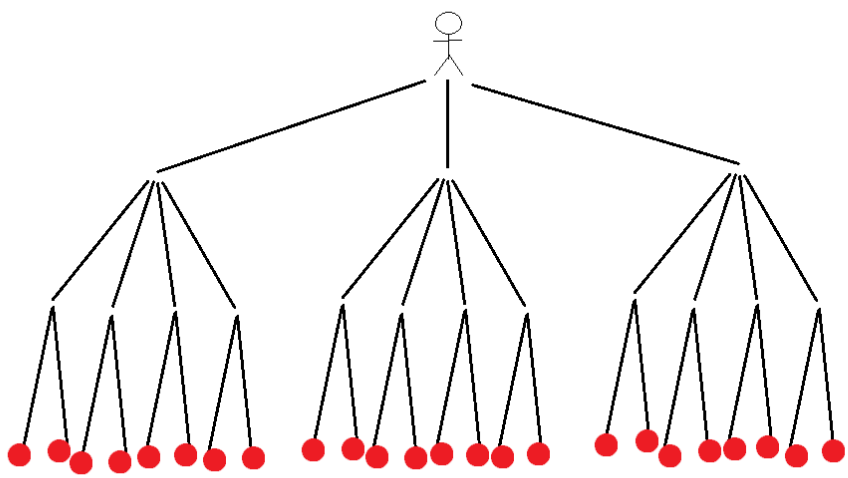
Tema: Kombinatorika
Oblika: frontalna
Poglavje: Osnovni izrek kombinatorike
Pripomočki: tabla

Motivacija:

- (OSNOVNI PRIMER za **pravilo produkta**) V omari imamo 3 hlače, 4 puloverje in 2 pokrivali. Na koliko načinov se lahko oblečemo?

  Rešujemo kar z risanjem **kombinatoričnega drevesa** = grafičen prikaz vseh možnosti. Ugotovimo, da je odgovor $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.



- (OSNOVNI PRIMER za **pravilo vsote**) V omari imamo 3 dolge in 4 kratke hlače. Na koliko načino se lahko oblečemo?

  Na $3 + 4 = 7$ načinov.

Kombinatorika je enostavno kar preštevanje.

(Naslednji pravili sprotoma povezuj s primeroma od prej)

Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta: Imamo proces odločanja, sestavljen iz k zaporednih faz. V prvi fazi lahko sprejmemo n_1 odločitev, v drugi n_2 ..., v k-ti pa n_k odločitev. Odločanje v vsaki fazi je neodvisno od prejšnjih odločitev. Število vseh sestavljenih odločitev je produkt vseh odločitev v posameznih fazah:

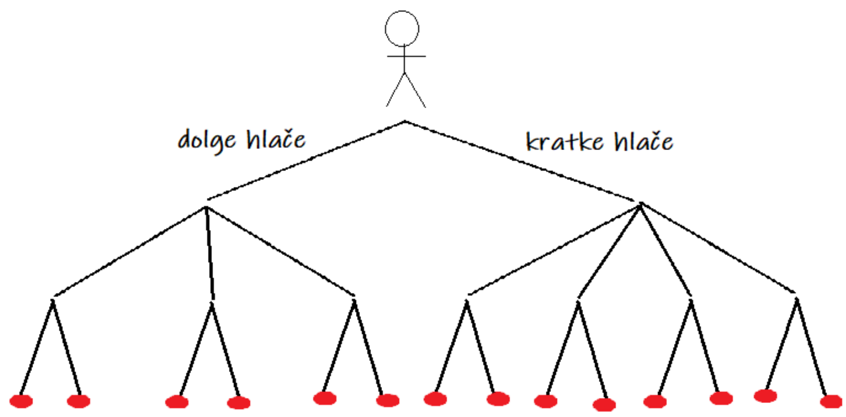
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Pravilo vsote: Če izbiramo med n_1 možnostmi iz prve množice ali n_2 možnostmi iz druge množice ali $\ldots n_k$ možnostmi iz k-te množice in so izbori iz vsake množice nezdružljivi z izbori iz drugih množic, potem je vseh izborov:

$$M = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Še primer kombinacije teh dve pravil:

- Na koliko načinov si lahko oblečem 3 dolge ali 4 kratke hlače in 2 majici. *(pomoč s slikco)*
  $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = (3 + 4) \cdot 2 = 14$



Vaje:

- *registrske tablice (gl. učbenik)*
- *razne vaje za vsako pravilo posebej in za kombinacijo obeh pravil*

(Za naprej – ta poimenovanja, "variacije", "kombinacije" itd. pač oznake zanje pač omeni, ker je treba, ma point mora biti na tem, da znajo s kmečko pametjo rešit primer in ne razmišljat, a gre z variacije s ponavljanjem in kakšna je že formula ipd.)

Tema: Kombinatorika **Poglavje:** Permutacije
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Uvodna motivacija:

- 8-članska družina se usede h kosilu za eno stranico mize. Na koliko načinov se lahko usedejo?

  (Recimo, da zapolnjujemo stole od leve proti desni. Na prvega se lahko usede 8 ljudi – lahko se usede mati, babica, sin, vnuk . . . . Na naslednje mesto se lahko usede 7 ljudi, ker eden že sedi. In gremo do konca. Ko ostane en stol, ostane tudi ena oseba.)

  $$\underline{8}\ \ \underline{7}\ \ \underline{6}\ \ \underline{5}\ \ \underline{4}\ \ \underline{3}\ \ \underline{2}\ \ \underline{1}$$

  Odgovor: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$ možnosti.

  (Kot zanimivost:) Koliko časa potrebujejo, da porabijo vse kombinacije, če skupaj obedujejo trikrat na dan? (13.440 dni $\approx$ 37 let)

- Na koliko načinov lahko razporedimo 4 različne kroglice v vrsto? $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24)$

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Permutacija = razporeditev n različnih elementov na n mest. Število permutacij n elementov običajno označimo z P_n.
(število elementov = število mest)

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

($n!$ = "n fakulteta" oz. "n faktorsko". To je produkt vseh števil od 1 do n.)
Dogovor: $0! = 1$ *(pa lih paše iz $n! = n \cdot (n-1)!$)*

Vaja: Na obisk prideta 2 Španca, 3 Nemci in 4 Slovenci. V kinu je v eni vrsti ravno 9 sedežev. (pomoč s črticami in krogci, ki zajemajo isto narodnost. Naj čimveč sami predlagajo)

- *na koliko načinov se lahko usedejo v vrsto, brez omejitve?* $(9!)$
- *Na koliko načinov se lahko usedejo, če naj ljudje iste narodnosti sedijo skupaj?* $(3! \cdot 2! \cdot 3 \cdot 4)$
- *Kaj pa, če morajo skupaj sedeti le Nemci, za ostalo pa ni važno?* $(7! \cdot 3!)$
- *Nemci sedijo na začetku vrste.* $(3! \cdot 6!)$
- *Španca sedita vsak na svojem koncu vrste* $(2! \cdot 7!)$
- *(ZANIKANJE) Koliko je možnosti, da Slovenci ne sedijo vsi skupaj? (vse možnosti MINUS možnosti, da sedijo vsi skupaj* $= 9! - 4! \cdot 6!$*)*
- *Slovenci sedijo na stolih s sodo številko* $(4! \cdot 5!)$

Ostale vaje:

- $6! - 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4! - 4! = (30 - 1) \cdot 4! = 29 \cdot 24 = 696$
- $\frac{(n+1)!}{(n-3)!} =$ *? (števec razpišeš na daljši del in pokrajšaš imenovalec)*
- $\frac{7!}{3!} =$ *?*
- *Upgrade motivacijske naloge: na koliko načinov se 8 oseb lahko usede za okroglo mizo? (SLIKCA! Če se vsak premakne za eno mesto vstran, je razporeditev enaka, zato eno mesto fiksiramo za prvo osebo in ostale razporedimo na preostalih 8 mest ALI od vseh možnosti odstranimo premike za eno mesto):* $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = \frac{9!}{9} = 8!$

Permutacije n elementov s ponavljanjem:

Imamo zeleno, modro in 3 rdeče kroglice, ki jih ne razlikujemo. Na koliko načinov jih lahko razporedimo v vrsto? *(Če jih razlikujemo, je odgovor* $5!$*, tako pa vrstni red rdečih med seboj ni pomemben, zato delimo s* $3! \to 20$*)*

Še kakšen podoben primer, npr. permutacije črk besede ANANAS $= \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$

Tema: Kombinatorika **Poglavje:** Variacije
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Uvodna motivacija: V vrečki imamo 5 žog različnih barv. Trikrat zapored izvečemo žogo iz vrečke in jo postavimo v vrsto. Koliko barvnih vzorcev lahko dobimo? *(Za prvo mesto je 5 možnosti, za drugo 4 ter za tretje 3, torej $5 \cdot 4 \cdot 3 =$ (NAMIG) $= \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-2)!}$)*

Variacija reda r med n elementi = razporeditev n različnih elementov na r mest, kjer je $r < n$. Število teh razporeditev običajno označimo z V_n^r.

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

Variacija s ponavljanjem = razporeditev, kjer se elementi lahko ponavljajo.

Vzamemo vrečko z žogami iz prve naloge in trikrat izvlečemo žogo, ampak jo takoj nato vrnemo. Koliko vzorcev lahko dobimo? *(Za prvo mesto je 5 možnosti, za drugo tudi 5 (ker smo prvo žogo vrnili) in za tretje spet 5, skupaj $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 \rightarrow$ naj sklepajo na formulo)*

$${}^{(p)}V_n^r = n^r$$

Vaje:

- *vsega sorte*

Tema: Kombinatorika **Poglavje:** Kombinacije
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Uvodna motivacija: Pika Nogavička ima 5 različnih nogavic. Koliko parov lahko izbere od njih?

12	21	31	41	51	12	~~21~~	~~31~~	~~41~~	~~51~~
13	23	32	42	52	13	23	~~32~~	~~42~~	~~52~~
14	24	34	43	53	14	24	34	~~43~~	~~53~~
15	25	35	45	54	15	25	35	45	~~54~~
vrstni red pomemben					vrstni red nepomemben				
5 * 4 = 20					10				

Kombinacija reda r med n elementi = razporeditev n različnih elementov na r mest, kjer *vrstni red ni pomemben.* Število teh razporeditev običajno označimo z C_n^r.
(Na to lahko gledamo kot variacije – n elementov razporejamo na r mest, ker pa vrstni red ni pomemben, delimo še s številom mest, tj. r $\rightarrow$ intuitivno pridemo do formule in uvedemo tisto oznako "n nad r" = "od n izbereš r":)

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

Vaje:

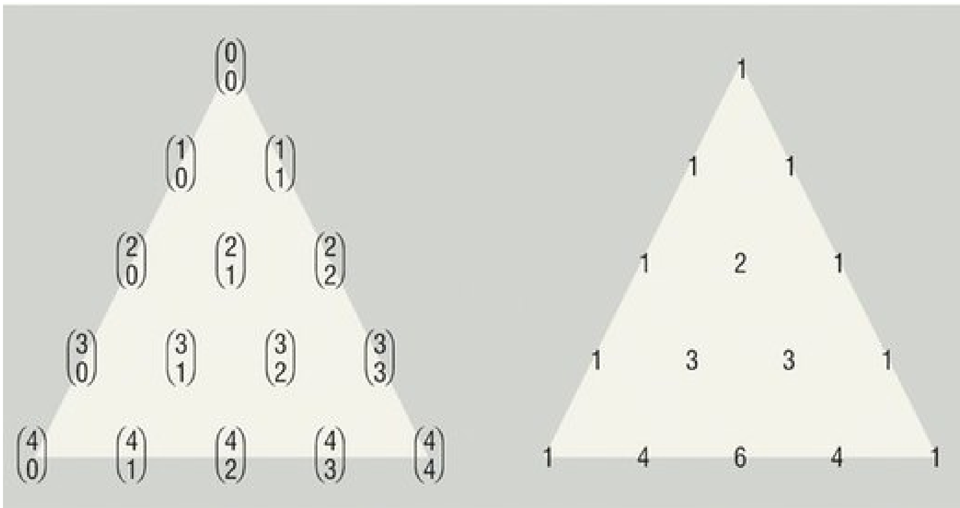
- *par enostavnih vaj iz binomskega simbola. (lahko ugotovimo, da r pove, koliko členov vzamemo v produktu v števcu: $\binom{100}{3} = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{3!}$, ampak to ni za se napiflat!)*
- *Zapiši potenčno množico množice $\mathcal{A} = a, b, c, d$. Koliko je podmnožic s tremi elementi? Koliko je vseh podmnožic?*
- *Primeri z vlečenjem kroglic iz škatlic, parov ljudi ...*

Lastnosti binomskih simbolov *(napišeš in sami dokažejo)*

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ *(tukaj je še dokaz s slikco in premislekom v levo stran: od $n+1$ elementov lahko izberemo $r+1$ tako, da osamiš en element in od n izbereš $r+1$ ALI pa izbereš tistega osamljenega in od n izbereš še r elementov.)*

Tema: Kombinatorika **Poglavje:** Binomski izrek
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Predstavimo Pascalov trikotnik (slika desno) – kako se ga skonstruira (vsota sosednjih dveh da spodnje število), kar se načeloma pove na začetku 1. letnika pri izrazih. Brez posebnega uvoda. Potem pa narediš še trikotnik s binomskimi simboli (slika levo, ki jo s tremi pikcami nadaljuješ do n-te vrstice) in jih vprašaš, a je to slučaj, da se vrednosti ujemajo? Ne, ker vsota sosednjih dveh da število pod njima po zadnji lastnosti binomskega simbola v prejšnjem poglavju.)



1	$(x+y)^0=1$
1 1	$(x+y)^1=x+y$
1 2 1	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
1 3 3 1	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
1 4 6 4 1	$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
1 5 10 10 5 1	$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
1 6 15 20 15 6 1	$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$
1 7 21 35 35 21 7 1	$(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$

Binomki izrek:

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

Vaje:

- *Iščemo moč potenčne množice:* $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$ *(a in b sta enaka 1.)*
- *Zapiši 4. člen izraza* $(x\sqrt{x}+x^{-5})^{1}0$ $(r=3, a=x\sqrt{x}, b=x^{-5})$
- *Poenostavi* $(1-i)^5$ *ipd.*