UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika

Terezija Krečič

OSNOVNE KONSTRUKCIJE IN REŠEVANJE ENAČB Z ORIGAMIJEM (BWO?)

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2025

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

Osnovna literatura

1. T. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

2. K. Haga, *ORIGAMICS: Mathematical Explorations Through Paper Folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

Podpis mentorja:

Osnovne konstrukcije in reševanje enačb z origamijem (bwo?)

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

Angleški prevod slovenskega naslova dela

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99
Ključne besede: integracija, kompleks, C^*-algebre
Keywords: integration, complex, C^*-algebras

1 Uvod

Začnimo z odzivom mojih prijateljev in sorodnikov, ko so izvedeli, da bom v svoji magistrski nalogi pisala o origamiju. Velika večina jih je bila zelo presenečena, saj si sploh ni predstavljala, da se v prepogibanju papirja skriva matematika. Kar je razumljivo, saj običajno ljudje, ki se s to kraljico znanosti po srednješolskem izobraževanju prenehajo aktivneje ukvarjati, njenega vpliva na vse okoli nas ne opazijo.

In resnica je, da se v origamiju razkriva toliko matematike, da je v tej nalogi ni bilo mogoče zajeti v celoti. Ne da se niti oceniti, kolikšen delež je tu opisan, saj se origami ne dotika le – že tako izjemno širokega – področja geometrije, temveč tudi analize, teorije števil, abstraktne algebre, diferencialne topologije . . . Prav tako njegova uporaba zajema široko polje znanosti in inženirstva – od arhitekture in robotike do fizike in astrofizike, če naštejemo le nekaj primerov. Kdo bi si mislil, da lahko origami uporabimo za zlaganje šotorov in ogromnih kupol nad športnimi stadioni ali celo za pošiljanje solarnih objektov v vesolje? [4, str. 3–5].

Origami je umetnost prepogibanja papirja, ki se razvija že več kot tisočletje (trdnih dokazov o zlaganju papirja, kot ga poznamo danes, pred letom 1600 po Kr. ni). Oblikovanje oblik iz lista papirja se je do konca 20. stoletja hitro razširilo po vsem svetu [7]. Matematični vidik origamija je v ospredje prišel kasneje. V 19. stoletju je nemški učitelj Friedrich Froebel (1782–1852) v prepogibanju papirja opazil visoko pedagoško vrednost, kar je uporabil pri poučevanju osnovne geometrije v vrtcu. Indijski matematik Tandalam Sundara Row je nato l. 1893 izdal obsežno knjigo z opisanimi konstrukcijami raznolikih geometrijskih likov in celo krivulj. Velik prelom je dosegla italijanska matematičarka Margherita P. Beloch, ki je v 30-ih letih 20. st. odkrila, da lahko s prepogibanjem papirja rešujemo celo kubične enačbe. Vseeno je preteklo še pol stoletja, da je origami začel zanimati tudi širšo znanost, od takrat pa se je na tem področju odkrilo veliko novega [4, str. 10].

Ravno uporaba origamija v pedagoške namene je tista, ki nas v tej nalogi še posebej zanima. Prepričana sem, da prepogibanje papirja za namen reševanja problemov učence bolj motivira, saj je to neka nova oblika dela, ki je niso vajeni, hkrati pa vključuje neko motorično aktivnost in spretnost. Poleg fine motorike krepimo tudi raziskovalno delo učencev ter odkrivanje in uporabo geometrijskih načel in pravil v praksi. Še zdaleč ne bomo zajeli vsega, kar bi lahko v šoli s prepogibanjem papirja počeli, vendar je kljub vsemu v nalogi vključenih veliko primerov, predvsem iz geometrijskega področja.

Največja motivacija za to nalogo je, da je literature v slovenskem jeziku, ki vključuje uporabo origamija pri pouku matematike, zelo malo. Na to temo je spisanih le nekaj seminarskih, diplomskih in magistrskih del, vendar je tematika v njih ožja. Ta naloga tako zajema širše področje, zaradi česar je tudi daljša, vendar je tako tudi zaradi namena kasnejše uporabe pri pouku matematike ali matematičnem krožku. Opisane matematične teme so namreč dovolj enostavne, da se jih da večinoma predelati v eni šolski uri. Zato iskreno upam, da bo naloga koristila še kateremu pedagogu, ki bi si želel svoj pouk matematike popestriti na nov in zanimiv način.

V geometriji preko Evklidovih postulatov ter uporabe evklidskih orodij (neoznačeno ravnilo ter šestilo) raziskujemo, kaj vse lahko v evklidski ravnini skonstruiramo brez uporabe drugih pravil ali orodij. V prvem poglavju si bomo pogledali povezavo med evklidskimi ter origami konstrukcijami in ugotovili, da lahko z origamijem konstruiramo še kaj, česar z evklidskimi orodji ne moremo. Nato si bomo v naslednjem poglavju pogledali, kako konstruiramo tangente na stožnice in zakaj konstrukcije tako delujejo. V tretjem poglavju sledi prepogibanje kvadratnega lista papirja, ki nam lahko stranice kvadrata razdeli v zanimivih razmerjih. Pogledali si bomo Hagove izreke in se naučili, kako stranico razdelimo na poljubno število enako dolgih delov. Poleg kvadrata je zanimiva tudi konstrukcija enakostraničnega trikotnika, ki ga lahko dobimo na več načinov, poleg teh pa si bomo v četrtem poglavju pogledali še konstrukcije tudi kakih drugih pravilnih n-kotnikov.

Po tej bolj osnovni geometriji se bomo v petem poglavju podali na vznemirljivo reševanje dveh starogrških problemov, ki ju z evklidskimi orodji – dokazano – ne znamo rešiti; to sta *podvojitev kocke* (oz. konstrukcija $\sqrt[3]{2}$) in *trisekcija kota*. Izkaže se, da se da vsakega od njiju rešiti celo na več kot en način!

Nazadnje pa se bomo posvetili še najbolj obsežnemu poglavju, ki deloma zapusti področje geometrije. Pogledali si bomo, kako lahko s pomočjo prepogibanja papirja rešujemo kvadratne in kubične enačbe, za bolj zahtevne pa bosta zanimivi podpoglavji o reševanju enačb 4. in 5. reda.

Zapustimo sedaj malo jezerce umetelno zloženih ladjic in žerjavov ter se podajmo na širne vode globokega oceana matematičnega origamija.

2 Evklidske in origami konstrukcije

Kraj in čas izvora origamija nista jasno določena. Nekateri viri zatrjujejo, da izhaja iz Japonske, drugi ga pripisujejo Kitajski, tretji se ne strinjajo z nobeno od teh dveh možnosti. Možno je, da so umetnost zlaganja odkrili še pred izumom papirja, za katerega je l. 105 po Kr. poskrbel kitajski dvorni uradnik Cai Lun, saj se da npr. zlagati tudi robce iz blaga. Je pa papir idealen material za zlaganje. Japonska beseda *origami* kot umetnost zgibanja papirja ("oru" – prepogibati, "kami" – papir) se je na Daljnem vzhodu začela uporabljati proti koncu 19. stoletja.

Povečano zanimanje za origami v matematiki se je začelo v 2. pol. 20. stoletja in s seboj prineslo množično izhajanje literature o povezavi origamija z matematiko, fiziko, astronomijo, računalništvom, kemijo in še mnogimi drugimi vedami [9]. V angleščini je tako za matematično raziskovanje s prepogibanjem papirja nastal izraz "*origamics*", ki bi ga lahko po zgledu poimenovanj veliko znanstvenih disciplin (*mathematics* – matematika, *physisc* – fizika itd.) prevedli kot "origamika" [5] (uradnega izraza v slovenščini še ni).

2.1 Evklidovi postulati in evklidske konstrukcije

Preden si pogledamo, kaj lahko s prepogibanjem papirja konstruiramo, se spomnimo, na čem temelji evklidska geometrija. Za njenega očeta štejemo grškega matematika Evklida[1], ki je napisal zelo znano zbirko trinajstih knjig pod skupnim imenom *Elementi*. V njih obravnavana snov temelji na strogo logični izpeljavi izrekov iz definicij[2], aksiomov[3] in postulatov[4]. Še danes večina osnovno- in srednješolske geometrije izvira prav iz prvih šestih knjig Elementov.

Prva knjiga nas še posebej zanima. V njej je Evklid najprej definiral osnovne pojme – točka, premica, površina, ravnina, ravninski kot, pravi kot, ostri kot, topi kot, krog, središče kroga, premer, enakostranični in enakokraki trikotnik, kvadrat . . . ter nazadnje upeljal še pojem vzporednih premic. Nato je zapisal znamenitih pet postulatov [3], iz katerih izhaja vsa evklidska geometrija:

Postulat P1. Med dvema poljubnima točkama je mogoče narisati ravno črto.

Postulat P2. Vsako ravno črto je mogoče na obeh koncih podaljšati.

Postulat P3. Mogoče je narisati krožnico s poljubnim središčem in poljubnim polmerom.

Postulat P4. Vsi pravi koti so med seboj skladni.

[1] O življenju tega aleksandrijskega učenjaka ne vemo nič gotovega, je pa zelo verjetno živel za časa prvega Ptolemaja (faraon v času 306–283 pr. Kr.) [1, str. 61].

[2] *Definicija* je nedvoumno jasna opredelitev novega pojma.

[3] *Aksiom* je temeljna resnica ali načelo, ki ne potrebuje dokazov (oz. dokaz sploh ne obstaja) in vedno velja.

[4] *Postulat* je predpostavka oz. zahteva. Evklid med aksiomi in postulati ni postavil jasne razlike, Aristotel pa je postulat od aksioma ločil po tem, da gre pri prvem bolj za hipotezo kot temeljno resnico, vendar se njene veljavnosti ne dokazuje, temveč privzame kot veljavno [3, str. 122]. V primeru petega Evklidovega postulata se bomo spomnili, da nam to, ali ga privzamemo ali ne, poda različne geometrije. Danes med pojmoma ne ločujemo [6, str. 2].

Postulat P5. Če poljubni ravni črti sekamo s tretjo ravno črto (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici, če ju dovolj podaljšamo, sekata na tej strani prečnice.

Opomba 2.1. Vemo že, da je postulat P5 ekvivalenten *aksiomu o vzporednicah*, ki pravi, da skozi dano točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici.

Evklidske konstrukcije so konstrukcije premic, kotov, krožnic in drugih geometrijskih figur, ki jih je mogoče konstruirati le z uporabo t.i. *evklidskih orodij*:

- neoznačeno in neskončno dolgo ravnilo (angl. *straightedge*)
- šestilo, ki ne prenaša razdalj (ko ga dvignemo od podlage, se njegova kraka zložita skupaj)

Formalno so torej edine dovoljene konstrukcije tiste iz postulatov P1– P3 (seveda privzamemo, da so konstruktibilne tudi točke). Vendar je to dovolj, da lahko le z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruiramo premice, kote, simetrale kotov in daljic, krožnice in še mnogo drugega. V resnici se da skonstruirati toliko geometrijskih figur, da se matematiki raje vprašamo, česa pa se s tem orodjem *ne* da skonstruirati. In tu pridemo do motivacije za uvedbo origami konstrukcij, saj lahko z njimi npr. rešimo kar dva od treh znamenitih starogrških problemov, ki jih z evklidskim orodjem ne moremo. Več o tem sledi v poglavju 6.

2.2 Origami aksiomi in origami konstrukcije

V nalogi se bomo omejili le na prepogibanje v ravnini, tj. list papirja vzamemo za model evklidske ravnine, s prepogibanjem pa v tej ravnini tudi ostanemo. Nadalje pregibe konsktruiramo le po enega naenkrat in v ravni črti, prepovedana pa je uporaba kakršnegakoli orodja (npr. škarje in lepilo). Bralec je ob branju povabljen, da opisane konstrukcije tudi sam preizkusi na listu papirja, sicer pa se jih da brez večjih težav predstavljati tudi brez fizičnega materiala. Pri izbiri papirja je priporočljiv rahlo prosojen papir, ki za lažje prepogibanje dopušča opažanje označb tudi na drugi strani lista.

Ker so pregibi torej ravne črte, nam služijo kot modeli premic. Na začetku, ko imamo pred seboj le (po možnosti kvadraten) list papirja, so naše premice njegove stranice. Manjkajo nam samo še modeli točk. To so ravno oglišča našega lista papirja, nadaljne točke pa dobimo kot presečišča premic, torej presečišča pregibov.

Japonski matematik Humiaki Huzita je l. 1992 (REFERENCA 26 v uni knjigi, pa v bistvu ugotovi, kdo je original avtor in kdo je kasneje koliko aksiomov rediscoveral!) zapisal seznam pravil, s katerimi lahko opišemo vse operacije, ki jih lahko naredimo s prepogibanjem papirja. (najprej 6, pol 7, kako je to blo?????) Konstrukcije, ki jih dobimo z upoštevanjem teh pravil, bomo poimenovali kar *origami konstrukcije*. Ta pravila so znana pod imenom ... aksiomi, vendar je izbira izraza "aksiom" mogoče manj primerna, saj za nekatere od njih opisana konstrukcija ob neprimerno izbranih točkah in premicah sploh ne obstaja. Kljub temu bomo zaradi razširjenosti rabe to ime ohranili [9, str. 7].

Najprej naštejmo te aksiome, potem pa si ob sledečih slikah poglejmo še prikaz opisanih konstrukcij. Videli bomo, da moramo pri nekaterih aksiomih ločiti več primerov [8, 9].

Aksiom O1. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p, ki gre skoznju.

Aksiom O2. Za poljubni točki A in B obstaja natanko en pregib p, da se točki pokrijeta.

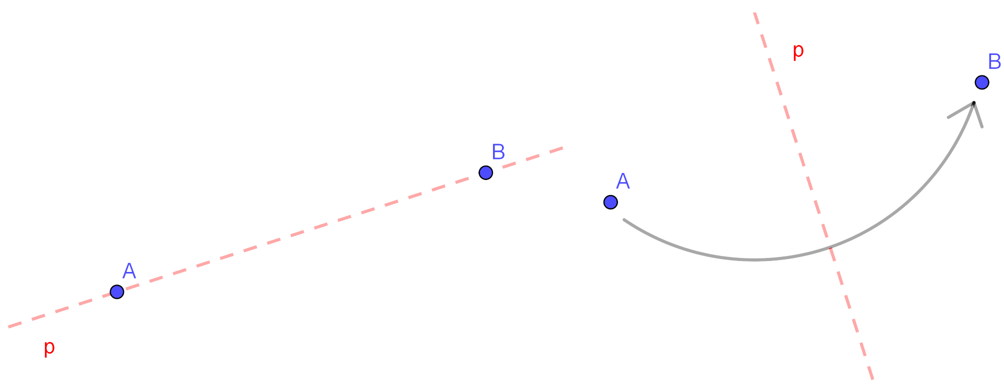
Aksiom O3. Za poljubni premici a in b obstaja pregib p, ki ju položi eno na drugo.

Aksiom O4. Za poljubno točko A in premico a obstaja natanko en pregib p skozi točko A, ki je pravokoten na premico a.

Aksiom O5. Za primerno izbrani točki A in B ter premico a obstaja pregib p skozi točko B, ki točko A postavi na premico a.

Aksiom O6. Za primerno izbrani točki A in B ter premici a in b obstaja pregib p, ki točko A postavi na premico a ter točko B na premico b.

Sedaj za vsak aksiom posebej poglejmo njegovo konstrukcijo. Iz slike 1 je očitno, da je aksiom O1 ekvivalenten postulatu P1, aksiom O2 pa nam poda konstrukcijo simetrale daljice AB (pregib naredimo tako, da list papirja uvijemo tako, da se točki prekrijeta, nato pa ga z roko pogladimo, da ga sploščimo. Na pregibu – premici – so točke, ki so enako oddaljene od točk A in B, torej gre res za simetralo daljice AB).

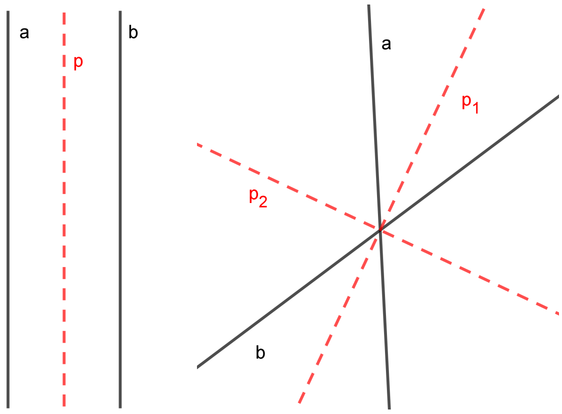


Slika 1: Aksioma O1 (levo) in O2 (desno).

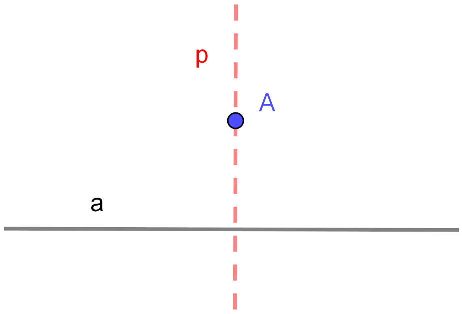
Nadalje opazimo, da nam aksiom O3 konstruira obe simetrali kota, ki ga določata premici in njuno presečišče, v primeru vzporednih premic pa dobimo še tretjo vzporednico, ki leži na sredi med njima (slika 2). Zato sta tu možna po dva ali, v posebnem primeru, en pregib.

Aksiom O4 nam podaja konstrukcijo pravokotnice na premico skozi dano točko (slika 3). Pri tem je vseeno, ali točka leži na premici ali ne. Pregib opravimo tako, da premico položimo samo nase in pazimo, da je točka A v pregibu (ki ne more biti nič drugega kot pravokoten na premico). Tako imamo res le en možen pregib.

Aksiom O5 je še posebej zanimiv. Najprej si poglejmo njegovo konstrukcijo. Vzemimo točki A in B ter premico a. Iščemo pregib skozi B, ki A položi na premico a. Ker točka B leži na pregibu, je enako oddaljena tako od točke A kot tudi njene

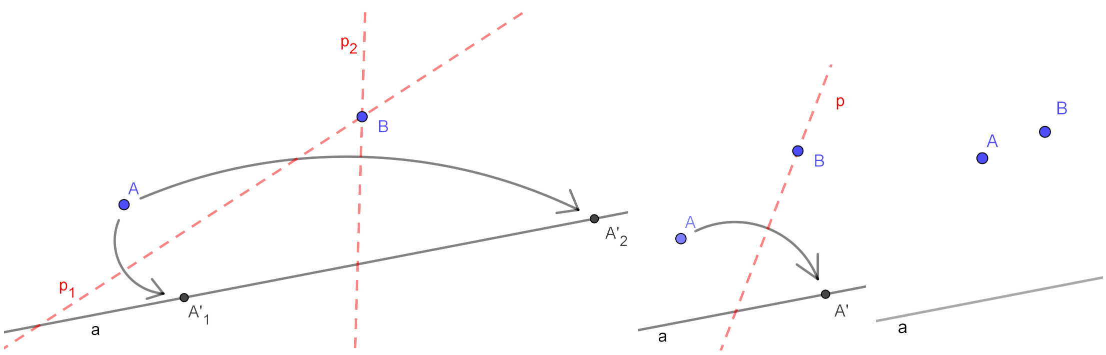


Slika 2: Aksiom O3 v obeh možnih primerih.



Slika 3: Aksiom O4.

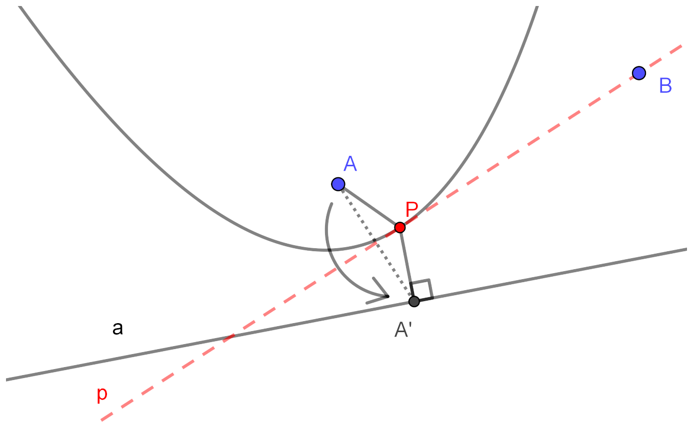
slike A' na premici a, torej je A' ravno presečišče premice a in krožnice s središčem v B ter polmerom AB. Pregib je simetrala daljice AA', seveda pa po konstrukciji poteka skozi točko B. Če velja $d(A, B) > d(B, a)$, sta presečišči s premico a dve (in s tem tudi dva možna pregiba), v primeru $d(A, B) = d(B, a)$ je presečišče eno samo (in s tem en možen pregib), saj je premica a tangentna na omenjeno krožnico, v zadnjem primeru, ko velja $d(A, B) < d(B, a)$, pa presečišč (in s tem tudi pregiba) ni (slika 4).



Slika 4: Aksiom O5 v vseh treh primerih.

Zgodba aksioma O5 se tu še ne zaključi. Ker na pregibu ležijo vse točke, ki so enako oddaljene od točke A in A', to velja tudi za točko, ki jo dobimo kot presečišče pregiba in pravokotnice na premico a skozi A'. Za tako točko P velja

$d(A, P) = d(P, a)$ in je enolično določena (v srednjem primeru na sliki 4 je to kar točka B). Iz tega sledi, da točka P leži na paraboli z goriščem A in premico vodnico a. Pregib seka parabolo le v tej točki (ker je edina enako oddaljena od gorišča in vodnice), torej je konstruiran pregib ravno *tangenta na to parabolo* (slika 5).



Slika 5: Pregib iz aksioma O5 kot tangenta na parabolo z goriščem v A in premico vodnico a.

Tukaj omeni, da se s tem da reševat kvadratne enačbe, ampak še pogruntej kako. Pa da se bomo s tem ubadali v poglavju o enačbah.

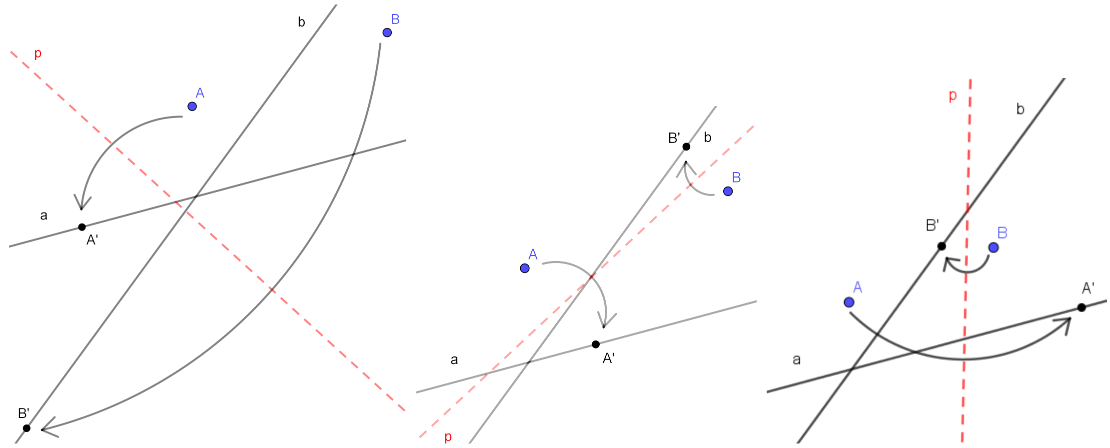
Opazimo, da se vse ravnokar naštete konstrukcije da konstruirati z evklidskim orodjem. V resnici velja še več – Zore v [9] dokazuje, da so origami konstrukcije, upoštevajoč aksiome O1– O5 ekvivalentne tistim z neoznačenim ravnilom in šestilom. Pri tem pa je izvzet aksiom O6, kar kaže na to, da lahko z origamijem storimo še kaj več, npr. rešimo kakšen problem, ki ga z evklidskim orodjem ne moremo.

Poglejmo si še šesti aksiom O6. Konstrukcijo začnemo z upogibom papirja, ki točko A položi na premico a, potem pa točko premikamo po premici, dokler se tudi točka B ne stakne s premico b. Takrat naredimo pregib. Za enako izbiro točk in premic je lahko možnih več pregibov (gl. sliko 6), če pa sta premici vzporedni in je njuna medsebojna razdalja večja od razdalje med točkama, pregib sploh ne obstaja (to lahko bralec ugotovi ob preprostem razmisleku, kako se giba točka B med premikanjem točke A po premici a).

Kaj je geometrijski pomen tega aksioma? Če smo pri aksiomu O5 dobili tangento na parabolo, potem lahko takoj vidimo, da pri aksiomu O6 dobimo *skupno tangento na dve paraboli* – ena ima gorišče v točki A in premico vodnico a, druga pa gorišče v točki B ter premico vodnico b.

Izkaže se, da konstrukcije pregiba iz aksioma O6 ne moremo opraviti z evklidskim orodjem. Prefinjen način, kako to dokazati, je preko rešitve starogrškega problema o trisekciji kota. V poglavju 6 bomo spoznali več postopkov, ki nam poljuben kot razdelijo na tri skladne dele, pri tem pa uporabimo pregib iz aksioma O6. Ker vemo, da trisekcija kota z evklidskim orodjem ni mogoča (algebraični dokaz DEJ TU EN VIR ZA DOKAZ), posledično tudi konstrukcija šestega aksioma s tem orodjem ne obstaja.

Opazimo lahko, da je aksiom O5 v resnici poseben primer aksioma O6, saj pri njem ena izmed točk že leži na premici in mora tako pregib potekati skoznjo. Kljub



Slika 6: Aksiom O6 (primer treh pregibov).

temu ga zaradi povezave prvih petih aksiomov z evklidskimi konstrukcijami ohranimo med pravili.

Za mnoge je presenetljiv zaključek, da so origami konstrukcije preko zgornjih aksiomov močnejše od evklidskih. Kako, ko pa s prepogibanjem papirja ne moremo "zarisati" krožnice, kot jo lahko s šestilom? Prednost origamija se skriva v količini števil, ki jih lahko konstruiramo. Če imamo dano krožnico z nekim polmerom ali množico daljic, lahko z ravnilom in šestilom konstruiramo linearne kombinacije, večkratnike ali kvadratne korene teh razdalj. Vsa števila, ki jih lahko konstruiramo z evklidskim orodjem, lahko analitično zapišemo kot rešitve kvadratne enačbe. Tako lahko rešimo vsako enačbo 2. reda ali celo enačbo višjega reda, ki se jo da zreducirati na kvadratno enačbo, če so njeni koeficienti konstruktibilni. še dokončaj dilemo, ker se krožnice kao ne da konsrtuirati z origamijem (a se je res ne da?), pa katera vse števila lahko konstruiramo z evklidskim orodjem in katera npr. ne moremo, pa kako to dokažemo npr. z algebro

3 Zlaganje stožnic

Iz didaktičnega vidika zelo zanimivo poglavje nam predstavlja konstrukcije tangent na stožnice s prepogibanjem papirja. pogruntej in poblefirej še kej za uvod

3.1 Parabola

V prejšnjem poglavju smo spoznali aksiom O5, ki nam je podal tangento na parabolo z goriščem A in premico vodnico a (slika 5). Tangenta je bila enolično določena s točko B. V splošnem te točke ne potrebujemo – katerikoli pregib, ki točko A preslika na premico a, je neka tangenta na parabolo.

Na sliki REFERENCA je narisan potek konstrukcije, ki nam poda množico pregibov – tangent na parabolo. Za premico vodnico si zaradi enostavnosti izberimo kar en rob lista papirja ter s svinčnikom nekje označimo gorišče. List prepogibamo tako, da izbrani rob pokrije točko. Rob nato premikamo po malih korakih v obe strani in tako se nam po vedno več pregibih prikaže vedno bolj gladek obris parabole.

SLIKA korakov (kot v Zore2022)

4 Prepogibanje kvadrata

5 Konstrukcija pravilnih n-kotnikov

6 Reševanje nerešljivih starogrških problemov

7 Reševanje enačb

8 Naloge

1. Zapiši korake prepogibov, ki konstruirajo vzporednico k dani premici skozi točko, ki ne leži na tej premici.

Literatura

[1] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* (ur. C. Velkovrh), prev. T. Bohte, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1986.

[2] K. Haga, *ORIGAMICS: Mathematical Explorations Through Paper Folding*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

[3] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1 (Books I and II)*, Dover Publications, Inc., 1956.

[4] T. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*, Cambridge University Press, 2020, dostopno na `https://books.google.si/books?id=LdX7DwAAQBAJ`.

[5] S. Maraž, T. Božič in M. Torkar, *ORIGAMIKA: Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja*, raziskovalna naloga, 2016.

[6] G. E. Martin, *Geomteric Constructions*, Springer New York, 1997.

[7] N. Robinson, *History of origami*, 2024, dostopno na `https://www.britannica.com/art/origami/History-of-origami`.

[8] M. Hvidsten, *Geometry with Geometry Explorer* (ur. R. E. Ross), The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.

[9] T. Zore, *Origami geometrija*, magistrsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2022.