Učni načrt - 4.letnik

Aljaž Bogataj

1. junij 2023

Vsebina

1 Kombinatorika

1.1 Uvod

Za motivacijo postavimo vprašanje ali imamo dovolj števk v telefonski številki, da ima lahko vsak državljan Slovenije svojo mobilni telefon. Podobno zgodbo lahko vpeljemo z registrskimi tablicami za avtomobile in tovorna vozila. Uvedemo kombinatoriko kot vejo matematike, ki se ukvarja s preštevanjem razporeditev elementov.

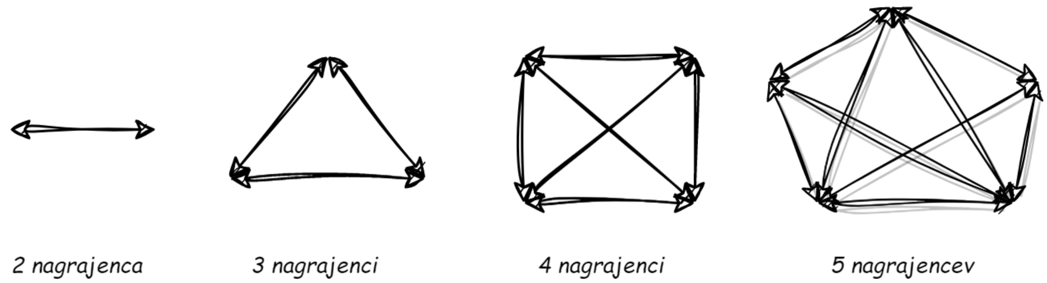
1.2 Pravilo produkta in vsote

Začnemo s problemom nagrajencev. Na slavnostno večerjo je prišlo 5 nagrajencev in nas zanima do koliko rokovanj bo prišlo med nagrajenci. Dijakom pustimo prosto razmišljanje. Na koncu predstavimo grafični način reševanja (slika 1).

Dijakom predstavimo cilj naslednjih poglavjih. Ideja je, da se bomo naučili različne načine preštevanja, ki nam bodo služili kot orodja za reševanje nalog. Začeli bomo z osnovnima praviloma, pravilo produkta in vsote.

1.2.1 Pravilo produkta

Pravilo produkta uvedemo s primerom jutranjega oblačenja za v službo. Na voljo imamo 3 majice, 4 hlače in 2 para čevljev. Na koliko načinov se lahko oblačimo. Nalogo sprva rešimo s pomočjo diagrama, ki ga narišemo. Nato uvedemo in preverimo idejo, da lahko dobimo



Slika 1: Grafični način reševanja problema nagrajencev.

pravilno rešitev z množenjem različnih neodvisnih izbir. Poudarimo, da smo se morali za vsak kos oblačila posebej odločiti. Torej, poudarimo besedo **in** (neodvisne izbire). Morali smo izbrati eno majico in ene hlače in en par čevljev.

1.2.2 Pravilo vsote

Podobno kot pri pravilu produkta se postavimo v situacijo, ko moramo izbirati med 4 majicami s kratkimi rokavi in 3 z dolgimi rokavi. Koliko različnih majic imamo na voljo? Dijaki bodo hitro opazili, da preprosto seštejemo različne možnosti. Povprašamo jih o razliki med trenutnim in prejšnjo nalogo. Poudarimo, da smo sedaj imeli izbiro med različnimi tipi majic. Torej izbrali smo lahko med majicami s kratkimi rokavi **ali** majicami z dolgimi rokavi.

1.3 Permutacije

Dijake opozorimo na to, da si bomo pogledali preštevanja za primere, ko bo vrstni red pomemben / nepomemben in ali lahko elemente večkrat uporabimo ali ne.

Pri uvajanju permutacij se na začetku izognemo strogemu poimenovanju. Preprosto izberemo 3 črke ali pa 3 dijake iz razreda ter dijakom naročimo, da naj preštejejo vse možnosti, kako lahko elemente postavimo v vrsto. Dijake spodbujamo k sistematičnemu preštevanju. Nalogo lahko otežimo z večjim številom elementov. Na koncu uvedemo svoj sistem preštevanja v vrsto. Narišemo mesta, ki so nam na voljo ter se od leve proti desni vprašamo, koliko različnih elementov lahko postavimo na tisto mesto. Za dijake je ključno da spoznajo, da imajo za vsako novo mesto na voljo en element manj.

Z dijaki opazimo, da se vedno pojavlja množenje padajočih števil. Zato uvedemo nov simbol - permutacijo, da bomo lažje računali in zapisali probleme. Dijake povprašamo, koliko je 0! . Razložimo z vzorcem deljenja.

Slika 2: Grafični način razporejanja elementov v vrsto.

$$
\begin{aligned}
5! &= 5 * 4 * 3 * 2 * 1 && \\
4! &= 4 * 3 * 2 * 1 && \text{Delili smo s 5} \\
3! &= 3 * 2 * 1 && \text{Delili smo s 4} \\
2! &= 2 * 1 && \text{Delili smo s 3} \\
1! &= 1 && \text{Delili smo z 2} \\
0! &= 1 && \text{Delili smo z 1}
\end{aligned}
$$

Permutacije z neskončnim ponavljanjem uvedemo enako kot navadne permutacije. Edina razlika je, da dijaki spoznajo, da imajo vedno na voljo dovolj elementov. Permutacije z omejenim ponavljanjem uvedemo najprej na besedi ANA. Preštejemo število različnih postavitev, kot da bi imeli dva različna A-ja. Nato izbrišemo te oznake in pogledamo kolikokrat se nam ponovi ista beseda. Povemo, kako moramo ustrezno deliti. Nalogo otežimo in podobno razložimo na primeru ANANAS.

Ključno je, da se dijaki naučijo samostojno reševati naloge s premislekom in ne s slepim sledenjem formuli. To spodbujamo s tem, da si vedno narišejo mesta, ki jih imajo na voljo ter preštejejo ustrezne elemente na tistih mestih. Naloge naj bodo take, da jih prisilijo v samostojne razmisleke. Torej, naloge naj omejijo, kateri elementi so lahko na določenih mestih (samo liha števila, števila večja od 300, itd.) Na koncu omenimo, da tako preštevanje poimenujemo kot permutacije, vendar nismo strogi s tem poimenovanjem. Prav tako se ne osredotočamo na zapis permutacij z oznako P_n.

1.4 Variacije

Variacije uvedemo na enak način kot permutacije. Po koncu permutacij preprosto postavimo nalogo, ko imamo na voljo manj mest kakor pa elementov. Nalogo rešimo na enak način kot pri permutacijah. Zapišemo formulo in oznako za variacije.

1.5 Kombinacije

Kombinacije lahko uvedemo s problemom o stražarjih. Učence vprašamo, koliko različnih parov stražarjev bi lahko imeli, če imamo na voljo 5 vojakov. Do rešitve lahko pridemo skupaj z dijaki tako, da jih povabimo pred tablo in rešimo problem z realnimi osebami. Ključno je, da dijaki opazijo, da vrstni red **ni** pomemben.

Binomski simbol uvedemo preko variacij (slika 3). To razlago lahko preverimo na preprostih primerih. Cilj je, da dijaki razumejo binomski simbol kot, da izbiramo med n elementi ter jih razvrščamo v množice z r elementi. Osnovne lastnosti binomskega simbola preverimo s pomočjo preprostega izračuna po binomski formuli. Pri nalogah se osredotočimo na pravilno uporabo binomskega simbola in pravila produkta in vsote. Z dijaki rešujemo naloge pri katerih morajo obravnavati vse ugodne oziroma neugodne možnosti.

$$\binom{n}{r} = \frac{V_n^r}{r!}$$

Razvrstimo v množice

Vrstni red ni pomemben

Slika 3: Razlaga binomskega simbola.

1.5.1 Binomski izrek

Binomski izrek uvedemo z naslednjimi koraki:

- Izračunamo $(a+b)^i$ za $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$
- Izračunane koeficiente zapišemo na tak način, kakor bi zapisali Pascalov trikotnik. Dijake vprašamo kako pridemo iz ene vrstice v naslednjo.
- Ali se koeficienti ujemajo z binomskim simbolom? Preučujemo binomske simbole $\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, \binom{i}{2}, \ldots$
- Opremo se na izrek o aditivnosti binomskega simbola: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$
- Uvedemo binomsko formulo (glede na sposobnost razreda lahko uvedemo znak za vsoto $\sum$), ter jo preverimo v Pascalovem trikotniku.

2 Verjetnost

2.1 Uvod

Dijake motiviramo z vsakdanjimi vprašanji o verjetnosti. Kakšna je verjetnost, da bodo zadeli na loteriji? Kolikšna je verjetnost, da bodo opravili test, če bodo na odgovore A, B, C, D odgovarjali naključno? Koliko je verjetnost, da na kovancu pade grb?

Nadaljujemo z uvedbo osnovnih pojmov, kot so poskus, slučajen dogodek, gotov dogodek in nemogoč dogodek. Te termine natančno uvedemo, da bomo lahko z učenci govorili o verjetnostih točno določenih dogodkov ter, da bomo imeli usklajen zapis verjetnosti. Termine uporabimo na poskusu meta kovanca in igralne kocke.

2.2 Računanje z verjetnostjo

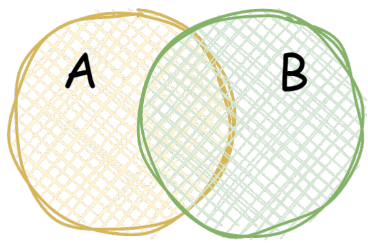
Dijake povprašamo, kaj sploh razumejo pod pojmom verjetnosti. Pogovorimo se, kako ocenijo verjetnost, da bo deževalo, zmagala določena ekipa ali, da bodo dobili oceno 5 pri testu. Razložimo, da take subjektivne ocene imenujemo **subjektivna verjetnost**. Dijake opozorimo, da v znanstvenih disciplinah taka verjetnost ni primerna. Pogovorimo se, kako znanstveniki izmerijo približno verjetnost nekega dogodka. Oceno pridobijo z večkratnim izvajanjem določenega poskusa ter izračunom relativne frekvence ugodnega dogodka. Te poskuse lahko preverimo z računalniško simulacijo meta igralne kocke. Dijakom razložimo, da taki verjetnosti pravimo **empirična verjetnost**, vendar ni vedno potrebno, da izvedemo veliko število poskusov. Določene verjetnosti se da direktno izračunati kot kvocient ugodnih izidov in vseh možnih izidov poskusa. Uvedemo **teoretično verjetnost** dogodka A, kot $P(A) = \frac{m}{n}$, kjer je m število ugodnih izidov ter n število vseh možnih izidov poskusa.

Razumevanje preverimo na osnovnih premerih računanja verjetnosti na igralni kocki, kovancih, itd. Nato naloge razširimo na sestavljene dogodke (A - na igralni kocki pade število manjše od 4, B - na igralni kocki pade sodo število, ...). Nadaljujemo z zahtevnejšimi nalogami, ki vključujejo več igralnih kock. Brez posebne omembe rešujemo naloge z vzorčnim prostorom tako, da preštevamo ugodne izide. Dijake vprašamo, kako bi se lotili iste naloge, če bi imeli sto kock? Vzorčni prostor bi težko zapisali in ga prešteli, zato dogodke rajši razdrobimo na preprostejše s katerimi lahko računamo.

2.2.1 Dogodki, kot množice

Računanje z dogodki uvedemo, kot računanje z množicami. Operacije vsote, produkta, razlike, komplementa, razlike in poddogodka razložimo na sledeč način (primer za vsoto):

- Ime: Vsota dogodkov A in B
- Oznaka: $A \cup B$
- Pomen: Zgodil se je dogodek A **ali** dogodek B
- Izračun: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Skica:

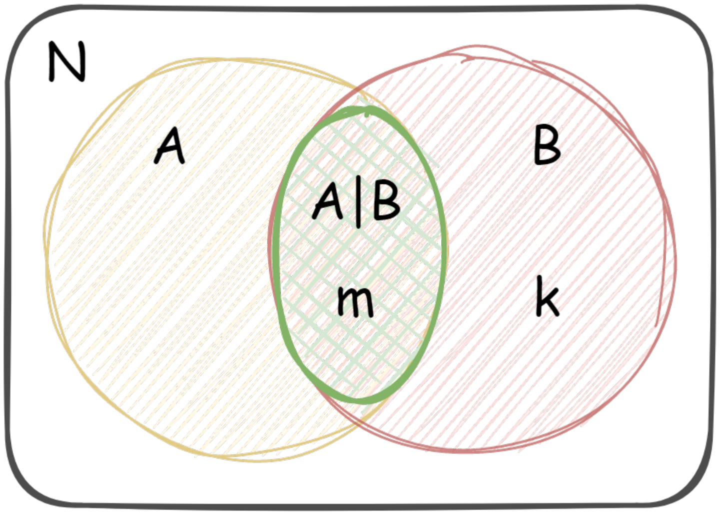


Te operacije preverimo na prejšnjih primerih s kockami. Učenci morajo dani dogodek razdrobiti na elementarne dogodke ter ga zapisati s pomočjo novih operacij. Izberemo take naloge, ki zahtevajo premislek in uporabo raznih operacij in ne take, ki zahtevajo samo direktni izračun ugodnih izidov poskusa s pomočjo kombinatorike. Dijakom predlagamo različne načine reševanja. Na primer, pri marsikateri nalogi se bolj splača prešteti neugodne dogodke kakor pa ugodne.

2.2.2 Produkt dogodkov

Intuitivno se zdi, da velja formula $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$. Z dijaki formulo preverimo na dveh zgledih s pomočjo vzorčnega prostora. V prvem primeru računamo verjetnost, da vržemo 6 na kocki ter nato v naslednjem poskusu vržemo 1. Rešujemo tako, da razdelimo nalogo na elementarne dogodke. Drugi zgled ravno tako rešimo z vzorčnim prostorom ter nato rezultat preverimo z zgornjo formulo. Z dijaki se pogovorimo kako sta si dogodka različna (elementarni dogodki so odvisni ali neodvisni). Definiramo oznako za pogojno verjetnost ter izpeljemo formulo za izračun:

$$P(A|B) = \frac{m}{k} = \frac{\frac{m}{N}}{\frac{k}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



2.2.3 Popolna verjetnost in zaporedje neodvisnih dogodkov

Sledeči temi sta izbirnega tipa pri srednješolski snovi. Obe snovi bi obravnavali direktno iz primera. Pri popolni verjetnosti sestavimo poskus, ki je sestavljen iz večih faz. Na primer, v žepu imamo dva kovanca enake oblike. En kovanec ima grb in cifro, medtem ko ima drugi samo dva grba. Kolikšna je verjetnost, da bo padel grb, če naključno izvlečemo en kovanec ter ga vržemo? Cilj je, da z dijaki poskus ločimo. Na primer, ko izvlečemo en ali pa drugi kovanec ter uporabimo pogojno verjetnost. Zaključimo z zapisom osnovne formule ter dodatnimi primeri.

Bernoullijevo zaporedje prav tako uvedemo preko naloge. Sestavimo primer, kjer preprosto povečujemo število zaporednih neodvisnih dogodkov. Na primer, začnemo s tem kolikšna je verjetnost da pade grb na kovancu. Koliko pa da padeta dva grba v dveh zaporednih metih? Kaj pa če imamo tri kovance? Kolikšna je verjetnost, da padeta dva grba ob treh metih? Število kovancev povečujemo dokler dijaki ne osvojijo reševanja s pomočjo kombinacije in uporabe produktnega pravila za neodvisne dogodke. Cilj je, da čim bolj samostojno pridemo do Bernoullijeve formule.

3 Zaporedja

3.1 Uvod

Na tablo zapišemo množico števil $\{1, 4, 3, 6, 2, 5, 8, 7, 9, 10\}$. Dijake vprašamo kaj nam lahko povejo o tej množici. Kaj pa če zapišemo števila iz množice kot $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$? Kako so elementi povezani med seboj? Cilj je ozavestiti pri dijakih, da so zaporedja neke množice **urejenih** elementov. Podamo več različnih zaporedij ter poskušamo ugotoviti, kako so si elementi med seboj povezani$(1, 4, 7, 10, ...;\ 4, 8, 16, 32, ...;\ 10, 7, 4, 1, ...;\ 1, 1, 2, 3, 5, 8...)$. Fibbonacijevo zaporedje razložimo na primeru razmnoževanja para zajcev. Ali morajo biti členi smiselno povezani, da imamo definirano zaporedje?

Zakaj je vrstni red pomemben? Tekom poglavja o zaporedjih bomo spoznali tudi vrste, kar pomeni, da preprosto elemente zaporedja med seboj seštejemo (pokažemo na zgornjih primerih). Koliko pa je vsota $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$? Poglejmo:

$$\begin{aligned}
x &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... \\
2x &= 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + ... \\
2x &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + ... \\
2x &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... \\
2x &= x \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

Torej pridemo do protislovja. To pomeni, da se vsota ne sešteje v neko specifično število. Vendar pozor, matematiki so dokazali, da je vsota te vrste $ln(2)$. Kje smo naredili napako? Težava je v četrti vrstici, ker smo spremenili vrstni red elementov!

3.2 Zaporedja in njihove lastnosti

Za zgled vzamemo zaporedja iz uvoda $(1, 4, 7, 10, ...; 4, 8, 16, 32, ...; 10, 7, 4, 1, ...; 1, 1, 2, 3, 5, 8...)$. Ker so zaporedja urejena, lahko členom zaporedja označimo njegov vrstni red. Torej določimo člene $a_1, a_2, ...$. Kako lahko predstavimo zaporedja? Na voljo imamo tri načine:

- Zapišemo prvih par členov zaporedja ter poskusimo ugotoviti kako tvorimo naslednje člene.
- Člene določimo s formulo $f(n) = a_n$. Dijake opozorimo, da se štetje členov začne pri 1. Torej funkcija slika iz naravnih števil v realna števila.
- Z dvemi ali več členi podamo pravilo za tvorjenje ostalih členov (rekurzivno).

Vse te tri načine predstavimo na uvodnih primerih v urejeno tabelo. Z dijaki se pogovorimo o končnem in neskončnem zaporedju. Ker smo zapisali uvodne primere z formulami, narišemo grafe za ta zaporedja ter dodamo zaporedje $f(n) = \frac{1}{n}$. S pomočjo grafov definiramo ali je zaporedje konstantno, naraščajoče, padajoče ali nič od tega. Do formule za karakterizacijo naraščanja oziroma padanja pridemo z obravnavo sosednjih elementov v grafu ter kako dijaki intuitivno vedo, da zaporedja naraščajo oziroma padajo. Podobno s pomočjo grafov definiramo omejenost zaporedja, natančne meje zaporedja in minimum ter maksimum zaporedja.

3.3 Aritmetično zaporedje

Kaj imajo $1, 2, 3, 4, ...$; $7, 4, 1, -2, ...$; $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}...$? Kako dobimo naslednji člen? Kako izgledajo formule za ta zaporedja? Kako smo ugotovili razliko med sosednjima členoma? Ali se ta razlika spreminja? Torej, tako zaporedje imenujemo aritmetično zaporedje, ker je razlika med poljubnima členoma konstantna. Cilj je, da že z dijaki pridemo do definicije diference in nato preprosto uvedemo formulo za splošni člen zaporedja $f(n) = a_1 + (n-1)d$. Zapišemo tudi rekurzivni zapis. Za različne diference narišemo grafe ter obravnavamo, kako diferenca vpliva na naraščanje in padanje zaporedja.

Omenimo še linearno interpolacijo. Preprosto zastavimo nalogo kako bi interval $/[0, 1/]$ razdelili na n enakih delov. Nadaljujemo z različnimi intervali in poskusimo najti način oziroma formulo, ki nam bo omogočila, da zapišemo vse te dele. Cilj je, da dijaki opazijo, da tvorimo aritmetično zaporedje.

3.4 Geometrijsko zaporedje

Razlago geometrijskega zaporedja lahko izvedemo na podoben način kot za aritmetično zaporedje. Podamo par različnih geometričnih zaporedji ter z dijaki poskusimo ugotoviti, kako izgledajo formule za ta zaporedja. Spet je cilj, da pridemo do spoznanja, da je količnik med sosednjimi členi vedno enak. Ta količnik zapišemo, ter definiramo formulo za izračun splošnega člena $f(n) = a_1 k^{n-1}$. Naraščanje in padanje geometrijskega zaporedja obravnavamo preko grafov. Z dijaki izpolnimo tabelo o vplivu diferenčnega količnika in začetnega člena zaporedja na naraščanje in padanje zaporedja.

Geometrijsko interpolacijo zastavimo z vprašanjem, kako bi med števili a in b vrnili n števil tako, da bi vsa števila tvorila geometrijsko zaporedje. Preko lažjih primerov bi prišli do zveze $b = ak^{r+1}$, ki bi jo uporabili za izračun diferenčnega količnika.

3.5 Vrste in limita zaporedja

3.5.1 Vsota končne aritmetične in geometrijske vrste

Z dijaki ponovimo, da pri vrstah seštevamo člene zaporedja. Pričnemo s seštevanjem prvih n členov zaporedja. Za dokaz uporabimo Gaussovo metodo:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + ... + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + ... + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Formulo za geometrijsko vrsto podobno izpeljemo z množenjem z diferenčnim količnikom. Tukaj je tudi primeren čas, da uvedemo označbo za seštevanje $\sum$ in množenje $\prod$. Uporabo prikažemo na različnih primerih ter z znakom za vsoto zapišemo formulo za končno aritmetično in geometrijsko vsoto.

3.5.2 Limita zaporedja

Poglejmo si zaporedje $f(n) = \frac{1}{n}$. Ali je to zaporedje omejeno? Katera je njegova natančna spodnja meja? Kako vemo, da se približuje tej vrednosti? Od katerega indeksa členov naprej se členi zaporedja od števila 0 razlikujejo manj kot za 0.001? Pomagamo si z grafom, postavimo ustrezno neenačbo ter se spomnimo, kako z uporabo absolutne vrednosti zapišemo razdaljo med dvema številoma. Po izračunanem primeru uvedemo okolico točke $O_\varepsilon(a) = \{x; |a - x| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ključno je, da dijaki razumejo, da je okolica samo nek interval okoli določene točke ter da lahko najdemo člene zaporedja poljubno blizu limite tega zaporedja. Koliko členov zgornjega zaporedja je zunaj te okolice? Kaj pa znotraj? Uvedemo pojem in oznako limite, stekališča ter konvergentnega in divergentnega zaporedja.

Z dijaki preverimo za katere parametre so aritmetična in geometrijska zaporedja konvergentna oziroma divergentna (pomagamo si z grafi). Kaj pa zaporedje $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$? Poskusimo ugotoviti, narišemo graf in preverimo, če je za poljubno okolico okoli števila 2, neskončno členov zaporedja. Analiziramo dodatne zglede, ki preučujejo alternirajoča zaporedja $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...)$ in zaporedja, ki nimajo limite, vendar imajo stekališča ($a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$).

Uvedemo osnovne lastnosti limit ($\lim_{n\to\infty} k = k$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje limit). Koliko je potem $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n+5}{n^3+n^2-1}$? Če obravnavamo števec in imenovalec dobimo $\frac{\infty}{\infty}$. Ampak neskončnost je ideja in ne neko število! Prav tako pri limitah opazujemo, kateremu številu se približujemo z večanjem n in ne kakšno je število, če ustavimo neskončnost v naš izraz. Zato so izrazi $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty, 0 \cdot \infty, \infty^0$ nedoločeni. V takih primerih moramo izraze preoblikovati tako, da se te nedoločenosti znebimo, če je le možno. Vadimo na primerih, kjer je cilj, da enačbo preoblikujemo tako, da vsebuje $\frac{1}{n}$ člene.

3.5.3 Neskončne vrste

Kakšne pa so limite neskončnih vrst? Torej, če imamo vrsto $1 + 2 + 3 + 4 + ...$, ali se ta vrsta približuje nekemu številu? Kaj pa $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$? Uvedemo delne vsote, ter definiramo kdaj je vrsta konvergentna in divergentna($1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$). Z znanjem o delnih vsotah geometrijske vrste obravnavamo $\lim_{n\to\infty} S_n$, da pridemo do formule za neskončno geometrijsko vrsto ter pogoja kdaj ta vrsta konvergira. Pri zgledih ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$ in $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$) si pomagamo tudi z geometrijskimi intrepretacijami.

4 Limita funkcije

Ponovimo pojem limite, ki smo jo obravnavali pri zaporedjih. Obravnavamo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, kot pri zaporedjih. Sedaj dijake vprašamo kaj se zgodi, če namesto naravnih števil uporabimo realna števila. Torej, da je $\frac{1}{x}$ funkcija za realno spremenljivko x. Narišemo graf funkcije ter obravnavamo primer, ko gre x k pozitivni in negativni neskončnosti. Ključno je, da dijakom razložimo, da nas zanima, kateri vrednosti se funkcija približuje. Torej h kateri vrednosti lahko pridemo poljubno blizu. Lahko podamo tudi primer, da se s pospeševanjem avtomobila počasi približujemo največji končni hitrosti avtomobila.

Koliko pa je vrednost limite za primer $\lim_{x\to 2}(x-2)$? Funkcijo narišemo ter obravnavamo, kateri vrednosti se približujemo iz 'leve' ter 'desne' strani. Kako smo dobili to limito? Preprosto smo vstavili končno vrednost spremenljivke x. Koliko pa je limita za $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{x-1}$? Ali lahko preprosto vstavimo $x = 1$? Ne, dobimo $\frac{0}{0}$, kar je nedoločen izraz! Vendar to ne pomeni, da limita ne obstaja. Z dijaki vstavimo vrednosti blizu 2, da dobimo občutek, da se še zmeraj približujemo nekemu številu. Kako smo nedoločene izraze obravnavali pri zaporedjih? Faktoriziramo, narišemo funkcijo in vidimo, da je funkcija linearna premica z "luknjo"pri $x = 2$. Dijakom razložimo, da čeprav v tej točki funkcija nima vrednosti, ima še zmeraj limito, saj se lahko dobimo vrednost poljubno blizu 2. Poskusimo poiskati različne spremenljivke x, da bo funkcija dovolj blizu limiti. Ponovno obravnavamo začetni primer, vendar v drugi limitni vrednosti $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Na grafu opazimo, da sta si limiti iz leve in desne smeri približevanja različni. Torej, leva in desna limita nista nujno enaki.

Uvedemo pojem zveznosti. Najprej razložimo informalno, da je preprosto zvezna funkcija funkcija, ki je nepretrgana. Torej, jo lahko narišemo brez, da bi dvignili svinčnik. Narišemo različne primere zveznih in nezveznih funkcij. Nato z dijaki formalno definiramo, da je funkcija zvezna v točki, če ima limita iz leve ter desne strani enako vrednost. To definicijo preverimo na primerih zveznih in nezveznih funkcij.

V celotni definiciji limit sem se izogibal formalni epsilon-delta definiciji, ker sem mnenja, da dijake odvrneta od intuitivnega razumevanja limit ter približevanja. Prav tako bi se izognil izpeljevanju pravil za računanje z limitami. Več pozornosti bi namenil osnovnim pristopom k preoblikovanju enačb (vstavljanje vrednosti, faktorizacija, konjungiranje, deljenje z največjim eksponentom pri racionalnih funkcijah) za uspešno reševanje limit funkcij.

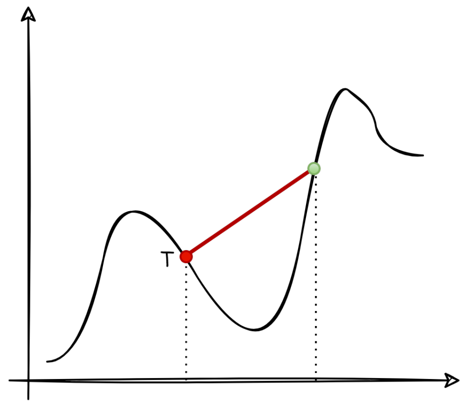
5 Odvod funkcije

5.1 Računanje s funkcijami

Pred obravnavo odvodov je smiselno definirati osnovne operacije na funkcijah. Ker je računanje enako številom in spremenljivkam, ki so jih dijaki navajeni, uvedemo vsoto, razliko, produkt in kvocient funkcij brez formalne obravnave. Preprosto, na primerih razložimo operacije. Pomagamo si tudi z grafi funkcij ter poskusimo z dijaki narisati grafe funkcij, na katerih smo uporabili zgornje operacije. Pri kompozitumu funkcij poudarimo, da operacija izraža idejo, da najprej izvedemo prvo funkcijo ter nato še drugo funkcijo. Začnemo s funkcijama $f(x)$ in $g(x)$ ter z dijaki izračunamo $g(f(x))$ in $f(g(x))$. Uvedemo oznako za kompozitum ter obravnavamo pogoje definicijskega območja in zaloge vrednosti funkcij udeleženih v kompozitumu. Različne funkcije poskusimo zapisati s pomočjo kompozituma ter operacij med funkcijami.

5.2 Uvod v odvod funkcije

Cilj uvoda v odvod funkcij je motivirati raziskovanje spremembe funkcije. V motivaciji želimo spodbuditi zavedanje, da ima sprememba več pomena kakor pa trenutno stanje. Na voljo imamo malo morje primerov. Recimo, da smo z dijaki v zdravniški sobi. En pacient ima telesno temperaturo 38 stopinj drugi pa 39 stopinj. Za koga bi nas bolj skrbelo? Kaj pa če vemo, da prvemu pacientu temperatura narašča, drugemu pa pada? Podobne življenjske primere lahko sestavimo na temo medsebojnih odnosov, nakupovanja, itd. Dijakom pokažemo, da je informacija o spremembi ključna za pravilno odločitev v zvezi z njihovim primerom. Kaj pa če imamo samo informacijo o spremembi in ne tudi o stanju? Kakšen problem se pojavi?



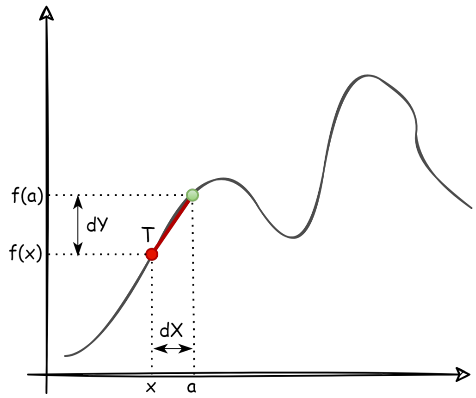
Slika 4: Ali je pomembno katero točko izberemo, da preverimo ali v točki T funkcija narašča ali pada?

Za uvedbo definicije odvoda si izberemo neko funkcijo, ki ima pomen v realnem življenju. Osnovni primer je recimo funkcija hitrosti v odvisnosti od časa. Z dijaki obravnavamo graf funkcije ter si interpretiramo naraščanje in padanje funkcije. Kako vemo, da funkcija narašča oziroma pada? Pogost odgovor je, da gre funkcija navzgor oziroma navzdol. Postavimo dve točki na naraščajoči del funkcije. Še enkrat, kako vemo, da funkcija tukaj narašča? Druga točka je "višja"od prve točke. Pa potegnimo premico skozi ti dve točki. Kakšen je njen koeficient? Koeficient nam pove o naraščanju in padanju funkcije, torej o njeni spremembi. Kako določimo ta koeficient (uporabimo znanje iz prvega letnika)? Ali je pomembno katero točko izberemo na krivulji, da ugotovimo ali funkcija narašča ali pada? Cilj je z dijaki ugotoviti, da z izbiro točke čim bližje začetni točki, dobimo čim boljšo oceno. Kakšen je idealen scenarij (pridemo do tangente)? Hočemo, da je razlika med točkami čim manjša oziroma jo praktično sploh ni.

Uvedemo oznaki dX in dY ter z njima posodobimo našo enačbo za izračun smernega koeficienta. Z uporabo skice razložimo uporabo limite ter nato uvedemo odvod funkcije:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{a-x \to 0} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definiramo odvodljivost funkcije. Ključno je, da dijaki razumejo, da je odvod mera za spremembo funkcije, ki jo meri s pomočjo smernega koeficienta tangente v točki na grafu funkcije. Zanimiva vaja iz intuitivnega razumevanja odvodov je izrek o povprečni vrednosti.



5.3 Odvodi elementarnih funkcij

Po definiciji odvoda izračunamo odvod konstantne, linearne, kvadratne in kubične funkcije. Uganemo splošno pravilo za izračun odvodov potence funkcije. Uvedemo odvod vsote, razlike, produkta in kvocienta funkcij. Dokaz vsote je smiselen za vsak razred, druge lastnosti pa mogoče za boljše razrede. Te formule povadimo na osnovnih primerih.

Podobno bi lahko naredili za ostale elementarne funkcije. Glede na sposobnost razreda se odločimo za izpeljave posameznih formul. Dijakom predstavimo primer odvoda kompozituma funkcij $((cos(x^2))')$. Izognemo se formalni definiciji in dijakom na preprost način razložimo postopek za izračun takšnega odvoda.

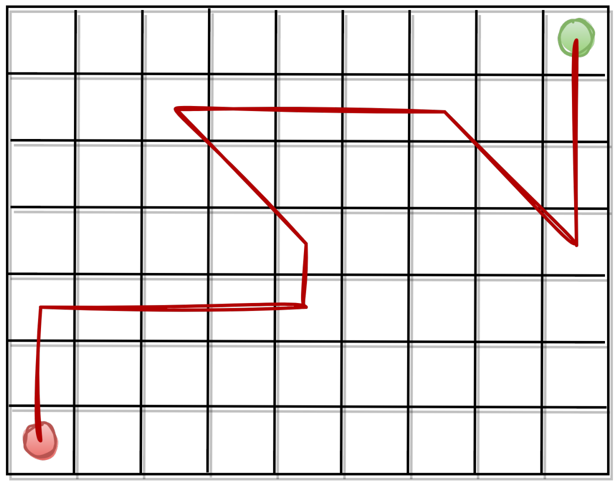
5.4 Uporaba odvoda

Uspešnost razumevanja uporabe odvoda je odvisna od razumevanja uvoda v odvode. Če uspešno razložimo uvedbo odvoda, je razumevanje tangente in normale na krivuljo, kota med presečiščem dveh krivulj ter naraščanje in padanje funkcije praktično trivialna. Vedno se opiramo na sliko funkcije ter njenega odvoda! Stacionarne točke uvedemo z obravnavo naraščanja in padanja funkcije. Pozorni moramo biti na točno definicijo lokalnih ter globalnih maksimumov in minimumov. Praktično uporabo stacionarnih točk ponazorimo z ekstremalnimi problemi.

6 Določen in nedoločen integral

6.1 Določen integral

V motivaciji hočemo dijakom spodbuditi razmišljanje, da lahko iz znanih sprememb sestavimo originalen potek dogodkov. Na mrežo narišemo potovanje robota. Dijakom naročimo, naj zapišejo vse spremembe lokacije robota, ki so se zgodile med njegovo potjo. Za spodnji primer, se je robot premaknil najprej za dve mesti naprej, nato za štiri mesta v desno, itd. Ko imamo napisano vrsto sprememb, izbrišemo pot robota ter dijakom naročimo, naj še enkrat rekonstruirajo pot robota iz zapisanih sprememb. Katero informacijo potrebujemo, da narišemo točno enako pot kakor prej (začetno točko robota)?



Slika 5: Potovanje robota po mreži.

Enako idejo razširimo na funkcije. Narišemo $f(x) = 0, f(x) = 1, f(x) = -1, f(x) = x, f(x) = -x$ ter poskusimo rekonstruirati originalne funkcije, če so podane funkcije odvodi nekih funkcij. Ta vaja ima zelo veliko vrednost za razumevanje odvoda. Pri risanju originalnih funkcij se z dijaki pogovorimo, če je pomembno kje funkcijo pričnemo risat (uvod v aditivno konstanto).

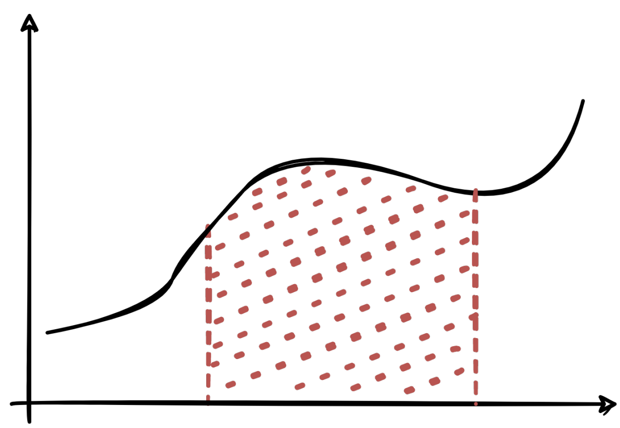
Sedaj z dijaki premislimo, da smo izvajali obratno operacijo odvodov. Torej iz odvoda smo dobili originalno funkcijo. Uvedemo zapis nedoločenega integrala $\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F`(x) = f(x)$. Zakaj je potrebna aditivna konstanta? Opremo se na uvod ter izračunamo odvode istega polinoma, ki se razlikuje samo v prostem členu, da dijaki opazijo, da je njegova vrednost nepomembna. Zapišemo tabelo odvodov ter poskusimo ugotoviti njihove nedoločene integrale.

6.2 Integracijska praksa

Na podlagi pravil odvodov uvedemo pravili seštevanja in množenja integrala s faktorjem. Dijakom razložimo, da je integrale težje izračunati kot pa odvode. Zato integrale rešujemo na tak način, da s pravilom vsote in izpostavo faktorjev, integral poenostavimo. Druga možnost je, da integral preoblikujemo v znano obliko za katero poznamo pravilo integriranja. Pri uvedbi nove integracijske spremenljivke bi se izognil formalni definiciji. Dijakom bi razložili postopek ter jim nakazali, da običajno hočemo uvesti novo spremenljivko tako, da se vsebina integrala čim bolj poenostavi. Podoben pristop bi uporabili pri razlagi integriranja po delih ter integriranja racionalnih funkcij.

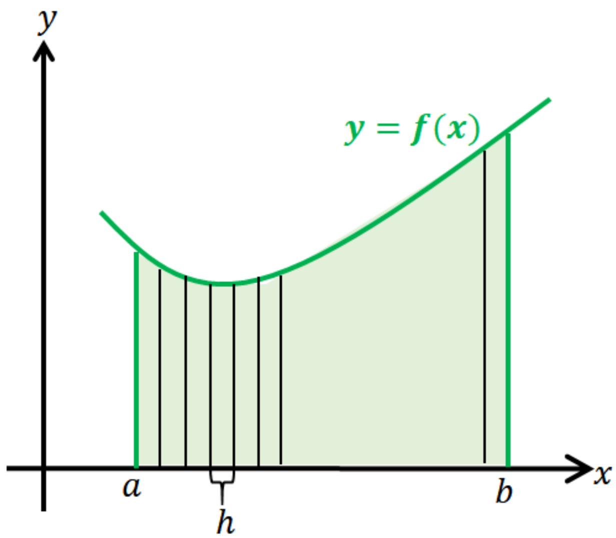
6.3 Določen integral

Dijakom zastavimo vprašanje, ki deluje kot, da nima nobene veze z integracijo. V koordinatni sistem narišemo funkcijo ter poskusimo najti način kako bi približno izračunali ploščino, ki jo krivulja omejuje z abscisno osjo.



Uvedemo svoj način računanja ploščine. Interval na abscisni osi razdelimo na n enakih delov. Preko ploščine pravokotnika uvedemo spodnjo in zgornjo vsoto ploščin na teh intervalih. Z dijaki razmislimo, kako lahko izboljšamo približek. Kje se sploh pojavi napaka? V Geogebri pripravimo animacijo zaporedja bolj natančnih spodnjih in zgornjih vsot. Idealno bi bilo, da bi bili intervali čim manjši. Torej v vsoto uvedemo limito ter zapišemo definicijo določenega integrala. Dijake opozorimo, da si bomo v naslednjih urah pogledal,i zakaj ima določen integral skoraj enak zapis kot nedoločen integral ter kako sta povezana. Lastnosti določenega integrala uvedemo z intuitivno razlago na grafih. Začetne vaje naj preverijo razumevanje teh osnovnih lastnosti ter naj dijake navadijo na novo notacijo.

Dokažemo zvezo med določenim in nedoločenim integralom. Čeprav dokaz ni najpreprostejši, mi je pomembno, da izpeljemo to neočitno in presenetljivo zvezo. Zapišemo Newton-Leibnizovo formulo ter jo uporabimo za reševanje geometrijskih nalog. Tako preverimo razumevanje povezave med določenimi in nedoločenimi integrali in uporabo lastnosti določenih integralov. Pri razlagi ploščine med dvema krivuljama se ponovno opremo na skico. Dijakom razložimo, da lahko obe funkciji poljubno visoko dvignemo z aditivno konstantno, da sta obe nenegativni na podanem intervalu. Zato nam ni potrebno preverjati, če sta funkciji



Slika 6: Delne vsote.

kdaj negativni. Izpeljemo prostornino rotacijskih teles. To je dobra vaja iz razumevanja seštevanja majhnih delov ter uporabe preproste formule za ploščino kroga. Zanimiv primer je izračun formule za prostornino kroga.