Tema: Limita funkcije
Oblika: frontalna
Poglavje: Računanje s funkcijami
Pripomočki: tabla

(Ponovimo glavno o funkcijah, ker itak vse pozabijo od prejšnjih let)

Funkcija = predpis, ki vsakemu elementu prve množice priredi natanko en element druge množice.

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$
$$f : x \mapsto 3x + 2$$
$$f(x) = 3x + 2$$

Vsaka funkcija ima določen:

- predpis
- definicijsko območje *(definirano za x-e)*
- zalogo vrednosti *(definirano za y-e)*

Definicijsko območje ni vedno definirano za vse x-e iz realne osi, npr. *(naj sami predlagajo)* $f(x) = \log_a x, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = \tan x \ldots$

(lahko se še kaj ponovi, npr. sodost, lihost ...)

Operacije funkcij: imejmo funkciji f in g na intervalu $[a, b]$. Potem za vsak x iz tega intervala velja:

- VSOTA/RAZLIKA funkcij: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- PRODUKT funkcij: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- KVOCIENT funkcij: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Vaje:

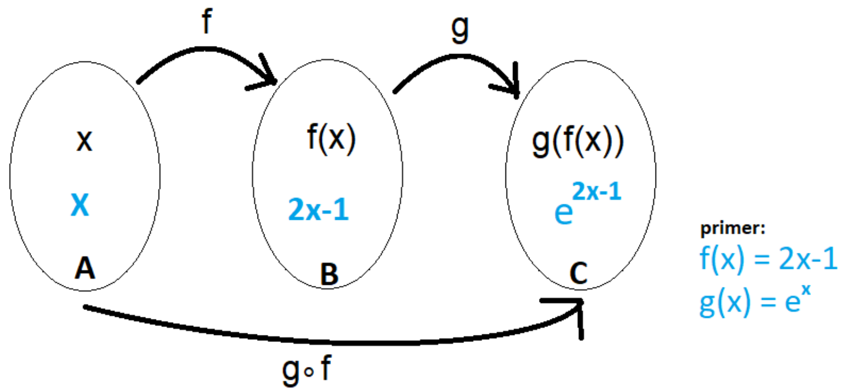
- *Preproste vaje z podanima f in g ter različnimi x-i (7, 2, splošen x, $3x$, $4 - 2x$), lahko jih tudi narišejo*

SESTAVA ali KOMPOZITUM FUNKCIJ:

Ana, Blaž, Cene in Darja pišejo test. Funckija f vsakemu testu priredi odstotek doseženih točk, funkcija g pa odstotkom priredi ustrezno oceno *(pomoč s slikco – tri množice s puščicami)*.

Npr. $f(\text{Ana}) = 71, g(71) = 3 \rightarrow g(f(\text{Ana})) = 3$, kar z oznako zapišemo kot $(g \circ f)(\text{Ana}) = 3$.

Splošno za $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ in $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ je $g \circ f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$:



Vaje:

- *Preproste vaje, kjer iz sestavljene funkcije ugotavljajo, katera je zunanja* (g) *in katera notranja* (f)
- *kompozitum* f *in njenega inverza je* $x \mapsto x$
- *iz danih* f *in* g *računajo* $f \circ g$ *in* $g \circ f$ *ipd.*

Tema: Limita funkcije
Poglavje: Zveznost funkcije
Oblika: frontalna
Pripomočki: tabla

Funkcija je **zvezna**, če je njen graf neprekinjena črta (linearna funkcija, kvadratna, polinomi, logaritemska ...). *(torej pri zveznosti ne gledaš D_f, ampak celo realno os!)*

Racionalna funkcija ni zvezna v polih.

Vaje:

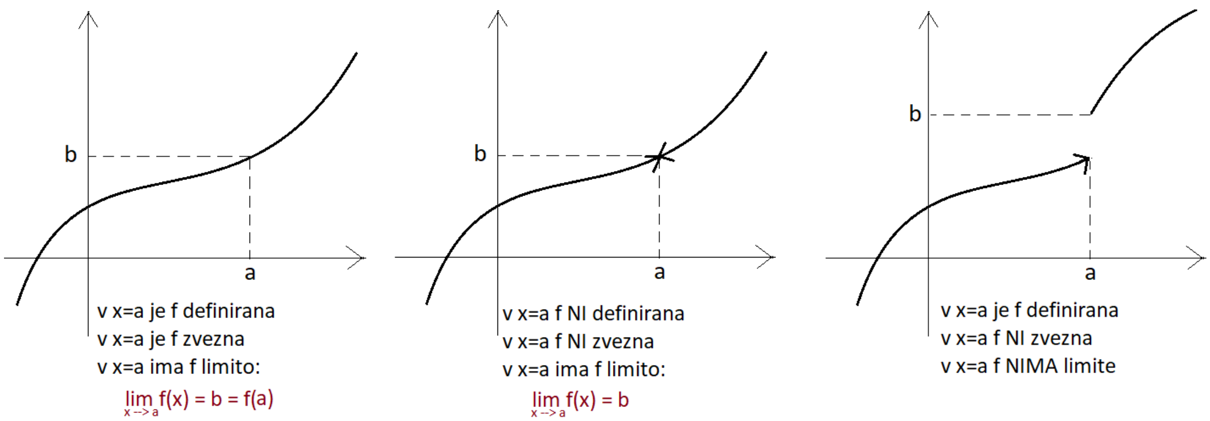
- *Risanje kosoma definiranih funkcij in ugotavljanje točk nezveznosti. (tudi, če se črta grafa "le" zlomi, je funkcija tam zvezna)*

(najprej tako definiramo zveznost, ker jim je najbolj enostavna za razumeti, brez tistih limit. Sedaj gremo na limite in potem tam omenimo še enkrat zveznost.)

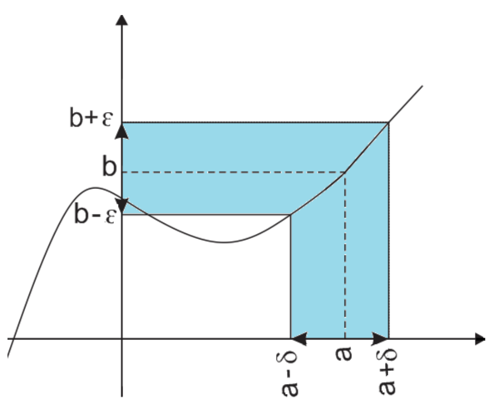
Tema: Limita funkcije **Poglavje:** Limita funkcije
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Pojem limite in okolice so spoznali že v zaporedjih, zato lahko najprej narišeš primer zaporedja (grafični 2D prikaz) z limito – asimptoto, potem pa pikice povežeš (kao funkcija) in voila – tudi funkcije imajo lahko limite)

Poglejmo si tri primere funkcije:



Število b je **limita funkcije** f v točki a, če za vsak x iz okolice a velja, da so funkcijske vrednosti v izbrani okolici b.



(pri tretji slikci za majhno okolico b-ja vsaka vrednost f levo od a pade ven iz te okolice, zato tam limita ne obstaja.)

(Meni se ne zdi potrebno, da jih matramo s temi epsiloni in deltami :D)

(dopolnimo definicijo zveznosti:)

Funckija je **zvezna** v a, če je v a definirana in ima limito. Limita je v tem primeru kar vrednost f v a – $f(a)$. *(prvi primer iz slikice)*

Računanje z limitami: *(intuitivno, saj veljo enako kot za zaporedja)*

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, če $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} c = c$

Kako računati npr. $\lim_{x\to 3} x+8$?

1. Najprej poskusi vstaviti vrednost.
2. Če v imenovalcu dobiš 0, poglej, ali se da kaj okrajšati z razstavljanjem ali razširjanjem

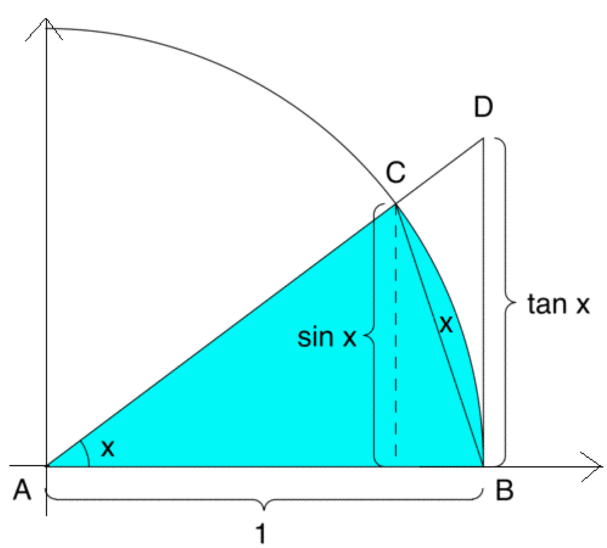
Vaje:

- *Enostavne naloge, kjer samo vstavijo vrednost noter in izračunajo*
- *primeri, kjer imenovalec pride 0, ampak se problematični deli okrajšajo, ko uporabimo npr. Vietovo pravilo, razliko kvadratov, racionaliziramo števec*

Kaj lahko poveš o funkciji, če veš, da: *(naj sami razmislijo)*

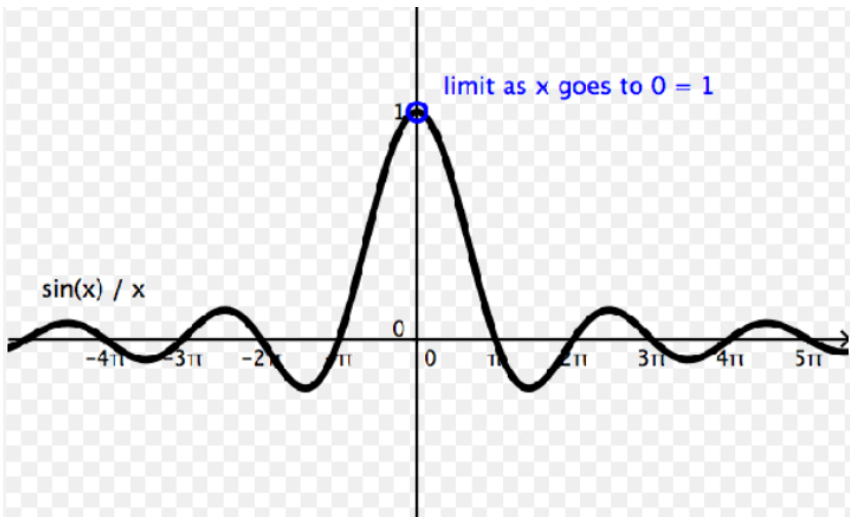
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \to f$ je zvezna v a
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \to f$ ima vodoravno asimptoto $y=a$ *(slikca!)*
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ali $-\infty \to f$ ima v a pol sode stopnje (pri polu lihe stopnje limita ne obstaja)

Limita trigonometrijske funkcije:
najprej nekaj limit, kjer se vseeno da vstaviti in ni problema. Potem pa problem: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$, kaj pa tu?



$$\sin x < x < \tan x \;/ : \sin x$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \;/^{-1}$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \;/ lim_{x\to 0}$$
$$lim_{x\to 0} \cos x < lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < lim_{x\to 0} 1$$
$$1 < lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$

Sledi $lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *(Lahko pokažeš slikco $\frac{\sin x}{x}$)*



(ZANIMIVOST: Kaj pa, če imamo x podan v stopinjah? Potem v sendviču neenakosti v prvi vrstici nimamo x, ampak $\frac{x}{360^\circ} 2\pi$, torej dobimo v limiti $\frac{\pi}{180^\circ}$ namesto 1.)

Še nekaj vaj, kjer se to uporabi, tudi na problemu (razširiš števec in imenovalec z argumentom v sinusu), upoštevaš trigonometrične lastnosti npr. dvojni koti ipd.