Tema: Zaporedja **Poglavje:** Uvod
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Vprašaš, kaj je zaporedje. Načeloma že itak vejo, kaj je zaporedje – nekaj si sledi po vrsti, lahko so to števila, črke, simboli itd.)

Zaporedje števil je niz števil, ki si sledijo po vrsti, npr. *(naj predlagajo sami)*

$$8, 6, 45, -9, \sqrt{19}, \pi, e^2, i-8\ldots$$

Vsako število v zaporedju se imenuje **člen zaporedja**. V splošnem lahko zaporedje zapišemo s simboli:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\ldots, a_n, a_{n+1}\ldots,$$

kjer so a_1 prvi člen zaporedja, a_2 drugi člen zaporedja itd.; a_n imenujemo n-ti člen oz. **splošni člen** zaporedja.

Končno zaporedje ima končno število členov (npr. $1, 2, 3, 2, 1$), **neskončno** pa neskončno (npr. $3, 6, 9, 12, 15\ldots$).

Nas zanimajo zaporedja, ki jim lahko določimo člene *(naštevaš zaporadja, za vsako najprej vprašaš za naslednje konkretne člene, šele nato za splošni člen)*:

$1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$	$a_n = n$
$2, 4, 8, 16, 32\ldots$	$a_n = 2^n$
$1, 2, 4, 8, 16, 32\ldots$	$a_n = 2^{n-1}$
$4, 7, 10, 13, 16\ldots$	$a_n = 3n+1$
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$	$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ (Fibonaccijevo zaporedje)

Zaporedje realnih števil je predpis, ki naravnim številom po vrsti priredi realna števila:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

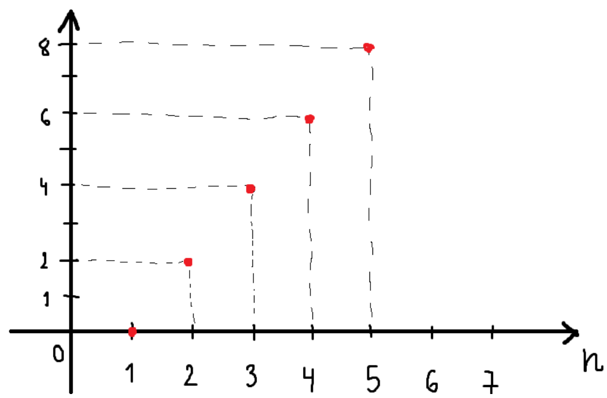
$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto a_1 \\ 2 &\longmapsto a_2 \\ 3 &\longmapsto a_3 \\ &\vdots \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Pišemo lahko kar $f(n) = a_n$.

(Seveda lahko slikamo tudi v $\mathbb{C}$, ampak potem se nam zatakne pri lastnostih zaporedij in nimamo veliko za početi z njimi. Člene začnemo oštevilčevati z 1 (lahko bi tudi z 0, se vse le zamakne).)

Predstavitve zaporedij

- Zapišemo njegove člene: $0, 2, 4, 6, 8\dots$ *(Tu je nevarnost treh pikic, ni nujno enoličnega nadaljevanja zaporedja: zaporedje $2, 4\dots$ se lahko nadaljuje s $8, 16\dots$ (potencami 2) ali s $6, 8, 10\dots$ (poštevanko števila 2), lahko pa prav naključno s $3, -7, 48\dots$)*
- S predpisom zaporedja (s splošnim členom): $a_n = 2(n-1) = 2n - 2$
- Z grafičnim prikazom:



- Z rekurzivnim zapisom (s prejšnjimi členi): $a_n = a_{n-1} + 2, a_1 = 0$ (začetni pogoj) *(ne bo šlo pri vseh zaporedjih)*

Vaje:

- *Zapis zaporedij iz splošnega člena, grafični prikaz*
- *Zapis splošnega člena iz zaporedja, iz grafičnega prikaza; zapis x-tega člena zaporedja*
- *uporabljaj različne črke, ne le a*

Tema: Zaporedja **Poglavje:** Lastnosti zaporedja
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

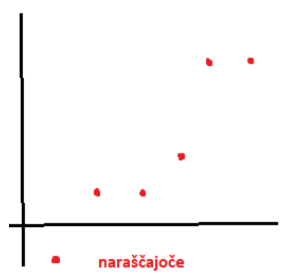
Ali imajo naslednja zaporedja kakšne posebne lastnosti? *(Če ni odziva, kar direkt vprašaš "ali narašča?" ipd.)*

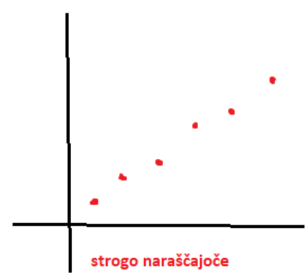
$$
\begin{aligned}
&-2,-1,0,1,2,3,4,5\dots\\
&16,8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\dots\\
&1,-1,2,-2,3,-3,4,-4\dots\\
&2,0,1,-1,0,-2,-1,-3\dots
\end{aligned}
$$

Glede na urejenost je zaporedje *(lahko zraven narišeš primere grafov zaporedij, ki ustrezajo tej lastnosti ...)*:

- **naraščajoče**, če za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$,

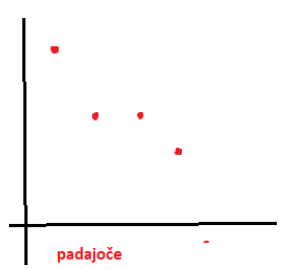
  strogo naraščajoče: $a_n < a_{n+1}$,

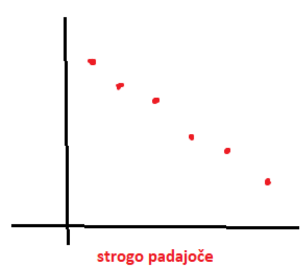




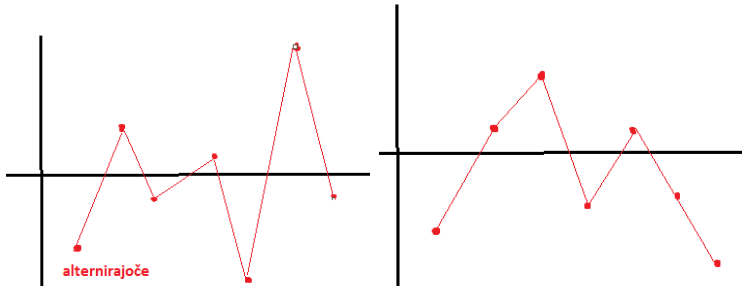
- **padajoče**, če za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq a_{n+1}$,

  strogo padajoče: $a_n > a_{n+1}$,



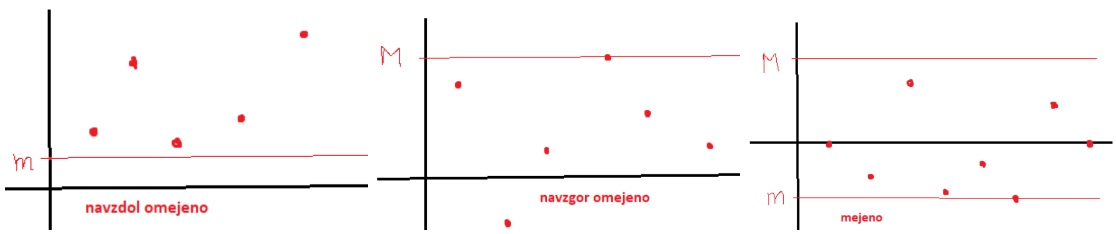


- **alternirajoče/spreminjajoče**, če ima vsak naslednji člen nasprotni predznak kot prejšnji,
- nič od naštetega (npr. $1,2,3,2,3,4,3,4,5\dots$).



Glede na omejenost je zaporedje *(začneš s skico in šele potem z m-ji in M-ji)*:

- **navzdol omejeno**, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da so vsi členi zaporedja večji ali enaki od njega: $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
- **navzgor omejeno**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da so vsi členi zaporedja manjši ali enaki od njega: $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
- **omejeno**, če je navzdol in navzgor omejeno (obstajata $m, M \in \mathbb{R}$, da za vse člene zaporedja velja: $m \leq a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$).



Vaje:

- *Dokaz naraščanja/padanja zaporedij (izberi primer, kjer to ni očitno, npr. kakšen racionalen splošni člen ...) (Torej ali je $a_n - a_{n-1} \leq$ ali ≥ 0)*
- *Preproste ugotovitve npr. Padajoče zaporedje je navzgor omejeno s prvim členom, konstantno zaporedje (posebej ga omeni in označi) ni STROGO naraščajoče/padajoče zaporedje*

Tema: Zaporedja **Poglavje:** Aritmetično zaporedje
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Kaj je skupno naslednjim zaporedjem (konstantna razlika *(splošni člen poračunate potem pri vajah, razen če ga kdo sam ugane)*):

$3, 5, 7, 9, 11, 13 \dots$	$a_n = 2n + 1$	$d = 2$
$8, 5, 2, -1, -4 \dots$	$a_n = -3n + 11$	$d = -3$
$5, 5, 5, 5, 5 \dots$	$a_n = 5$	$d = 0$

Zaporedje je *aritmetično*, kadar je razlika med zaporednimi členi konstantna/enaka:

$$a_n - a_{n-1} = d \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}$$

Za splošno zaporedje $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots, a_n \dots$ lahko zapišemo splošni člen:

$$\begin{aligned}
&a_1 \\
&a_2 = a_1 + d \\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\
&a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
&\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)d}
\end{aligned}$$

Kaj nam d pove? *(Tu naj primere predlagajo sami)*

- $d > 0 \rightarrow$ naraščajoče (npr. $1, 2, 3 \dots$)
- $d < 0 \rightarrow$ padajoče (npr. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$)
- $d = 0 \rightarrow$ konstantno (npr. $3, 3, 3 \dots$)

Vaja:

- *Izračunamo splošni člen s to formulo za zgornje tri primere. Ali so zaporedja naraščajoča, padajoča ...?*
- *Iz splošnega člena prvih nekaj členov in $(2n+1)$-ti člen ali kaj podobnega*
- *Dokaži, da je zaporedje $a_n = 55 - 12n$ aritmetično. (izračunati $d, a_5, a_{20} \dots$)*
- *Naj bodo a, x, b zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Koliko je x?*

  $x - a = b - x \rightarrow x = \frac{a+b}{2}$ *je **aritmetična sredina** ali **povprečje** števil a in b.*
- *Za katere x so to zaporedni členi zaporedja? $x^2 - 3, x - 1, 1 - 2x$ (Lahko direkt iz enakosti razlik. Za d pa en life hack: a_1, a_2, a_3 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja: namesto $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d$ gledaš $a_1 = a_2 - d, a_2, a_3 = a_2 + d$.)*

Vsota aritmetičnega zaporedja

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \\ &= a_1 + a_1 + d + \ldots + a_1 + (n-1)d = \\ &= a_n + a_n - d + \ldots + a_n - (n-1)d \end{aligned}$$

Seštejemo in dobimo: $2S_n = n(a_1 + a_n)$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

(naj se ne piflajo, ampak lahko vedno spet sami izpeljejo, dokler se jim samo od sebe ne zapiše v spomin. Če pa že, naj si zapomnijo $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, ker je lažja, in potem vstavijo noter formulo za splošni člen ...)

Vaje:

- *Vsota nekega zaporedja npr. števila od 1 do 100 (Tega že znamo z Gaussovo metodo, po "sendviču", lahko primerjamo, da dobimo enako.)*
- *Vsota od m-tega do n-tega člena (in vemo le npr. četrti člen in vsoto tretjega in petega) ($S_n - S_m$)*
- *Izračunaj primeren x: $5 + 9 + 13 + \ldots + x = 5355$.*
- *Rešitvi spodnjih enačb sta (sam mora pogruntati, da je manjši drugi člen in večji šesti člen) člena a_2 in a_6 naraščajočega aritmetičnega zaporedja. Najmanj koliko členov tega zaporedja moramo sešteti, da dobimo vsaj 550?*
  $3 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 2^x = 2^5 - 20$
  $\log_3(x-5) - 2 = 0$

Tema: Zaporedja **Poglavje:** Geometrijsko zaporedje
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Na enak način kot aritmetično zaporedje) Kaj je skupno naslednjim zaporedjem (konstanten količnik *(splošni člen poračunate potem pri vajah, razen če ga kdo sam ugane)*):

$2, 6, 18, 54 \ldots$	$a_n = 2n + 1$	$d = 2$
$-4, 8, -16, 32, \ldots$	$a_n = -3n + 11$	$d = -3$
$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$	$a_n = 5$	$d = 0$

Zaporedje je *geometrijsko*, kadar je količnik med zaporednimi členi konstanten.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}$$

Za splošno zaporedje $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots, a_n \ldots$ lahko zapišemo splošni člen:

$$\begin{aligned}
&a_1 \\
&a_2 = a_1 \cdot q \\
&a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
&a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
&\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}
\end{aligned}$$

Kaj nam q pove? *(Tu naj primere predlagajo sami)*

	$a_1 > 0$	$a_1 < 0$
$q > 1$	naraščajoče (npr. $2, 6, 18, 54 \ldots$)	padajoče (npr. $-2, -6, -18, -54 \ldots$)
$0 < q < 1$	padajoče (npr. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$)	naraščajoče (npr. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \ldots$)
$q < 0$	alternijajoče/spreminjajoče (npr. $-4, 8, -16, 32, \ldots$)	

Vaja:

- *Izračunamo splošni člen s to formulo za zgornje tri primere. Ali so zaporedja naraščajoča, padajoča . . . ?*
- *Iz zaporedja splošni člen in q (Life hack: a_1, a_2, a_3 zaporedni členi geometrijskega zaporedja: namesto $a_1, a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2$ gledaš $a_1 = \frac{a_2}{q}, a_2, a_3 = a_2 q$.)*
- *Iz splošnega člena prvih nekaj členov in $(2n+1)$-ti člen ali kaj podobnega*
- *Naj bodo a, x, b zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Koliko je x?*
  $\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \to x = \sqrt{ab}$ *je* ***geometrična sredina*** *števil a in b.*
- *Dokaz, da je aritmetična sredina večja od geometrijske ter kdaj je enaka.*
- *Določi x, da bodo to trije zaporedni členi geometrijskega zaporedja: $27^{3-x}, 3^{x-4}, 9^{2x-7}$ ALI $\log_5(2x+5)+2, 4\log_5 125, 7\log_2 64 - 6$*

Vsota aritmetičnega zaporedja

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \\ &= a_1 + a_1 \cdot q + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} = \\ &= a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = \\ &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1! \end{aligned}$$

(Razmislek za $q = 1$ – konstantno zaporedje, vsota je kar $n \cdot a_1$)

Vaje:

- *Vsota nekega zaporedja*
- *Izračunaj primeren x: $5 + 15 + 45 + \ldots + x = 49205$.*
- *Rešitvi spodnjih enačb sta zaporedoma prvi člen in količnik geometrijskega zaporedja. Najmanj koliko členov tega zaporedja moramo sešteti, da dobimo vsaj 7,83?*
  $\log_2 x = 2 - \log_2(x-3)$
  $5^{x+1} = 5\sqrt{5}$

Tema: Zaporedja
Oblika: frontalna
Poglavje: Popolna ali matematična indukcija
Pripomočki: tabla

Koliko je vsota prvih n lihih števil (S_n)?

$$\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1+3 = 4\\
&S_3 = 1+3+5 = 9\\
&S_4 = 1+3+5+7 = 16\\
&S_5 = 25\\
&\quad\vdots\\
&S_n = 1+3+5+7+\ldots+2n-1
\end{aligned}$$

Zdi se nam, da je $S_n = n^2$. Kako to preverimo?

Popolna ali matematična indukcija je način dokazovanja iz posameznega v splošno (najpogosteje pri naravnih številih). Poteka v dveh korakih:

1. korak: preverimo, ali trditev velja za $n = 1$
2. korak (**indukcijski korak**): ob predpostavki, da velja za n, je treba dokazati, da velja za $n+1$

Preverimo pri zgornjem primeru:

1. $n = 1$: $S_1 = 1 = 1^2$, formula drži
2. $n \to n+1$:

   indukcijska predpostavka: $S_n = n^2$ (predpostavimo, da to velja)

   indukcijski korak: $S_{n+1} = (n+1)^2$ (to želimo pokazati!)

   $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, s tem smo dokazali pravilnost formule

Vaje:

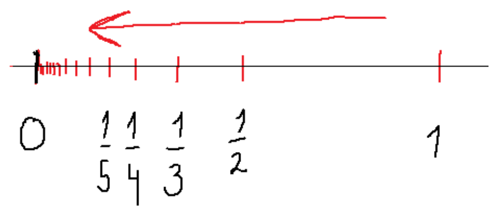
- *Trdim, da je* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. *Dokaži, da je to res.*
- *Dokaži, da 31 deli števila oblike* $5^{n+2} + 6^{2n+1}$

NEVARNOSTI (vsaka neprazna množica ima enake elemente), NEPRAVILNA RABA ...

Tema: Zaporedja **Poglavje:** Limita zaporedja
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

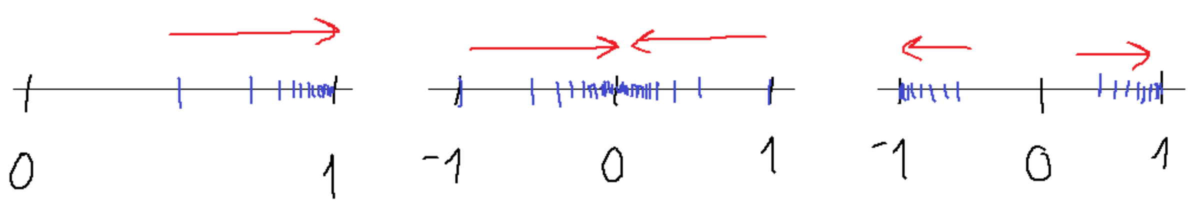
LAHKO KAKŠEN REALEN PRIMER, ZA UPORABO, NPR. ali znaš napovedati, koliko bo visok človek, če maš meritve prvih nekaj let (neka funkcija z asimptoto pri npr. 1,7 m)

(Po domače:) Kam gre zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$? *(intuitivno proti 0, predstavimo na premici na intervalu* $[0, 1]$ *:)*



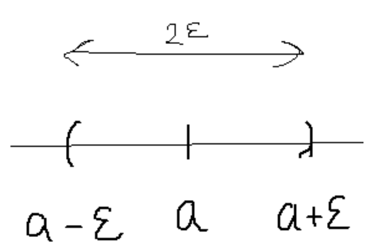
Na enak način predstavimo še naslednja zaporedja in pogledamo, kam se stekajo:

- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots$ (proti 1 z desne)
- $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \ldots$ (proti 0 z obeh strani)
- $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \ldots$ (navzven iz 0 proti -1 in 1)

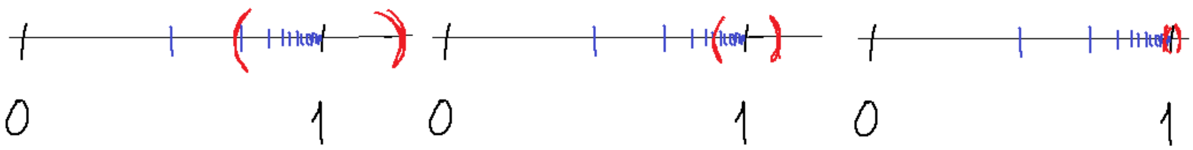


Ta števila, proti katerim grejo členi, bomo imenovali **stekališča**.

Definirajmo **okolico točke a na premici** = odprt interval oblike $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, kjer je ϵ poljubno realno število > 0.



Stekališče je število, v čigar okolici *(poljubno majhnem intervalu okoli tega števila)* je neskončno členov zaporedja *(vsi štirje prejšnji primeri imajo eno ali 2 stekališči)*.



Opomba: končno zaporedje ne more imeti stekališča ...

Če je a edino stekališče zaporedja a_n in je zunaj njegove okolice vedno končno členov zaporedja, ga imenujemo **limita zaporedja**. Pišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(Če imamo samo pogoj, da je a edino stekališče, to ni nujno limita, npr. zaporedje $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0\dots$ *ali* $1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 1/4, 5\dots$*)*

Opomba: Zaporedje, ki ima limito, je **konvergentno** (se nagiba). Zaporedje, ki nima limite, imenujemo **divergentno** (se ne nagiba nikamor).

Lastnosti *(Lahko konkreten primer.)*:

- $lim_{n\to\infty} c = c$
- $lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = lim_{n\to\infty} a_n \pm lim_{n\to\infty} b_n$
- $lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = lim_{n\to\infty} a_n \cdot lim_{n\to\infty} b_n$

  poseben primer množenja s konstantnim zaporedjem k *(logično)*: $lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot lim_{n\to\infty} b_n$
- $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{lim_{n\to\infty} a_n}{lim_{n\to\infty} b_n}; lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Vaje (stopnjuješ uporabo zgornjih lastnosti):

- $lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n-1}$ *(deljenje z n, še nekaj podobnih)*
- $a_n = \frac{2n}{n+1}$. *Zapiši prvih pet členov in izračunaj limito. Kateri členi (za katere n) ležijo zunaj okolice limite s polmerom 0,4?* ($|2 - \frac{2n}{n+1}| \geq \frac{4}{10}$)
- *racionalizacija:* $lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$
- $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ *(s kalkulatorjem prvih nekaj členov. Povemo, da pač to je to. Uporabimo na nadaljnih primerih npr.* $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{4}{3n})^{5n}$*)*

Tema: Zaporedja **Poglavje:** (Neskončne) vrste
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Zaporedje: $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots, a_n$
Vrsta *(je vsota členov zaporedja)*: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ *(lahko samo v zaporedju zbrišeš vejice in napišeš plus, je bolj nazorno)*

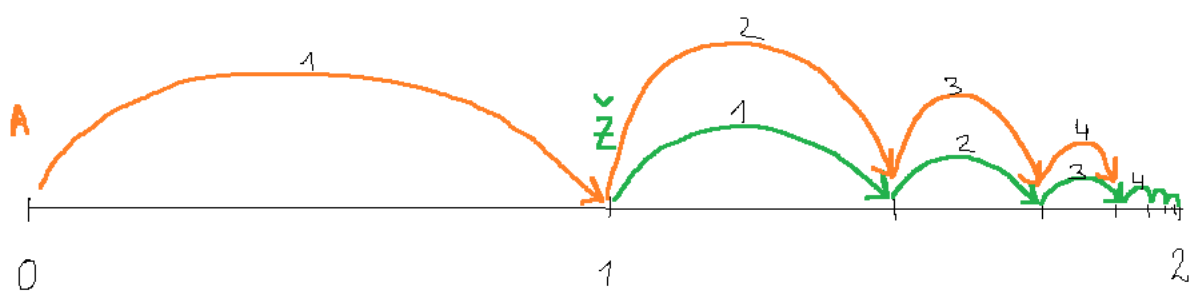
Če seštevano vse člene neskončnega zaporedja, govorimo o *neskončni* vrsti. Označimo:

$$(S =)\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(S je tu samo zaradi oznake, lahko je karkoli.)

Primeri:

- Seštej zaporedje naravnih števil. *($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$ jasno gre v neskončnost.)*
- Seštej vrsto $1+1/2+1/3+1/4+1/5+\ldots$. *(Tukaj ni očitno, da vsota ni končna. Ali pa, saj vedno prišteješ nekaj zraven, in ker neskončnokrat prišteješ, bo pa ja šlo vse v neskončnost? Zato si pogledamo še konvergenten primer:)*
- Ahil in želva tečeta v isto smer. Ahil štarta en kilometer pred želvo in teče 2-krat hitreje. Ali Ahil ujame želvo?*(Ustno in s premico v dveh barvah nakažeš njuno premikanje – želva preteče pol Ahilove razdalje. Ahil vedno razpolovi novo razdaljo do 2 km. Ahil preteče $1+1/2+1/4+1/8+\ldots$km Tu zdaj povzameš problematični vidik neskončne vrste. Načeloma je ne moreš prešteti, ker ne moreš v neskončnost seštevati, to ni smiselno (baje so Grki imeli s tem konceptom probleme). Ampak to ne pomeni, da seštevanje neskončno členov da neskončno vsoto. V nekaterih primerih (npr. v tem) lahko vsoti vseeno pripišemo smiselno vrednost.)* Kdaj ujame želvo? Če pogledamo pod mikroskop, je ne ujame nikoli, ampak v limiti, praktično, pa jo seveda ujame pri 2 km.



Vrste, ki se jih ne da seštevati (ne dobimo nič konkretnega), imenujemo **divergentne vrste**. Kako pa vemo, ali se da vrsto sešteti (takrat jo imenujemo **konvergentna vrsta**)? Pogledamo *delne vsote (Naj sami z malo vodenja vidijo, da moraš vzeti limito)*:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + \ldots + a_n \\
&\vdots \\
S &= \lim_{n\to\infty} S_n
\end{aligned}
$$

Če so delne vsote konvergentne, potem je vsota neskončne vrste enaka kar limiti delnih vsot. *(Lepe vrste za seštevanje so geometrijske vrste, zato si jih podrobneje poglejmo.)*

Neskončna geometrijska vrsta

(Naštteješ zaporedja in naj vidijo, ali divergira ali ne. Konvergenten primer vzameš iz primera z Ahilom.)

- $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ divergira ($q = 2$)
- $1 - 1 + 1 - \ldots$ divergira ($q = -1$)
- $1 - 3 + 9 - 27 + \ldots$ divergira ($q = -3$)
- $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ konvergira ($q = \frac{1}{2}$)

Kdaj geometrijska vrsta konvergira?

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

(Pred zadnjim enačajem si oglejmo število q^n. Kam gre v limiti $n \to \infty$? V neskončno, če $|q| \geq 1$, in v 0, če je $|q| < 1$. Zato slednje vzamemo za potreben pogoj in zapišemo še zadnji enačaj.)

Vaje:

- *Ahil začne teči na razdalji 100 m pred želvo. Je 10x hitrejši od želve. Kdaj jo dohiti?* $100 + 10 + 1 + 1/10 + \ldots = 111,\overline{1}\ldots$
- *izračun vsote s to formulo, kakšne enačbe (npr. za kateri x je vrsta konvergentna), lahko je dano zaporedje, lahko je dana vsota in drugi člen, obseg likov na slikci ...*
- *zapiši* $4,\overline{12}$ *z ulomkom (*$= 4 + \frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \ldots$*, lahko pa po vsaki decimalki posebej in imaš dve vsoti. Nato še na način iz 1. letnika, da preveriš.)*
- *Poenostavi* $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}}$ *(*$= 2^{1/2} + 2^{1/4} + 2^{1/8} + \ldots = 2$*, potem pa še na lažji način, če vse skupaj označiš z x: $x = \sqrt{2x}$.)*

(Omeni harmonično vrsto!!! Lahko napišeš programček, ki ti izračuna, koliko členov moraš sešteti, da dobiš vsoto večjo od x. Za katerokoli vsoto moraš dobiti nek x.)

Tema: Zaporedja
Oblika: frontalna
Poglavje: Obrestni račun
Pripomočki: tabla

Razlaga izrazov glavnica, obrestna mera ... Pač osnovno o bančništvu ...

Navadno obrestovanje

Primer: na banko vložimo 500 € *(glavnica)* po 3 % letni obrestni meri. Koliko bomo imeli na računu čez 5 let?

$G_0 = 500$ €
$p = 3$ % *(to pomeni, da nam po enem letu prištejejo 3 procente od glavnice)*
Vsako leto nam tako prištejejo $0,03 \cdot 500 = 15$ €. Zato imamo na računu po petih letih $500 + 5 \cdot 15 = 575$ €.

Zdaj pa še v splošnem: $G_n = G_0 + n \cdot \frac{p}{100} \cdot G_0$

Obrestno obrestovanje

Koliko pa dobimo, če obresti vsako leto pripišemo k novemu stanju? *(premislek pred izpeljavo – dobimo manj ali več?)*

G_0
$G_1 = G_0 + \frac{p}{100} \cdot G_0 = G_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$
$G_2 = G_1 + \frac{p}{100} \cdot G_1 = G_1 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = G_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^2$
$G_3 = G_2 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = G_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^3$
...
$G_n = G_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n = G_0 \cdot r^n$, kjer je $r = 1 + \frac{p}{100}$ t.i. **obrestovalni faktor**.

Pri tej vrsti obrestovanja pa dobimo $500 \cdot 1,03^5 = 579,64$ €. *(zaokrožujmo na 2 decimalni mesti. Še vedno pa ni veliko razlike, zato vzamemo primer z veliko glavnico ali pa večjim n.)*

Primerjava z novčičem, kako je eksponentna bolj naraščujoča: 2 centa obrestujemo 2000 let po 4 % letni obrestni meri.

- navadno obrestovanje: $G_2000 = 1,62$ €
- obrestno obrestovanje: $G_2000 = 2,33 \cdot 10^32$ € (št. zvezd v vesolju???)

Vaje:

- *Za obe vrsti obrestovanj: Po kolikšni obrestni meri se obrestuje 250 €, da v 15 letih dobimo 362,07 €? Koliko let bi morali obrestovati, da bi presegli 400 €?*
- *Izračun le obresti in ne končnega stanja (to je razlika med začetnim in končnim stanjem) ipd.*

Relativna in konformna obrestna mera

Privzemimo obrestno obrestovanje.

Kaj pa se zgodi, če se obresti pripisujejo na pol leta ali vsak mesec? Ponavadi imamo podano letno obrestno mero p, zato moramo za obdobje enega obrestovanja izračunati **relativno obrestno mero**: p delimo s številom obrestovanj na leto. Primeri:

- letna obrestna mera: p
- polletna obrestna mera: $p/2$
- mesečna obrestna mera: $p/12$
- dnevna obrestna mera: $p/365$

Če obresti pripišemo k-krat na leto, skupaj pa m-krat, je obrestovalni faktor tako enak

$$r_k = 1 + \frac{p/k}{100},$$

glavnica na koncu obrestovalnega obdobja pa

$$G_m = G_0 \cdot r_k^m.$$

Vaje:

- *Obrestujemo glavnico 7000 € 5 let z mesečnim obrestovanjem ($m = 5 \cdot 12$). Koliko imamo na koncu? Kaj, če je obrestovanje dnevno ($m = 5 \cdot 365$)?*
- *Koliko dobimo, če obrestujemo 20 000 € z letnim obrestovanjem in $p = 4$ %, koliko pa, če obrestujemo mesečno? (20 800 € in 20 814,8 €) (to je povod za obravnavo konformne obrestne mere)*

Koliko bi pa morala biti prava mesečna obrestna mera, da bi bila po enem letu zneska enaka? Poglejmo splošen primer:

Z letnim obrestovanjem imamo po enem letu $G \cdot r$. Sedaj pa nas zanima, kolikšna bi bila obrestna mera, če bi obrestovali k-krat na leto, vendar bi na koncu želeli imeti enak znesek. Tejm obrestni meri pravimo **konformna obrestna mera**.

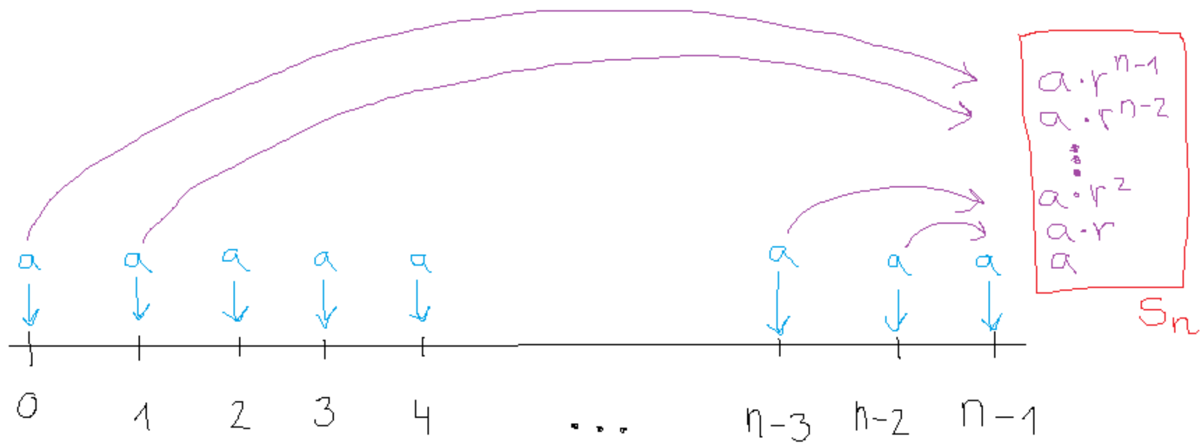
$$G \cdot r = G \cdot r_{\text{konf}}^k \longrightarrow r_{\text{konf}} = 1 + \frac{p_{\text{konf}}/k}{100} = \sqrt[k]{r} \longrightarrow p_{\text{konf}} = 100(\sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} - 1)$$

V našem primeru $p_{\text{konf}} = 0,327$ % (relativna je $\frac{4}{12} = 0,\overline{3}$).

Obročno odplačevanje (vplačila in izplačila)

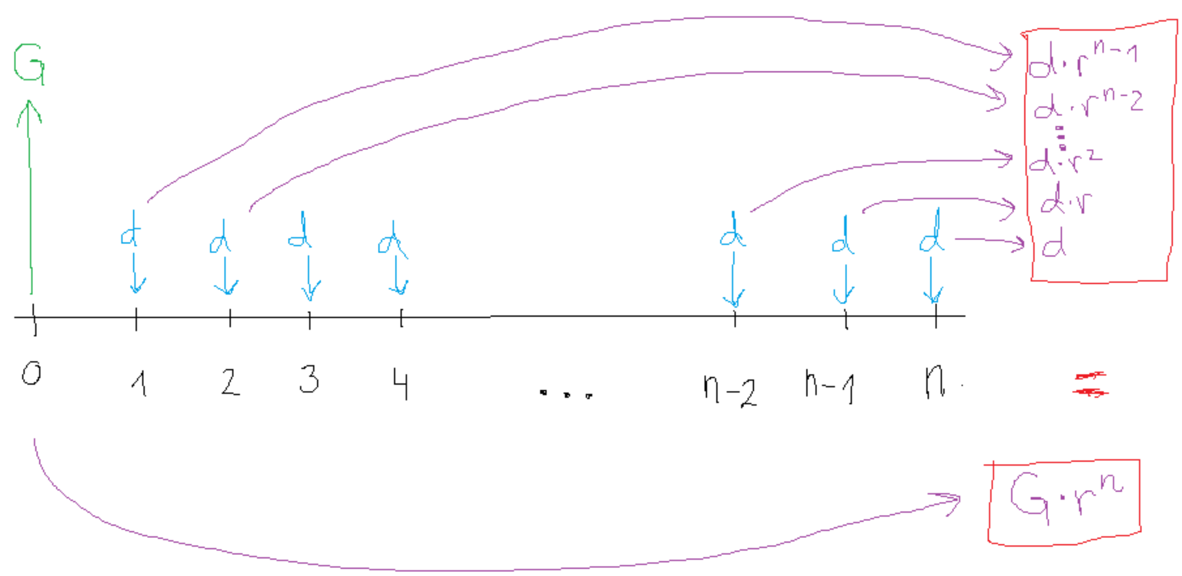
(Spet privezamemo obrestno obrestovanje.)

Vplačevanje: na banko n let vplačujemo konstantno vstoto a. Prvič jo vplačamo danes (čas 0), zadnjič pa v čez $n-1$ let *(slikca)*. Koliko imamo takrat na računu? *(pomembno - kar smo že vplačali a-jev, se nam ustrezno obrestujejo sproti!)*



$$S_n = ar^{n-1} + \ldots + a = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Odplačevanje: v času 0 smo si izposodili G denarja, ki ga odplačujemo n let po letnih obrokih, prvič po enem letu od posojila. Koliko mora znašati vsak obrok d? *(Obrestovana glavnica mora biti enaka vsoti obrestovanih obrokov.)*



$$Gr^n = dr^{n-1} + \ldots + d \to d = G\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$$

(pomembno je, da se ne piflajo formul na pamet, ampak da jih razumejo. Da ne bo zmede, kolikokrat se obrestuje, pa kateri r in n vzeti, če nimamo le letnega obrestovanja in letnih izplačil, kateri čas vstavit itd.)