodnje belo območje enakostraničen trikotnik in vsak od pregibov je simetrala kota  $30^\circ$ . Če opravimo tako dva pregiba na sosednjih stranicah, kot kaže slika 23 na sredi, tako dobimo iskani največji enakostranični trikotnik v danem kvadratu.



Slika 23: Konstrukcija največjega enakostraničnega trikotnika znotraj kvadrata.

Z razpolavljanjem ali trisekcijo kotov ob središču kvadrata ali trikotnika – koliko ostalih n-kotnikov lahko konstruiramo? Če je tega preveč, dej tudi to v novo poglavje ... Začneš s tem, potem pa greš na uni izrek, za koliko oglišč lahko konstruiraš z evklidskim orodjem in pol še koliko z origamijem.

### 3.2 Hagovi izreki za prepogibanje kvadrata

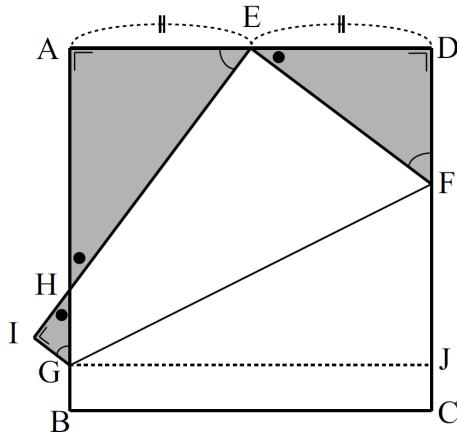
S prepogibanjem kvadratnega lista papirja se je veliko ukvarjal Kazuo Haga, sicer japonski profesor biologije. V svojem delu *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding* [13] je tako med drugim formuliral tri izreke, ki jih poznamo pod imenom *Hagovi izreki*. Pri vsakem od njih gre za konstrukcijo specifičnega pregiba, ki povzroči delitev stranic kvadrata v različnih razmerjih. Vsak izrek posebej bomo najprej formulirali, si slikovno ogledali konstrukcijo in ga dokazali, nato pa si pogledali še nekaj dodatnih lastnosti, ki sledijo iz njega.

Da si olajšamo računanje, predpostavimo, da ima kvadrat, ki predstavlja naš list papirja, stranico dolžine 1. Njegova oglišča označimo s črkami  $A, B, C$  in  $D$ , začenši v zgornjem desnem oglišču in sledečimi v pozitivni smeri, torej nasprotni smeri urinega kazalca.

### 3.2.1 Prvi Hagov izrek

**Izrek 3.1** (Prvi Hagov izrek). *Zgornjo stranico  $AD$  kvadrata  $ABCD$  razpolovimo v točki  $E$  in s pregibom nanjo položimo oglišče  $C$ . S tem na levi in desni stranici kvadrata dobimo tri točke, ki jih označimo z  $F, G$  in  $H$  (slika 24). Za te točke velja:*

- točka  $F$  deli desno stranico v razmeru  $3 : 5$ ,
- točka  $H$  deli levo stranico v razmerju  $2 : 1$ ,
- točka  $H$  deli spodnjo stranico v razmerju  $1 : 5$ ,
- točke  $G$  deli levo stranico v razmerju  $7 : 1$ .



Slika 24: Konstrukcija pregiba iz prvega Hagovega izreka. Vzeto iz [13, str. 4].

*Dokaz.* Kot kaže slika 24, označimo še točki  $I$  in  $J$ . Najprej lahko opazimo, da pregib iz izreka povzroči nastanek treh podobnih pravokotnih trikotnikov, ki so na sliki 24 pobarvani sivo. Za vsakega od njih lahko določimo dolžine njegovih stranic.

Začnimo s trikotnikom  $\triangle DEF$ . Ker je  $E$  razpolovišče stranice  $AD$ , je  $|DE| = 1/2$ . Če drugo kateto  $DF$  označimo z  $a$ , je hipotenuza  $EF$  dolga  $1 - a$ , saj  $|DF| + |EF| = |DF| + |FC| = 1$  po konstrukciji. Iz Pitagorovega izreka nato izračunamo  $a = 3/8$ . Torej točka  $F$  res deli stranico  $CD$  v razmerju  $3 : 5$ .

Iz razmerja podobnih trikotnikov  $\triangle DEF$  in  $\triangle AHE$  dobimo

$$\frac{|AH|}{|AE|} = \frac{|DE|}{|DF|}, \quad \text{torej } |AH| = \frac{|AE| \cdot |DE|}{|DF|} = \frac{1/2 \cdot 1/2}{3/8} = \frac{2}{3}.$$

Točka  $H$  res deli stranico  $AB$  v razmerju  $2 : 1$ . Drugače povedano – s prvim Hagovim izrekom znamo poljubno daljico razdeliti na tri skladne dele.

Sedaj lahko izračunamo dolžino hipotenuze  $EH$  trikotnika  $\triangle AHE$ . Iz Pitagorovega izreka sledi  $|EH| = 5/6$  (in posledično iz  $|EI| = 1$  še  $|HI| = 1/6$ ), torej točka  $H$  res deli spodnjo stranico v razmerju  $1 : 5$ .

Za izračun dolžine daljice  $BG$ , ki je po konstrukciji enaka dolžini katete  $GI$ , si spet pomagamo z razmerji podobnih trikotnikov; tokrat vzamemo trikotnika  $\triangle IHG$  in  $\triangle AHE$ . Iz razmerja

$$\frac{|GI|}{|HI|} = \frac{|AE|}{|AH|} \quad \text{sledi } |BG| = |GI| = \frac{|AE| \cdot |HI|}{|AH|} = \frac{1/2 \cdot 1/6}{2/3} = \frac{1}{8},$$

torej točka  $G$  res deli stanico  $AB$  v razmerju  $7 : 1$ .  $\square$

Za vajo lahko izračunamo še preostale dolžine daljic:

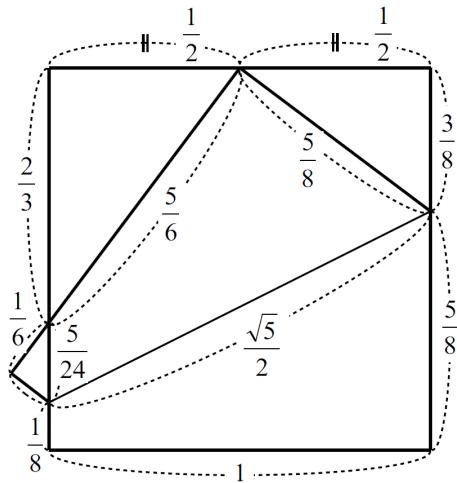
$$|GH| = |AB| - |AH| - |BG| = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24},$$

$$|CJ| = |BG| = \frac{1}{8},$$

$$|FJ| = |CD| - |DF| - |CJ| = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$|FG| = \sqrt{|GJ|^2 + |FJ|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

S tem so znane vse dolžine daljic, na katere pregib iz prvega Hagovega izreka razdeli stranice enotskega kvadrata. Na sliki 25 je tako povzetek naših ugotovitev.



Slika 25: Dolžine daljic po prvem Hagovem izreku. Vzeto iz [13, str. 7].

Izrek lahko tudi posplošimo, če za točko  $E$  ne vzamemo razpolovišča, temveč poljubno točko na daljici  $AD$ . Naj bo  $x = |ED|$ . Nastale točke označimo kot prej, dolžine nastalih daljic pa z  $y_1$  do  $y_6$ , kot kaže slika 26.

Za vsak  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  poiščimo sedaj vrednost  $y_i$  v odvisnosti od  $x$ . Kot prej najprej opazimo, da imamo zopet tri podobne pravokotne trikotnike. Iz Pitagorovega izreka za pravokotni trikotnik  $\triangle EDF$  sledi

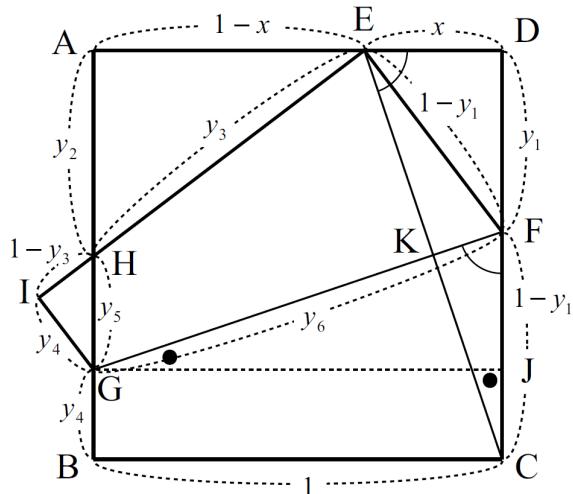
$$y_1 = (1 - x^2)/2,$$

iz razmerja podobnih pravokotnih trikotnikov  $\triangle EDF$  in  $\triangle HAE$  pa izračunamo

$$y_2 = \frac{x(1-x)}{y_1} = \frac{2x}{1+x} \quad \text{in} \quad y_3 = \frac{(1-y_1)(1-x)}{y_1} = \frac{1+x^2}{1+x}.$$

Pregib  $FG$  je po konstrukciji simetrala daljice  $CE$ , torej pravokotna nanjo, iz česar sledi, da sta trikotnika  $\triangle CKF$  in  $\triangle CDE$  podobna in kota  $\angle DEC$  in  $\angle KFC$  skladna. Zato sta skladna tudi trikotnika  $\triangle CDE$  in  $\triangle GJF$ , torej  $|FJ| = x$ . Posledično je

$$y_4 = |CJ| = 1 - (y_1 + x) = \frac{(1-x)^2}{2} \quad \text{in} \quad y_5 = 1 - y_2 - y_4 = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(1+x)}.$$



Slika 26: Oznake dolžin iz prvega Hagovega izreka v splošnem. Vzeto iz [13, str. 9].

Na koncu še s ponovno uporabo Pitagorovega izreka izračunamo

$$y_6 = \sqrt{|GJ|^2 + |FJ|^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Splošne vrednosti dolžin  $y_i$  mogoče niso najlepše, vendar pri marsikateri izbiri števila  $x \in (0, 1)$  dobimo lepe številke. Najbolj so zanimiva recipročna števila naravnih števil. Vemo že, da pri izbiri  $x = 1/2$  lahko dobimo števila  $1/3, 1/6, 1/8$ , pri izbiri  $x = 1/4$  in  $x = 3/4$  dobimo še  $2/5$  (in iz tega z razpolovitvijo  $1/5$ ) in  $1/7$ . Računanje prepuščamo bralcu, se pa na tej točki lahko vprašamo, ali za vsak  $n \in \mathbb{N}$  obstaja primeren  $x$ , da lahko preko neke dolžine  $y_i$  ali  $1 - y_i$  in preko postopkov za konstrukcijo že znanih razmerij konstruiramo dolžino  $1/n$ . Odgovor je pritrdilen, enostaven razmislek pa sledi v razdelku 3.3.

### 3.2.2 Drugi Hagov izrek

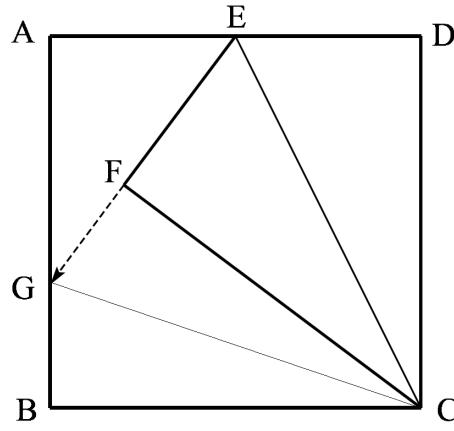
**Izrek 3.2** (Drugi Hagov izrek). *Zgornjo stranico  $AD$  kvadrata  $ABCD$  razpolovimo v točki  $E$  in opravimo pregib skozi točko  $E$  ter oglišče  $C$ . Točka  $D$  se tako preslika v točko  $F$  (slika 27). Če stranico  $EF$  podaljšamo do leve stranice kvadrata, jo presečišče  $G$  razdeli v razmerju  $2 : 1$ .*

*Dokaz.* Opazimo lahko, da sta trikotnika  $\triangle BCG$  in  $\triangle FCG$  skladna, saj imata skladni daljšo kateto in hipotenuzo ter pravi kot nasproti hipotenuze. Označimo  $x = |GB| = |GF|$ . Zapišimo Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik  $\triangle AGE$ :

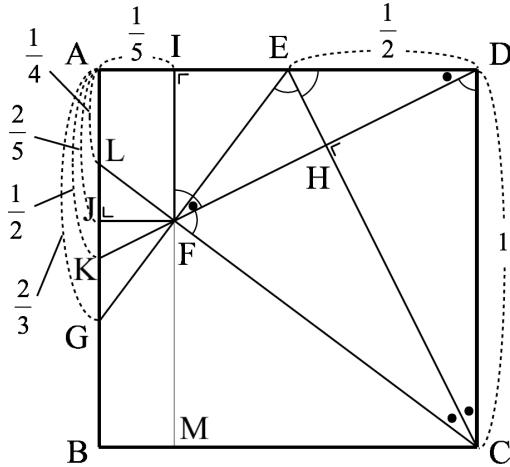
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ in izračunamo } x = \frac{1}{3},$$

torej točka  $G$  res deli stranico  $AB$  v razmerju  $2 : 1$ . □

S tem smo zopet dobili način razdelitve daljice na tri enake dele, a tu zanimivih razmerij še ni konec. Poglejmo si še, v kakšen razmerju nam stranice deli točka  $F$  in točke, ki jih dobimo s podaljšanjem daljic  $FD$  in  $FC$  do leve stranice. Označimo nove točke  $H, I, J, K$  in  $M$ , kot kaže slika 28.



Slika 27: Konstrukcija pregiba iz drugega Hagovega izreka. Vzeto iz [13, str. 12].



Slika 28: Dolžine daljic po drugem Hagovem izreku. Vzeto in preurejeno iz [13, str. 15].

Po konstrukciji pregiba velja  $FD \perp CE$ , iz česar dobimo podobne pravokotne trikotnike  $\triangle CDE$ ,  $\triangle CFE$ ,  $\triangle DAK$ ,  $\triangle DHE$ ,  $\triangle FHE$ ,  $\triangle DIF$ . Prvi trije od naštetih so celo skladni, prav tako je skladen tudi sledeči par. Le trikotnik  $\triangle DIF$  nima skladnega para. Iz sledečih razmerij izračunamo

$$\begin{aligned} |DH| &= \frac{|DE| \cdot |CD|}{|CE|} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ torej } |DF| = 2|FH| = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ |DI| &= \frac{|DF| \cdot |CD|}{|CE|} = \frac{4}{5}, \text{ torej } |AI| = \frac{1}{5}, \\ |FI| &= \frac{|DI| \cdot |DE|}{|CD|} = \frac{2}{5} \text{ in} \\ |AK| &= |DE| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

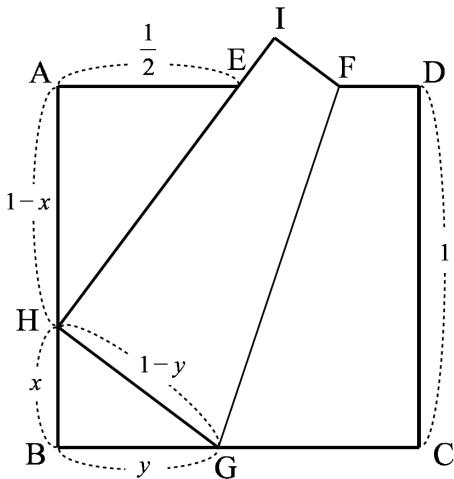
Iz podobnih trikotnikov  $\triangle BCL$  in  $\triangle MCF$  sledi še

$$|BL| = \frac{|BC| \cdot |FM|}{|CM|} = \frac{3}{4}, \text{ torej } |AL| = |AB| - |BL| = \frac{1}{4}.$$

Torej nam drugi Hagov izrek poleg konstrukcije števil  $1/3, 2/3$  poda tudi direktno konstrukcijo števil  $1/5, 2/5, 3/5$  in  $4/5$ .

### 3.2.3 Tretji Hagov izrek

**Izrek 3.3** (Tretji Hagov izrek). *Zgornjo stranico  $AD$  kvadrata  $ABCD$  razpolovimo v točki  $E$  in opravimo pregib, ki točko  $E$  položi na desno stranico in hkrati oglišče  $C$  na levo stranico (slika 29). Njena slika  $H$  levo stranico deli v razmerju  $2 : 1$ .*



Slika 29: Konstrukcija pregiba iz tretjega Hagovega izreka. Vzeto iz [13, str. 18].

*Dokaz.* Označimo še točke  $E, F, G$ , in  $I$  ter uvedimo  $x = |BH|$  in  $y = |BG|$ , kot kaže slika 29. Zaradi prepogiba je  $|GH| = |CG| = 1 - y$ . Iz Pitagorovega izreka za pravokotni trikotnik  $\triangle BGH$  ter razmerja za podobna trikotnika  $\triangle BGH$  in  $\triangle AHE$  dobimo sistem enačb

$$x^2 + y^2 = (1 - y)^2 \text{ in } \frac{1/2}{1 - x} = \frac{x}{y},$$

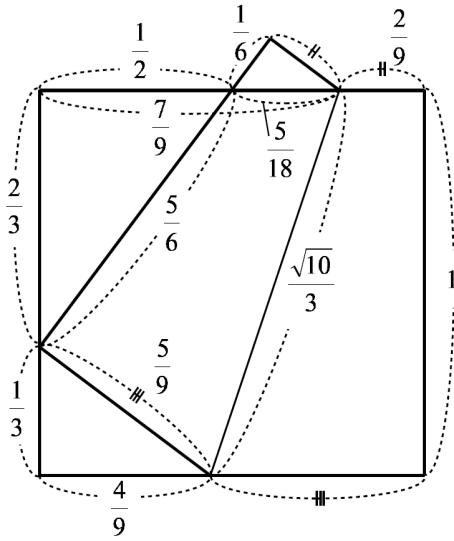
iz katerih izračunamo  $x = \frac{1}{3}$  in  $y = \frac{4}{9}$ . Torej točka  $H$  res deli stranico  $AB$  v razmerju  $2 : 1$ .  $\square$

Kot pri prejšnjih dveh izrekih bi lahko poračunali še preostale dolžine daljic. To za vajo prepuščamo bralcu, ki se lahko o svojih rezultatih prepriča s sliko 30.

Pri vseh treh Hagovih izrekih gre torej za prepogib, ki ali gre skozi središče zgornejše stranice  $AD$  ali stranico  $CD$  kvadrata  $ABCD$  položi nanj. V vsakem primeru nam konstrukcija poda točko na levi stranici  $AB$ , ki jo deli v razmerju  $2 : 1$ , torej sedaj zmoremo (na več načinov) poljubno daljico razdeliti na tri skladne dele. Če popustimo pogoj, da uporabljamo središče stranice  $AD$ , lahko z izbiro poljubne točke na tej stranici kvadrata izreke posplošimo in dobimo več zanimivih razmerij, kot se izkaže, celo razmerje  $n : 1$  za poljuben  $n \in \mathbb{N}$ .

Avtor Haga je svoje izreke preizkusil tudi na *srebrnih pravokotnikih*<sup>7</sup> in tako prišel do novih načinov razdelitev na  $9, 14, 16$  in še več različnih delov. Tu se s tem ne bomo ukvarjali, zato naj si bralec, ki ga zanima več, to pogleda v [13, str. 21–32].

<sup>7</sup>To so pravokotniki, ki imajo stranice v razmerju  $1 : \sqrt{2}$ . Lastnost tega razmerja je, da če tak



Slika 30: Dolžine daljic po tretjem Hagovem izreku. Vzeto iz [13, str. 19].

### 3.3 Razdelitev daljice na $n$ skladnih delov

Stranico kvadrata želimo razdeliti na  $n$  enakih delov, kjer je  $n \in \mathbb{N}$  poljuben. Za  $n = 2^t$ , kjer je  $t \in \mathbb{N}_0$ , je to čisto enostavno, saj samo prepolavljam razdalje med pregibi, dokler ne dosežemo cilja. Če je  $n$  sod, vendar ni potenca 2, torej  $n = 2^t(2m + 1)$ , kjer sta  $t, m \in \mathbb{N}$ , stranico najprej razdelimo na  $2^t$  delov, nato pa moramo vsakega izmed njih razdeliti na  $2m + 1$  (liho število) delov. Izziv tega problema je torej v razdelitvi daljice na liho število delov. Ko bomo zo zmogli, jo bomo znali razdeliti na  $n$  delov za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

V prejšnjem razdelku so nam Hagi izreki podali razdelitev stranice kvadrata na tri, pet, sedem in devet delov. Vendar iščemo metodo, ki nam stranico razdeli na  $n$  delov za splošen lih  $n \in \mathbb{N}$ . Spomnimo se, da smo en tak postopek že spoznali – v dokazu izreka 2.28 smo za poljuben  $a \in \mathbb{R}$  znali konstruirati razdaljo  $1/a$ , kar bi lahko uporabili za razdelitev neke daljice na  $a$  enakih delov – konstruirano razdaljo  $1/a$  bi  $a$ -krat prenesli naprej. Načinov reševanja tega problema pa se je skozi zadnja desetletja oblikovalo še veliko več; tu bomo spoznali še dve metodi.

#### Metoda po posplošenem prvem Hagovem izreku

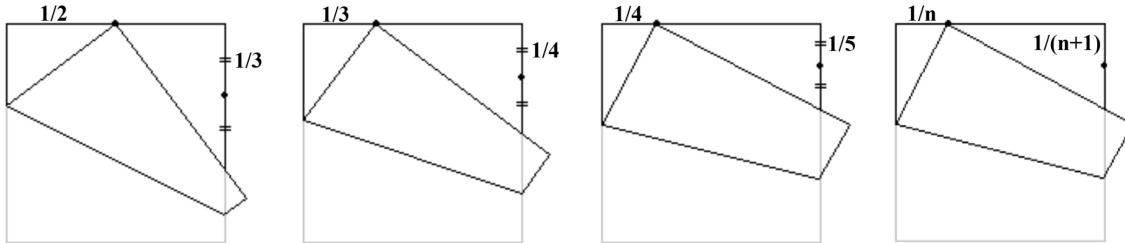
Spomnimo se prvega Hagovega izreka, kjer nam prepogib oglišča  $B$  na središče daljice  $AD$  v točki  $H$  na daljici  $AB$  povzroči njen razdelitev v razmerju  $2 : 1$ . Nato smo izrek posplošili in namesto središča zgornje stranice izbrali poljubno točko, ki je za  $x$  odmaknjena od oglišča  $D$  (slika 26). Pri tem smo med drugim izračunali razdaljo  $y_2 = |HA| = 2x/(1+x)$ .

Razveseli nas, da pri  $x = 1/n$  dobimo ravno  $y_2 = 2/(n+1)$ , kar je dvakratnik števila  $1/(n+1)$ . Če torej znamo zgornjo stranico razdeliti v razmerju  $(n-1) : 1$ , nam središče daljice  $HA$  levo stranico razdeli v razmerju  $n : 1$ . Na sliki 31 je prikaz

---

pravokotnik prepoloviš po daljši stranici, dobiš nov, za pol manjši srebrni pravokotnik. Primer takega pravokotnika je kar A4 list papirja – prepričaš se lahko tako, da krajšo stranico prepognes na daljšo, da dobiš diagonalo kvadrata, in preveriš, da je ta pregib enako dolg kot daljša stranica. To je enak princip kot pri zlatih pravokotnikih, kjer je razmerje stranic v zlatem rezu.

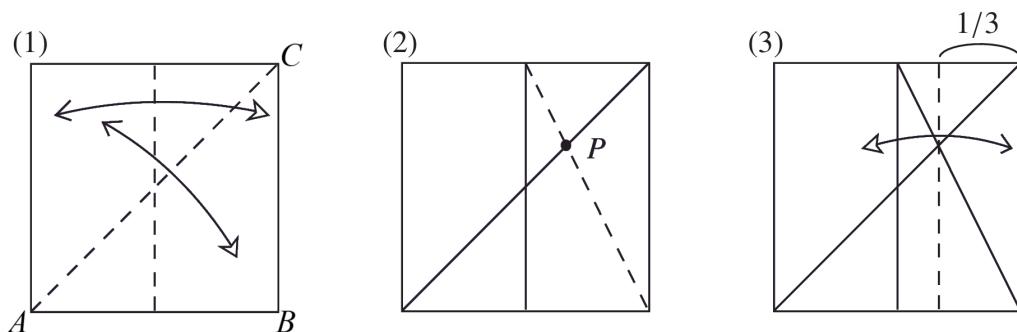
za  $n = 2, 3, 4$  in splošen  $n$  (pri tem se sicer na zgornjo stranico prepogne spodnje levo oglišče, zato je to zrcalna različica slike, kot smo je vajeni). Po indukciji (prvi Hagov izrek je baza indukcije pri  $n = 2$ ) je to še ena metoda za razdelitev doljice na poljubno število skladnih delov preko prepogibanja kvadratnega lista papirja.



Slika 31: Konstrukcije razmerij po posplošenem prvem Hagovem izreku.

### Metoda križajočih se diagonal

Metoda nima uradnega prevoda niti uradnega imena, jo pa tako imenuje Robert J. Lang v svojem članku [25]. Njena konstrukcija je prikazana na sliki 32. Najprej kvadrat dvakrat prepognemo na pol – enkrat po diagonali skozi oglišči  $A$  in  $C$  in drugič po vertikali. Nato prepognemo po diagonali (skozi oglišče  $B$ ) še desni pokončen pravokotnik. Presečišče obih diagonal označimo s točko  $P$  in naredimo skoznjo prepogib, ki je pravokoten na horizontalno stranico kvadrata.



Slika 32: Konstrukcija po metodi križajočih se diagonal za  $n = 3$ . Vzeto in preurejeno iz [20, str. 37].

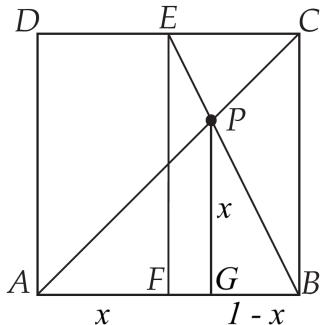
**Trditev 3.4** (Metoda križajočih se diagonal za  $n = 3$ ). *Zadnji pregib iz zgornjega opisa konstrukcije razdeli horizontalno stranico kvadrata v razmerju 2 : 1.*

*Dokaz.* Dokazujemo lahko na več načinov:

1. *Analitičen pristop:* Kvadrat postavimo v evklidsko ravnino tako, da leži oglišče  $A$  v koordinatnem izhodišču in oglišče  $B$  v točki  $(1, 0)$ . Obe diagonali izrazimo z enačbama premic. Glavna diagonalna ima enačbo  $y = x$ , diagonalna pravokotnika pa  $y = -2x + 2$ . Točka  $P$  je njuno presečišče in ima tako koordinati  $(2/3, 2/3)$ .

2. *Preko podobnih trikotnikov:* Z opisanimi preogibi v tem kvadratu konstruiramo več trikotnikov. Njihova oglišča označimo tako, kot kaže slika 33. Iz podobnosti trikotnikov  $\triangle AGP$  in  $\triangle ABC$  sledi, da je trikotnik  $\triangle AGP$  enakokrak. Naj bo dolžina njegovih krakov  $x$ . Potem je  $|AG| = |GP| = x$  in  $|GB| = 1 - x$ . Iz podobnosti trikotnikov  $\triangle EFB$  in  $\triangle PGB$  sledi

$$\begin{aligned}\frac{|EF|}{|FB|} &= \frac{|PG|}{|GB|}, \\ \frac{1}{\frac{1}{2}} &= \frac{x}{1-x}, \\ x &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



Slika 33: Dokaz metode križajočih se diagonal za  $n = 3$ . Vzeto in preurejeno iz [20, str. 38].

□

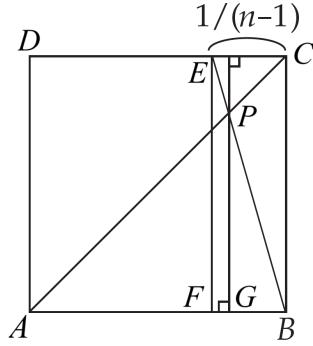
Po konstrukciji pregiba, ki zgornjo stranico kvadrata razdeli v razmerju  $2 : 1$ , levi pravokotnik (s stranico  $AG$ ) po vertikali prepognemo še na pol in tako stranico kvadrata razdelimo na tri enake dele. Preidimo sedaj iz  $n = 3$  na višje število delov.

Razdelitev stranice kvadrata na štiri dele je že znana – kvadrat v vertikalni smeri dvakrat prepognemo na pol.

Stranico razdelimo na pet delov na podoben način kot na tri. Naredimo enak pregib po glavni diagonalni, nato pa zgornjo stranico razdelimo v razmerju  $3 : 1$  (na primer preko razdelitve na štiri dele). S tem smo na desni strani kvadrata dobili pokončen pravokotnik s horizontalno stranico, dolgo četrt stranice kvadrata. Naslednji pregib je, kot prej, diagonala tega pravokotnika (tista skozi oglišče  $B$ ). Presečišče te in glavne diagonale je točka, ki je od desne stranice oddaljena za  $1/5$  (dokaz je analogen tistem za trditve 3.4, pri čemer je tu  $|FB| = 1/4$  in posledično  $x = 4/5$ ). Naredimo vertikalnen pregib skozi točko  $P$  in s tem zgornjo stranico kvadrata razdelimo v razmerju  $4 : 1$ . Na koncu še levi del te stranice razdelimo na štiri dele. S tem smo celotno stranico razdelili na pet skladnih delov.

Zgornji postopek lahko posplošimo na poljuben  $n \in \mathbb{N}$ . Kot smo videli v konkretnih primerih za  $n = 3$  in  $5$ , smo si pomagali z vnajprejšnjo razdelitvijo stranice na  $n - 1$  število enakih delov, kar že znamo storiti. Dokaz naslednje trditve bo tako temeljil na indukciji.

**Trditev 3.5** (Metoda križajočih se diagonal za splošen  $n$ ). Naj bo  $n \in \mathbb{N}, n > 2$ . Kvadrat  $ABCD$  s stranico dolžine 1 prepognemo po diagonali  $AC$ , potem pa stranico  $DC$  s točko  $E$  razdelimo v razmerju  $(n-2) : 1$ . Naredimo pregib novonastalega pravokotnika skozi točki  $B$  in  $E$  (slika 34). Presečišče te in glavne diagonale je točka  $P$ , ki je od desne stranice kvadrata oddaljena za  $1/n$ .



Slika 34: Konstrukcija po metodi križajočih se diagonal za splošen  $n$ . Vzeto in preurejeno iz [20, str. 38].

*Dokaz.* Za  $n = 1$  in  $n = 2$  ni kaj dokazovati – v prvem primeru pregiba sploh ni, v drugem primeru stranico prepolovimo.

*Baza indukcije:* Po trditvi 3.4 že vemo, da trditev drži za  $n = 3$  (tudi za 5).

*Indukcijska predpostavka:* Predpostavimo, da znamo stranico razdeliti na  $n - 1$  enakih delov.

*Indukcijski korak:* Dokazujemo, da znamo stranico razdeliti na  $n$  enakih delov. Po navodilih za konstrukcijo iz trditve konstruiramo točko  $P$  in pri tem označimo še točke  $E, F$  in  $G$ , kot kaže slika 34. Potem je dokaz posplošena različica tistega za trditev 3.4:

1. *Analitičen pristop:* Naj bo oglišče  $A$  koordinatno izhodišče in oglišče  $B$  točka  $(1, 0)$ . Premica, ki je nosilka diagonale  $AC$ , ima tako enačbo  $y = x$ , nosilka diagonale  $CE$  pa  $y = -(n-1)x + (n-1)$ . Točka  $P$  je njuno presečišče in ima tako koordinate  $((n-1)/n, (n-1)/n)$ . Torej je od desne stranice kvadrata res oddaljena za  $1/n$ .
2. *Preko podobnih trikotnikov:* Trikotnik  $\triangle AGP$  je enakokrak in naj bo  $|AG| = |GP| = x$ . Iz razmerij dolžin stranic podobnih trikotnikov  $\triangle EFB$  in  $\triangle PGB$  sledi

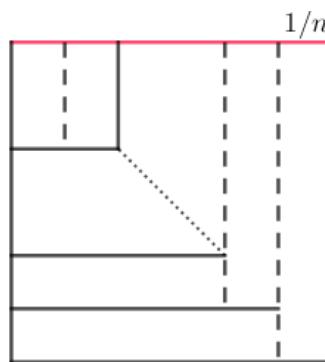
$$\begin{aligned} \frac{|EF|}{|FB|} &= \frac{|PG|}{|GB|}, \\ \frac{1}{\frac{1}{n-1}} &= \frac{x}{1-x}, \\ x &= \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Točka  $P$  je od desne stranice kvadrata res oddaljena za  $1 - x = 1/(n+1)$ .

□

**Posledica 3.6.** *Poljubno daljico znamo razdeliti na n skladnih delov za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Dokaz.* Vzemimo neko daljico poljubne dolžine. Ker znamo konstruirati pravokotnike skozi točke in prenašati razdalje, lahko konstruiramo kvadrat, katereda zgornja stranica dana daljica. Po zgornji trditvi jo znamo razdeliti v razmerju  $(n - 1) : 1$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Potem moramo njen daljši del razdeliti na  $n - 1$  skladnih delov. To storimo na enak način kot prej – konstruiramo manjši kvadrat s to novo stranico in ponovimo postopek. Ustavimo se, ko na nekem koraku stranico kvadrata razdelimo v razmerju  $1 : 1$  (slika 35). Takrat bo zgornja stranica oz. dana daljica razdeljena na  $n$  skladnih delov. □



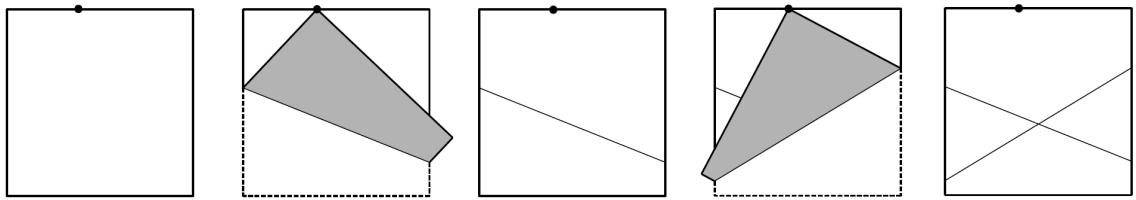
Slika 35: Razdelitev poljubne stranice (označena z rdečo) na poljubno število skladnih delov.

Do zdaj smo imeli metode z razdelitvijo preko prepogibanja kvadratnega lista papirja. Za razdelitev preko pravokotnika je prav tako veliko že razvitih konstrukcij, ki nam njegovo stranico razdelijo na poljubno število skladnih delov. V tej nalogi se s tem ne bomo ukvarjali, bralec pa je povabljen, da si več ogleda v [13, str. 107–134].

### 3.4 X-pregibi

Poglejmo si še eno zanimivo lastnost, ki izhaja iz prepogibanja kvadrata po principu prvega Hagovega izreka. Njen odkritelj je prav taisti avtor Kazuo Haga (glej [13, str. 33–44]). Potek konstrukcije je sledeč (slika 36):

1. Na zgornji stranici kvadrata izberemo poljubno točko.
2. Levo spodnje oglišče prepognemo na izbrano točko.
3. Papir razgrnemo in opazimo pregib.
4. Nato na izbrano točko prepognemo še desno spodnje oglišče.
5. Papir razgnemo in opazimo nov pregib.

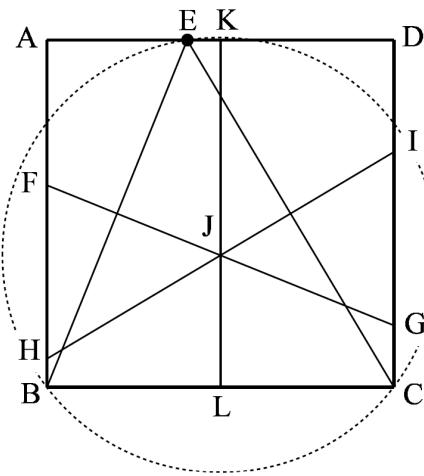


Slika 36: Potek konstrukcije  $X$ -pregibov. Vzeto in predelano iz [13, str. 34].

Par pregibov, ki smo ju dobili po opravljenem postopku, po videzu spominja na črko  $X$ , zato ju avtor imenuje kar  $X$ -pregiba.

Bralec je povabljen, da za več različnih točk na zgornji stranici kvadrata opravi pripadajoče  $X$ -pregibe. Nato pa naj kvadrat prepogne še na pol po vertikali. Mogoče ga bo presenetilo, da le-ta vedno poteka skozi presečišče  $X$ -pregibov!

V resnici to ni težko dokazati. Uvedimo najprej označke točk, kot kaže slika 37. Pri tem je  $E$  poljubna izbrana točka, gledamo pa trikotnik  $\triangle BCE$ . Po konstrukciji



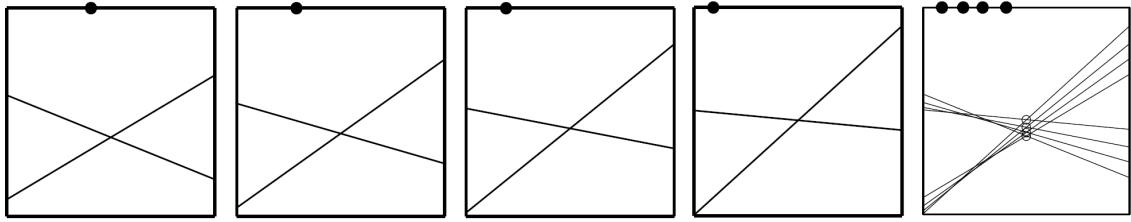
Slika 37: Dokaz, da se  $X$ -pregiba in navpična simetrala kvadrata sekajo v isti točki. Vzeto iz [13, str. 38].

je pregib  $FG$  po konstrukciji simetrala njegove stranice  $BE$ , pregib  $HI$  simetrala stranice  $CE$  in pregib  $KL$  simetrala stranice  $BC$  in hkrati navpična simetrala kvadrata  $ABCD$ . Vemo, da se simetrale stranic trikotnika sekajo v skupni točki, torej smo s tem še matematično potrdili zgornjo opazko iz konstrukcije.

Naj bo  $J$  presečišče simetral stranic trikotnika  $\triangle BCE$ . Potem je to hkrati tudi središče njegove očrtane krožnice, kot je načrtana na sliki 37. Posledično so seveda razdalje oglišč  $B, C$  in  $E$  do točke  $J$  polmeri krožnice, torej so med seboj skladne.

Bralec naj sedaj vzame vse svoje kvadratne liste papirja, na katere je konstruiral različne  $X$ -pregibe, in jih zloži drug na drugega. Opazka, da presečišča pregibov ležijo na isti premici, ni presenetljiva, saj smo ravnonkar premisili, da vsako tako presečišče leži n anavpični simetrali kvadrata. Bolj je zanimiva opazka, da nobeno od teh presečišč ne leži v zgornji polovici kvadrata (slika 38).

Kvadrat lahko postavimo v koordinatni sistem z ogliščem  $B$  v izhodišču in ogliščem  $A$  v točki  $(0, 1)$ . Če naj bo  $E = (a, 1)$  poljubna točka na stranici  $AD$ . Ohranimo



Slika 38: Štirje primeri  $X$ -prepogibov in njihova unija. Vzeto in predelano iz [13, str. 36].

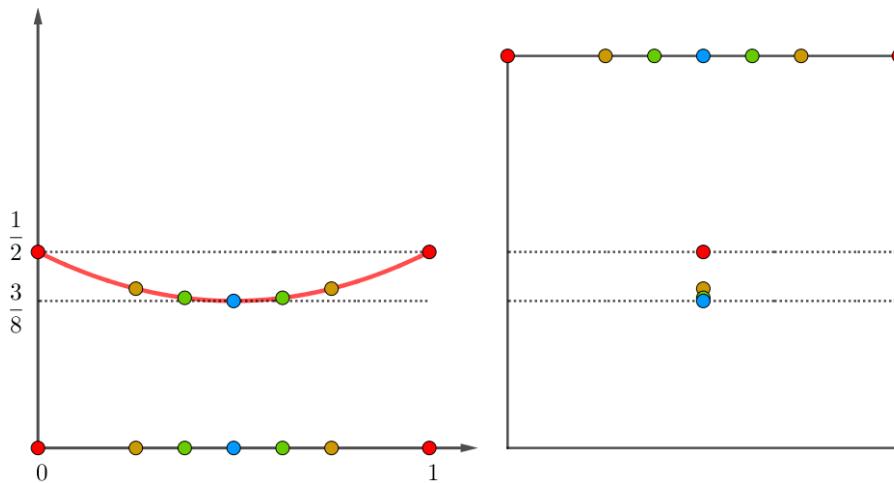
oznake točk s slike 37. Premici, ki predstavljata  $X$ -pregiba  $FG$  in  $HI$ , imata enačbi

$$y_{FG} = -ax + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad y_{HI} = (1-a)x + \frac{a^2}{2}.$$

Njuno presečišče je točka  $J$ , katere abscisa je  $1/2$  po konstrukciji. Vstavimo to v eno izmed enačb premic in dobimo še njeno ordinato, ki je odvisna od  $a$ :

$$y_J(a) = \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8}.$$

Ker velja  $a \in [0, 1]$ , je ordinata točke  $J$  omejena z  $3/8 \leq y_J \leq 1/2$ . Na sliki 39 je levo prikazan graf funkcije  $y_J(a)$ , na desni pa primerjava ordinat presečišča  $J$  glede na izbran  $a$ . Najnižja vrednost je dosežena pri  $a = 1/2$ , torej če za točko  $E$  izberemo središče daljice  $AD$ , najvišja pa pri  $a \in \{0, 1\}$ , torej pri izbiri oglišč  $A$  oziroma  $D$ .

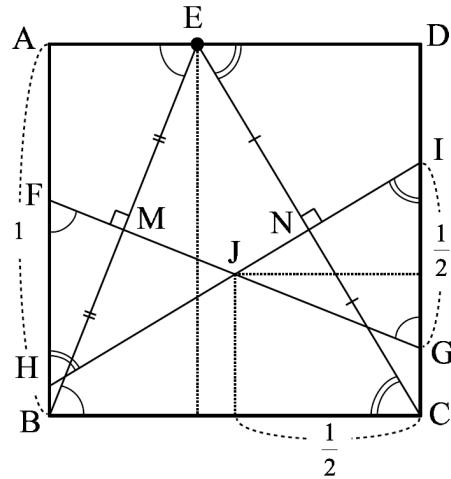


Slika 39: Višina presečišča  $X$ -pregibov glede na absciso izbrane točke  $E$ .

Tu še ni konec – poglejmo si trikotnika  $\triangle FHJ$  in  $\triangle GIJ$  (slika 40). Ker imata enak kot v vrhu  $J$  in sta osnovnici vzporedni, sta podobna, ker pa točka  $J$  razpolavlja pregiba  $FG$  in  $HI$ , sta celo skladna, torej  $|FH| = |GI|$ . Ker sta kraka kotov  $\angle HFJ$  in  $\angle CBE$  paroma pravokotna, sta kota skladna. Na enak način se prepričamo še o skladnosti kotov  $\angle GIJ$  in  $\angle BCE$ . Torej je trikotnik  $\triangle BCE$  podoben trikotnikoma  $\triangle FHJ$  in  $\triangle GIJ$ . Ker je v trikotniku  $\triangle BCE$  njegova višina enako

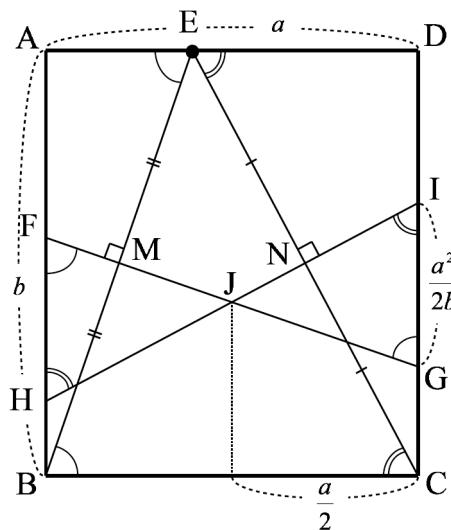
dolga kot osnovica, to velja tudi za ostala trikotnika. Njuna višina je (ker točka  $J$  leži na navpični simetrali kvadrata  $ABCD$ ) enaka  $1/2$ , torej velja

$$|FH| = |GI| = \frac{1}{2}.$$



Slika 40: Dokaz, da  $X$ -pregiba na vertikalnih stranicah kvadrata odrežeta enaka odseka. Vzeto iz [13, str. 41].

Haga lastnosti  $X$ -pregibov raziskuje tudi na pravokotnikih. Izkaže se, da zanje veljajo enake lastnosti razen zadnje – z daljšanjem daljše stranice pravokotnika se namreč (sicer še vedno skladni) daljici  $FH$  in  $GI$  vedno krajšata. Matematični premislek prepuščamo bralcu, skica pa se od kvadratne različice razlikuje le za malo (slika 41).



Slika 41:  $X$ -pregiba v pravokotniku. Vzeto iz [13, str. 44].

## 4 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

Z evklidskimi konstrukcijami se je seveda pojavilo konstruktibilnih ugank – vprašanj, ali sta specifična razdalja ali kot konstruktibilna (in na kakšnen način) ali ne. Stremeli so k iskanju konstrukcij z evklidskim orodjem in če so kakšen problem uspeli rešiti le z neoznačenim ravnalom in šestilom, so te konstrukcije obravnavali kot “boljše rešitve” [36, str. 36]. Grki pa seveda niso delali le s tem orodjem, ampak so se na primer poslužili tudi označenega ravnila<sup>8</sup>, s katerim so lahko rešili probleme, ki jih sicer niso mogli. Zelo znani so trije t. i. “starogrški” problemi, ki so matematike bremenili več kot tisočletje, začenši s časom Evklida (300 pr. Kr.), končno pa sta nanje dokončno odgovorila Niels Henrik Abel (1802–1829) in Evariste Galois (1811–1832) v začetku 19. stoletja. Gre za sledeče tri probleme:

- **Podvojitev kocke** Imejmo že konstruktibilno kocko. Konstruiraj novo kocko, ki ima dvakrat večji volumen od prve (problem se poenostavi na iskanje konstrukcije števila  $\sqrt[3]{2}$ ).
- **Trisekcija kota** Dan je poljuben konstruktibilen kot. Konstruiraj kot, ki prvega deli na tri skladne dele.
- **Kvadratura kroga** Za dan konstruktibilen krog konstruiraj kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog (problem se poenostavi na konstrukcije števila  $\sqrt{\pi}$ ).

Z znanjem, ki sta ga znanosti posredovala Abel in Galois, se da pokazati, da ti trije problemi z evklidskim orodjem niso rešljivi. V knjigi o starogrški matematiki od Talesa do Evklida [15, str. 218–270] je zbrano veliko zamisli in konstrukcij grških matematikov, ki so se ukvarjali s temi tremi problemi in evklidsko orodje ne zadostuje za nobeno od najdenih rešitev.

V nalogi smo do sedaj že večkrat omenili, da pa obstajajo origami konstrukcije (celo več metod za isti problem!), ki nam konstruirajo kubični koren origami števila ter razdelijo kot na tri skladne dele. Vse metode, ki bodo sedaj naštete, zahtevajo uporabo Belochinega pregiba (operacije O7), kar je logično, saj so vse ostale origami operacije dovolj za vse evklidske konstrukcije. Žal pa tudi tu ostajamo nemočni glede konstrukcije števila  $\sqrt{\pi}$ , saj je transcedentno.

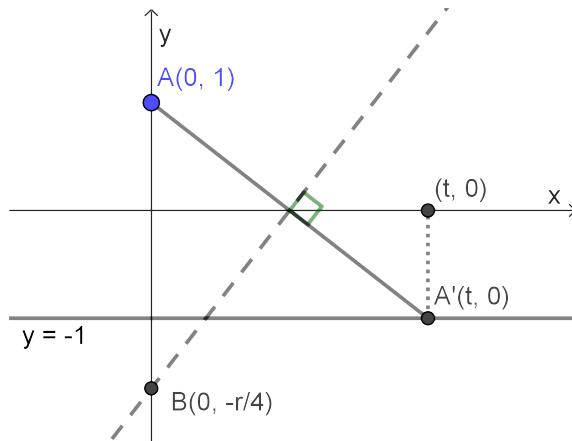
### Konstrukcija števila $\sqrt{r}$

Preden si pogledamo konstrukcijo kubičnega korena, vzemimo origami število  $r \in \mathbb{R}$  in konstruirajmo njegov kvadratni koren (postopek je vzet iz [20, str. 58]).

Imejmo točko  $A(0, 1)$  in premico  $y = -1$ . Na ordinatni osi označimo točko  $B(0, -r/4)$  in z operacijo O6 skoznjo naredimo pregib, ki točko  $A$  položi na premico  $y = -1$ . Njena zrcalna slika je  $A'(t, 0)$  za nek  $t \in \mathbb{R}$  (slika 42).

Pregib po konstrukciji poteka skozi točko  $B$  in razpolovišče daljice  $AA'$ , torej je njegov koeficient  $k_B = \frac{r}{2t}$  (izpeljavo prepuščamo bralcu). Ker je pregib simetrala

<sup>8</sup>Martin v trditvi 10.4 in preko poglavja 9 v [30] dokaže, da so origami števila natanko tista množica števil, ki se jih da konstruirati z ravnalom, ki ima na robu dve oznaki.



Slika 42: Konstrukcija števila  $\sqrt{r}$  za poljuben  $r \in \mathbb{Q}^+$ .

daljice  $AA'$ , njeni nosilci pa imata koeficient  $k_A = -\frac{2}{t}$ , dobimo

$$\begin{aligned} k_B &= -\frac{1}{k_A}, \\ \frac{r}{2t} &= \frac{t}{2}, \\ r &= t^2 \text{ oz. } t = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Na koncu le še prepognemo pravokotnico na abscisno os skozi točko  $A'$  in tako dobimo točko  $(\sqrt{r}, 0)$ . Torej smo konstruirali število  $\sqrt{r}$  za poljuben  $r \in \mathbb{Q}^+$ .

## 4.1 Podvojitev kocke

Po legendi iz grške mitologije je bog Apolon po oraklu prebivalcem svojega rojstnega otoka Delosa sporočil, da mu morajo, če se želijo znebiti smrtonosne kuge, zgraditi nov oltar v obliki kocke, ki je enak prejšnjemu, le da mora biti dvakrat večji po prostornini. Torej je bilo potrebno konstruirati kocko s stranico, ki je za faktor  $\sqrt[3]{2}$  večja od stranice originalne kocke. Po drugi legendi pa naj bi Platon izjavil, da je ta problem, ki so ga prejeli na njegovi Akademiji v Atenah, poslan od bogov samih z namenom osramotiti Grke zaradi njihovega zanemarjanja in prezira do matematike (ker z evklidskim orodjem niso znali konstruirati poljubnih dolžin) [30, str. 29].

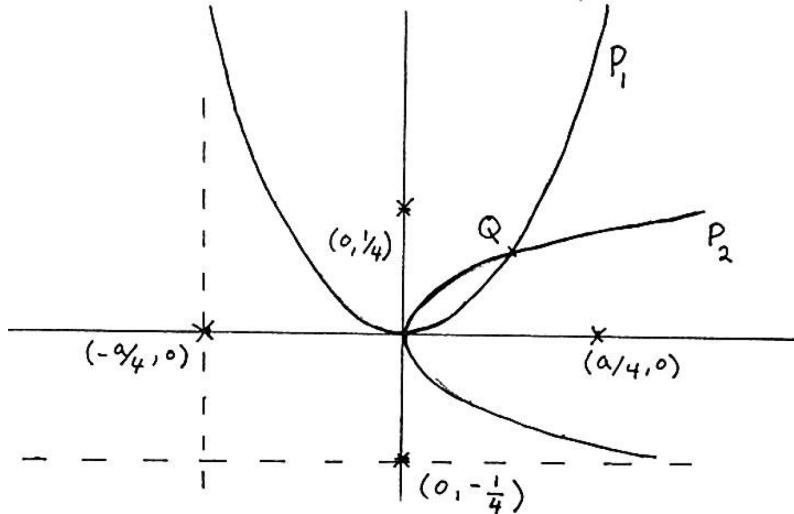
Ne vemo, ali so bili Grki prepričani, da se problema z neoznačenim ravnalom in šestilom ne da rešiti. Vsekakso pa jim je manjkalo algebrsko znanje iz razdelka 2.3.1.

### Starogrška rešitev preko presečišča dveh parabol

Mogoče Grkom ni uspelo priti do tega premisleka, vendar so problem vseeno uspeli rešiti, čeprav po drugi poti; uporabili so še eno močno matematično orodje – stožnice. Videla v [40] dokaže izrek, ki je identičen izreku 2.35 (ki govori, katera števila so origami števila), le da namesto origamija uporabi stožnice. V bistvu s tem dokaže, da so origami konstrukcije ekvivalentne konstrukcijam s stožnicami!

V istem viru Videla tudi navaja konstrukcijo s parabolami, ki za dano dolžino  $a$  podajo dolžino  $c$ , za katero velja  $c^3 = a$ . Njen avtor je Menehmo (prb. 350 pr. Kr.), tutor Aleksandra Velikega. Vzel je sledeči paraboli (slika 43):

- $\mathcal{P}_1 : y = x^2$  z goriščem v točki  $(0, \frac{1}{4})$  in premico vodnico  $y = -\frac{1}{4}$  in
- $\mathcal{P}_2 : x = \frac{y^2}{a}$  z goriščem v točki  $(\frac{a}{4}, 0)$  in premico vodnico  $x = -\frac{a}{4}$ .



Slika 43: Menehmova konstrukcija števila  $\sqrt[3]{2}$  preko parabol. Vzeto iz [40, str. 6].

Presečišči teh dveh parabol dobimo preko enakosti

$$y = x^2 = y^4/a^2,$$

kar nam da enačbo  $y(a^2 - y^3) = 0$  z rešitvama  $y = 0$  in  $y = \sqrt[3]{a^2}$ . Presečišči sta torej koordinatno izhodišče in točka  $Q = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$ . Njena abscisa je naša rešitev.

**Opomba 4.1.** Čeprav je konstrukcija enostavna in logična, je izvedljiva le v teoriji, saj z roko ne znamo natančno risati parabol.

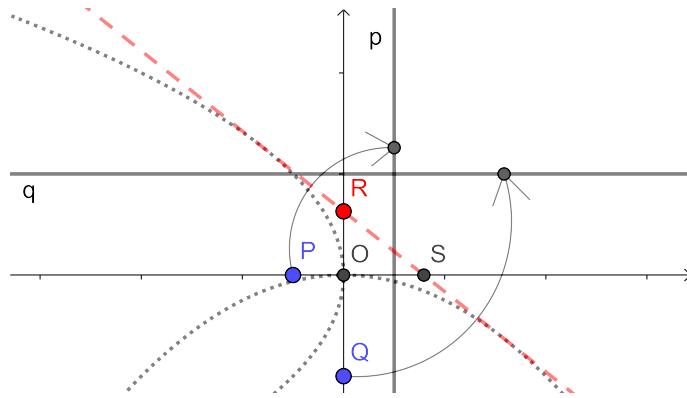
### Martinova konstrukcija

George E. Martin v [30, str. 156–157] poda preprosto konstrukcijo števila  $\sqrt[3]{k}$  za poljubno origami število  $k$ . Tudi on pri tem uporabi dve paraboli, vendar pri postopku potrebujemo le njuni gorišči in premici vodnici. Ne bomo iskali njunih presečišč, temveč bomo z Belochinim pregibom konstruirali njuno skupno tangento, ki nam bo podala željeni rezultat.

Naj bo  $k \in \mathbb{R}$ . Vzemimo paraboli z goriščema v točkah  $P = (-1, 0)$  in  $Q = (0, -k)$  ter premici vodnici  $p : x = 1$  in  $q : y = k$ . Paraboli imata skupno gorišče v koordinatnem izhodišču in sta pravokotni druga na drugo, torej imata eno samo skupno tangento. Prepognimo točko  $P$  na premico  $p$  in točko  $Q$  na premico  $q$ . Pregib seka  $y$ -os v točki  $R$  (slika 44).

**Trditev 4.2.** Točka  $R$  iz zgornje konstrukcije ima koordinate  $(0, \sqrt[3]{k})$ .

*Dokaz.* Označimo z  $O$  koordinatno izhodišče in s  $S$  presečišče pregiba z  $x$ -osjo. Točki  $R$  in  $S$  sta zaradi take izbire gorišč in premic vodnic ravno središči daljic z enim krajiščem v točkah  $P$  in  $Q$  ter drugim krajiščem v njunih slikah. Torej velja



Slika 44: Martinova konstrukcija števila  $\sqrt[3]{k}$ .

$PR \perp RS \perp SQ$ . Zato so trikotniki  $\triangle POR$ ,  $\triangle ROS$  in  $\triangle SOQ$  podobni. Iz tega ob upoštevanju  $|OP| = 1$  in  $|OQ| = k$  dobimo razmerje

$$\frac{|OR|}{|OP|} = \frac{|OS|}{|OR|} = \frac{|OQ|}{|OS|} \implies |OR| = \frac{|OS|}{|OR|} = \frac{k}{|OS|},$$

iz česar sledi

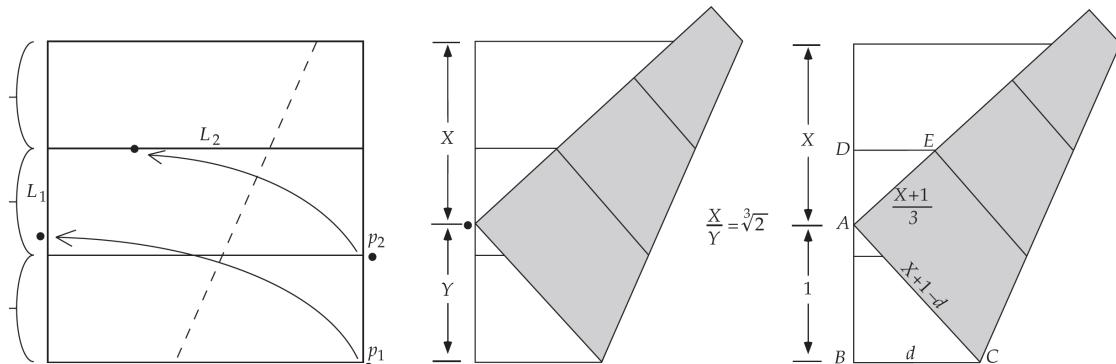
$$|OR|^3 = |OR| \cdot \frac{|OS|}{|OR|} \cdot \frac{k}{|OS|} = k \implies |OR| = \sqrt[3]{k}.$$

□

**Opomba 4.3.** V razdelku 6.2 bomo spoznali konstrukcijo števila  $\sqrt[3]{2}$  preko Belochinega kvadrata, ki je v bistvu poseben primer Martinove konstrukcije.

### Messerjeva konstrukcija

Peter Messer v [31] navaja avtorski postopek, ki sicer ne konstruira števila  $\sqrt[3]{2}$  kot razdaljo, temveč kot razmerje: kvadraten list papirja po horizontali razdelimo na tri dele (to sedaj že znamo storiti) ter točki  $p_1$  in  $p_2$  s prepogibom položimo na premici  $L_1$  in  $L_2$ , kot kaže slika 45 (levo).



Slika 45: Messerjeva konstrukcija razmerja  $\sqrt[3]{2}$ . Vzeto iz [20, str. 67–68].

**Trditev 4.4.** Slika točke  $p_1$  deli levo stranico kvadrata v razmerju  $\sqrt[3]{2}$ .

*Dokaz.* Vpeljimo označke  $X, Y, A, B, C, D, E$  ter  $d = |BC|$ , kot kaže slika 45. Dokazati moramo  $X/Y = \sqrt[3]{2}$ , za lažje računanje pa brez škode privzemimo  $Y = 1$ . Stranica kvadrata je tako dolga  $X+1$ , zato je  $|AC| = X+1-d$  in  $|AE| = (X+1)/3$ .

Opazimo podobna pravokotnika  $\triangle ABC$  in  $\triangle ADE$ . Iz trikotnika  $\triangle ABC$  s pomočjo Pitagorovega izreka izrazimo  $d = (X^2 + 2X)/(2X + 2)$ , preko leve stranice pa še  $|AD| = X - (X+1)/3 = (2X-1)/3$ . Iz podobnosti omenjenih trikotnikov izrazimo razmerje katete in hipotenuze z enačbo  $|BC|/|AC| = |AD|/|AE|$ . Ko vstavimo noter vrednosti, odvisne od  $X$ , dobimo enačbo

$$\frac{X^2 + 2X}{X^2 + 2X + 2} = \frac{2X-1}{X+1},$$

ki se nam poenostavi prav v  $X^3 = 2$ . Torej je  $X = \sqrt[3]{2}$ .  $\square$

**Opomba 4.5.** Lahko bi rekli, da poleg razmerja v primeru  $Y = 1$  Messer konstruira razdaljo  $\sqrt[3]{2}$ , vendar je razdalja  $Y$  odvisna od stranice kvadrata. V tem primeru bi morali vzeti kvadraten list papira s stranico  $1 + \sqrt[3]{2}$ , za kar bi pač potrebovali že konstrukcijo kubičnega korena števila 2. Da bi pri splošnem kvadratnem listu papirja dobili to dolžino, moramo razdalji  $X$  in  $Y$  z origamijem še deliti, to pa že znamo.

## 4.2 Trisekcija kota

Kot  $90^\circ$  znamo tretjiniti z neoznačenim ravnalom in šestilom, saj znamo konstruirati kot  $30^\circ$ . Vem pa že, da ne obstaja konstrukcija, s katero na tri skladne kote razdelimo *poljuben* kot.

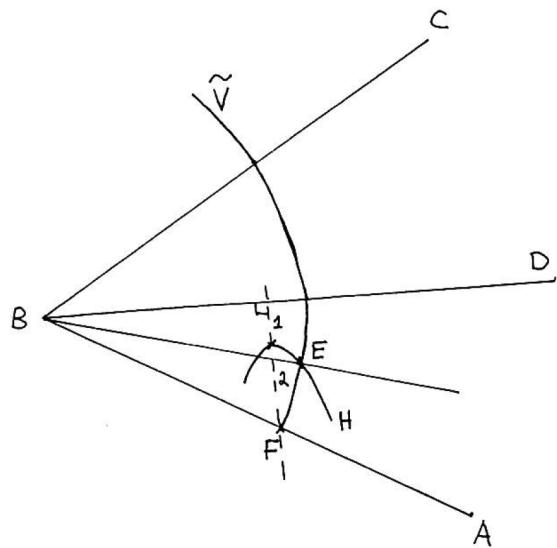
### Starogrška rešitev preko presečišča krožnice in hiperbole

Grki so tudi ta problem uspeli rešiti s stožnicami. Videla v [40, str. 6–7] opisuje Pappusovo konstrukcijo iz 3. stoletja po Kr., ki je tu ne bomo dokazali. Gre za sledeč postopek: Na kraku  $BA$  poljubnega kota  $\angle ABC$  izberemo poljubno točko  $F$  in zarišemo krožnico s središčem v točki  $B$  in polmerom  $BF$ . Naj bo  $BD$  simetrala kota  $\angle ABC$ . Naj bo presečišče krožnice in hiperbole z ekscentričnostjo 2, ki ima gorišče v točki  $F$  in premico vodnico  $BD$ , točka  $E$  (slika 46). Potem poltrak  $BE$  tretjini kot  $\angle ABC$ .

### Abejeva metoda

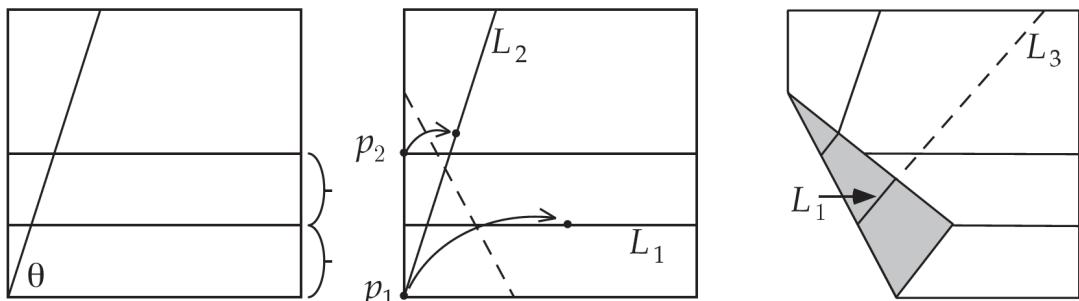
Sledеča metoda ima ime po japonskemu matematiku Hisashiju Abeju, ki jo je odkril v 80-ih letih prejšnjega stoletja. Postopek vključuje Belochin pregib, torej se ga ne da izvesti z evklidskim orodjem, edina pomankljivost metode pa je, da deluje le za ostre kote. Postopek je sledeč:

1. Na kvadratnem listu papirja konstruiramo poljuben kot  $\theta$ , ki ima vrh v spodnjem desnem vogalu in en krak na spodnji stranici. Nato konstruiramo še dva horizontalna in ekvidistančna pregiba na dnu papirja (slika 47 levo).



Slika 46: Pappusova trisekacija kota preko stožnic. Vzeto iz [40, str. 7].

2. Točko  $p_1$  prepognemo na spodnji horizontalen pregib, označen  $L_1$ , točko  $p_2$  pa na pošeiven krak kota, označen z  $L_2$  (slika 47 na sredi).
3. Preden pregib razgrnemo, podaljšamo pregib  $L_1$  do konca in nov pregib označimo z  $L_3$  (slika 47 desno).
4. Papir razgrnemo in tokrat v spodnji levi kot podaljšamo pregib  $L_3$ .



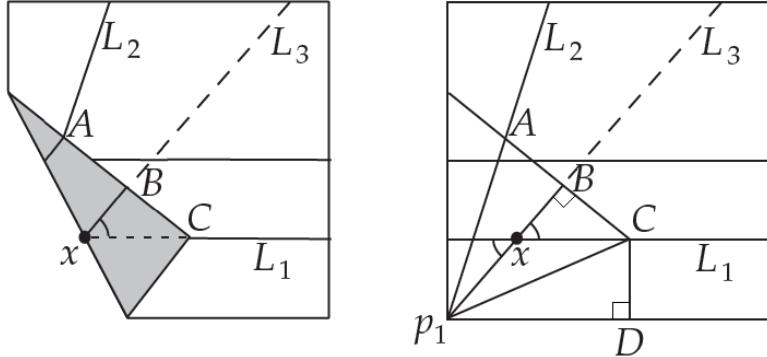
Slika 47: Trisekacija kota po Abejevi metodi. Vzeto iz [20, str. 64].

**Opomba 4.6.** V 3. koraku opravimo pregib še preden smo razgrnili prvega. To je za nas načeloma prepovedana poteza, vendar bi se dalo  $L_3$  konstruirati tudi po klasični poti z enkratnimi prepogibi – označili bi sliko točke, ki leži hkrati na  $L_1$  in levi stranici kvadrata, ter točko v pregibu iz 2. koraka, ki leži na  $L_1$  in skozinju naredili pregib  $L_3$  – zato zaradi lažje izvedbe brez škode dopustimo tak postopek.

**Trditev 4.7.** *Pregib  $L_3$  poteka skozi točko  $p_1$ . Kot s krakoma  $L_2$  in  $L_3$  ter vrhom v točki  $p_1$  je velik  $\theta/3$ .*

**Posledica 4.8.** *Ko spodnji rob kvadrata prepognemo na pregib  $L_3$ , razdelimo kot  $\theta$  na tri skladne kote.*

*Dokaz.* Posledica logično sledi, zato dokazujemo le trditve. Označimo z  $x$  točko, ki leži na presečišču pregiba  $L_1$  in pregiba iz 2. koraka Abejeve metode. Z  $A, B$ , in  $C$  označimo še slike točk z leve stranice kvadrata, kot kaže slika 48. Ker je točka



Slika 48: Dokazovanje Abejeve metode. Vzeto in predelano iz [20, str. 65].

$C$  slika točke  $p_1$  in  $x$  leži na  $L_1$ , daljica  $xC$  leži na  $L_1$ . Po konstrukciji daljica  $xB$  leži na  $L_3$ , zato sta kota ob  $x$ , ko papir razgrnemo, skladna. Zaradi sovršnosti kotov daljica  $p_1x$  leži na  $L_3$ , s čimer je prvi del trditve dokazan.

Na razgrnjenu papirju zarišemo (ali prepognemo) še nekaj daljic (slika 48 desno). Ker velja  $|AB| = |BC| = |CD|$  in imata pravokotna trikotnika  $\triangle p_1AB$  in  $\triangle p_1BC$  skupno še drugo kateto, trikotnika  $\triangle p_1BC$  in  $\triangle p_1CD$  pa skupno hipotenizo, so vsi trije trikotniki skladni z enakim kotom v točki  $p_1$ , torej nam pregiba skozi daljici  $p_1B$  (kar je ravno  $L_3$ ) in  $p_1C$  kot  $\theta$  razdelijo na tri skladne kote.  $\square$

Ker ta postopek deluje le za ostre kote, si poglejmo naslednjo metodo, ki jo lahko uporabljamo tako za ostre kot tudi tope kote.

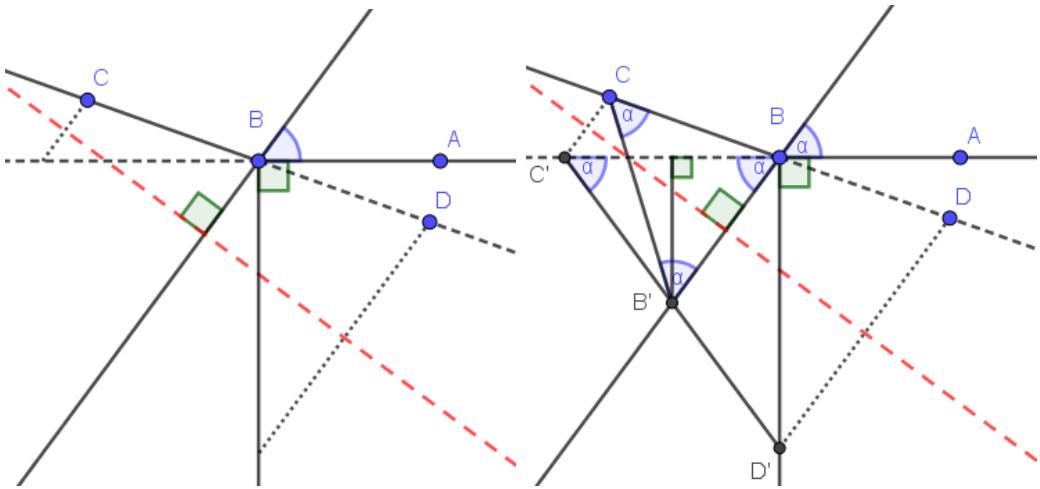
### Justinova metoda

Francoski matematik Jacques Justin za svojo metodo trisekcije ne zahteva kvadratnega lista papirja, ampak je dovolj kakršenkoli list. Lang v [26, str. 34] takole navaja njegovo konstrukcijo:

Na sredo narišemo poljuben kot  $\angle ABC$  (oster ali top) in njuna kraka podaljšamo skozi vrh  $B$ . Skozi vrh konstruiramo poltrak, pravokoten na krat  $BA$ . Točko  $C$  prezrcalimo čez vrh v točko  $D$  ter nato obe točki prepognemo na nosilko kraka  $BA$  in ravno konstruirano pravokotnico, kot kaže slika 49 (levo). Nazadnje na Belochin pregib konstruiramo še pravokotnico skozi točko  $B$ .

**Trditev 4.9.** *Kot, ki v točki  $B$  oklepata zadnja pravokotnica iz zgornje konstrukcije in krak  $BA$ , je tretjina kota  $\angle ABC$ .*

*Dokaz.* Označimo z  $\alpha$  kot iz trditve. Naj bosta točki  $C'$  in  $D'$  slike točk  $C$  in  $D$ , točka  $B'$  pa presečišče daljice  $C'D'$  s pravokotnico iz trditve. Po konstrukciji Belochinega pregiba je daljica  $C'D'$  slika daljice  $CD$ , torej je točka  $B'$  slika točke  $B$ . Točka  $B'$  je tako središče daljice  $C'D'$  in zato je vzporednica k poltraku  $BD'$  skozi točko  $B'$  simetrala daljice  $C'B$ . Trikotnik  $\triangle C'B'B$  je tako enakokrak in velja  $\angle C'BB' = \angle B'C'B = \alpha$ .



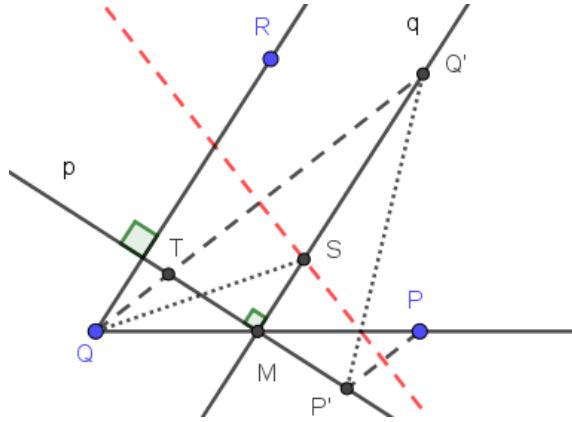
Slika 49: Justinova trisekcija kota (levo) in njen geometrijski dokaz (desno).

Ker sta trikotnika  $\triangle C'B'B$  in  $\triangle CBB'$  zaradi simetričnosti glede Belochin pregib skladna, velja tudi  $\angle B'CB = \angle CB'B = \alpha$ . Iz vsote notranjih kotov trikotnike  $\triangle CB'B$  sledi  $\angle C'BC = 180^\circ - 3\alpha$ , torej je  $\angle ABC = 180^\circ - \angle C'BC = 3\alpha$ .  $\square$

### Martinovi konstrukciji za trisekcijo ostrega kota

George E. Martin v [30, poglavje 10] navaja še dve metodi za trisekcijo ostrega kota.

Pri prvi vzamemo oster kot  $\angle PQR$  in s točko  $M$  označimo središče doljice  $PQ$ . Skozi  $M$  konstruiramo pravokotnico  $p$  na  $QR$ , nato pa še pravokotnico na  $p$ . Opravimo tisti Belochin pregib (od treh možnih), ki seka doljico  $PM$  in točko  $Q$  položi na premico  $q$  (v točko  $Q'$ ), točko  $P$  pa na premico  $p$  (v točko  $P'$ ). S  $T$  označimo presečišče doljice  $QQ'$  s premico  $p$  in s  $S$  presečišče pregiba s premico  $q$  (slika 50).



Slika 50: Martinov postopek za trisekcijo kota iz [30, str. 154].

**Trditev 4.10.** *Doljici  $QT$  in  $QS$  tretjinita kot  $\angle PQR$ .*

*Dokaz.* Ker velja  $|QM| = |MP|$ ,  $\angle PMP' = \angle TMQ$  in  $QT \parallel PP'$ , sta trikotnika  $\triangle QMT$  in  $\triangle PMP'$  skladna in je  $|TM| = |MP'|$ . Potem sta skladna tudi pravokotna trikotnika  $\triangle TMQ'$  in  $\triangle P'MQ'$ , zato je  $\angle MQ'P' = \angle TQ'M = \angle RQQ'$  (zaradi

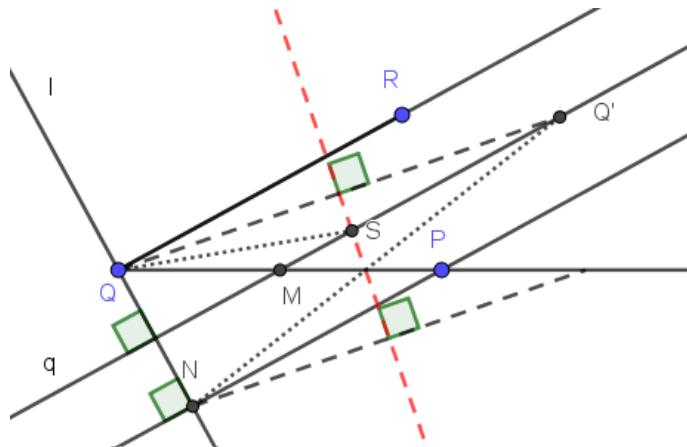
izmeničnih kotov ob vzporednicah  $QR$  in  $q$ ) =  $\angle Q'QS$  (ker je trikotnik  $\triangle QSQ'$  enakokrak).

Bralec se lahko hitro prepriča, da daljica  $Q'P'$  seka pregib ravno v njegovem presečišču z daljico  $MP$  (vsi koti ob tem presečišču so zaradi konstrukcija pregiba in sovršnosti skladni). Zato velja še  $\angle PQQ' = \angle P'Q'Q$ , iz česar sledi

$$\angle MQS = \angle SQT = \angle TQR.$$

□

Druga metoda je prvi zelo podobna. Zopet vzamemo oster kot  $\angle PQR$  in s točko  $M$  označimo središče doljice  $PQ$ . Naj bo  $l$  pravokotnica na  $QR$  skozi točko  $Q$ , točka  $N$  nožišče pravokotnice na premico  $l$  skozi točko  $P$ , s  $q$  označimo pa še pravokotnico na premico  $l$  skozi točko  $M$ . Opravimo tisti Belochin pregib, ki točko  $Q$  položi na premico  $q$  (v točko  $Q'$ ) in točko  $N$  na poltrak  $QR$ . Naj bo točka  $S$  presečišče pregiba s premico  $q$  (slika 51).



Slika 51: Martinov postopek za trisekcijo kota iz [30, str. 158–159].

**Trditev 4.11.** Daljici  $QQ'$  in  $QS$  tretjinita kot  $\angle PQR$ .

*Dokaz.* Zopet premislimo, da se pregib, poltrak  $QP$  in daljica  $NQ'$  sekajo v isti točki. Zato je  $\angle QQ'N = \angle PQQ'$ . Zaradi vzporednosti kraka  $QR$  in premice  $q$  sta skladna tudi izmenična kota  $\angle RQQ'$  in  $\angle QQ'S$ , z njima pa je zaradi enakokrakosti trikotnika  $\triangle QSQ'$  skladen tudi kot  $\angle SQQ'$ .

Ker velja  $|QM| = |MP|$  in  $q \parallel NP$ , je premica  $q$  simetrala doljice  $QN$ , torej tudi simetrala kota  $\angle QQ'N$ . Iz tega sledi

$$\angle MQS = \angle SQQ' = \angle Q'QR.$$

□

## 5 Pregibanje tangent na stožnice

Iz didaktičnega vidika zelo zanimivo poglavje nam predstavlja konstrukcije tangent na stožnice s prepogibanjem papirja. Vsebina je tu predstavljena tako, da je bralec najprej povabljen, da vzame list papirja in ga prepogiba po navedenih korakih. Po opažanju, kaj se na papirju pri tem prikaže, preidemo na matematični del, kjer dokažemo, da so prepogibi res tangente na določeno stožnico.

Učitelji matematike so povabljeni, da si pri obravnavi stožnic vzamejo čas in izvedejo spodnje aktivnosti. Dijaki bodo z veliko verjetnostjo presenečeni nad rezultati zgibanja, kar jih lahko bolj motivira za obravnavo geometričnih lastnosti stožnic. Priporočljiva je tudi izvedba ure v računalniški učilnici, kjer lahko vsak dijak z ustreznim programskim orodjem (npr. Geogebra) sam poskusi zgraditi opisano konstrukcijo. S tem lahko znanje o stožnicah le še bolj utrdi.

Z origamijem ne moremo konstruirati gladkih krožnih lokov. Kljub temu pa lahko z upoštevanjem določenih korakov konstruiramo premice, ki so tangentne na neko krivuljo. Več takih tangent nam poda nekakšno lomljenko, če pa bi konstrukcije pregibov ponavljali v nedogled, bi teoretično v limiti res dobili gladko krivuljo.

**Definicija 5.1.** Naj bo dana družina krivulj s parametrizacijo  $F(t, x, y) = 0$ , kjer je  $t$  njen parameter in  $F$  diferenciabilna za vsak  $t$ . *Ovojnica* te družine je krivulja, ki je tangentna na vsako krivuljo iz družine v neki točki, unija točk tangentnosti pa je ravno cela ovojnica.

**Opomba 5.2.** Vsaka krivulja iz družine mora biti diferenciabilna in med krivuljami mora biti gladek prehod ([kako to bolj strokovno napisat?](#)). Vendar to ni zadosten pogoj, da ovojnica te družine družine obstaja – protiprimer je družina krožnic s skupnim središčem in polmerom, ki se zvezno povečuje [42]. Ovojnica je dana kot rešitev enačb

$$F(t, x, y) = 0 \text{ in } \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, y) = 0,$$

kjer je  $\partial F / \partial t$  parcialni odvod funkcije  $F$  po parametru  $t$  ([A to lahko pustim kot dejstvo ali moram raziskati, s kje to pride?](#)).

**Opomba 5.3.** Ker so pregibi ravni, bodo v našem primeru krivulje v družini kar premice. Te premice so torej ravno tangente na ovojnico te družine.

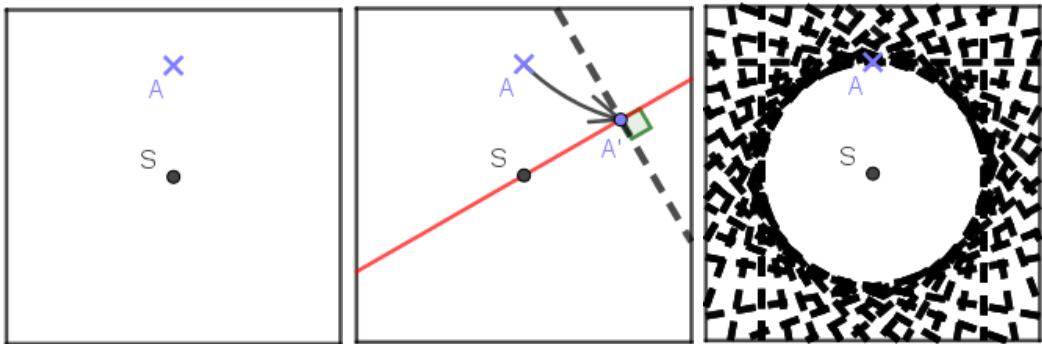
Pa si poglejmo, kako s prepogibi dobimo tangente na vse štiri stožnice.

### 5.1 Krožnica

**Aktivnost:** Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredi označi točko  $S$ . Nato drugje označi še točko  $A$ . Skozi točko  $S$  prepogni poljubno premico in na njej označi točko  $A'$ , da velja  $|SA| = |SA'|$ . Nato skozi točko  $A'$  prepogni pravokotnico na premico  $SA'$ . To je iskan pregib. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro premice skozi točko  $S$  (gl. sliko 52). Kaj opaziš?

**Opomba 5.4.** V podpoglavlju 2.2.2 smo se naučili prenašati razdalje, zato je zgornja konstrukcija mogoča, zahteva pa še nekaj dodatnih vmesnih pregibov (gl. dokaz trditve 2.10).

Iz konstrukcije pregiba kot pravokotnice na premico  $SA'$  skozi točko  $A'$  je naslednja trditev očitna in ne potrebuje zapisanega dokaza.



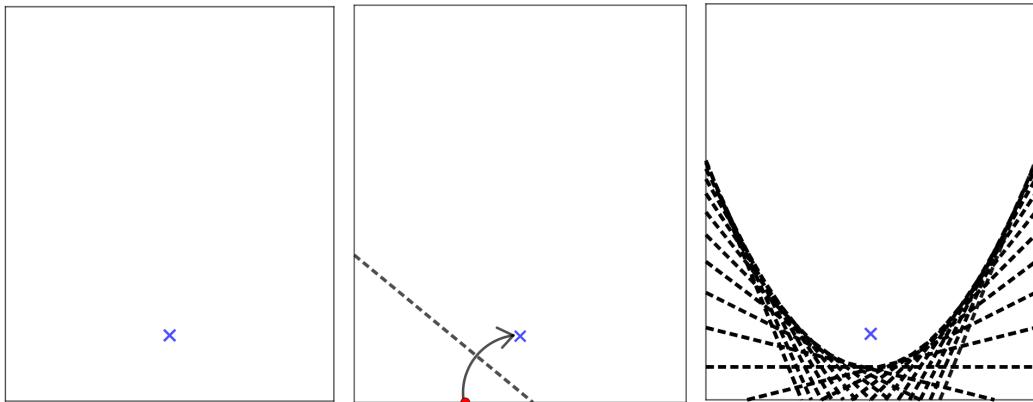
Slika 52: Sukanje izbrane točke okoli središča.

**Trditev 5.5.** Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na krožnico s središčem v točki  $S$  in polmerom  $SA$ .

Za različno izbiro premic skozi točko  $S$  dobimo različne tangente. S ponavljanjem konstrukcije tangent v neskončnost dobimo družino tangent, katere ovojnica je krožnica s središčem v točki  $S$  in polmerom  $SA$ .

## 5.2 Parabola

**Aktivnost:** Vzemi pravokoten list papirja in svinčnik ter nekje sredi spodnje polovice lista s pisalom označi točko. Nato si izberi točko še na spodnji stranici lista in ga prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na spodnji stranici papirja (gl. sliko 53). Kaj opaziš?



Slika 53: Prepogibanje spodnje stranice papirja na izbrano točko.

Omenjen pregib je origami operacija O3, lahko pa nanjo gledamo tudi kot na operacijo O6. Za le-to smo v poglavju 2 že premislili, da nam pregib, ki poteka skozi dano točko  $B$  in točko  $A$  položi na premica  $a$ , poda tangento na parabolo z goriščem  $A$  in premico vodnico  $a$  (gl. sliko 5 in premislek nad njo). Tukaj pa take točke  $B$  ni, kar pomeni le to, da smo s pregibom konstruirali neko tangentno – pregib je namreč simetrala daljice, ki ima za krajišči obe izbrani točki iz navodila aktivnosti, torej obstaja točka (točka  $P$  na sliki 5), ki je enako oddaljena od spodnje stranice lista in prve izbrane točke. Nadaljni premislek, da je to edino presečišče pregiba in parbole, je enak kot prej. Spodnja trditev je tako že dokazana.

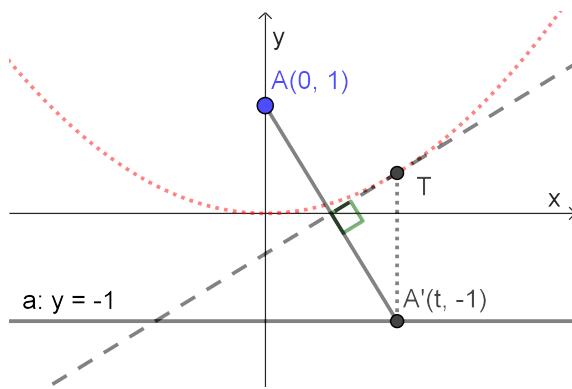
**Trditev 5.6.** Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na parabolo z goriščem v izbrani točki in premico vodnico, ki jo predstavlja spodnja stranica lista.

Ker je vsak pregib tangenten na isto parabolo, je obris, ki bi nastal po neskončno pregibih, res ta parabola.

To je bil intuitiven premislek. Poglejmo si, kako lahko to dokažemo na bolj matematični način.

### Parametrizacija pregibov

Začnimo kar s parametrizacijo družine konstruiranih pregibov. V ta namen v model poljubne točke in spodnje stranice lista vpeljimo nekaj oznak. Naj bo  $c \in \mathbb{O}$ . Vzemimo točko  $A(0, c)$  in premico  $a : y = -c$ , ki sta origami-konstruktibilni, in naredimo pregib, ki točko  $A$  preslika na premico  $a$  v točko  $A'(t, -c)$  za nek  $t \in \mathbb{R}$  (slika 54 v primeru  $c = 1$ ).



Slika 54: Pregib točke  $A(0, 1)$  na premico  $a : y = -1$  (primer za  $c = 1$ ).

Ker je pregib oz. konstruirana premica simetrala daljice  $AA'$ , lahko hitro določimo njeno enačbo. Koeficient nosilke daljice  $AA'$  je  $k_A = -\frac{2c}{t}$ , središče pa  $(\frac{t}{2}, 0)$ . Tako hitro določimo enačbo pregiba:

$$y = \frac{t}{2c}x - \frac{t^2}{4c}. \quad (5.1)$$

Dobili smo iskanou parametrizacijo družine pregibov z enačbo

$$F(t, x, y) = \frac{t}{2c}x - y - \frac{t^2}{4c} = 0.$$

Za vsak  $t \in \mathbb{R}$  torej dobimo drugo tangento na parabolo z goriščem v točki  $A$  in premico vodnico  $a$  z zgornjo enačbo 5.1. Izrazimo sedaj enačbo ovojnice preko sistema enačb iz opombe pod definicijo 5.1. Iz enačbe  $(\partial/\partial t)F(t, x, y) = 0$  dobimo  $x/2c - 0 - 2t/4c = 0$  oz.  $t = x$ . Ko  $t$  vstavimo v enačbo  $F(t, x, y) = 0$ , dobimo

$$y = \frac{x^2}{4c}, \quad (5.2)$$

torej je ovojnica res parabola. Preden gremo na naslednji način dokaza, si poglejmo še vpliv parametra  $c$  na parabolo. Razdalja med njenim goriščem in premico vodnico je  $2c$  in iz enačbe 5.2 je razvidno, da bo z manjšanjem  $c$  parabola vedno ožja.

## Drugi dokazi

Njeno enačbo lahko dobimo tudi brez definicije ovojnice. Ker so vse točke na pregibu enako oddaljene od točk  $A$  in  $A'$ , na pregibu obstaja le ena točka  $T$ , za katero velja  $d(T, A) = d(T, a)$ . Njena abscisa je  $x = t$  (točka  $T$  leži na pregibu točno nad točko  $A'$ , gl. sliko 54) in iz enačbe 5.1, dobimo še ordinato  $y = t^2/(4c)$ . Ker točka  $T$  za vsak  $t \in \mathbb{R}$  leži na paraboli, pri menjavi  $x = t$  dobimo ravno enačbo 5.2.

Hull v [20, str. 55–56] poda prefijen dokaz preko kvadratne formule. Vemo, da pregib O6 ne obstaja vedno (slika 4 desno). Poglejmo, ali obstajajo v ravnini našega modela kakšne točke, skozi katere ne moremo konstruirati pregiba oz. tangente. Vzemimo našo parametrizacijo družine tangent (enačba 5.1) in jo rešimo za  $t$ . Dobljena formula nam pove, za katere vrednosti  $t$  pregib poteka skozi točko  $(x, y)$ :

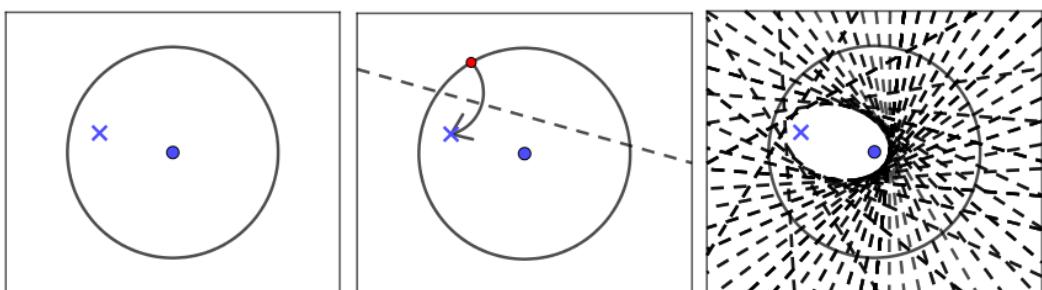
$$\frac{1}{4c}t^2 - \frac{x}{2c}t + y = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\frac{x}{2c} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4c^2} - \frac{y}{c}}}{\frac{1}{2c}}.$$

Enačba ima dve realni rešitvi pri pogoju  $x^2/4c^2 - y/c > 0$  oziroma  $y < x^2/4c$ , kar pomeni, da vsako točko  $(x, y)$ , za katero ta pogoj velja, sekata dva pregiba. To so ravno točke pod parabolo  $y = x^2/4c$ . Za točke na paraboli velja  $y = x^2/4c$ , iz česar dobimo eno rešitev  $t = x$ , torej to točko seka natanko en pregib. Nazadnje nam ostane še območje, za katerega velja  $y > x^2/4c$ , t. j. območje nad parabolo  $y = x^2/4c$ , kar nam ne poda realnih rešitev za  $t$ , torej ga ne seka noben izmed konstruiranih pregibov. Tako je obris, ki ga dobimo v nalogi, res parabola  $y = x^2/4c$ .

Aktivnosti za naslednji dve podpoglavlji sta enaki kot v tem, le da namesto spodnje stranice lista v izbrano točko prepogibamo krožnico.

## 5.3 Elipsa

**Aktivnost:** Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njeno središče. Na notranji strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekrijeta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 55). Kaj opaziš?



Slika 55: Prepogibanje krožnice na izbrano točko znotraj nje.

**Opomba 5.7.** Za izris poljubne krožnice tu lahko uporabimo šestilo. Prej smo videli, da znamo lomljeno krožnico prepogniti tudi z origamijem, vendar imamo potem na listu papirja veliko pregibov, ki nam ovirajo pogled na ciljno sliko. Zato je uporaba šestila v ta namen dovoljena predvsem iz praktičnega vidika.

Izgleda, kot da se nam izriše elipsa, ki ima za gorišči središče krožnice in izbrano točko znotraj nje. Spomnimo se, da na elipsi ležijo vse točke, katerih vsota razdalj do obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi (t. j. dvakratnik velike polosi). V našem primeru je elipsa natančno določena, kar nam pove naslednja trditev [20, str. 60–61].

**Trditev 5.8.** *Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na elipso z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo, enako polmeru izbrane krožnice.*

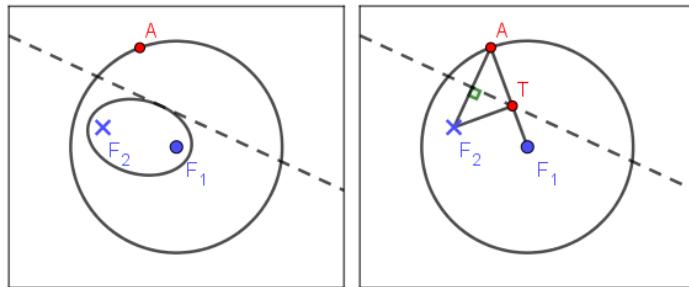
*Dokaz.* Naj bo točka  $F_1$  središče krožnice s polmerom  $r$  in točka  $F_2$  poljubna točka znotraj krožnice. Potem je elipsa, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako  $r$ , natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko  $A$  (slika 56 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to elipso.

Označimo s  $T$  presečišče<sup>9</sup> pregiba in daljice  $AF_1$  (slika 56 desno). Ker je pregib simetrala daljice  $AF_2$ , velja  $|TA| = |TF_2|$ , torej je

$$|TF_1| + |TF_2| = |TF_1| + |TA| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke  $A$ . Ker je  $r$  velika os elipse, točka  $T$  leži na njej.

Pokažimo še, da je pregib tangenten na elipso. Opazimo, da so vsi trije koti z vrhom v točki  $T$ , ki imajo za enega od krakov pregiba, skladni. Značilnost tangent na elipso pa je ravno ta, da se žarek, ki ga izstrelimo iz enega gorišča v rob elipse, vedno pod istim kotom odbije v drugo gorišče. Torej je pregib tangenten na dano



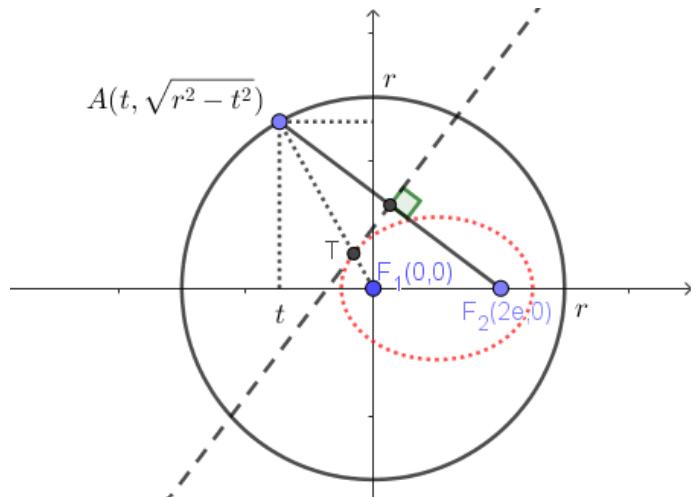
Slika 56: Dokaz tangentnosti pregibov na elipso.

elipso v točki  $T$ . □

### Parametrizacija pregibov

Poščimo še parametrizacijo teh pregibov in izračunajmo enačbo njihove ovojnice – želimo si dobiti enačbo elipse. Naj bo točka  $F_1 = (0, 0)$  središče krožnice z danim polmerom  $r$  in  $F_2 = (2e, 0)$  neka točka znotraj krožnice za nek  $0 < 2e < r$  (slika 57). Brez škode za splošnost naj bo  $A$  točka na zgornjem loku krožnice, torej  $A = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$  za nek  $t \in [-r, r]$ .

<sup>9</sup>Presečišče vedno obstaja, saj bi v primeru, da bi točki  $A$  in  $F_1$  ležali na isti strani prepogiba, veljalo  $|AF_1| \geq |F_2F_1|$  oziroma da točka  $F_2$  leži na ali zunaj krožnice (kar po predpostavki ne drži).



Slika 57: Parametrizacija pregiba točke  $A$  na točko  $F_2$ .

Z daljico povežemo točki  $A$  in  $F_2$  in določimo njen središče v točki  $((2e + t)/2, \sqrt{r^2 - t^2}/2)$ , koeficient njene nosilke pa je  $-\sqrt{r^2 - t^2}/(2e - t)$ . Enačba pregiba je tako

$$y = \frac{2e - t}{\sqrt{r^2 - t^2}}x - \frac{(4e^2 - t^2)}{2\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{2}.$$

Iskana parametrizacija družine pregibov ima zato enačbo

$$F(t, x, y) = \frac{2e - t}{\sqrt{r^2 - t^2}}x - y - \frac{(4e^2 - t^2)}{2\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{2} = 0. \quad (5.3)$$

Iz enačbe  $(\partial/\partial t)F(t, x, y) = 0$  dobimo<sup>10</sup>  $t = 2r^2x/(r^2 + 4ex - 4e^2)$ . (To sem dala v Wolfram, a je potrebno priflikat kakšen screenshot za dokaz, da mi bojo verjeli?) Vstavimo  $t$  še v enačbo  $F(t, x, y) = 0$  in po nekaj dela res dobimo

$$\frac{(x - e)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{r^2 - 4e^2}{4}} = 1,$$

kar ustreza začetni izbiri točk  $F_1$  in  $F_2$  ter polmera  $r$ .

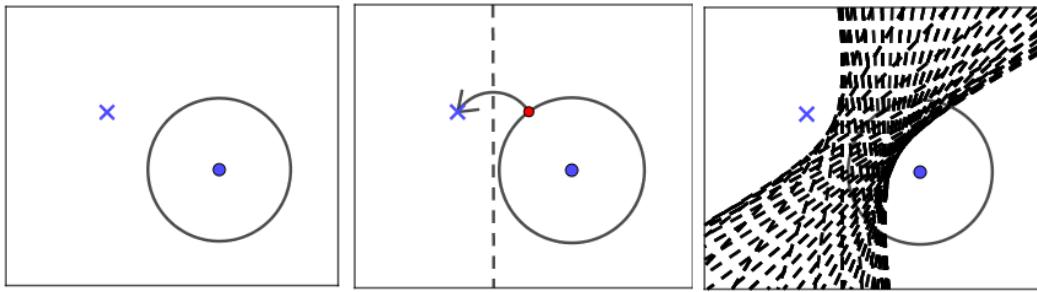
Kaj se zgodi, če točko izberemo zunaj krožnice, pa si pogledamo v naslednjem razdelku.

## 5.4 Hiperbola

**Aktivnost:** Vzemi list papirja in svinčnik ter na sredini nariši poljubno krožnico. Označi njen središče. Na zunanj strani krožnice si izberi poljubno točko. Izberi si točko na krožnici in list prepogni tako, da se obe izbrani točki prekriveta. To ponovi čimvečkrat za različno izbiro točke na krožnici (gl. sliko 58). Kaj opaziš?

Podobno kot prej lahko sklepamo, da se nam izriše obris hiperbole. Spomnimo se, da na hiperboli ležijo vse točke, katerih absolutna vrednost razlike razdalj do

<sup>10</sup>Za računanje in poenostavitev izrazov priporočamo uporabo kalkulatorja npr. Wolfram Mathematica.



Slika 58: Prepogibanje krožnice na izbrano točko zunaj nje.

obeh gorišč je konstantna in enaka dolžini velike osi. Tako kot pri elipski je tudi tu hiperbola natančno določena. Naslednja trditev in dokaz sta zato zelo podobna kot za elipso.

**Trditev 5.9.** Konstrukcija iz zgornje aktivnosti nam poda pregib, ki je tangenten na hiperbolo z goriščema v obeh izbranih točkah in veliko osjo (t. j. dvakratnik velike polosi), enako polmeru izbrane krožnice.

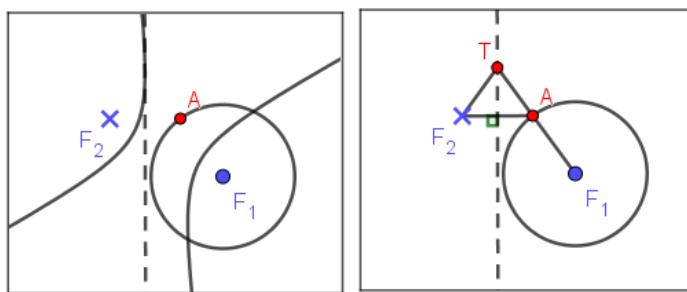
*Dokaz.* Naj bo točka  $F_1$  središče krožnice s polmerom  $r$  in točka  $F_2$  poljubna točka zunaj krožnice. Potem je hiperbola, ki ima ti dve točki za svoji gorišči in veliko os enako  $r$ , natančno določena. Po navodilih iz aktivnosti konstruiramo en pregib, pri čemer na krožnici izberemo poljubno točko  $A$  (slika 59 levo). Dokazujemo, da je tangenten na to hiperbolo.

Označimo s  $T$  presečišče<sup>11</sup> pregiba in nosilke daljice  $AF_1$  (slika 59 desno). Ker je pregib simetrala daljice  $AF_2$ , velja  $|TF_1| = |TF_2|$ , torej je

$$||TF_1| - |TF_2|| = ||TF_1| - |TA|| = |F_1A| = r$$

za vsako izbiro točke  $A$ . Ker je  $r$  velika os hiperbole, točka  $T$  leži na njej.

Pokažimo, da je to res tangentna. Ker je pregib simetrala  $F_2A$ , prepolavlja kot  $\angle ATF_2$ , ki je enak kotu  $\angle F_1TF_2$ . Torej pregib skozi točko  $T$  na hiperboli prepolavlja kot, ki ga ta točka oklepa z goriščema, to pa je ravno značilnost tangent na hiperbolo (zase: pokazi de je to rejs).



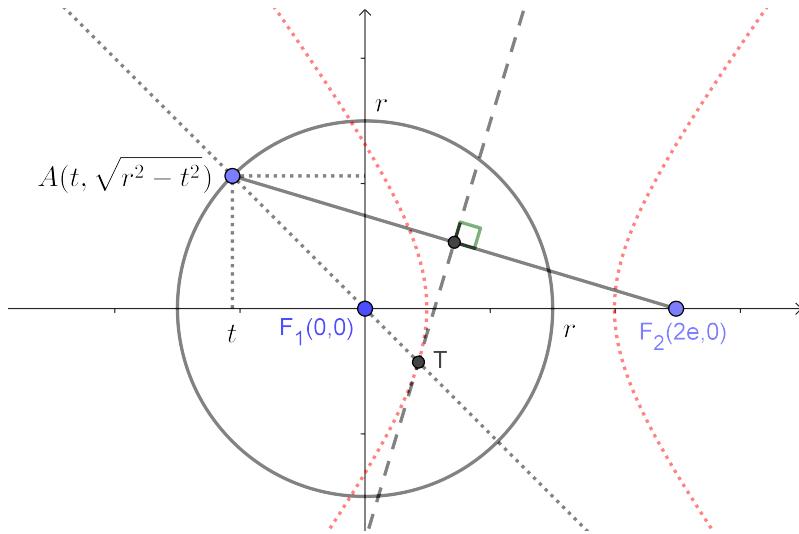
Slika 59: Dokaz tangentnosti pregibov na hiperbolo.

Torej je pregib tangenten na dano hiperbolo v točki  $T$ . □

<sup>11</sup>Presečišče ne obstaja le v dveh primerih, ko je nosilka daljice  $AF_2$  tangentna na krožnico (pregib in nosilka  $AF_1$  sta vzporedni). V tem primeru sta pregiba ravno asymptoti na hiperbolo.

## Parametrizacija pregibov

Določimo še parametrizacijo družine pregibov. Postopek je identičen kot pri parametrizaciji tangent na elipso, edina sprememba je le, da tu velja  $0 < r < 2e$ . Ko v ravnino uvedemo točke, daljice in premice kot zgoraj (slika 60), dobimo enako parametrizacijo družine pregibov (enačba 5.3).



Slika 60: Parametrizacija pregiba točke  $A$  na točko  $F_2$ .

Ker velja  $r^2 - 4e^2 < 0$ , v končni enačbi namesto tega zapišemo  $-(-(r^2 - 4e^2))$  in prvi minus postavimo pred  $y^2$ . Tako res dobimo enačbo hiperbole, ki ima enaki osi kot elipsa iz prejšnjega razdelka:

$$\frac{(x - e)^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{4e^2 - r^2}{4}} = 1.$$

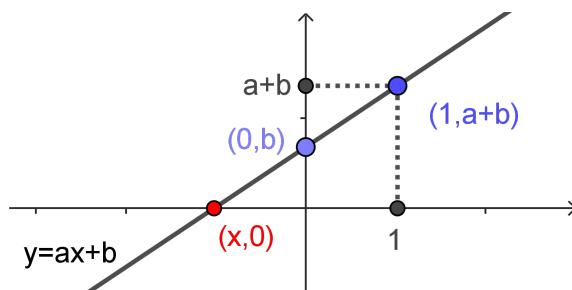
## Dokazi v drugih virih

Dokaz, kjer se izračuna splošno enačbo elipse in hiperbole glede na izbrano krožnico in točko znotraj oz. zunaj nje najdemo tudi v [37, str. 204–206]. Tudi Lotka v [29] iz opisane konstrukcije izpelje splošno enačbo elipse in nastavi popravek, ki nam da splošno enačbo hiperbole. S tem oba dokažeta, da je ogrinjača teh pregibov res elipsa oz. hiperbola.

## 6 Reševanje enačb

V tem poglavju s prepogibanjem papirja rešujemo enačbe z racionalnimi koeficienti. Njihove rešitve bomo konstruirali v evklidski ravnini, ki jo predstavlja list papirja. Spomnimo se, da smo origami števila definirali kot vsa števila, ki jih lahko s prepogibanjem konstruiramo preko na začetku danega izhodišča  $O$  in števila 1 na realni osi (definicija 2.25), evklidska ravnina pa je v bijekciji s kompleksno ravnino, dano v definiciji. Zaradi večje preglednosti bomo lahko pomožne pregibe in točke (ki bi jih sicer znali konstruirati z origamijem, npr. zrcaljene točke) narisali kar z ravnalom in pisalom.

Začnimo z najbolj osnovno, tj. linearno enačbo. Enačba  $ax + b = 0$ , kjer  $a, b \in \mathbb{Q}$  in  $a \neq 0$  ima rešitev  $x = -b/a$ , ki je racionalno število, torej origami število in samo po sebi konstruktibilno. Če bi želeli rešitev konstruirati geometrijsko preko pregibov, v ravnini prepognemo premico  $y = ax + b$  (napravimo pregib npr. skozi točki  $(0, b)$  in  $(1, a+b)$ ) in njeno presečišče z abscisno osjo nam da iskano rešitev (slika 61).



Slika 61: Reševanje linearne enačbe  $ax + b = 0$ . Abscisa rdeče točke je iskana rešitev.

Uporaba origamija je za reševanje linearne enačbe očitno manj praktična kot računanje rešitve. Bolj zanimivo je reševanje kvadratne in kubične enačbe. Ker za njune rešitve obstajata splošni formuli, bi lahko rešitve najprej izračunali in nato preko operacij seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in korenjenja konstruirali s prepogibanjem, vendar je to časovno preveč potratno. Pogledali si bomo, kako se z origamijem lahko temu izognemo in rešitev konstruiramo brez uporabe računskih operacij.

Ključno vlogo bosta v nadaljevanju odigrali origami operaciji O6 in O7. Prva nam hkrati s konstrukcijo tangente na parabolo določi tudi točko na paraboli, skozi katero je pregib tangenten na stožnico, to pa je ekvivalentno reševanju kvadratne enačbe. Druga s konstrukcijo skupne tangente na dve paraboli omogoča reševanje kubične enačbe – to pokaže npr. Alperin v [1, str. 129], ko izpelje koeficient skupne tangente na dani paraboli, za katerega se izkaže, da je rešitev kubične enačbe. Število skupnih tangent je torej enako številu rešitev kubične enačbe, kar pomeni, da imata paraboli v evklidski ravnini največ tri skupne tangente.

V teoriji bi nam prepogibanje papirja pomagalo tudi pri reševanju kvartičnih enačb, saj zanje še obstaja splošna formula (vendar zaradi dolžine praktično neuporabna) in tudi vemo, da lahko enačbo četrte stopnje prevedemo na enačbe nižje stopnje (gl. [7], [43] ali konec dokaza izreka 9.8 v [30, str. 134]). Geometrično pa je to reševanje potem težje izvedljivo in zato manj motivacijsko, saj bi postopek reševanja

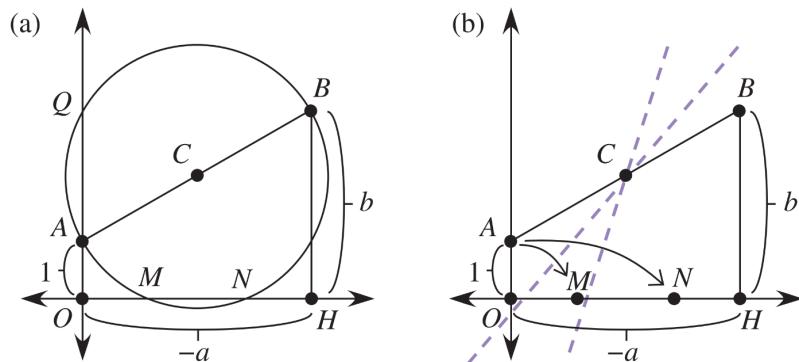
sistema dveh enačb zahteval veliko več pregibov kot pri reševanju le ene kubične ali kvadratne enačbe, pa tudi vmesne rezutate bi morali računati. Tako bi se lahko tu z reševanjem enačb preko origamija ustavili, vendar obstajajo alternativne rešitve. Na koncu poglavja bomo povzeli postopek iz [6], ki preko iskanja skupnih tangent na določeni stožnici v projektivni ravnini reši splošno kubično in nato tudi kvartično enačbo neke določene oblike.

Za enačbe pete in višjih stopenj pa splošna formula za rešitve ne obstaja več (to vemo po *Abel-Ruffinijev* izreku, gl. [32]). Kljub temu se da z origamijem še vedno konstruirati rešitve nekaterih enačb višjih stopenj, vendar ne obstaja postopek z enkratnimi prepogibi – potrebno se je poslužiti dvojnih (*two-fold*) ali večkratnih (*multi-fold*) prepogibov (gl. poglavje ??) (če ga boš vključila).

### Reševanje enačb s prevedbo evklidskih konstrukcij

Z evklidskim orodjem lahko rešujemo enačbe druge stopnje, saj znamo konstruirati kvadratni koren poljubnega origami-konstruktibilnega števila. Ker vemo, da lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo vse (in še več), kar se da z evklidskim orodjem, je včasih lažje za rešitev nekega problema najti (bolj domačo) evklidsko konstrukcijo, ki jo lahko nato preko origami operacij preobrazimo v origami konstrukcijo.

Kot primer tega Hull v [19, str. 38] navaja Lillovo konstrukcijo rešitve kvadratne enačbe preko krožnice – na sliki 62 levo je prikaz evklidske konstrukcije, desno pa prevedba na origami konstrukcijo. Lahek dokaz, zakaj deluje, je prepuščen bralcu.



Slika 62: Reševanje enačbe  $x^2 + ax + b = 0$ . Vzeto iz [19, str. 38].

## 6.1 Reševanje kvadratne enačbe preko tangente na parabolo

Rešujemo enačbo oblike

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kjer so  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  in velja  $a \neq 0$ . Njeni splošni rešitvi sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Postopek, ki si ga bomo pogledali v nadaljevanju, predpostavlja  $a = 1$ . Ker je vodilni koeficient neničeln, lahko z njim enačbo delimo in pri tem še vedno dobimo

racionalne koeficiente, zato lahko predpostavko brez škode za splošnost sprejmemo. Nova oblika enačbe je tako

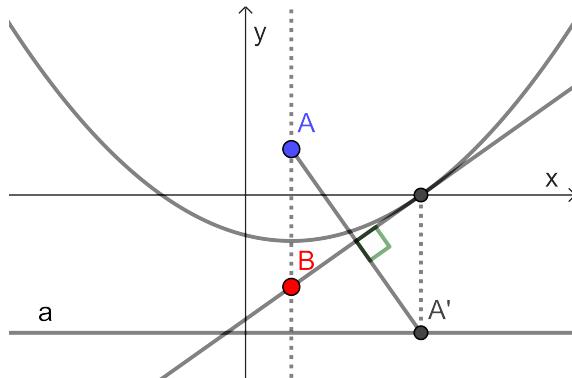
$$x^2 + bx + c = 0. \quad (6.1)$$

Predpostavimo, da ima enačba dve različni realni rešitvi oz. da je diskriminanta enačbe pozitivna, tj.  $D = b^2 - 4c > 0$ . Če realnih ničel ni, o origami konstrukciji rešitev namreč nima smisla razpravljati. Če je rešitev ena, je podana kot  $x = -b/2$ , kar je origami-konstruktibilno število in se ga lahko takoj konstruira.

Enačba 6.1 nam ob teh predpostavkah torej poda pokončno parabolo  $y = x^2 + bx + c$  z vodoravno premico vodnico in dvema ničlama, ki sta rešitvi naše enačbe. Iščemo abscisi presečišč parabole z abscisno osjo.

Zopet se bomo poslužili dosedanjega znanja o operaciji O6. Ta nam s pregibom skozi dano točko  $B$ , ki točko  $A$  položi na premico  $a$ , konstruira tangento na parabolo z goriščem v točki  $A$  in premico vodnico  $a$ .

Naša parabola je z enačbo seveda natančno določena. Ideja iskane konstrukcije rešitev enačbe je določiti tako točko  $B$  (najlažje kar na osi parabole), da bi nam izvedba operacije O6 podala tangento na parabolo ravno v njeni ničli. Želeni pregib mora potekati skozi točko  $B$  in gorišče  $A$  položiti na tisto točko  $A'$  na premici vodnici  $a$ , ki ima enako absciso kot ničla parabole. (gl. slika 63). Taka točka  $B$  je z osjo parabole in katerokoli izmed ničlama (zaradi simetrije) natanko določena.



Slika 63: Operacijo O6 skozi iskanou točko  $B$  poda rešitev kvadratne enačbe.

Edina nevarnost, da ta konstrukcija ne bo delovala, je možnost, da točka  $B$  kdaj ne bo origami-konstruktibilna točka. Zato sedaj izračunajmo njene koordinate in se prepričajmo, da se to nikoli ne bo zgodilo.

Najprej iz dane enačbe parabole določimo njenogorišče  $A$  in premico vodnico  $a$ . Spomnimo se, da iz enačbe oblike

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

razberemo njenoteme  $(x_0, y_0)$ , gorišče  $(x_0, y_0 + p/2)$  in enačbo premice vodnice  $y = y_0 - p/2$ . V našem primeru enačbo  $y = x^2 + bx + c$  preoblikujemo v

$$\left(x - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\right).$$

S tem sta gorišče  $A$  in premica vodnica  $a$  določena:

$$A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \text{ in } a : y = c - \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Naj bo  $t$  ena izmed rešitev enačbe 6.1. Na premici  $a$  z  $A'$  označimo točko z absciso  $t$ . Poiščimo enačbo pregiba, ki gorišče  $A$  položi v točko  $A'$ . Ta pregib bo tangenten na parabolo ravno v njeni ničli, njegovo presečišče z osjo parabole  $x = -b/2$  pa nam bo določilo točko  $B$ .

Koeficient nosilke daljice  $AA'$  je  $-1/(2t+b)$ , torej je koeficient pregiba  $k = 2t+b$ . Pregib je po konstrukciji tangenten na parabolo v ničli  $(t, 0)$ , torej je njegova enačba

$$y = (2t+b)(x-t) = (2t+b)x - 2t^2 - bt = (2t+b)x - t^2 + c.$$

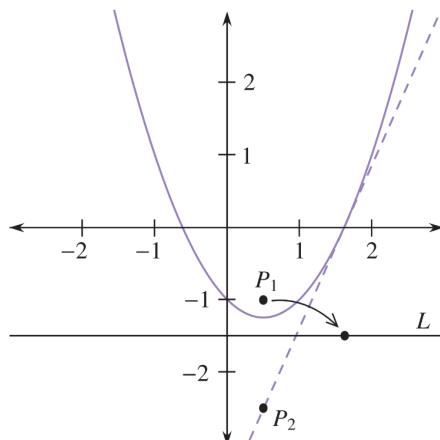
Pri tem smo upoštevali, da velja  $t^2 + bt + c = 0$ . Presečišče pregiba in osi parabole je tako točka  $B$  z absciso  $x = -b/2$  in ordinato

$$y = (2t+b)\left(-\frac{b}{2}\right) - t^2 + c = -t^2 - tb + c - \frac{b^2}{2} = c + c - \frac{b^2}{2} = 2c - \frac{b^2}{2}.$$

Obe koordinati sta racionalni, torej je točka  $B$  konstruktibilna točka. Ker leži na osi parabole, nam poda obe rešitvi enačbe – pregiba sta si simetrična glede na os. Povzemimo sedaj postopek konstrukcije rešitve kvadratne enačbe 6.1:

1. V koordinatnem sistemu označimo gorišče  $A\left(-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$ , premico vodnico  $a : y = c - \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}$  in točko  $B\left(-\frac{b}{2}, 2c - \frac{b^2}{2}\right)$ .
2. Z operacijo O6 naredimo pregib skozi točko  $B$ , ki točko  $A$  položi na premico  $a$  (če je diskriminanta enačbe pozitivna, sta možna pregiba dva).
3. Skozi sliko točke  $A$  naredimo vertikalnen pregib in abscisa njegovega presečišča z abscisno osjo je ničla dane enačbe.

**Primer:** Poiščimo rešitve enačbe  $x^2 - x - 1 = 0$ . Določimo obe točki in premico:  $A(\frac{1}{2}, -1)$ ,  $B(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$  in  $a : y = -\frac{3}{2}$  (na sliki 64 so zaporedoma uporabljeni oznake  $P_1$ ,  $P_2$  in  $L$ ). Opravimo operacijo O6 in označimo presečišče abscisne osi in pravokotnice nanjo skozi sliko točke  $A$ . Če smo bili pri pregibanju natančni, dobimo presečišči pri  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .



Slika 64: Reševanje enačbe  $x^2 - x - 1 = 0$  preko tangente na parabolo. Vzeto iz [19, str. 37].

Metoda je enostavna, vendar v resnici zopet ne najbolj praktično izvedljiva, saj so lahko točki  $A$  in  $B$  ter premica  $a$  težje origami-konstruktibilni. V naslednjem poglavju bomo med drugim spoznali Lillovo metodo, preko katere bomo z operacijo O6 do rešitve prišli hitreje in enostavneje (gl. razdelek 6.2.3).

## 6.2 Belochin postopek z Lillovo metodo

Vzemimo enačbo oblike

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kjer so  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  in velja  $a \neq 0$ . Tu je navedena ena oblika zapisa njene splošne rešitve:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3} \\ C &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(Q + 2b^3 - 9abc + 27a^2d)} \\ x_1 &= -\frac{b}{3a} - \frac{C}{3a} - \frac{b^2 - 3ac}{3aC} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 + i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \frac{C(1 - i\sqrt{3})}{6a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(b^2 - 3ac)}{6aC} \end{aligned}$$

Operacija O6 nam je preko konstrukcije tangente na parabolo pomagala rešiti kvadratno enačbo. Spomnimo se, da je Belocheva to v tridesetih letih prejšnjega stoletja nadgradila z operacijo O7, ki nam konstruira skupno tangento na dve paraboli, pregib pa imenujemo *Belochin pregib*. Z njim je kot prva odkrila resnično moč origami konstrukcij, a je žal trajalo več kot pol stoletja, da so matematiki začeli ceniti njeno odkritje. Zgodilo se je celo, da so nekateri neodvisno od nje odkrili ta pregib in iznašli svoje postopke, ne da bi sploh poznali njeno delo.

Seznanili se bomo z Lillovo metodo, s katero lahko v teoriji rešimo enačbo poljubne stopnje. V središču naše pozornosti bo Belochin origami postopek za reševanje kubične enačbe, na koncu pa bomo Lillovo metodo uporabili tudi za reševanje kvadratne enačbe.

### 6.2.1 Reševanje kubične enačbe z Belochinim postopkom

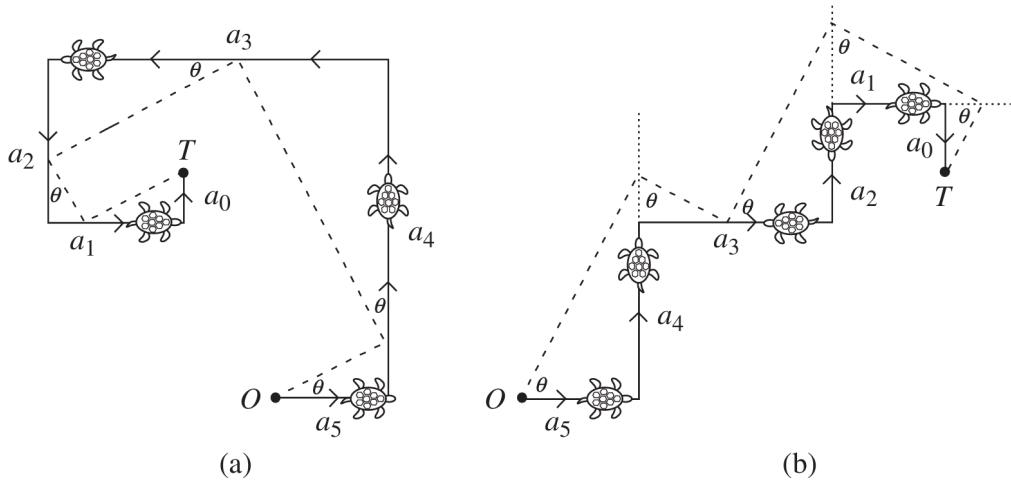
Belocheva je sama odkrila naslednji postopek reševanja kubične enačbe, kjer nam vsak Belochin pregib poda eno izmed rešitev. Število teh pregibov pa je, kot smo premislili že v uvodu poglavja, enako številu rešitev dane enačbe. Postopek temelji na Lillovi genialni metodi iskanja ničel poljubnih polinomov z realnimi koeficienti, ki si jo bomo v naslednjem razdelku podrobneje pogledali, avtorica pa je zaslužna za to, da se jo zelo enostavno konstruira tudi v praksi.

#### Lillova metoda

Avstrijski inženir Eduard Lill je l. 1867 v svojem članku [28] opisal inovativen postopek, ki je v svoji osnovi čisto enostaven. Imejmo poljuben polinom  $p(x) =$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  z realnimi koeficienti in iščemo njegove realne ničle, če obstajajo. Lill je iz njegovih koeficientov v ravnini ustvaril enolično pot.

Običajno pri opisovanju poteka konstrukcije uporabljamo figuro želve, katere pot nas zanima. Želva nam v vsakem trenutku kaže, kam je usmerjena in v katero smer se premika. Na začetku jo postavimo v koordinatno izhodišče  $O$  tako, da gleda v pozitivno smer  $x$ -osi. Želva najprej v to smer prehodi razdaljo, enako koeficientu  $a_n$ . Nato se obrne za  $90^\circ$  v pozitivno smer (nasprotno smer urinega kazalca) in prehodi naslednjo razdaljo  $a_{n-1}$ . To ponovi za vsak koeficient polinoma in po prehodeni razdalji  $a_0$  se ustavi v neki točki  $T$  (slika 65). Če je kateri od koeficientov negativen, želva hodi ritensko (primer (b) na sliki 65 za koeficiente  $a_3, a_2$  in  $a_0$ ), v primeru ničelnega koeficiente pa obstoji na mestu in se samo obrne. S potjo želve dobimo lomljeno črto iz največ  $n+1$  daljic, ki jih brez škode označujmo kar z njihovimi "pripadajočimi" koeficienti.



Slika 65: Primera želvine poti za polinoma pete stopnje. Vzeto iz [21, str. 311].

Sedaj se v izhodišče  $O$  postavimo še mi in z laserskim žarkom poskusimo zadeti želvo v točki  $T$  tako, da žarek najprej usmerimo daljico  $a_{n-1}$ , od katere se odbije v daljico  $a_{n-2}$ , od te v daljico  $a_{n-3}$  in tako naprej (slika 65). Pri tem upoštevamo dvoje:

- laserski žarek ne upošteva odbojnega zakona in se od daljice vedno odbije pod kotom  $90^\circ$ , zato so vpadni koti žarka na vse daljice med seboj enaki in prav tako to velja za odbojne kote;
- žarek se zato lahko odbije za kot  $\pm 90^\circ$ . Če zadene daljice, se odbije na isto stran, od koder je prišel, če pa zadene nosilko daljice, se odbije na njeno drugo stran. Samo tako lahko žarek zadene naslednjo daljico oz. njeno nosilko.

Taka pot žarka vedno obstaja in je enolična. Vpadni kot, ki ga v točki  $O$  oklepata laserski žarek in abscisna os, označimo z  $\theta$ .

**Trditev 6.1.**  $\text{Število } x_\theta = -\tan \theta \text{ je ničla polinoma } p(x)$ .

*Dokaz.* Vzemimo primer, ko so vsi koeficienti polinoma  $p(x)$  pozitivni. Želvina pot je v tem primeru sestavljena iz  $n + 1$  daljic, pot laserskega žarka – ki se vedno odbije od daljice in ne njene nosilke – pa iz  $n$  daljic. Slednje so ravno hipotenuze pravokotnih trikotnikov, ki so si med seboj vsi podobni. Za vsak  $i \in \{n, \dots, 1\}$  v trikotniku s kateto, ki je del daljice  $a_i$ , označimo z  $y_i$  kotu  $\theta$  nasprotno kateto. Dobimo

$$\begin{aligned} y_n &= \tan \theta \cdot a_n = -x_\theta a_n \\ y_{n-1} &= \tan \theta \cdot (a_{n-1} - y_n) = -x_\theta (a_{n-1} + x_\theta a_n) = -(a_{n-1} x_\theta + a_n x_\theta^2) \\ y_{n-2} &= \tan \theta \cdot (a_{n-2} - y_{n-1}) = -x_\theta (a_{n-2} + a_{n-1} x_\theta + a_n x_\theta^2) = \\ &\quad = -(a_{n-2} x_\theta + a_{n-1} x_\theta^2 + a_n x_\theta^3) \\ &\quad \vdots \\ y_1 &= -(a_1 x_\theta + a_2 x_\theta^2 + \dots + a_{n-1} x_\theta^{n-1} + a_n x_\theta^n). \end{aligned}$$

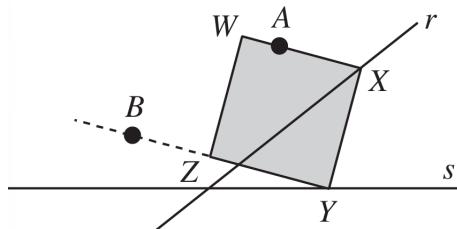
V zadnji enakosti desno stran premaknimo na levo in upoštevamo  $y_1 = a_0$ . Dobimo ravno  $p(x_\theta) = 0$ , torej je  $x_\theta = -\tan \theta$  res ničla tega polinoma.

Dokaz za primer negativnih ali ničelnih koeficientov sta prepuščena za vajo. Potrebna je le majhna prilagoditev (več v [45, str. 36]). □

Če pod nobenim kotom  $\theta$  ne moremo zadeti želve, je polinom  $p(x)$  brez realnih ničel. Zato je na mestu vprašanje, kako določiti kot  $\theta$ . Za polinom tretje stopnje je Belocheva preko svojega pregiba našla zelo preprosto rešitev, ki si jo bomo sedaj pogledali.

### Belochin kvadrat

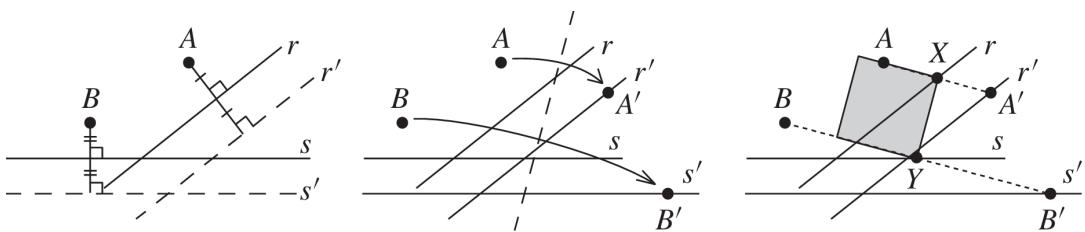
Imejmo dani točki  $A$  in  $B$  ter premici  $r$  in  $s$ . Z origamijem konstruirajmo kvadrat  $WXYZ$ , kjer oglische  $X$  leži na premici  $r$ , njegovo sosednje oglische  $Y$  pa na premici  $s$ . Velja še, da točka  $A$  leži na stranici  $WX$  (ali njeni nosilki), točka  $B$  pa na stranici  $ZY$  (ali njeni nosilki). Kvadrat po avtorici njegove konstrukcije imenujemo Belochin kvadrat (slika 66).



Slika 66: Belochin kvadrat. Vzeto iz [21, str. 309].

**Opomba 6.2.** V resnici nam v Belochinem postopku ne bo koristila konstrukcija samega kvadrata, pač pa bo dovolj le poiskati točki  $X$  in  $Y$ . Skozinju bo namreč potekala želvina pot od točke  $A$  do točke  $B$ , ki je po konstrukciji res sestavljena iz treh med seboj pravokotnih daljic. Belocheva pri postopku za konstrukcijo kvadrata navaja naslednje korake:

1. Najprej konstruiramo premico  $r'$ , ki je vzporedna premici  $r$  in od nje enako oddaljena kot točka  $A$ , tako da premica  $r$  leži med točko  $A$  in premico  $r'$ . Na enak način premici  $s$  konstruiramo njeno vzporednico  $s'$  (slika 67 levo).
2. Opravimo Belochin pregib, ki točko  $A$  slika v točko  $A'$  na premici  $r'$ , točko  $B$  pa v točko  $B'$  na premici  $s'$  (slika 67 na sredi).
3. Naj bo točka  $X$  središče doljice  $AA'$  in točka  $Y$  središče doljice  $BB'$ . Po konstrukciji novi točki sovpadata s presečščem pregiba in premice  $r$  oz.  $s$ . (slika 67 desno). Doljica  $XY$  je pravokotna na doljici  $AX$  in  $BY$ , zato samo še določimo točki  $W$  in  $Z$  na doljicah ali njunih nosilkah in tako dobimo Belochin kvadrat.



Slika 67: Konstrukcija Belochinega kvadrata z origamijem. Vzeto iz [21, str. 310].

### Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$ z Belochinim kvadratom

Preden ravno naučeno znanje uporabimo za reševanje kubičnih enačb, si še na hitro poglejmo, kako lahko tudi z Belochinim kvadratom rešimo starogrški problem podvojitve kocke.

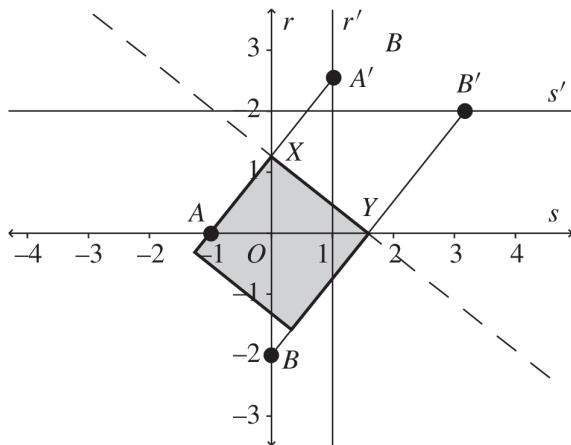
Za premico  $r$  vzemimo ordinatno os, za premico  $s$  pa abscisno os. Določimo še  $A = (-1, 0)$  in  $B = (0, -2)$ . Vzporednici sta torej  $r' : x = 1$  in  $s' : y = 2$ . Belochin pregib seka premico  $r$  v točki  $X$ , premico  $s$  pa v točki  $Y$  (slika 68). Z  $O$  označimo koordinatno izhodišče in opazimo podobne pravokotne trikotnike  $OAX$ ,  $OXY$  in  $OYB$ . Z upoštevanjem  $|AO| = 1$  in  $|OB| = 2$  dobimo sledeča razmerja:

$$\frac{|OX|}{|AO|} = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{|OB|}{|OY|} \implies |OX| = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{2}{|OY|},$$

iz česar sledi

$$|OX|^3 = |OX| \cdot \frac{|OY|}{|OX|} \cdot \frac{2}{|OY|} = 2 \implies |OX| = \sqrt[3]{2}.$$

Vidimo lahko, da je to enaka konstrukcija, kot jo je 50 let kasneje neodvisno od Belocheve odkril G. Martin (gl. razdelek 4.1), le da je za točko  $B$  vzel točko  $(0, -k)$  in s tem konstruiral dolžino  $\sqrt[3]{k}$  za poljubno origami število  $k$ .



Slika 68: Konstrukcija  $\sqrt[3]{2}$  preko Belochinega kvadrata. Vzeto iz [21, str. 310].

### Združitev Lillove metode in Belochinega kvadrata v Belochin postopek

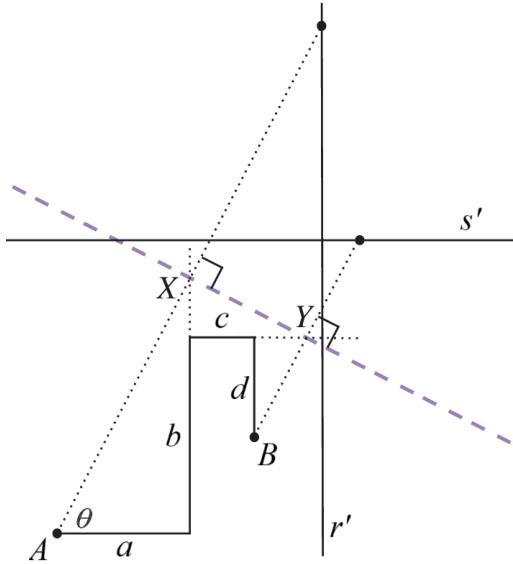
Za poljubno enačbo  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  povežimo sedaj Lillovo metodo s konstrukcijo primerenega Belochinega kvadrata, ki nam bo natančno določil kot  $\theta$ . Belochin postopek, ki je opisan v nadaljevanju, velja za vsako izbiro koeficientov enačbe (gl. tudi sliko 69):

1. Za točko  $A$  vzemimo izhodišče  $O$ . Začrtamo želvino pot za polinom  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ki se začne v točki  $A$  in konča v točki  $B$ .
2. Premica  $r$  naj bo nosilka daljice  $b$  ( $r : x = a$ ), premica  $s$  pa nosilka daljice  $c$  ( $s : y = b$ ).
3. Določimo premici  $r' : x = 2a$  in  $s' : y = b + d$  ter opravimo Belochin pregib, ki točko  $A$  položi na premico  $r'$  in točko  $B$  na premico  $s'$ .
4. Presečišči pregiba s premicama  $r$  in  $s$  zaporedoma označimo s točkama  $X$  in  $Y$ .
5. Zarišemo daljice  $AX$ ,  $XY$  in  $YB$ .

Ker po konstrukciji velja  $AX \perp XY \perp YB$ , je to iskana pot laserskega žarka, ki se odbija pod pravim kotom in zadene želvo. Kot  $\theta$  je kot, ki ga oklepata daljici  $a$  in  $AX$ . Rešitev je torej  $x_\theta = -\tan \theta$ .

**Opomba 6.3.** Če ima enačba še dve realni rešitvi, sta možna tudi še dva Belochina pregiba (enačba namreč ne more imeti točno dveh realnih rešitev, saj kompleksne rešitve nastopajo v konjugiranih parih).

Kot zanimivost Lavričeva v [27, str. 10–13] s postopkom, ki je malo preurejen Belochin postopek, še analitično pokaže, da je ob primerno izbranih točkah  $A$  in  $B$  ter premicah  $r$  in  $s$  koeficient premice, ki jo predstavlja Belochin pregib, rešitev kubične enačbe. Točki in premici izbere tako, da sta točki  $X$  in  $Y$  ravno presečišči z ordinatnima osema, iz česar lahko takoj razberemo koeficient premice. V dokazu izpelje enačbi pripadajočih parabol in splošno enačbo njunih tangent ter iz tega dokaže rečeno. To je lahko odlična vaja za dijake, ki si želijo dodatnega izziva.



Slika 69: Belochin postopek za reševanje enačbe  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Vzeto in preurejeno iz [19, str. 42].

### Primer reševanja kubične enačbe z Belochinim postopkom

Več primerov uporabe Belochinega postopka za reševanje kubičnih enačb je opisanih v [45, str. 38–44], tu pa si pogledamo, kako rešimo enačbo, ki ima tako pozitivne kot tudi negativne in ničelne koeficiente. Hull v [20, str. 90–92] obravnava enačbo

$$x^3 - 7x - 6 = 0.$$

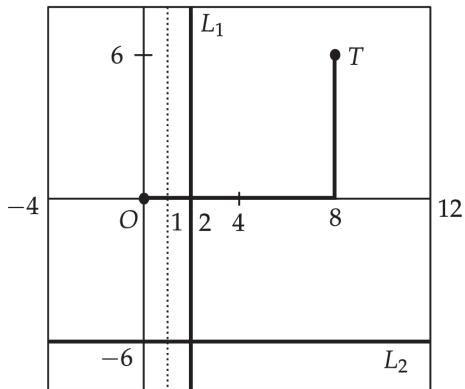
Po Lillovi metodi za točko  $A$  vzamemo izhodišče  $O$  in začrtamo želvino pot. Najprej gremo za 1 v desno ( $a = 1$ ), se obrnemo za  $90^\circ$  v pozitivno smer in obstojimo na mestu ( $b = 0$ ), se zopet obrnemo  $90^\circ$  v pozitivno smer in se premaknemo za 7 v nasprotno smer, torej zopet v desno ( $c = -7$ ), na koncu pa se po ponovnem obratu za  $90^\circ$  v pozitivno smer premaknemo za 6 navzgor ( $d = -6$ ). Končamo v točki  $T = (8, 6)$ .

Označimo še premice  $r : x = a = 1$ ,  $r' : x = 2a = 2$  (na sliki 70 označena z  $L_1$ ),  $s : y = b = 0$  in  $s' : y = b + d = -6$  (na sliki 70 označena z  $L_2$ ).

Želvina pot je sedaj pripravljena, da točko  $O$  prepognemo na premico  $L_1$  in hkrati točko  $T$  na premico  $L_2$ . Presečišči pregiba s premicama  $r$  in  $s$  nam data točki, kjer se laserski žarek za pravi kot odbije in na koncu zadane točko  $T$ . Kot, ki ga oklepa žarek z  $x$ -osjo ob koordinatnem izhodišču, nam podaja rešitev enačbe.

Na sliki 71 so konstrukcije vseh treh možnih pregibov. Začnimo z leve proti desni in za vsakega od njih pogledamo, kaj dobimo:

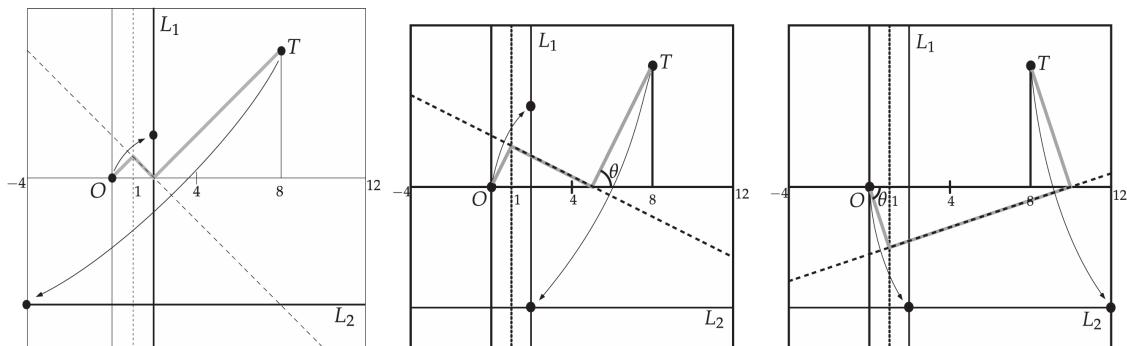
1. V prvem primeru se nam točka  $O$  preslika v točko  $(2, 2)$ , točka  $T$  pa v točko  $(-4, -6)$ , torej je kot  $\theta = 45^\circ$ , kar pomeni  $x_{45^\circ} = -\tan 45^\circ = -1$ . Preverimo, ali  $x_{45^\circ}$  res reši našo enačbo. Zares,  $(-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = 0$ .
2. Točka  $T$  se v drugem primeru preslika ravno v presečišče premic  $L_1$  in  $L_2$ , torej v točko  $(2, -6)$ . Pregib torej premico  $s$ , ki je v našem primeru kar  $x$ -os, seka v točki  $(5, 0)$  (ker je presečišče središče doljice s krajišči v točki  $T$  in njeni



Slika 70: Priprava želvine poti in premic za reševanje enačbe z Lillovo metodo. Vzeto iz [20, str. 87].

sliki). Rešitev  $x_\theta$  lahko preberemo kar iz zadnjega pravokotnega trikotnika preko definicije kotne funkcije tangens:  $x_\theta = -\tan\theta = -6/3 = -2$ . In res je  $(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6 = 0$ .

3. V zadnjem primeru pa se v presečišču premic  $L_1$  in  $L_2$  preslika izhodišče  $O$ . Zato pregib premico  $r$  seka v točki  $(1, -3)$  in za kot  $\theta$  gledamo prvi pravokotni trikotnik. Dobimo  $x_\theta = -\tan\theta = -(-3)/1 = 3$ . Preverimo rešitev in dobimo  $3^3 - 7 \cdot 3 - 6 = 0$ .



Slika 71: Pregibi, ki rešijo kubično enačbo  $x^3 - 7x - 6 = 0$ . Vzeto iz [20, str. 91–92].

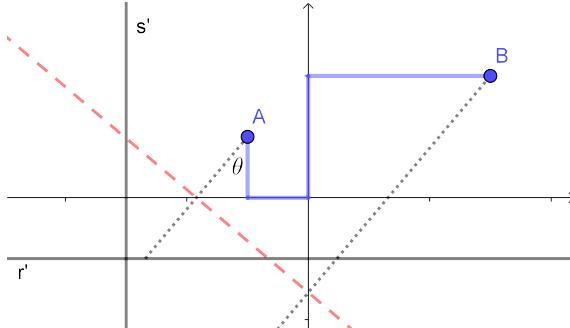
Seveda se da enačbo  $x^3 - 7x - 6 = 0$  hitreje rešiti z računanjem, vendar je ravno zaradi tega lep primer za uporabo Lillove metode z Belochinim pregibom, saj se da rešitve iz konstrukcije (ob natančnih prepogibih) takoj prebrati.

### 6.2.2 Hatorijeva konstrukcija

Japonski matematik Koshiro Hatori navaja postopek, ki je zelo podoben Belochinem postopku, vendar ga je avtor iznašel neodvisno od Belochinega dela in to kar pol stoletja za tem. Brez škode za splošnost predpostavi  $a = 1$  in za reševanje enačbe  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  sledi naslednjim korakom (slika 72):

1. V koordinatnem sistemu označimo točki  $A = (b, 1)$  in  $B = (d, c)$  ter premici  $r' : y = -1$  in  $s' : x = -d$ .

2. Opravimo pregib, ki točko  $A$  položi na premico  $r'$  ter točko  $B$  na premico  $s'$  (to je ravno Belochin pregib).
3. Koeficient opravljenega pregiba je rešitev dane enačbe.



Slika 72: Hatorijeva konstrukcija za enačbo  $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ .

Tako vidimo, da je to v resnici ravno Belochin postopek, le da Hatori ne omeni premic  $r$  in  $s$  ter da se želva na začetku svoje poti ne nahaja v koordinatnem izhodišču temveč v točki  $A$ , je najprej usmerjena navzdol in se obrača v negativno smer (njena pot je na sliki 72 označena z modro). Če izrazimo koeficient pregiba preko kota  $\theta$ , ki ga ob začetni točki  $A$  omejujeta modra in črna prekinjena daljica, res dobimo  $k = -\tan \theta$ . Za geometrijsko razlago preko parabol gl. [14].

**Opomba 6.4.** Seveda bi lahko vzeli katerikoli  $a \in \mathbb{Q}$  in vzeli premico  $r' : y = -a$ .

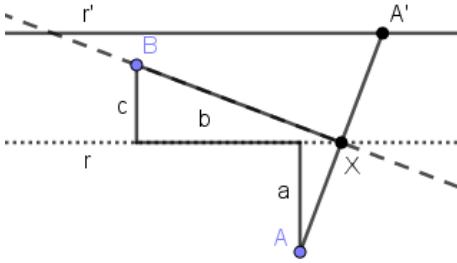
### 6.2.3 Reševanje kvadratne enačbe z Lillovo metodo

Lillovo metodo lahko uporabimo tudi za reševanje kvadratne enačbe  $ax^2 + bx + c = 0$ , kjer  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  in  $a \neq 0$ . Na enak način v koordinatni sistem zarišemo želvino pot, ki se začne v točki  $A$  in konča v točki  $B$ . Za razliko od Belochinega postopka tu ne uporabimo Belochinega pregiba, temveč pregib iz operacije O6. Namesto dveh premic  $r$  in  $s$  imamo le eno – naj bo  $r$  nosilka daljice  $b$ . Kot prej – na razdalji  $a$  na drugi strani točke  $A$  – označimo še njen vzporednico  $r'$ . Konstruiramo pregib, ki gre skozi točko  $B$  in točko  $A$  položi na premico  $r'$ . Njegovo presečišče s premico  $r$  nam določi točko  $X$ , kjer se žarek iz točke  $A$  pod pravim kotom odbije v točko  $B$  (primer na sliki 73). S tem je kot  $\theta$  določen. Vemo že, da sta možana največ dva pregiba in da je število pregibov enako številu realnih rešitev enačbe.

**Opomba 6.5.** Zelo lepa je konstrukcija točke  $X$  z evklidskim orodjem – če začrtamo želvino pot od točke  $A$  do točke  $B$ , narišemo premico  $r$  kot prej in poiščemo središče  $S$  daljice  $AB$ , je točka  $X$  po Talesovem izreku ravno presek krožnice s središčem v točki  $S$  in premerom  $AB$  ter premico  $r$ . (lahko na isti sliki rahlo začrtaš z eno barvo)

## 6.3 Alperinova in Geretschlägerjeva metoda za reševanje kubičnih enačb

V razdelku 6.1 smo reševali kvadratno enačbo preko konstrukcije tangente na parabolo (operacija O6), ki je bila določena s koeficienti iz dane enačbe. Nato smo



Slika 73: Reševanje kvadratne enačbe po Lillovi metodi z operacijo O6 ( $c < 0$ ).

spoznali Belochin postopek, ki se poslužuje Belochinega pregiba (operacije O7), vendar brez povezave s parabolami. To povezavo bomo pogledali sedaj.

Alperin v [1, str. 129] sicer namesto splošne kubične enačbe vzame zreducirano<sup>12</sup> obliko  $x^3 + cx + d = 0$ , kjer sta  $c, d \in \mathbb{Q}$ . Iz njenih koeficientov izbere naslednji paraboli:

- $\mathcal{P}_1 : \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = 2dx$  z goriščem v točki  $(\frac{d}{2}, \frac{c}{2})$  in premico vodnico  $x = -\frac{d}{2}$  in
- $\mathcal{P}_2 : x^2 = 2y$  z goriščem v točki  $(0, \frac{1}{2})$  in premico vodnico  $y = -\frac{1}{2}$ .

Avtor nato opravi Belochin pregib, ki gorišče vsake parabole položi na njeno premico vodnico in tako konstruira skupno tangento. Ker sta paraboli pravokotni, je tak pregib en sam. Sedaj pa se ne poslužimo uporabe matrik kot v zgornjem postopku, temveč analitično izrazimo koeficient skupne tangente. Naj bodo  $k$  iskani koeficient,  $(x_0, y_0)$  točka tangentnosti na prvi in  $(x_1, y_1)$  točka tangentnosti na drugi paraboli. Iz enačbe prve parabole z implicitnim odvajanjem in upoštevanjem  $dy/dx = k$  dobimo

$$2\left(y - \frac{c}{2}\right) \frac{dy}{dx} = 2d, \quad \text{torej} \quad y_0 = \frac{d}{k} + \frac{c}{2} \quad \text{in} \quad x_0 = \frac{\left(y_0 - \frac{c}{2}\right)^2}{2d} = \frac{d}{2k^2},$$

iz enačbe druge parabole pa

$$2x = 2\frac{dy}{dx}, \quad \text{torej} \quad x_1 = k \quad \text{in} \quad y_1 = \frac{k^2}{2}.$$

Ko koordinate vstavimo še v formulo za koeficient premice skozi dve točki, dobimo

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{k^2}{2} - \frac{d}{k} - \frac{c}{2}}{k - \frac{d}{2k^2}}.$$

Enačbo poenostavimo in res dobimo  $k^3 + ck + d = 0$ , torej je koeficient skupne tangente rešitev izvorne zreducirane kubične enačbe.

**Opomba 6.6.** Na enak način je do rešitve kubične enačbe še pred Alperinom prišel Robert Geretschläger (gl. [10, str. 368–369]). V članku pa za razliko od Alperina rešuje splošno kubično enačbo oblike  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Pri tem vzame paraboli  $\mathcal{P}_1 : (y - c/2)^2 = 2d(x + b/2)$  z goriščem v točki  $(-b/2 + d/2, c/2)$  in premico vodnico  $x = -b/2 - d/2$  ter parabolo  $\mathcal{P}_2$  kot zgoraj.

<sup>12</sup>V splošno kubično enačbo  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  vpeljemo novo spremenljivko  $z = x - b/3$ . Bralec lahko za vajo izračuna, da s tem dobimo splošno kubično enačbo za  $z$  brez kvadratnega člena.

## 6.4 Reševanje starogrških problemov preko reševanja enačb

V poglavju 4 smo si že pogledali več konstrukcij, ki z Belochinim pregibom rešijo problem podvojitve kocke in trisekcije kota. Poglejmo na problema še pod lučjo novega znanja reševanja enačb z origamijem.

Pri podvojitvi kocke rešujemo enačbo  $x^3 - 2 = 0$ . Bralec je povabljen, da jo reši z Belochinim postopkom preko Lillove metode. V resnici smo to že storili v v razdelku, kjer smo spoznali Belochin kvadrat. Konstrukcija kubičnega korena števila 2, ki smo jo takrat spoznali (gl. slika 68), je ravno konstrukcija po Belochinem postopku, le da je zrcaljena preko abscisne osi in premaknjena za enoto v levo.

Eناčbo lahko rešimo tudi z Alperinovim postopkom ali katerokoli drugo metodo za reševanje kubičnih enačb, ki je omenjena v tem poglavju. Videli smo že veliko podobnih metod in ni nemogoče, da kakšni postopki izhajajo iz drugih.

Pri problemu trisekcije kota se spomnimo zveze  $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ . Za dani kot  $3\theta$  iščemo  $x = \cos \theta$ , torej rešujemo enačbo  $4x^3 - 3x - \cos 3\theta = 0$ . Zopet lahko izberemo poljubno metodo; po Geretschlägerjevem oz. Alperinovem postopku iščemo koeficient skupne tangente na paraboli z goriščema v  $(-\cos 3\theta)/8, -3/8$  in  $(0, 1/2)$  ter premicama vodnicama  $x = (\cos 3\theta)/8$  in  $y = -1/2$  [10, str. 370].

## 6.5 Kubična in kvartična enačba v projektivni ravnini

Matematika Edwards in Shurman se v [6] ukvarjata z reševanjem enačb tretje in četrte stopnje preko iskanja skupnih tangent na določene stožnice, pri tem pa uporablja princip Belochinega pregiba. Tematike se lotevata na celovit način z obravnavo splošnih enačb stožnic v projektivni ravnini.

Pri kubični enačbi iz njenih koeficientov določita gorišči in premici vodnici dveh parabol, rešitve enačbe pa so *koeficienti* skupnih tangent. Tak postopek smo sicer spoznali že v razdelku 6.3, tu pa ga bomo pogledali pod malo drugačno lučjo.

Postopek za reševanje kvartične enačbe je podoben, vendar avtorja z njim rešita le kvartične enačbe v reducirani obliki. Iz njenih koeficientov določita parabolo in krožnico, rešitve pa so *začetne vrednosti* skupnih tangent.

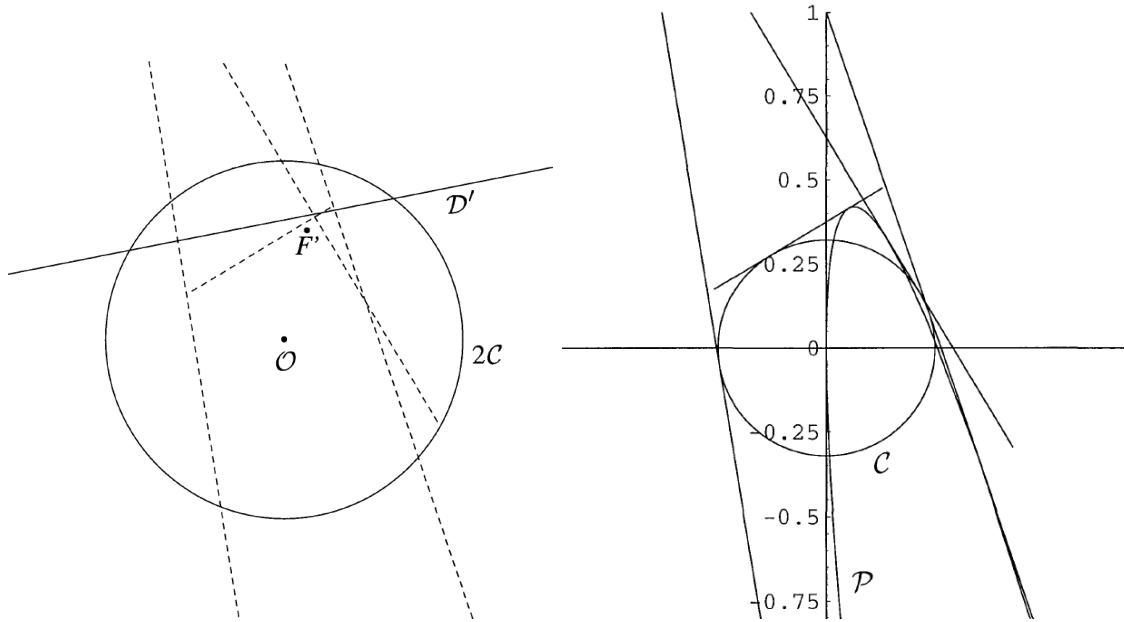
### Konstrukcija skupne tangente na parabolo in krožnico

Ker do sedaj poznamo le konstrukcijo skupne tangente na dve paraboli, je na mestu vprašanje, kako postopati v primeru, ko imamo namesto ene parabole krožnico. Konstrukcija je v svojem bistvu zelo enostavna:

1. Naj bosta dani parabola z znanima goriščem in premico vodnico ter krožnica z znanima središčem polmerom. Teh dveh stožnic ni potrebno risati, ker potrebujemo omenjene podatke.
2. Zarišemo krožnico z istim središčem in dvakratnim polmerom.
3. Po zgledu Belochinega pregiba gorišče prepognemo na premico in hkrati središče na rob ravnokar narisane krožnice.

Po operaciji O6 je pregib tangenten na dano parabolo, ker pa je po konstrukciji simetrala in pravokoten na polmer večje krožnice, je tangenten tudi na krožnico z

originalnim polemrom. Na sliki 74 sta desno prikazani dani parabola  $\mathcal{P}$  in krožnica  $\mathcal{C}$ , levo pa konstrukcije iz danih podatkov – gorišče  $F'$ , premica vodnica  $D'$ , središče  $O$  ter krožnica  $2\mathcal{C}$  z dvakrat večjim polmerom. Na obeh slikah so konstruirani vsi štirje pregibi oz. skupne tangente.



Slika 74: Konstrukcija skupnih tangent na krožnico in parabolo. Vzeto iz [6, str. 24–25].

**Opomba 6.7.** V tem razdelku za potrebe reševanja izjemoma potrebujemo šestilo, s katerim iz koeficientov kvartične enačbe konstruiramo krožnico.

Skupne tangente na dve paraboli ali na parabolo in krožnico zdaj znamo zlahka konstruirati, pravo vprašanje pa je, kateri stožnici določa dana kubična oz. kvartična enačba. Kot omenjeno že v uvodu razdelka, si avtorja pri tem pomagata s projektivno ravnino.

### Stožnice v projektivni ravnini

**Definicija 6.8.** Projektivno ravnino nad obsegom  $\mathbb{C}$  označimo s  $P_2(\mathbb{C})$ . To je množica vseh premic v  $\mathbb{C}^3$ , ki gredo skozi koordinatno izhodišče, njene premice pa so ravnine v  $\mathbb{C}^3$ , ki potekajo skozi izhodišče.

Naj bo  $(x_0, y_0, z_0)$  točka v  $\mathbb{C}^3$ , ki ni koordinatno izhodišče. Premico, ki gre skozi to točko in izhodišče, lahko označimo s  $[x_0 : y_0 : z_0]$ . To je točka projektivne ravnine. Ker za poljuben  $\lambda \in \mathbb{C}$  velja, da točka  $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$  leži na isti premici, je  $[\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0] = [x_0 : y_0 : z_0]$ , tj. ti dve točki projektivne ravnine sta enaki, saj v  $\mathbb{C}^3$  določata isto premico. Množica  $\{[x : y : z]; ax + by + cz = 0\}$  za neke  $a, b, c \in \mathbb{C}$  je projektivna premica, torej ravnina v  $\mathbb{C}^3$  skozi izhodišče.

**Opomba 6.9.** V nalogi bomo namesto obsega  $\mathbb{C}$  uporabljali njegov podobseg  $\mathbb{R}$ , kar ne vpliva na lastnosti projektivne ravnine.

Ključna lastnost projektivne ravnine je, da se v njej sekata tudi vzporedni premici, in sicer v *točki v neskončnosti*. Tako si lahko projektivno ravnino lahko predstavljamo kot običajno ravnino, ki ima dodano premico v neskončnosti ( $z = 0$ ). Zaradi te lastnosti so točke in premice iz projektivne ravnine v incidenčni relaciji in veljajo aksiomi projektivne ravnine:

P1 Vsak par točk leži na natanko eni premici.

P2 Vsak par premic se seka v natanko eni točki.

P3 Obstajajo 4 točke, od katerih nobena trojica ni kolinearna.

Spomnimo se, da je stožnica v realni ravnini  $\mathbb{R}^2$  dana z enačbo

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kjer so  $a_i$  poljubna realna števila. V projektivni ravnini je stožnica definirana podobno, vendar potrebujemo nekaj več ozadja.

**Definicija 6.10.** Naj bo  $F \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$  dan *homogen* polinom *drugega reda* oblike

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \quad (6.2)$$

z  $a_i \in \mathbb{R}$ . Stožnica v realni projektivni ravnini  $P_2(\mathbb{R})$  je množica  $\mathcal{S} \subset P_2(\mathbb{R})$ , ki vsebuje natanko ničle tega polinoma, tj.

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \in P_2(\mathbb{R}) ; F(x, y, z) = 0\}.$$

**Opomba 6.11.** Med enačbama stožnic v obeh ravninah obstaja povezava. Razširitev enačbe stožnice iz  $\mathbb{R}^2$  v  $P_2(\mathbb{R})$  rečemo *homogenizacija*, obrtnemu procesu (zožitvi stožnice na afini del, ravnino  $z = 1$ ) pa *dehomogenizacija*.

Naj ima sedaj stožnica  $\mathcal{S}$  ima v  $P_2(\mathbb{R})$  homogenizirano enačbo 6.2, kar lahko krajše zapišemo v obliki

$$\mathcal{S} : v^\top M v = 0, \text{ kjer sta } v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ in } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Pri tem je realna simetrična matrika  $M$  definirana do neničelnega skalarnega večkratnika natančno. Stožnica  $\mathcal{S}$  je *neizrojena* (ni unija dveh premic ali ene, dvojno štete premice), če ima poln rang, torej rang  $M = 3$  oziroma ekvivalentno  $\det M \neq 0$ . V nadaljevanju bomo delali le z neizrojenimi stožnicami, torej vedno obstaja inverz matrike  $M$ , ki je prav tako simetričen.

Iz prvega minorja matrike  $M$  lahko takoj preberemo, za katero vrsto neizrojene stožnice gre (za razlago gl. [38]). Naj bo  $A_M = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ . Potem velja:

- $\mathcal{S}$  je hiperbola, če in samo če  $A_M < 0$ ,
- $\mathcal{S}$  je parabola, če in samo če  $A_M = 0$  in
- $\mathcal{S}$  je elipsa, če in samo če  $A_M > 0$ . Če poleg tega velja še  $a_{11} = a_{22}$  in  $a_{12} = 0$ , je  $\mathcal{S}$  krožnica.

**Definicija 6.12.** Dualna stožnica  $\hat{\mathcal{S}}$  za dano stožnico  $\mathcal{S}$  v projektivni ravnini  $P_2(\mathbb{C})$  je množica tangentnih premic na  $\mathcal{S}$ .

**Opomba 6.13.** Dualna stožnica  $\hat{\mathcal{S}}$  je torej ovojnica stožnice  $\mathcal{S}$ .

Če stožnici  $\mathcal{S}$  pripadata polinom  $F(x, y, z)$  in posledično matrika  $M$ , je tangenta na točko  $p \in \mathcal{S}$  dana z enačbo  $xF_x(p) + yF_y(p) + zF_z(p) = 0$ . Torej je

$$\hat{\mathcal{S}} = \{[F_x(p) : F_y(p) : F_z(p)] ; p \in \mathcal{S}\}.$$

Naj bo  $p \in \mathcal{S}$  in  $q \in \hat{\mathcal{S}}$  tangenta na točko  $p$ . Bralec se lahko z upoštevanjem homogenosti koordinat točk v projektivni ravnini hitro prepriča, da potem velja  $q = M \cdot p$ . Ker je matrika  $M$  obrnljiva, to med drugim pomeni, da je preslikava  $\mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}$  s predpisom  $p \mapsto Mp$  je bijekcija med  $\mathcal{S}$  in  $\hat{\mathcal{S}}$ .

Ker je

$$q^\top M^{-1} q = (Mp)^\top M^{-1} (Mp) = p^\top M^\top M^{-1} Mp = p^\top Mp = 0,$$

kar pomeni, da je  $\hat{\mathcal{S}}$  res stožnica in je  $M^{-1}$  njena pripadajoča matrika.

**Opomba 6.14.** Iz tega sledi, da je dualna stožnica dualne stožnice kar originalna stožnica.

Poglejmo, kako nam znanje o stožnicah in njihovih dualnih stožnicah pomaga pri reševanju kubičnih in kvartičnih enačb. Naj bosta  $\mathcal{S}_1$  in  $\mathcal{S}_2$  stožnici s pripadajočima simetričnima obrnljivima matrikama  $M_1$  in  $M_2$ . Potem je njuna skupna tangenta skupna točka njunih dualnih stožnic  $\hat{\mathcal{S}}_1$  in  $\hat{\mathcal{S}}_2$ . Torej iščemo  $q \in \hat{\mathcal{S}}_1 \cap \hat{\mathcal{S}}_2$ , ki reši sistem enačb

$$q^\top M_1^{-1} q = 0 \quad \text{in} \quad q^\top M_2^{-1} q = 0. \quad (6.4)$$

### Reševanje kubične enačbe

Vzemimo kubično enačbo oblike  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0, d \neq 0$ . Za stožnici vzamemo naslednji paraboli:

- $\mathcal{P}_1 : (y + c)^2 = -4d(x - b)$  z goriščem  $F_1(b - d, -c)$  in premico vodnico  $L_1 : x = b + d$ ,
- $\mathcal{P}_2 : x^2 = -4y$  z goriščem  $F_2(0, -1)$  in premico vodnico  $L_2 : y = 1$ .

Iz enačb parabol zapišemo njuni matriki

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2d \\ 0 & 1 & c \\ 2d & c & c^2 - 4bd \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ter izračunamo njuna inverza

$$M_1^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} b & -c/2 & 1/2 \\ -c/2 & d & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naj bo  $q = [A : B : C] \in \hat{\mathcal{P}}_1 \cap \hat{\mathcal{P}}_2$  skupna tangenta na paraboli  $\mathcal{P}_1$  in  $\mathcal{P}_2$ . Iz sistema enačb 6.4 dobimo nov sistem

$$bA^2 - cAB + AC + dB^2 = 0 \quad \text{in} \quad -BC = A^2. \quad (6.5)$$

Da dobimo **nevertikalno afino skupno** tangento na paraboli  $\mathcal{P}_1$  in  $\mathcal{P}_2$ , ravnokar dobljeni enačbi normaliziramo z  $B = -1$  in  $z = 1$ , s čimer tangento  $Ax + By + Cz = 0$  dehomogeniziramo v premico  $y = Ax + C$  v afini ravnini. S tem se druga enačba v sistemu 6.5 preuredi v  $C = A^2$ , in prva v

$$A^3 + bA^2 + cA + d = 0,$$

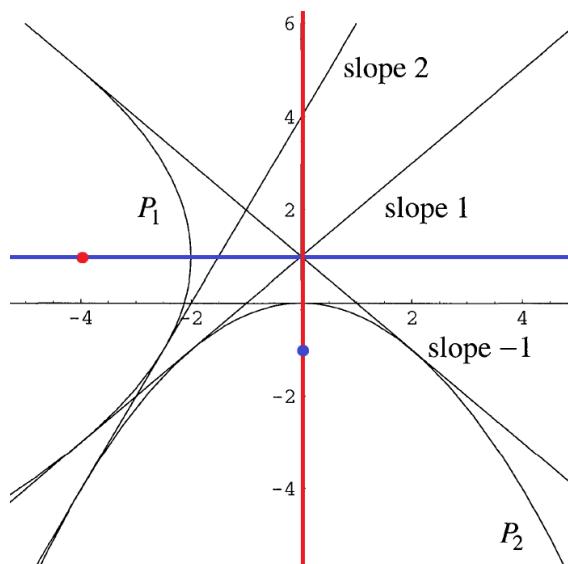
kar pomeni, da nam  $A$ , koeficient skupne tangente, reši izvorno kubično enačbo.

**Opomba 6.15.** Opazimo, da je na koncu postopek enak kot pri Geretschlägerjevi metodi (opomba 6.6), le da so tu spremenljivke v enačbah parabol pomnožene za faktor  $-2$ .

**Primer:** Rešimo kubično enačbo  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  po zgornjem postopku. Vzamemo paraboli

- $\mathcal{P}_1 : (y - 1)^2 = -8(x + 2)$  z goriščem  $F_1(-4, 1)$  in premico vodnico  $L_1 : x = 0$  ter
- $\mathcal{P}_2 : x^2 = -4y$  z goriščem  $F_2(0, -1)$  in premico vodnico  $L_2 : y = 1$

in v koordinatni sistem zarišemo njuni gorišči in premice vodnici. Z Belochinim prepogibom konstruiramo tri skupne tangente (slika 75) in razberemo njihove koeficiente. Če smo pri prepogibanju natančni, smo res dobili rešitve enačbe 2, 1 in  $-1$ .



Slika 75: Konstrukcija skupnih tangent na paraboli. Vzeto iz [6, str. 22].

## Reševanje kvartične enačbe

Kot že povedano, sledič postopek ne rešuje splošne enačbe četrte stopnje, temveč njeni zreducirano<sup>13</sup> obliko

$$x^4 + bx^2 + 2cx + d = 0, d \neq 0. \quad (6.6)$$

Smiselno predpostavimo  $c \neq 0$ , da se enačba z uvedbo nove spremenljivke za  $x^2$  ne more prevesti na kvadratno enačbo.

Po Bezoutovem izreku (gl. [39, izrek 2.4]) imata dve različni in neizrojeni stožnici v kompleksni projektivni ravnini štiri presečišča vključno z večkratnostjo. Presečišča dualnih stožnic  $\hat{\mathcal{S}}_1$  in  $\hat{\mathcal{S}}_2$  v kompleksni dualni projektivni ravnini so torej štiri tangente na stožnici  $\mathcal{S}_1$  in  $\mathcal{S}_2$ , ki nastopajo v konjugiranih parih – po nič, dve ali štiri tangente (šteto z večkratnostjo). Dve paraboli imata skupno tangento v neskončnosti, torej ostanejo le še tri afine tangente, kar ni dovolj za vse rešitve kvartične enačbe. Zato tu ne moremo vzeti dveh parabol.

Poskusimo najprej z metodo, ki smo jo uporabili pri reševanju kubične enačbe. Avtorja pri predpostavki  $bd - c^2 \neq 0$  vzameta naslednji stožnici:

- $\mathcal{S} : dx^2 + 2cxy + by^2 + bd - c^2 = 0$  in
- parabolo od prej, tj.  $\mathcal{P} : x^2 = -4y$ .

Bralec je povabljen, da po enakem postopku kot prej izpelje, da koeficient skupne tangente  $y = Ax + C$  reši enačbo 6.6. Stožnicama  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{P}$  zaporedoma pripadata matriki

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} d & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & bd - c^2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker za glavni minor matrike  $M_{\mathcal{S}}$  velja  $A_{M_{\mathcal{S}}} = bd - c^2 \neq 0$ , stožnica  $\mathcal{S}$  ni parabola in ker velja  $c \neq 0$ , ne more biti niti krožnica. Torej je lahko le elipsa ali hiperbola. Tu pa nastane težava, saj avtorja nista uspela najti splošne geometrijske metode za konstrukcijo skupne tangente na parabolo in elipso oz. hiperbolo. Ker pa znamo konstruirati skupno tangento na parabolo in krožnico, predlagata malo prilagojen postopek, ki je sicer algebraično manj eleganten, vendar geometrijsko toliko lažje izveden.

Pri danih koeficientih  $b, c, d$  enačbe 6.6 vpeljimo novi oznaki

$$e = \frac{\sqrt{bd - c^2}}{d} \quad \text{in} \quad r = |e|\sqrt{-d},$$

iz česar sledita enakosti, ki ju bomo kasneje uporabili pri izpeljavi:

$$b = de^2 + \frac{c^2}{d} \quad \text{in} \quad -\frac{de^2}{r^2} = 1. \quad (6.7)$$

**Opomba 6.16.** Smiselno za koeficiente  $b, c, d$  predpostavimo  $bd - c^2 > 0$  in  $d < 0$ . Zato s tem postopkom ne moremo reševati poljubnih enačb četrte stopnje.

---

<sup>13</sup>V splošno kubično enačbo  $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  vpeljemo novo spremenljivko  $z = x - b/4$ . Bralec lahko za vajo izračuna, da s tem dobimo splošno kvartično enačbo za  $z$  brez kubičnega člena.

Avtorja nato predlagata naslednji matriki za dualni stožnici  $\hat{\mathcal{C}}$  in  $\hat{\mathcal{P}}$ :

$$M_{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_{\mathcal{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & de/2 \\ 0 & -d & c/2 \\ de/2 & c/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če izračunamo njuna inverza, dobimo matriki

$$M_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{d^3 e^2} \begin{bmatrix} c^2 & -cde & -2d^2 e \\ -cde & d^2 e^2 & 0 \\ -2d^2 e & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz njiju zapišemo predpisa stožnic v afini ravnini ( $z = 1$ ) in dobimo:

- krožnico  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$  s središčem v  $S(0, 0)$  in polmerom  $r$  ter
- parabolo  $\mathcal{P} : c^2 x^2 - 2cdexy + d^2 e^2 y^2 - 4d^2 ex = 0$  (ker je  $A_{M_{\mathcal{P}}} = 0$ , je  $\mathcal{P}$  res parabola).

Z določitvijo gorišča in premice vodnice parabole  $\mathcal{P}$  se bomo ukvarjali pozneje; najprej algebroično poiščimo skupno tangento na dani stožnici.

Naj bo  $q = [A : B : C]$  presečišče dualnih stožnic  $\hat{\mathcal{C}}$  in  $\hat{\mathcal{P}}$ . Iz sistema enačb 6.4 dobimo nov sistem

$$A^2 + B^2 = \frac{C^2}{r^2} \quad \text{in} \quad deAC - dB^2 + cBC = 0. \quad (6.8)$$

Z določitvijo  $B = -1$  in  $z = 1$  zopet dobimo afino obliko skupne tangente kot  $y = Ax + C$ . Ko  $B$  vstavimo v sistem 6.8, prvo enačbo množimo z  $de^2 C^2$ , drugo kvadriramo, delimo z  $d$  in vstavimo v prvo enačbo, dobimo

$$-\frac{de^2}{r^2} C^4 - (de^2 + \frac{c^2}{d}) C^2 + 2cC + d = 0.$$

V dobljeno enačbo vstavimo enakosti 6.7 in dobimo

$$C^4 + bC^2 + 2cC + d = 0,$$

kar pomeni, da nam  $C$ , začetna vrednost tangente oz. njeno presečišče z ordinatno osjo, reši izvorno kvartično enačbo 6.6.

Sedaj poiščimo še gorišče in premico vodnico parabole  $\mathcal{P}$ . Potem bo postopek konstrukcije skupne tangente, kot smo ga opisali že v začetku tega razdelka – najprej narišemo krožnico s središčem  $S$  in polmerom  $2r$  ter gorišče in premico vodnico parabole. Nato opravimo pregib, ki hkrati položi gorišče na premico vodnico in središče krožnice na njen rob. Presečišče pregiba z ordinatno osjo je rešitev naše enačbe (seveda poiščemo vse možne pregibe, ki so največ štirje).

Iz enačbe parabole  $\mathcal{P} : c^2 x^2 - 2cdexy + d^2 e^2 y^2 - 4d^2 ex = 0$  ne moremo enostavno prebrati gorišča in premice vodnice, zato  $(x, y)$ -sistem prevedimo v (a je izraz primeren?)  $(z, w)$ -sistemu s sledečo preslikavo (od kje pride ta  $P$ ?):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} z \\ w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je } P = \begin{bmatrix} c/bd & de & c^2 e/b^2 \\ -e/b & c & -(bc + cde^2)/b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ko to vstavimo v matrično enačbo parabole  $[x \ y \ 1] \cdot P \cdot [x \ y \ 1]^\top$ , po računanju in poenostavljanju<sup>14</sup> na koncu dobimo

$$\mathcal{P} : z^2 = 4d^3e^2w.$$

V  $(z, w)$  sistemu ima parabola gorišče v  $F_{zw}(0, d^3e^2)$  in premico vodnico  $L_{zw}$  :  $w = -d^3e^2$  ozziroma  $L_{zw} : (z, w) = (0, -d^3e^2) + t(1, 0), t \in \mathbb{R}$ . Izhodišče v  $(x, y)$ -sistemu je tako v točki  $O_{xy}(c^2e/b^2, -(bc + cde^2)/b^2)$ . Iz tega lahko izračunamo še gorišče in premico vodnico v  $(x, y)$ -sistemu:

$$F_{xy} = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ d^3e^2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow F_{xy} = O_{xy} + d^3e^2(de, c) = \left( \frac{c^2e}{b^2} + d^4e^3, -\frac{bc + cde^2}{b^2} + cd^3e^2 \right),$$

$$L_{xy} = P \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -d^3e^2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow L_{xy} : (x, y) = O_{xy} - d^3e^2(de, c) + t(c, -de), t \in R.$$

V eksplisitni obliki je enačba za premico vodnico

$$L_{xy} : y = -\frac{de}{c} \cdot x - \frac{1}{bc}(c^2 + bc^2d^3e^2 + bd^5e^4).$$

Kot vidimo, gorišče in premica vodnica nimata lepih predpisov, vendar je po eni strani ta metoda precej bolj zanimiva kot pretvorba kvartične enačbe na enačbe nižje stopnje in reševanje z običajno Lillovo metodo.

**Primer:** Na sliki 74 je zarisana konstrukcija skupnih tangent na krožnico in parabolo, ki ju dobimo iz enačbe

$$64x^4 - 177x^2 + 143x - 30 = 0 \text{ oz. } \left(x - \frac{3}{8}\right) \left(x - \frac{5}{8}\right) (x - 1)(x + 2) = 0.$$

Začetne vrednosti tangent so res v njenih rešitvah, torej v točkah  $1, 5/8, 3/8$  in  $-2$ . Primer je vzet iz istega vira [6, str. 25], vendar iz danih koeficientov ne dobimo "lepih" koordinat gorišča, premera ali enačbe premice, ki bi jih zmogli konstruirati z ročno natančnostjo.

**Opomba 6.17.** Fauchette v svojem članku opisuje geometrijsko interpretacijo reševanja splošnih kvartičnih enačb, iz katerih določi stožnici in išče njuna presečišča v projektivni ravnini. Za več gl. [8].

---

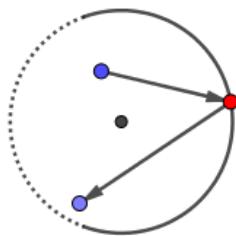
<sup>14</sup>Za izračun je potrebna programska oprema, kot je npr. Wolfram Mathematica. [imaš zračunano, lahko vstavim tle screenshot za dokaz, da sem zračunala?](#)

## 7 Alhazenov problem

Spoznamo zanimiv problem, ki izhaja že iz stare Grčije. Čez poglavje si bomo pogledali več njegovih različic in poskusili najti origami konstrukcijo njegove rešitve.

### Starogrški izvor problema

V osnovi gre za problem s področja optike, ki naj bi ga zastavil grški matematik Ptolemaj (prb. 85–170 po Kr.): *Pri danem sfiričnem zrcalu in viru svetlobnega žarka poišči točko na zrcalu, od katere se bo svetlobni žarek odbil v oko opazovalca* (slika 76).

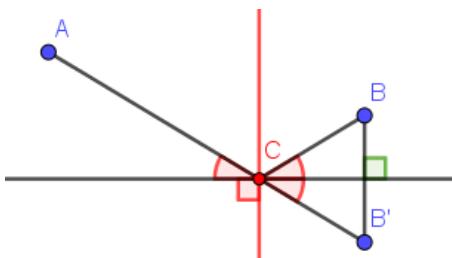


Slika 76: Ptolemajev optični problem.

Rešitev se da preformulirati v iskanje točke na krožnici, v kateri polmer krožnice razpolavlja kot, ki ga opravi svetlobni žarek. To velja zaradi *odbojnega zakona*, vendar tega v takratni Grčiji še niso poznali. Pojdimo na začetek in opazujmo, kako se je oblika Ptolemaevega problema spreminja skozi čas.

Grški matematik Heron iz Aleksandrije, med drugim znan po svoji Heronovi formuli za izračun ploščine trikotnika z danimi dolžinami stranic, je okoli leta 100 po Kr. zastavil in rešil naslednje vprašanje, ki je različica Ptolemaevega problema: *Na isti strani premice ležita točki A in B. Poišči točko C na premici, da bo pot od točke A do B preko točke C najkrajša*<sup>15</sup>.

Sam točko C konstruira zelo enostavno – najprej točko B zrcali čez premico v točko  $B'$ , nato pa s točko C označi presečišče premice in daljice  $AB'$  (slika 77). Ker velja  $|CB| = |CB'|$ , je  $|AC| + |CB| = |AC| + |CB'| = |AB'|$ . Dolžina  $|AB'|$  najkrajša možna razdalja med točkama A in  $B'$ , zato je točka C rešitev vprašanja.



Zgornja konstrukcija pa je grškemu matematiku ponudila še nekaj – opazil je, da pravokotnica na premico skozi točko C namreč razpolavlja kot  $\angle ACB$  (gl. rdeče

<sup>15</sup>Predpostavimo evklidsko metriko.

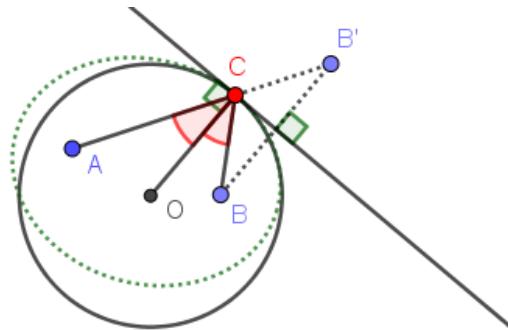
oznake na sliki 77). Tako lahko njegovo vprašanje preoblikujemo v: *Na isti strani premice ležita točki A in B. Poisci točko C na premici, ki razpolavlja kot  $\angle ACB$ .*

**Opomba 7.1.** Bralec je prepuščen enostaven premislek, kako konstruirati točko C z origamijem.

### Formulacija Alhazenovega problema

S tem novim znanjem je Heron postavil temelje, na katerih je več stoletij kasneje matematik, astronom in fizik Ibn al-Haytham oz. po naše Alhazen (prb. 965–1040 na območju današnjega Iraka) formuliral odbojni zakon, ki pravi, da sta vpadni in odbojni kot žarka svetlobe od površja enaka. Alhazen se je tudi prvi bolj poglobil v Ptolemajev problem in prišel do pomembnih ugotovitev, zato problem ponekod imenujejo tudi Ptolemaj-Alhazenuv problem, bolj pa je znan pod imenom *Alhazenuv problem* ali *biljardni problem*<sup>16</sup>.

Zopet formulirajmo problem. Namesto premice imamo torej krožnico  $\mathcal{K}$  s središčem  $O$ . Naj točki  $A$  in  $B$  ležita znotraj krožnice (za točki zunaj krožnice k reševanju problema postopamo na analogen način, je pa Alhazen originalno resda predpostavil ta položaj). Iščemo točko  $C$  na krožnici  $\mathcal{K}$ , da se bo svetlobni žarek iz točke  $A$  v točki  $C$  odbil v točko  $B$ . Na enak način kot Hero lahko premislimo, da mora polmer  $OC$  razpolavlji kot  $ACB$  (slika 78).



Slika 78: Ena od rešitev Alhazenovega problema v splošnem.

Za razliko od Heronove konstrukcije tu ne znamo konstruirati točke  $B'$ , saj je premica, čez katero bi morali zrcaliti točko  $B$  (in tako s presečiščem daljice  $AB'$  in premice dobiti točko  $C$ ), ravno tangenta v točki  $C$ . Premice torej ne moremo dobiti brez točke  $C$ , točke  $C$  pa ne moremo dobiti brez te premice. Tu se pokaže razsežnost problema in zazdeva se nam, da tudi origami konstrukcija tu ne bo enostavna.

Seveda so rešitve v nekaterih posebnih primerih enostavne – če sta točki  $A$  in  $B$  enako oddaljeni od središča  $O$ , je točka  $P$  presečišče simetrale daljice  $AB$  (oz. ekvivalentno kota  $\angle AOB$ ) s krožnico. V nadaljevanju bomo obravnavali le še en poseben primer, pri katerem obstaja zelo enostavna origami konstrukcija rešitve, sicer pa predpostavljamo splošno lego točk  $A$  in  $B$ .

**Opomba 7.2.** Opazimo lahko tudi, da ima zaradi enakega vpadnega in odbojnega kota žarka v točka  $C$  lastnost točke, ki leži na elipsi z goriščema  $A$  in  $B$  (na sliki 78

<sup>16</sup>Ime izhaja iz iskanja točke na robu biljardne mize, kamor želimo poslati biljardno kroglo, da se odbije v želeno smer. V našem primeru je biljardna miza okrogla oblike namesto pravokotne.

označena s prekinjeno črto). Tangenta na krožnico v točki  $C$  je hkrati tudi tangenta na elipso v isti točki, torej lahko problem preoblikujemo v iskanje elipse z goriščema v  $A$  in  $B$ , ki so tangentne na krožnico  $\mathcal{K}$ . Vendar ne poznamo enostavnega postopka, ki bi nam lahko poiskal enačbo te elipse, saj je ta odvisna od točke  $C$ , ta pa od tangente in obratno. Torej smo zopet na istem. Bralec, ki se želi poglobiti v reševanje Alhazenovega problema z elipsami, si lahko več o tem prebere v [9] in [11, str. 26–46].

Že tisoč let nazaj je Alhazen pokazal, da se da problem rešiti geometrijsko preko stožnic in da število rešitev variira od nič do največ štiri. Njegov dokaz je zelo obsežen in bil za marsikoga zelo zapleten in predolg [44], zato je veliko matematikov za njim poskušalo poiskati enostavnejšo rešitev npr. preko kompleksnih števil in analitičnih metod v geometriji.

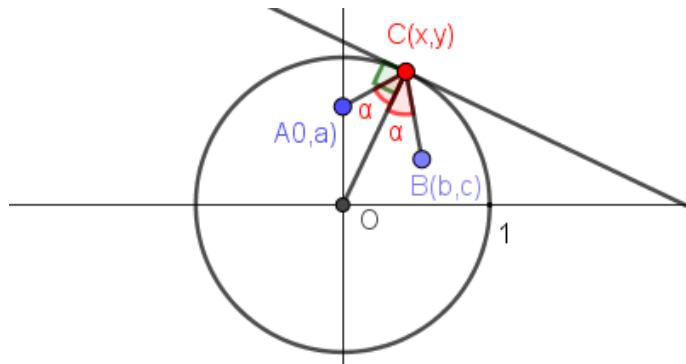
Leta 1672 je tako Huygens pokazal, da je Alhazenova rešitev ekvivalentna iskanju presečišča dane krožnice s hiperbolo (glej [33]). Algebraično rešitev problema je l. 1965 našel Jack M. Elkin, ko je problem prevedel v reševanje enačbe četrte stopnje, ki jo lahko rešimo z računalnikom. Alperin je v [17] izpostavil, da je potem takem problem rešljiv z origamijem. Leta 1997 je Peter M. Neumann dokazal, da ne obstaja evklidska konstrukcija rešitve, kar sicer vemo že iz Elkinovega rezultata.

Problem se da posplošiti tudi na npr. iskanje primerne točke odboja na zrcali parabolične, eliptične in hiperbolične oblike, kar algebraično privede do reševanja enačbe osme stopnje [41]. Skozi čas se je (vsaj za osnovni Alhazenov problem) razvilo še več različnih rešitev, vendar se bomo tu osredotočili na Huygensov nastavek, ki ga bomo razširili na področje origamija.

### Prevedba problema na reševanje kvartične enačbe

Poglejmo, kako lahko Alhazenov problem prevedemo v reševanje enačbe četrte stopnje. Naslednji nastavek za izpeljavo enačbe je vzet iz [30, str. 138–139]. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je krožnica  $\mathcal{K}$  enotska,  $O = (0, 0)$ ,  $A = (0, a)$  in  $B = (b, c)$  za take  $0 \leq a, b, c \leq 1$ , da te točke med sabo paroma ne sovpadajo (slika 79). Naj bo  $C = (x, y)$  iskana točka na krožnici  $\mathcal{K}$ . Iz tega sledi pogoj

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (7.1)$$



Slika 79: Podlaga za izpeljavo kvartične enačbe za Alhazenov problem.

Naj bodo premice  $AC$ ,  $OC$  in  $BC$  nosilke istoimenskih daljic in naj bo za vsako

premico  $i$  s  $k_i$  označen njen koeficient. Dobimo

$$\begin{aligned} k_{AC} &= \frac{y-a}{x}, \\ k_{OC} &= \frac{y}{x}, \\ k_{BC} &= \frac{y-c}{x-b}. \end{aligned}$$

Označimo  $\alpha = \angle ACO = \angle OCB$ . Ker sta kota enaka, velja

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan \alpha, \\ \frac{k_{AC} - k_{OC}}{1 + k_{AC}k_{OC}} &= \frac{k_{OC} - k_{BC}}{1 + k_{OC}k_{BC}}, \\ \frac{\frac{y-a}{x} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y-a}{x} \cdot \frac{y}{x}} &= \frac{\frac{y}{x} - \frac{y-c}{x-b}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{y-c}{x-b}}. \end{aligned}$$

Slednjo enačbo poenostavimo in z upoštevanjem pogoja 7.1 dobimo

$$y(b + 2acx) = ab + (a + c)x - 2abx^2.$$

Enačbo kvadriramo, spet upoštevamo pogoj 7.1 in dobimo enačbo četrte stopnje (**si poračunala, tudi z wolframom, je na enem listu**):

$$4a^2(b^2+c^2)x^4-4a^2bx^3+(a^2-4a^2b^2+b^2+c^2-4a^2c^2+2ac)x^2+2ab(a-c)x+b^2(a^2-1)=0.$$

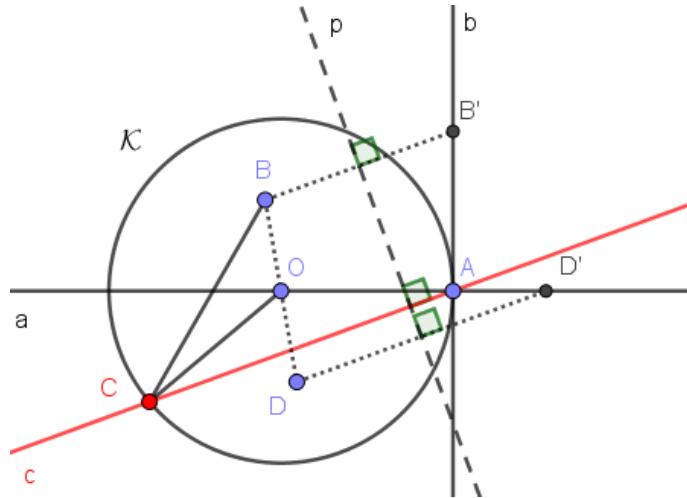
Enačbe četrte stopnje v teoriji znamo rešiti tako računsko kot z origamijem, vendar nas to delo že na prvi pogled mogoče odbija.

### Origami konstrukcija rešitve za poseben primer

Za poseben primer izbere točk  $A$  in  $B$  pri dani krožnici na naše veselje vendarle obstaja zelo enostavna konstrukcija točke  $C$ . Scimemi v [18, str. 116-117] poda naslednji postopek (gl. sliko 80):

1. Naj bo  $O$  središče krožnice  $\mathcal{K}$  in  $A$  točka na njej. Znotraj krožnice (lahko tudi na njej) si izberemo točko  $B$ , ki ne sovpada s prejšnjima točkama.
2. Konstruiramo premico  $a$  skozi točki  $O$  in  $A$  ter njeni pravokotnico  $b$  v točki  $A$ .
3. Točko  $B$  zrcalimo čez središče  $O$  v točko  $D$ .
4. Opravimo Belochin pregib  $p$ , ki točko  $D$  postavi na premico  $a$ , točko  $B$  pa na premico  $b$ .
5. Konstruiramo pravokotnico  $c$  na pregib, ki poteka skozi točko  $A$ . Njeno drugo presečišče s krožnico  $\mathcal{K}$  označimo s  $C$ .

**Trditev 7.3.** Točka  $C$  je rešitev Alhazenovega problema za točke  $O, A, B$ .

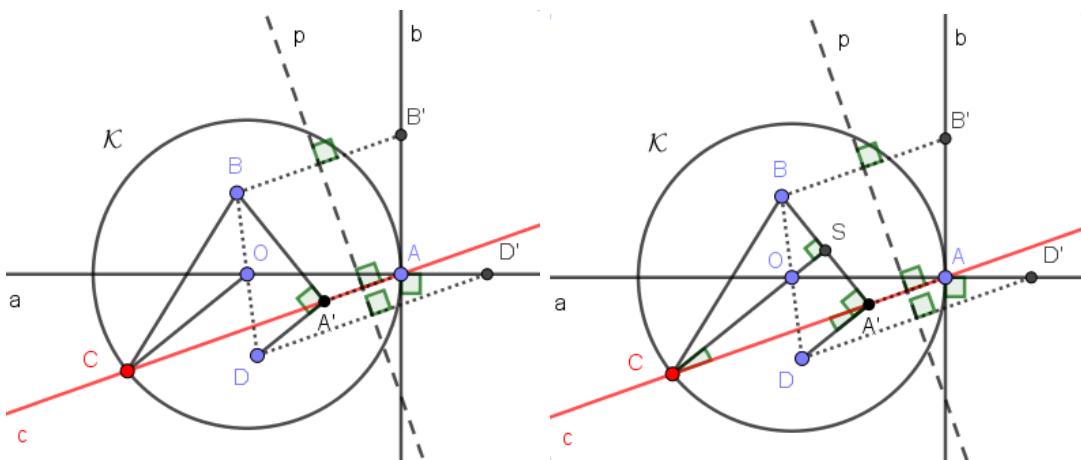


Slika 80: Scimemijeva rešitev Alhazenovega problema, ko točka  $A$  leži na krožnici.

**Opomba 7.4.** Avtor je v svoje delo vključil tudi dokaz, vendar je v njem več nejasnosti, priložena skica pa je zavajajoča. Zato je tu drug, lažji dokaz (ki sem ga iznašla sama – a lahko pišem tko v prvi osebi?).

*Dokaz.* Naj bo točka  $A'$  zrcalna slika točke  $A$  čez pregib  $p$ . Zarišemo še daljici  $BA'$  in  $DA'$ . Potem zaradi simetrije čez pregib  $p$  velja  $\angle BA'D = \angle B'AD' = 90^\circ$  (slika 81 levo).

Naj bo  $S$  presečišče premice  $CO$  z daljico  $A'B$ . Ker točki  $P$  in  $A$  ležita na krožnici  $K$ , je trikotnik  $\triangle CAO$  z vrhom v središču  $O$  enakokrak. Sledi  $\angle OCA = \angle CAO = \angle CA'D$ . Zadnja enakost sledi iz sovršnih kotov ob točki  $A$  in simetrije čez pregib  $p$ . Torej sta kota z vrhom v točkah  $P$  in  $A'$  (na sliki 81 desno) izmenična, iz česar sledi  $CS \parallel DA'$ . Zato velja  $\angle OSB = \angle DA'B = 90^\circ$ .



Slika 81: Geometrijski dokaz Scimemijeve konstrukcije

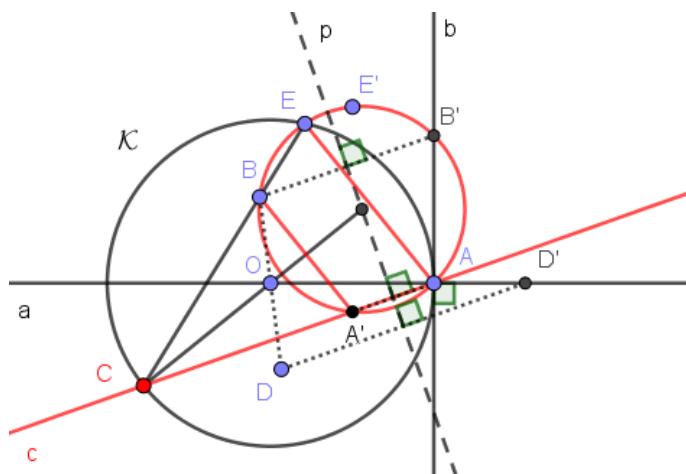
Trikotnika  $\triangle OSB$  in  $\triangle DA'B$  sta zato podobna, ker pa je  $O$  središče hipotenuze večjega trikotnika, je prvi dvakrat manjši, torej  $|BS| = |SA'|$ .

Zaključimo, da sta zaradi skladnih katet pravokotna trikotnika  $\triangle CSB$  in  $\triangle CSA'$

skladna, torej res velja  $\angle SCB = \angle SCA' = \angle SCA$  ozziroma daljica  $OC$  res razpolavlja kot  $\angle ACB$ .  $\square$

Do zdaj sem iskano točko označila po svoje, s  $C$ . V nadaljevanju pa bom uporabila oznako  $P$  iz članka, a bi bilo res nujno, da tu spremenim, da bo oznaka enotna? (saj spet ni toliko dela)

**Opomba 7.5.** Zelo je zanimiv stranski produkt te konstrukcije – izkaže se namreč, da točke  $A$ ,  $B$  in  $E$  (kjer je  $E$  drugo presečišče poltraka  $PB$  s krožnico  $\mathcal{K}$ , gl. sliko 82) ter njihove slike vse ležijo na isti krožnici! Središče te krožnice pa je presečišče poltraka  $CO$  s pregibom  $p$ . Prav tako velja  $BA' \parallel EA$  in  $|BE| = |A'A|$ . Dokaz za to nalogo ni ključen in ga prepuščamo bralcu.



Slika 82: Stranski produkti Scimemijeve konstrukcije točke  $P$  (označeno z rdečo).

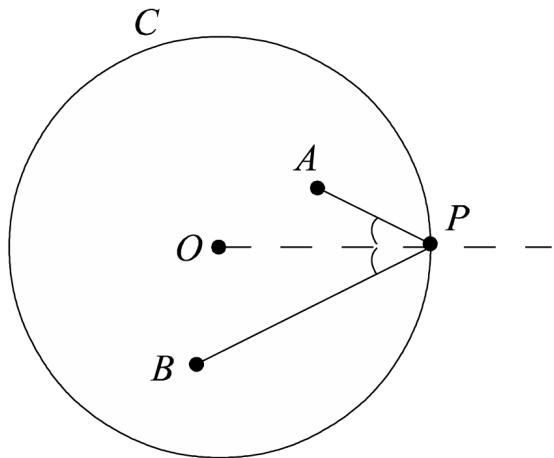
## Huygensova rešitev in Nishimurijev origami postopek

Japonski matematik Nishimura v [33] povzema, kako je Huygens preko kompleksnih števil Alhazenov problem prevedel na iskanje presečišča krožnice z določeno hiperbolo. Nishimura od tu nadaljuje v smer, ki nam sproducira konstrukcijo rešitve z origamijem – vemo že, da presečišče dveh stožnic v projektivni ravnini korespondira s skupno tangento njunih dualnih stožnic, ki smo jih spoznali v razdelku 6.5. Po novi prevedbi problema na iskanje skupne tangente na dve stožnici avtor svoj članek zaključi še z navedbo origami konstrukcije, ki konstruira rešitev Alhazenovega problema.

Brez škode za splošnost naj bo  $\mathcal{C}$  enotska krožnica s središčem  $O$ . Znotraj nje izberemo poljubni točki  $A$  in  $B$  taki, da so točke  $A, B, O$  paroma različne (slika 83). Išemo točko  $P \in \mathcal{C}$ , da bo veljalo

$$\angle APO = \angle OPB. \quad (7.2)$$

Iz pogoja 7.2 za točko  $P$  bomo izrazili enačbo stožnice, ki v tej točki seka krožnico  $\mathcal{C}$ . Poslužimo se kompleksnih števil in z njimi izrazimo oba skladna kota. Naj bodo  $a, b, z$  kompleksna števila, ki jih zaporedoma ponazarjajo točka  $A, B, P$ . Potem je kot  $\angle APO$  enak kotu med številoma  $a - z$  in  $-z$ , kot  $\angle OPB$  pa kotu med številoma



Slika 83: Vprašanje Alhazenovega problema.

$b - z$  in  $-z$ . Kot med dvema kompleksnima številoma je argument njunega količnika (to sledi iz polarnega zapisa kompleksnih števil), zato pogoj 7.2 preoblikujemo v

$$\arg\left(\frac{a-z}{-z}\right) = \arg\left(\frac{-z}{b-z}\right).$$

Če delimo kompleksni števili z enakima argumentoma, se njuna kota odštejeta v 0, torej dobimo realno število. Njegovo konjugirano število mu je torej enako. Zato velja enačba

$$\left(\frac{a-z}{-z}\right)\left(\frac{-z}{b-z}\right)^{-1} = \overline{\left(\frac{a-z}{-z}\right)\left(\frac{-z}{b-z}\right)^{-1}}.$$

Enačbo poenostavimo in z upoštevanjem  $z\bar{z} = 1$  (ker je  $z$  na enotski krožnici) dobimo

$$(ab)\bar{z}^2 - (\bar{ab})z^2 = (a+b)\bar{z} - (\bar{a+b})z. \quad (7.3)$$

Naj bodo  $q, p, r, s, x, y \in \mathbb{R}$  taka števila, da velja

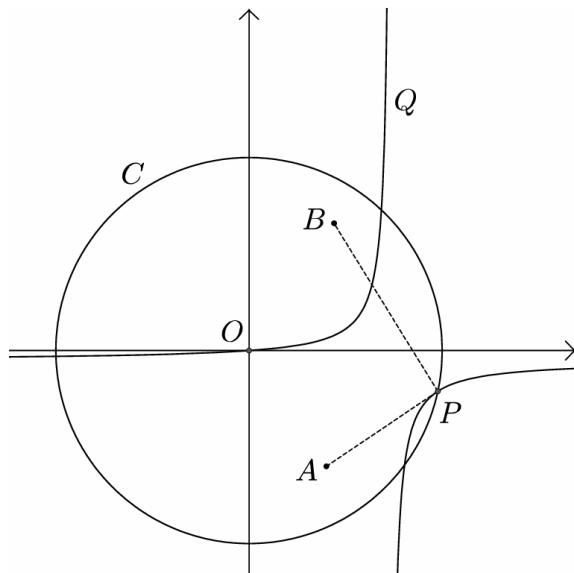
$$\begin{aligned} ab &= q + ip, \\ a + b &= r + is, \\ z &= x_0 + iy_0. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem tega se nam enačba 7.3 preoblikuje v

$$px_0^2 - 2qx_0y_0 - py_0^2 - sx_0 + ry_0 = 0.$$

Ker sta koeficienta ob kvadratnih členih različno predznačena, je to enačba hiperbole. Torej je točka  $P$  presečišče dane krožnice in te hiperbole (slika 84). Hungerbühler v [22] malo podrobneje določi dobljeno hiperbolo, a to za nas ni v nadaljevanju ni pomembno.

Z origamijem v splošnem ne moremo konstruirati presečišč dveh stožnic, znamo pa konstruirati skupne tangente za nekatere primere (do sedaj smo si konkretno pogledali konstrukcije v primeru dveh parabol ter parabole in krožnice, če v slednjem dovolimo uporabo šestila).



Slika 84: Rešitev Alhazenovega problema kot presečišče krožnice in hiperbole.

Za lažje nadaljnje reševanje bomo najprej malo poenostavili enačbo dobljene hiperbole. Zavrtimo krožnico  $\mathcal{C}$  (in s tem tudi točki  $A$  in  $B$  znotraj nje) okoli središča  $O$  tako, da abscisna os razpolavlja kot  $\angle AOB$ . S tem na splošnosti nismo izgubili. V tem primeru velja  $b = k \cdot \bar{a}$  za nek  $k > 0$ . Potem je  $ab = k \cdot a\bar{a} \in \mathbb{R}$ , torej je  $p = Im(ab) = 0$ .

Torej iščemo presečišče krožnice  $\mathcal{C}$  in hiperbole  $\mathcal{Q}$  z naslednjima enačbama:

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ in } \mathcal{Q} : 2qxy + sx - ry = 0.$$

Vemo, da je presečišče dveh stožnic enako presečišču njunih dualnih stožnic. Skupni točki dveh stožnic ponazarjata skupni tangenti njunih dualnih stožnic. Dualna stožnica dualne stožnice je originalna stožnica, torej tudi skupne točke dualne stožnice ponazarjajo skupne tangente originalnih stožnic.

Bralcu za vajo prepuščamo računanje dualnih stožnic  $\bar{\mathcal{C}}$  in  $\bar{\mathcal{Q}}$  (gl. klasifikacijo stožnic z matriko v razdelku 6.5). Dobimo

$$\bar{\mathcal{C}} : x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ in } \bar{\mathcal{Q}} : r^2x^2 + 2rsxy + s^2y^2 + 4qrz - 4qsy + 4q^2 = 0.$$

(v članku [17] sta predznaka pri  $x$  in  $y$  zamenjana, pa ne vem zakaj. Tu vzamem svojo rešitev.).

**Opomba 7.6.** Za izračun dualne stožnice  $\bar{\mathcal{Q}}$  je potrebna predpostavka  $qrs \neq 0$ . Če pa je katero od števil  $q, r, s$  ničelno, je hiperbola izrojena, torej se nam problem zreducira na iskanje skupnih presečišč krožnice in dveh premic, kar je računsko zelo enostavno in nas tu ne zanima.

Dualna krožnica enotske krožnice je torej prav tako enotska krožnica, stožnica  $\bar{\mathcal{Q}}$  pa je parabola (ker je  $r^2 \cdot s^2 - \frac{(2rs)^2}{4} = 0$ , tj. glavni minor pripadajoče matrike je ničeln). Problem je sedaj preveden na iskanje skupne tangente na krožnico  $\mathcal{C}$  in parabolo  $\bar{\mathcal{Q}}$ . To nas razveseli, saj to z origamijem zmoremo storiti.

Kako pa bomo iz skupne tangente določili točko  $P$ ? Iz originalnega iskanja skupne točke  $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$  preidemo na iskanje skupne tangente  $\bar{P} \in \bar{\mathcal{C}} \cap \bar{\mathcal{Q}}$ . Ker je  $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}$ , je  $\bar{P} \in \bar{\mathcal{C}}$  ravno tangenta na to krožnico v točki  $P$ . Torej moramo poiskati skupno tangento in iskana točka  $P$  je njeno dotikališče s krožnico  $\mathcal{C}$ . Zdaj moramo samo še določiti gorišče in premico vodnico parabole  $\bar{\mathcal{Q}}$ .

**Trditev 7.7.** Parabola  $\bar{\mathcal{Q}}$  z enačbo  $r^2x^2 + 2rsxy + s^2y^2 + 4qrx - 4qsy + 4q^2 = 0$  ima gorišče  $F = \left(\frac{-2qr}{r^2+s^2}, \frac{2qs}{r^2+s^2}\right)$  in premico vodnico  $D : sx - ry = 0$ .

*Dokaz.* Naj bo  $X = (x_0, y_0)$  točka, ki je enako oddaljena od gorišča  $F$  in premice vodnice  $D$ . Dokazati moramo, da so njene koordinate rešitve enačbe za parabolo  $\bar{\mathcal{Q}}$ .

Spomnimo se splošnih formul za razdaljo med točkama ter razdaljo med točko in premico – pri danih točkah  $T_0 = (x_0, y_0), T_1(x_1, y_1)$  in premici  $p : ax + by + c = 0$  velja

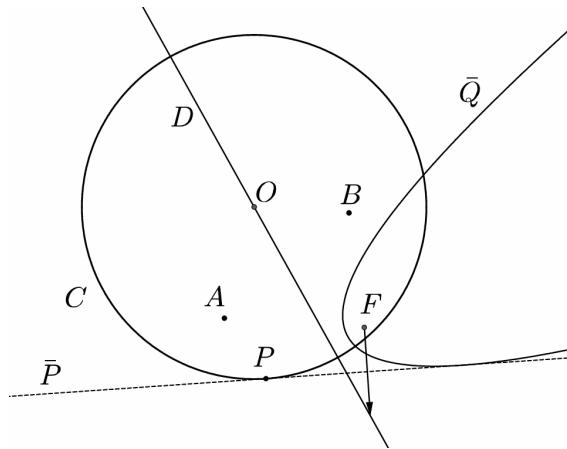
$$d(T_0, T_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}, \quad d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tako iz  $d(X, F) = d(X, D)$  dobimo enačbo

$$\left(x_0 + \frac{2qr}{r^2+s^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{2qs}{r^2+s^2}\right)^2 = \frac{(sx_0 - ry_0)^2}{r^2+s^2}$$

Ko izraze na obeh straneh poenostavimo in malo preuredimo enačbo, dobimo  $r^2x_0^2 + 2rsx_0y_0 + s^2y_0^2 + 4qrx_0 - 4qsy_0 + 4q^2 = 0$ , torej je  $\bar{\mathcal{Q}}$  res parabola.  $\square$

Tako smo prišli do konca teoretičnega postopka. Na hitro ponovimo – pri dani enotski krožnici  $\mathcal{C}$  in točkama  $A, B$  znotraj nje (postopek velja tudi za točki zunaj krožnice) nam presečišče  $P$  krožnice  $\mathcal{C}$  s hiperbolo  $\mathcal{Q}$ , ki je odvisna od točk  $A$  in  $B$ , reši Alhazenov problem. Presečišče stožnic prevedemo v iskanje skupne tangente  $\bar{P}$  na krožnico  $\mathcal{C}$  in parabolo  $\bar{\mathcal{Q}}$ , ki je dualna stožnica hiperbole. Iskana točka  $P$  je dotikališče tangente  $\bar{P}$  s krožnico  $\mathcal{C}$  (slika 85).



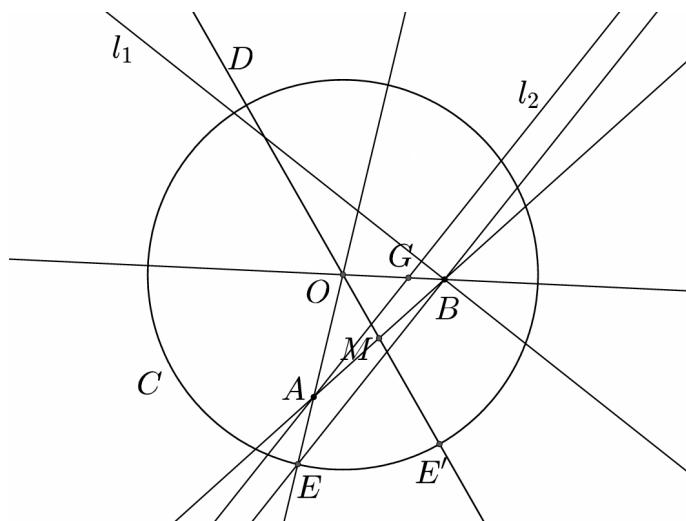
Slika 85: Konstrukcija dotikališča skupne tangente s krožnico.

Vemo že, da z evklidskim orodjem problema ne moremo rešiti, saj se prevede na reševanje enačbe četrte stopnje. Ta postopek pa nam še na drug način pokaže potrebnost origamija – konstrukcija skupne tangente na krožnico in parabolo namreč

z neoznačenim ravnih lom in šestih prav tako ni mogoča, spomnimo pa se, da jo lahko dobimo s hkratnim prepogibom središča krožnice na rob dvakrat večje krožnice in gorišča parabole na njeno premico vodnico.

Nishimura vse znanje tega razdelka združi v naslednjo origami konstrukcijo, ki konstruira rešitev Alhazenovega problema. Naj bo  $\mathcal{C}$  enotska krožnica s središčem  $O$  v koordinatnem izhodišču kompleksne ravnine  $\mathbb{C}$  in  $a = A, b = B$  točki znotraj nje. Za točki zunaj krožnice je postopek enak.

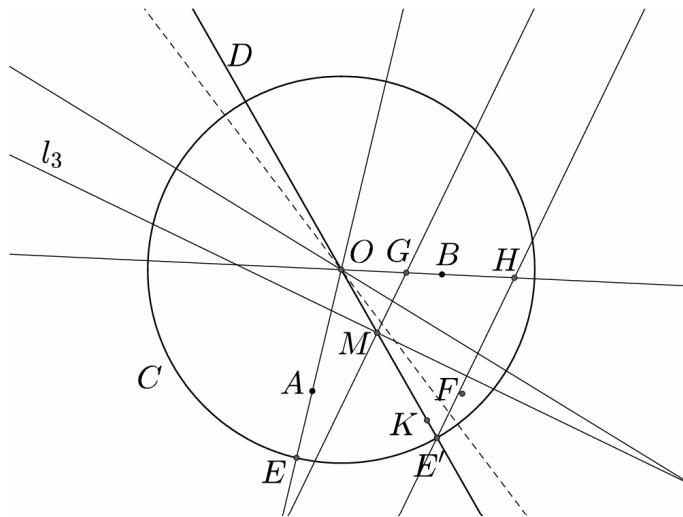
- Prepognemo premico  $OA$  in presečišče poltraka  $OA$  s krožnico  $\mathcal{C}$  označimo z  $E$ .
  - Prepognemo premico  $AB$ .
  - Prepognemo simetralo daljice  $AB$  in središče daljice  $AB$  označimo z  $M$ . Velja  $|OM| = |(a + b)/2| = \sqrt{s^2 + r^2}/2$ .
  - Prepognemo premico  $OM$ , ki jo poimenujemo  $D$  (to je premica vodnica parabole  $\overline{\mathcal{Q}}$  (zakaj?)). Presečišče poltraka  $OM$  s krožnico  $\mathcal{C}$  označimo z  $E'$ .
  - Prepognemo premico  $EB$ .
  - Prepognemo pravokotnico na premico  $EB$  skozi točko  $B$  in jo poimenujemo  $l_1$ .
  - Prepognemo pravokotnico na premico  $l_1$  skozi točko  $A$  in jo poimenujemo  $l_2$ . (velja  $l_2 \parallel EB$ , a je to važno?)
  - Prepognemo premico  $OB$  in njeno presečišče s premico  $l_2$  označimo z  $G$  (slika 86). ■ Velja  $|OG| = q = Re(ab)$  (zakaj?).



Slika 86: Nishimurijeva origami konstrukcija do koraka 8.

9. Prepognemo premico  $MG$ .
  10. Prepognemo pravokotnico na premico  $MG$  skozi točko  $M$  in jo označimo z  $l_3$ .

11. Prepognemo pravokotnico na premico  $l_3$  skozi točko  $E'$  in njen presečišče s premico  $OB$  označimo s  $H$ . Velja  $|OH| = |OG|/|OM|$  (zakaj?).
12. Prepognemo premico skozi središče  $O$ , ki točko  $H$  preslika na premico  $D$  v točko  $K$ .
13. Prepognemo premico skozi središče  $O$ , ki točko  $B$  preslika na premico  $OA$  in sliko točke  $K$  označimo s  $F$  (slika 87).
14. Prepognemo tangento  $\overline{P}$  na krožnico  $C$ , ki točko  $F$  položi na premico  $D$ . Točka  $P$  je dotikališče tangente  $\overline{P}$  s krožnico  $C$  (slika 85).



Slika 87: Nishimurijeva origami konstrukcija gorišča  $F$  (korak 13).

Zakaj konstrukcija deluje, se nisem poglabljala. Mogoče bi se dalo alegabraično izračunati enačbo  $D$  in  $F$  in bi prišlo, kolikor je pač treba.

## 8 Zaključek

Prepogibanje z enkratnimi pregibi, brez svinčnika. Znamo zrcalit, rotirati točke, prenašati razdalje (simulacija krožnice).

Origami konstrukcije so močnejše od evklidskih – medtem ko lahko z neoznačenim ravnalom in šestilom konstruiramo rešitve poljubne kvadratne enačbe z racionalnimi koeficienti (oz. poljubna števila oblike  $a + b\sqrt{r}$ ;  $a, b, r \in \mathbb{Q}$ ), zmoremo s prepogibanjem papirja poleg tega reševati še kubične in kvartične enačbe, tretjiniti poljubne kote, konstruirati tretje korene poljubnih origami-konstruktibilnih števil ter **konstruirati  $N$ -kotnike za vsak  $N$  oblike  $2^i 3^j (2^k 3^l + 1)$** , kjer je število v oklepaju **praštevilo**. Zaslugo za nadvlado origamija nad evklidskim orodjem ima Belochin pre gib, ki edina od origami operacij ne more biti konstruirana z neoznačenim ravnalom in šestilom.

Zelo didaktičen pripomoček za popestritev pouka in pokazat, kako se matematiki skriva v malih stvareh, kako jo opaziti, kako sam izpeljati stvari, raziskovati, kako konstrukcija deluje (preko podvprašanj ipd. kot ima hull2013).

The Influence of Origami on mathematics Study by Yutian Wong ([script.org](http://script.org)) ima lepe misli in zaključek, lohk kej ponučaš. Maš to na telefonu v enem zavihu.

## Literatura

- [1] Alperin, R. C., *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York Journal of Mathematics **6** (2000) 119–133, dostopno na <https://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf>.
- [2] Row, T. S., *Geometric exercises in paper folding* (ur. W. W. Beman in D. E. Smith), The Open Court Publishing Company, 1917, dostopno na <https://ia800907.us.archive.org/7/items/tsundararowsgeo00rowrich/tsundararowsgeo00rowrich.pdf>.
- [3] Struik, D. J., *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.
- [4] Burnside, W., *On groups of order  $p^\alpha q^\beta$* , Proceedings of the London Mathematical Society **s2-1**(1) (1904) 388–392, dostopno na <https://doi.org/10.1112/plms/s2-1.1.388>.
- [5] Cox, D. A. in Shurman, J., *Geometry and number theory on clovers*, The American Mathematical Monthly **112**(8) (2005) 682–704, dostopno na <https://doi.org/10.1080/00029890.2005.11920241>.
- [6] Edwards, B. C. in Shurman, J., *Folding quartic roots*, Mathematics Magazine **74**(1) (2001) 19–25.
- [7] Fathi, A., Mobadersany, P. in Fathi, R., *A simple method to solve quartic equations*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences **6**(6) (2012) 331–336.
- [8] Faucette, W. M., *A geometric interpretation of the solution of the general quartic polynomial*, The American Mathematical Monthly **103**(1) (1996) 51–57, dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2975214>.
- [9] Fujimura, M. in dr. *The ptolemy-alhazen problem and spherical mirror reflection*, Computational Methods and Function Theory **19** (2019) 135–155, dostopno na <https://link.springer.com/article/10.1007/s40315-018-0257-z#citeas>.
- [10] Geretschläger, R., *Euclidean constructions and the geometry of origami*, Mathematics Magazine **68**(5) (1995) 357–371, dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2690924>.
- [11] Gorjup, R., *Alhazen*, diplomsko delo, 2014, dostopno na [http://pefprints.pef.uni-lj.si/2018/1/Diplomsko\\_delo\\_Rok\\_Gorjup.pdf](http://pefprints.pef.uni-lj.si/2018/1/Diplomsko_delo_Rok_Gorjup.pdf).
- [12] Grahov, A. in dr. *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.
- [13] Haga, K., *Origamics: mathematical explorations through paper folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [14] Hatori, K., *Origami Construccions*, 2003, dostopno na <https://origami.ousaan.com/library/conste.html>.

- [15] Heath, T., *A history of greek mathematics (volume 1)*, Oxford University Press, 1921, dostopno na <https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/heathvol1.pdf>.
- [16] Heath, T. L., *The thirteen books of euclid's elements, Vol. 1 (books i and ii)*, Dover Publications, Inc., 1956.
- [17] Alperin, R. C., *Mathematical origami: another view of alhazen s optical problem*, Origami<sup>3</sup>: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education (2002) 83–93 (ur. T. Hull), dostopno na <https://anyflip.com/zpwaj/ujs/basic>.
- [18] Scimemi, B., *Paper-folding constructions in euclidean geometry: an exercise in thrift*, Origami<sup>3</sup>: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education (2002) 107–117 (ur. T. Hull), dostopno na <https://anyflip.com/zpwaj/ujs/basic>.
- [19] Hull, T. C., *Origametry: mathematical methods in paper folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na <https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ>.
- [20] Hull, T. C., *Project origami: activities for exploring matmehatics – second edition*, Taylor & Francis Group, 2013.
- [21] Hull, T. C., *Solving cubics with creases: the work of beloch and lill*, The American Mathematical Monthly **118**(4) (2011) 307–315.
- [22] Hungerbühler, N., *Geometrical aspects of the circular billiard problem*. Elemente der Mathematik **47**(3) (1992) 114–117, dostopno na <http://eudml.org/doc/141533>.
- [23] Jerman, M., *O konstrukcijah z ravniliom in šestilom*, Obzornik za matematiko in fiziko **3**(45) (1998) 73–78.
- [24] Johnson, D., *Paper folding for the mathematics class*, National Council of Teachers of Mathematics, 1957.
- [25] Lang, R. J., *British origami*, Four Problems **132**(3) (1988) 7–11.
- [26] Lang, R. J., *Origami and geometric constructions*, v: 2013, dostopno na [https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf).
- [27] Lavrič, P., *Hagovi izreki za srebrne pravokotnike*, diplomsko delo, 2013, dostopno na [http://pefprints.pef.uni-lj.si/1534/1/Hagovi\\_izreki\\_za\\_srebrne\\_pravokotnike\\_PetraLavric.pdf](http://pefprints.pef.uni-lj.si/1534/1/Hagovi_izreki_za_srebrne_pravokotnike_PetraLavric.pdf).
- [28] Lill, E., *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*, Nouvelles Annales de Mathématiques **6**(2) (1867) 359–362.
- [29] Lotka, A. J., *Construction of conic sections by paper-folding*, School Science and Mathematics **7**(7) (1907) 595–597.
- [30] Martin, G. E., *Geomteric constructions*, Springer New York, 1997.

- [31] Messer, P., *Problem 1054*, Crux Mathematicorum **12**(10) (1986) 284–285, dostopno na [https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux\\_v12n10\\_Dec.pdf](https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v12n10_Dec.pdf).
- [32] Mrinal, M., *Galois theory and the abel-ruffini theorem*, v: 2019, dostopno na <https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Mrinal.pdf>.
- [33] Nishimura, Y., *Solving alhazen's problem by origami*, International Journal of Geometry **7**(2) (2018) 37–42.
- [34] Robinson, N., *History of origami*, 2024, dostopno na <https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami>. ■■■
- [35] Hvidsten, M., *Geometry with geometry explorer* (ur. R. E. Ross), The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.
- [36] Royster, D. C., *Chapter 3: Euclidean Constructions*, Zapiski predavanj, 2002, dostopno na <https://www.ms.uky.edu/~droyster/courses/spring02/classnotes/chapter03.pdf>.
- [37] Smith, S. G., *Paper folding and conic sections*, The Mathematics Teachers **96**(3) (2003) 202–207.
- [38] Šivic, K., *Kvadratni funkcionali*, Dostopno na spletni učilnici FMF na [https://ucilnica1920.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/72996/mod\\_resource/content/1/kvadratne\\_forme.pdf](https://ucilnica1920.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/72996/mod_resource/content/1/kvadratne_forme.pdf), Zapiski predavanj pri predmetu Algebra 1, 2020.
- [39] Terglav, G., *Konfiguracija 95 točk in 95 premic, ki izhaja iz Pascalovega izreka in posplošitve na višje rede*, delo diplomskega seminarja, 2022, dostopno na <https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=159263&lang=slv>.
- [40] Videla, C. R., *On points constructible from conics*, The Mathematical Intelligencer **19**(2) (1997).
- [41] Wikipedia contributors, *Alhazen's problem – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2025, dostopno na [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Alhazen%27s\\_problem&oldid=1267024991](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Alhazen%27s_problem&oldid=1267024991).
- [42] Wikipedia contributors, *Envelope (mathematics) – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2024, dostopno na [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Envelope\\_\(mathematics\)&oldid=1223619712](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Envelope_(mathematics)&oldid=1223619712).
- [43] Wikipedia contributors, *Quartic equation – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2024, dostopno na [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quartic\\_equation&oldid=1262196167](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quartic_equation&oldid=1262196167).
- [44] Wilk, S. R., *Alhazen's problem*, 2015, dostopno na <https://blog.oup.com/2015/03/alhazens-problem-optics-light/>.
- [45] Zore, T., *Origami geometrija*, magistrsko delo, 2022, dostopno na [http://pefprints.pef.uni-lj.si/7209/1/Origami\\_geometrija\\_-\\_Tja%C5%A1a\\_Zore.pdf](http://pefprints.pef.uni-lj.si/7209/1/Origami_geometrija_-_Tja%C5%A1a_Zore.pdf).