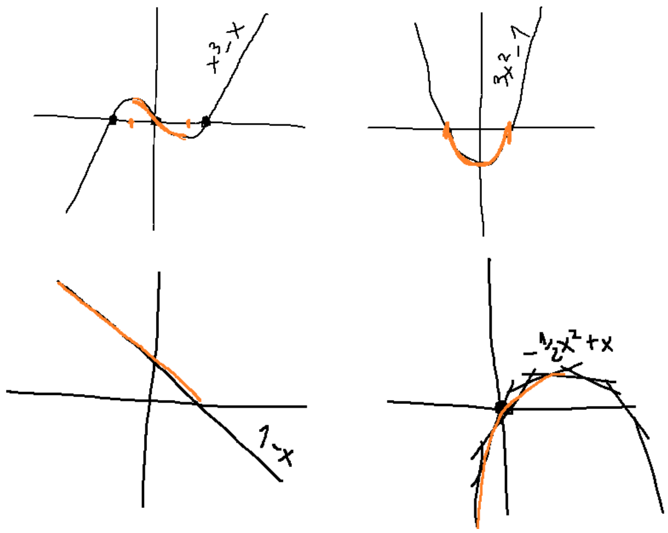
Tema: Integral **Poglavje:** Nedoločeni integral
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Grafična motivacija: *(Raje obrni slikce, da bo odvod pod grafom svoje funkcije, da je bolj očitno)* Na enem primeru narišemo graf f in nato graf njenega odvoda, npr. $x^3 - x$ in $3x^2 - 1$ (ponovimo pomen odvoda). Potem pa naredimo obratno. Recimo, da imamo $f(x) = 1 - x$ in želimo narisati graf funkcije, katere odvod je f in ki gre skozi $(0, 0)$ (s tangentami ...).



Računska motivacija: začnemo s tabelo, kjer vrstice sproti pišeš. Po treh primerih pa se vaja obrne. *Katero funkcijo smo odvajali, da smo dobili $f(x) = 4x - 3$?*

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$3x^2 - 5$	
$6x$	
$2\cos\frac{x}{2}$	
	$4x - 3$
	$\frac{1}{2}\cos x$
	e^{-x}

(Zadnje 3 primere naj sami poskušajo ugotoviti, ker znajo odvajati $\rightarrow 2x^2 - 3x$. Rešijo vse tri primere. Potem pa vsakemu prištaješ še neko naključno konstanto, kaj pa ta funkcija, ali je tudi ta vredu? Naj pogruntajo, da lahko dobljeni funkciji prištejejo katerokoli konstanto in se njen odvod s tem ne spremeni.)

Problem: Iščemo $F(x)$, za katero velja $F'(x) = f(x)$. Ker je $c' = 0$, lahko $F(x)$ določimo do konstante natančno: $F(x) + c$. Določanju take funkcije pravimo **integriranje**.

$$
\begin{tikzcd}
F(x)+c \arrow[r, bend left, "\text{odvajanje}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{integriranje}"]
\end{tikzcd}
$$

Nedoločen integral funkcije $f(x)$ je funkcija, katere odvod je enak $f(x)$. Označimo jo z $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Longleftrightarrow (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$$

(Napišemo zraven ob strani na enak način še en primer iz tabele:)

$$\int (4x-3)dx = 2x^2 - 3x + c \Longleftrightarrow (2x^2 - 3x + c)' = 4x - 3$$

Razlaga oznak $\int$ in dx: Izhaja iz oznake pri določenem integralu, ki ga bomo spoznali kasneje. Zdaj se učimo nedoločen integral, s katerim bomo lahko računali določene. Oznaka dx tudi pove, po kateri spremenljivki integriramo (npr. če je v integralu več črk, vse razen x obravnavamo kot konstante). Ni treba preveč se trudit, pač ga bomo potrebovali kasneje (pri uvedbi nove spremenljivke in določenem integralu).

Tabela integralov

(Naj bo enake oblike kot pri odvodih (če je bila tam po alinejah, naj bo tudi tu itd.) Naj pravila sami pogruntajo.)

- $\int k dx = kx + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ *(od kje pride absolutna (TO POGLEJTE ŽE PRI ODVODIH!!!)? funkcijo $\ln|x|$ se spozna (funkcijo $\ln x$ se samo preslika še na desno stran), in jo lahko odvajamo na vsaki strani osi, v obeh primerih dobiš odvod enak $1/x$ ne glede na predznak x.)*
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$

Pravila

(sledijo iz odvajanja)

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$
- za produkt in količnik (kot pri odvodu) to ne gre!
  (Primer: $\int 2xdx \neq \int 2dx \cdot \int xdx$, $\int \frac{x}{2}dx \neq \frac{\int xdx}{\int 2dx}$)

Vaje:

- *Začnemo postopoma, z osnovnimi integrali, s + in -, nato kakšno racionalno, kotne funkcije, pač golo računanje, MENJUJEMO ČRKE (ne le x) ...*
- *Primer iz uvodne motivacije: Poišči predpis za funkcijo, ki gre skozi $A(0,0)$ in je njen odvod enak $g'(x) = 1 - x$. (spet najprej geometrijsko, potem pa se še računsko prepričamo)*

Uvedba nove spremenljivke

Izračunaj integral $\int (3x-4)^6 dx$.

(Ni treba pisati postopka. Lahko bi izračunali šesto potenco izraza, vendar obstaja lažja pot. Označimo izraz $3x-4$ s spremenljivko, npr. s t (t je sedaj funkcija x) in to vstavimo v integral):
$\int t^6 dx$ *(V integralu je t, ampak mi integriramo po x, torej bo treba nekaj popravit ...)*
$t = 3x - 4$ *(sedaj uporabimo znanje od diferencialih)*
$dt = t'dx = 3dx \to dx = \frac{dt}{3}$
$\int (3x-4)^6 dx = \int t^6 \frac{dt}{3} = \int \frac{t^6}{3} dt = \frac{t^7}{3 \cdot 7} + c = \frac{(3x-4)^7}{21} + c$
(Še en način: namesto, da izraz označimo s črko t, ga že zapišemo z diferenciali namest dx (v bistvu gre za isto stvar, le da ne uporabimo nove oznake))
$\int (3x-4)^6 dx = \int (3x-4)^6 \frac{d(3x-4)}{3} = \frac{1}{3} \int \Box^6 d\Box = \frac{1}{3} \frac{\Box^7}{7} + c = \frac{(3x-4)^7}{21} + c$

Vaje:

- *Veliko izbire za golo računanje ...*
- $\int \frac{3x^2}{x^3+2} dx \to \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int \frac{dx}{x^2+4} \to \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} dx$: *če je stopnja števca $\geq$ stopnja imenovalca, se deli in posebej integrira.*
- $\int \frac{2}{1-x^2} dx$: *če je stopnja števca $<$ stopnja imenovalca in se ne da zlahka integrirat, se izraz razstavi s pomočjo parcialnih ulomkov:*
  $\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \dots$
- $\int \cos x \sin 2x dx$ *(uporaba dvojnih kotov)*

Per partes (integriranje po delih)

(Uvodni primer za motivacijo, ker ga ne znamo z novo spremenljivko rešit ...)

$\int xe^x dx = ?$

Radi bi integral preoblikovali v obliko, ki bi jo znali rešiti:

$$\begin{tikzcd} u(x)v(x) \arrow[r, bend left, "'"] & u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd}$$

Torej $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$

(Zaradi boljše preglednosti spustimo argument (x) ter preuredimo z diferenciali v obliko:)

$u \cdot v = \int u'vdx + \int uv'dx = \int vdu + \int udv$ *(kjer sta $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv$)*

Običajno zapišemo v obliki $\int udv = u \cdot v - \int vdu$

(Večkrat je integral na desni enostavnejši od levega. Za u običajno daš tisti del, ki se z odvajanjem poenostavi. Na koncu rezultat odvajamo, da preverimo, ali smo prav.)

$u = x \qquad dv = e^x dx$
$du = dx \quad v = e^x$

(pri integriranju dv ne pišemo c-ja, ker bo konstanta prišla ven tudi pri novonastalem integralu)

$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$

Vaje:

- $\int x \sin x dx$
- $\int \ln x dx$
- $\int x^3 \ln x dx$
- $\int e^x sinxdx$ *Dvakratni per partes! ($u = e^x$)*

Še kakšne posebne vaje:

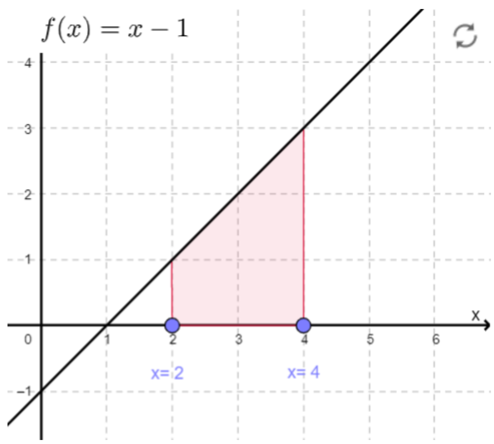
- *Dan odvod funkcije in točka, skozi katero gre (poišči to funkcijo)*
- $\int cosxsin3xdx$ *zahteva uporabo* $sinxcosy = \frac{1}{2}(sin(x-y) + sin(x+y))$

Tema: Integral **Poglavje:** Določeni integral
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

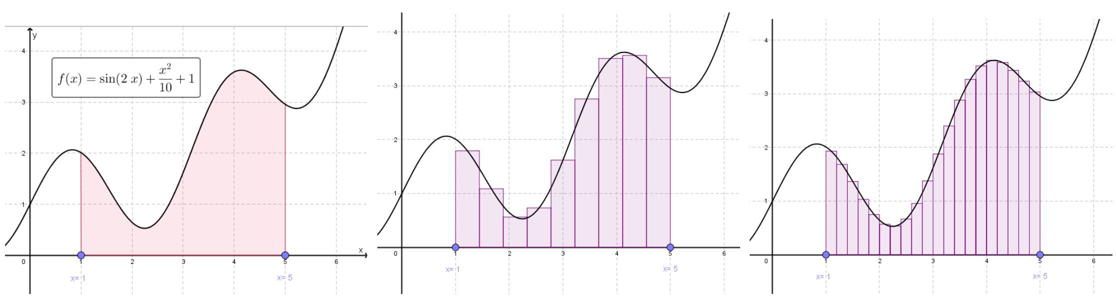
(Začnemo z nečim, kar na prvi pogled nima veze z integralom.)

Geometrijski pomen

Koliko je ploščina območja, ki ga funkcija $f(x) = x - 1$ na intervalu $[2, 4]$ oklepa z x-osjo? *(Izračunamo iz slikce preko trikotnika in pravokotnika (4).)*



(Zdaj pa si pogledamo aplet na Geogebri, v zvezek si bomo risali potem.) Vzamemo drugačno funkcijo: $f(x) = \sin 2x + \frac{x^2}{10} + 1$ na intervalu $[1, 5]$. Kako bi izračunali ploščino pod grafom?



(Naj sami predlagajo, da območje razdelimo na znane like, pravokotnike, recimo z enako širino – ampak s kakšno višino?)

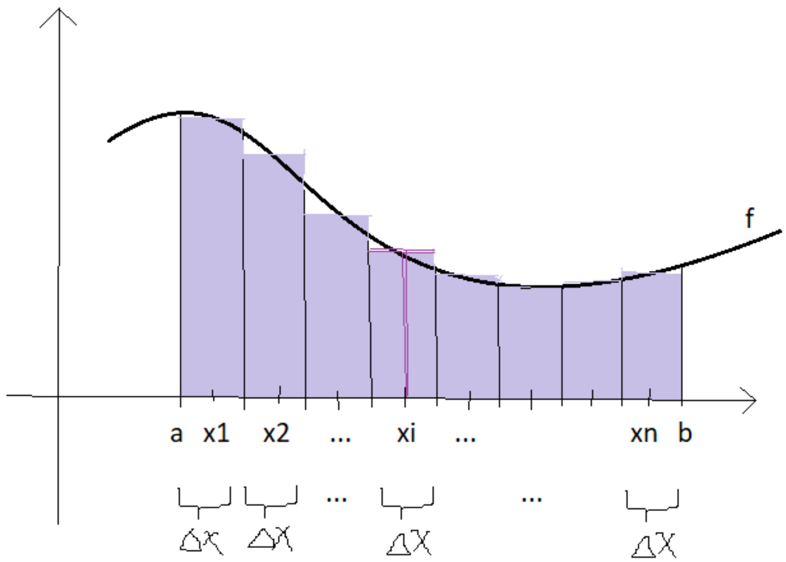
(Interval razdelimo na enako široke podintervale. Na vsakem pointervalu si izberemo točko, in vrednost funkcije f v tej točki bo višina pravokotnika na tem podintervalu. Lahko si izberejo levo/desno mejo podintervalov, ali točko, kjer f na podintervalu doseže maksimum/minimum, recimo da mi vzamemo kar točke na sredini podintervalov.)

(Iz animacije vidimo: če interval razdelimo na večdno več delov, se pravokotniki ožajo in se njihova vsota ploščin približuje iskani ploščini.)

(Zdaj pa pišemo/rišemo v zvezek (splošna f na $[a, b]$).)

Ploščino lahko zapišemo kot vsoto ploščin n pravokotnikov s širino Δx in višino $f(x_i)$, kjer so x_i sredinske točke i-tega podintervala $[a, b]$ *(izkaže se, da so to lahko katerekoli točke iz intervala)*.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \text{ \textit{(to je vijola ploščina)}}$$



Več je podintervalov, bolj se vsota ploščin pravokotnikov približuje pravi ploščini *(torej bo govora o limiti)*.

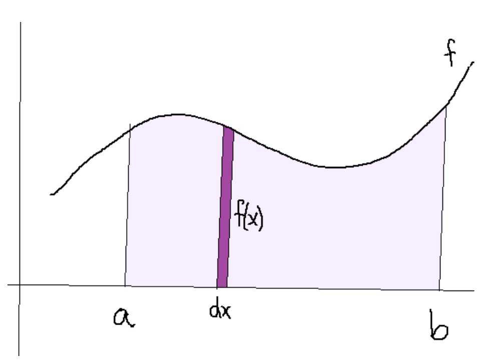
(Limito te vsote označimo z znakom $\int$ (oznako je uvedel Leibniz); integral je v bistvu ena vsota, kjer se pomikamo po res neskončno majhnih korakih. Pri tem se Δx zamenja z dx, s čimer poudarimo, da gredo širine podintervalov res proti 0.)

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

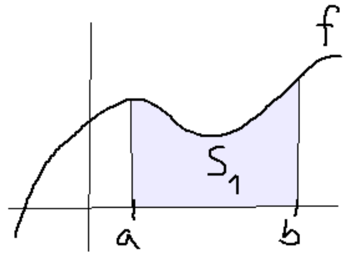
a imenujemo **spodnja meja** integrala, b pa **zgornja meja**.

(Od tu pride oznaka $\int dx$ pri nedoločenih integralih, ne pa obratno. Zakaj pa smo se učili nedoločene integrale, pa še pridemo do tega ... Poudari, da je dol. integral število (ne pa funkcija)! Zaenkrat ga še ne znamo izračunati, še pride. KJE JE POVEZAVA? ŠE PRIDE PRI N-L FORMULI, BOJO ŽE VIDLI, POTEM SE VSE POKLOPI!)

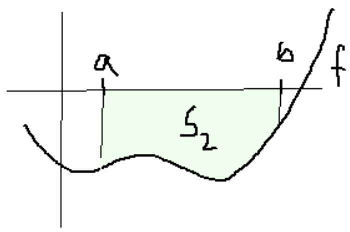
Če je $f(x)$ na $[a, b]$ zvezna in nenegativna, je **Določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ enak ploščini lika, ki je omejen z grafom funkcije f, x-osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$.**



(Za zvezno lahko pokažeš, da odsekoma zvezne funkcije ne moreš sploh vpisat v integral. Za negativno pa upoštevaš, da je $f(x_i) < 0$, torej je vsota $\sum f(x_i)\Delta x$ negativna in s tem tudi integral negativen. Ploščina pa je po velikosti seveda enaka (spodnja slika)).

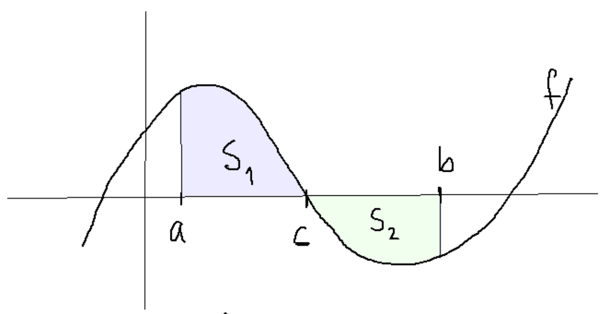


$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -S_2$$

Kaj pa, če je na $[a, b]$ funkcija malo pozitivna, malo negativna?

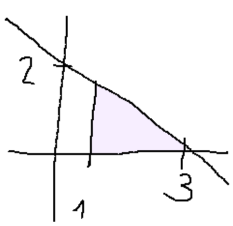


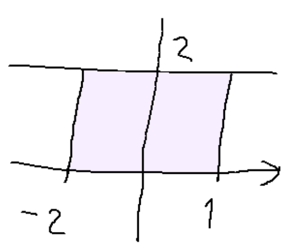
$$S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

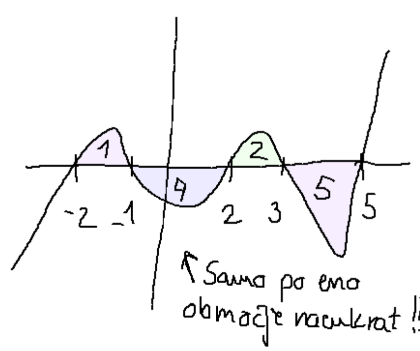
$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

Ploščina območja je tako vedno enaka $S = \int_a^b |f(x)|dx$ ne glede na predznak f.

Kratka vaja (npr. slikco s polinomom z znanimi ploščinami, zaenkrat računaš le po eno območje naenkrat, pač enkrat bo +, enkrat -):



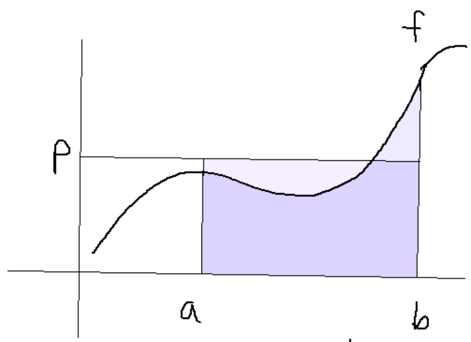




Potem pa še nekaj logičnih lastnosti *(sledijo iz ploščine (lahko zraven skice), se jih tudi preveri, ko spoznajo N-L formulo)*:

Lastnosti

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, kjer je $c \in [a, b]$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ *(To je bolj dogovor, ampak bo pa očitno sledilo iz NL formule)*
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Izrek o povprečni vrednosti: $\int_a^b f(x)dx = (b-a)p \rightarrow$: $p = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$



$$p \cdot (a-b) = S = \int_a^b f(x)dx$$

$$p = \frac{1}{a-b} \int_a^b f(x)dx$$

Vaje:

- *Lahko naloge – funckije z znano ploščino (jo znaš razbrati iz grafa, kakšne premice, absolutno, krožnice ...), najprej na enem območju, pozitivno/negativno, nato oboje ipd.*
- *funkcije,, ki se ne da enostavno ploščine izraziti, ampak se ploščine odštejejo v 0 (npr. lihe funkcije,* $\int_0^{2\pi} \sin x dx$*)*
- *sode funkcije na simetričnem intervalu* $[-a, a]$ *– lahko integriraš po* $[0, a]$ *in podvojiš! (včasih je to enostavneje, saj vstavljaš v eno mejo 0).*

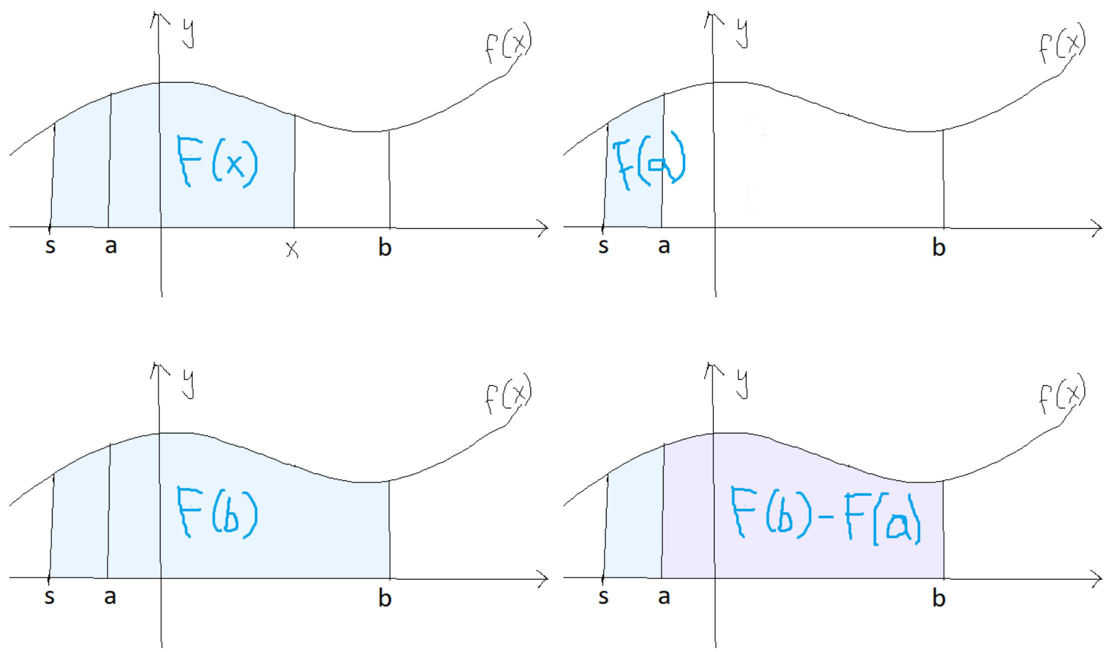
  tudi $\int_{-\pi/2}^{pi/2} \cos x dx$ *je vredu primer, pač se da poenostavit v* $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$.
- *valovita funkcija z odsekoma znanimi ploščinami (ampak neznanim predpisom) in morajo izračunati določeni integral na različnih intervalih, pa* $2f(x), -f(x), |f(x)|$ *ipd.*
- *Oceni ploščino funkcije (npr. na [0, 2], min = 1 in max = 2 -> ploščina je med 2 in 4. Nato jo še izračunamo.)*

Zdaj pa nam že malo nagaja, ker ne znamo izračunati določenega integrala, npr. drugega primera ($f(x) = \sin 2x + \frac{x^2}{10} + 1$) ne znamo izračunati ...

Newton-Leibnizova formula

Da bomo lahko integral lahko tudi izračunali, si za začetek poglejmo funkcijo na sliki (levo) *(čim manj piši, lahko le s puščicami povežeš slikce in formule)*, ki jo definiramo s *($s < a$ ni važen)*:

$$F(x) = \int_s^x f(t)dt$$

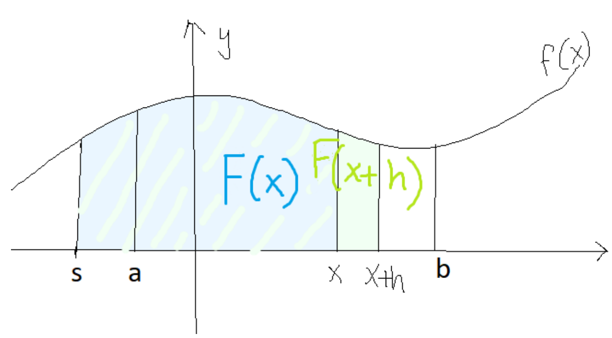


Iz slik opazimo, da velja

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Super, kako pa izračunamo F? Poglejmo si njen odvod po definiciji *(pomoč s spodnjo slikco, višina tega "pravokotnika" je v limiti kar $f(x)$)*:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$



Že vemo, da $F'(x) = f(x)$ pomeni, da je $F(x)$ nedoločen integral funkcije f *(torej že znamo izračunati F)* in to je to. *(Tukaj se zdaj vse poklopi skupaj – nedoločen intergral, ploščine in določen integral)*

Povzemimo: če je funkcija $F(x)$ nedoločen integral funkcije $f(x)$, potem velja:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ (to že vemo)}$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Newton-Leibnizova formula (NL-formula).

(Oznako s | napiši nazadnje, pač to je krajši zapis. Tu ni več c-jev, ker se odštejejo!)

Z besedo: *Določen integral funkcije je enak razliki vrednosti njenega nedoločenega integrala na zgornji in spodnji meji.*

Izračunamo prav ta prvi primer pri določenem integralom še s to formulo: $\int_2^4 (x-1)dx = (\frac{x^2}{2} - x)|_2^4 = 4$.

Pa še drugega: $\int_1^5 (\sin 2x + \frac{x^2}{10} + 1)dx = \ldots \approx 8,14$

Vaje:

- *Z N-L formulo preveri veljavnost pravil, ki smo jih našteli zgoraj (razen povprečne vrednosti)*
- *basic vaje*
- *odsekoma zvezna funkcija (Sami pogruntajo, da morajo ločiti na vsoto več integralov)*
- *Za integral $\int_e^{e^2} \ln x dx$ ugotovi, ali je večji od 2, ali je večji od 30. (Naj sami razmislijo, kako se tega lotiti.)*

Per partes v nedoločenem integralu

A je to sploh noter? Sicer pa itak sam dodaš meje.

Uvedba nove spremenljivke

PAZI! Le če je nova spremenljivka monotona funckija, lahko to narediš !! (sicer se ti vmes integral malo odšteje/prišteje ...)

$\int_1^3 (2x+1)^5 dx$ lahko rešimo na dva načina:

- kot do sedaj (izračun nedoločenega integrala): $\int (2x+1)^5 dx = \int \frac{t^5}{2} dt = \frac{(2x+1)^6}{12} + c$

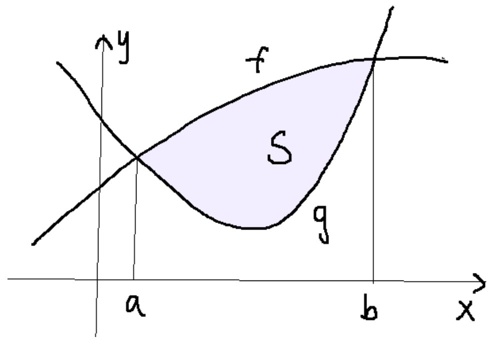
  $\int_1^3 (2x+1)^5 dx = \frac{(2x+1)^6}{12}|_1^3 = \ldots = \frac{29230}{3}$
- s spremembo meje: $\int_1^3 (2x+1)^5 dx = \int_3^7 \frac{t^5}{2} dt = \frac{t^6}{12}|_3^7 = \frac{29230}{3}$

(Nazorno zapiši pri mejah $2 \cdot 1 + 1 = 3$ itd.)

Vaje: Spet nekaj primerov za zamenjavo spremenljivk.

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Ploščina med dvema funkcijama
Pripomočki: tabla

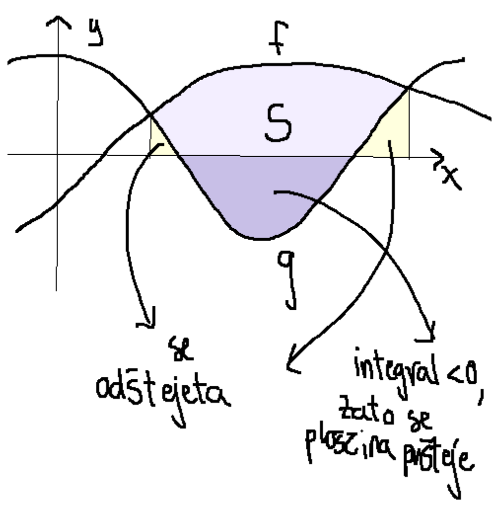
(Slikca pozitivnih funkcij, iz katere je očitno, da moraš izračunati presečišči in je ploščina enaka razliki ploščin, torej razlika integralov oz. integral razlike.)



Izračun ploščine med dvema funkcijama:

1. izračunamo presečišča *(dovolj je x-koordinate)* $\rightarrow a$ in b
2. $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ *(zgornja − spodnja)*

(Še ena slika, kjer spodnja funkcija gre pod x-os, premislek, da se pri odštevanju integrala g tisti negativni del v bistvu prišteje k ploščini in dobimo pravi $S \rightarrow$ formula velja v vseh primerih.)



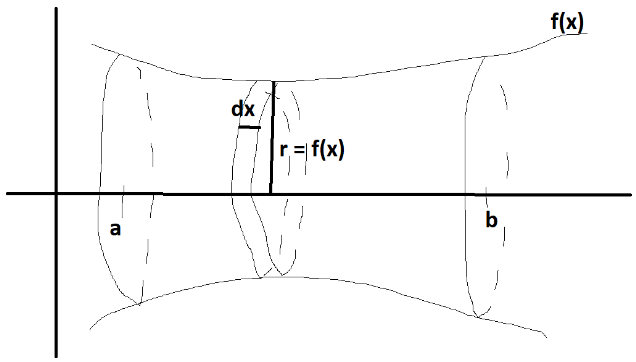
(ALI pa v bistvu samo obe funkciji premakneš za isto navzgor, npr. namesto g in f vzameš $g+10$ in $f+10$, da je območje nad x-osjo (in območje se pri premiku ne spremeni) in formula velja, tiste 10-ke pa proč odpadejo in smo na istem.)

Vaje:

- *Ploščine funkcij, ki jih grafi oklepajo z x-, y-osjo in drugimi premicami ipd., ploščina med funckijama in eno osjo ...*

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Vrtenine
Pripomočki: tabla

Če funkcijo $f(x)$, ki je na $[a, b]$ enakega predznaka, zavrtimo za 360 okoli x-osi, dobimo *rotacijsko telo* ali *vrtenino* *(Mogoče kakšen aplet, ki v živo prikazuje rotacijo in dobljen plašč?)*.



Dobljeno vrtenino narežemo *(Kot salamco. Naj čimveč sami ugotovijo)* na tanke kolobarje/valje (presek je krog). Vsak mali valj ima prostornino $\pi r^2 \cdot dx = \pi f^2(x)dx$. Gledamo vse x-e na $[a, b]$, zato za celoten volumen vzamemo integral *(enak princip kot pri ploščini)*:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Vaje:

- *(Naj sami predlagajo funckije!)* *Volumen krogle ($x^2 + y^2 = r^2$, integriraš na $[0, r]$ in pomnožiš z 2), valja ($y = r$ na $[0, v]$), stožca ($y = \frac{r}{v}x$ na $[0, v]$), elipsoida ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4\pi ab^2}{3}$)*
- $y = \sqrt{x}, [0, 3]$
- *Območje, ki ga nad x-osjo omejujeta funkciji $y = \sqrt{x}, y = -x + 6$, zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunaj prostornino nastale vrtenine (Vsota dveh vrtenin).*
- *Podobno za $y = \sqrt{x}, y = x$ (Razlika prostornin, pač morajo videti, kaj je treba prištet, odštet ...)*
- *Prostornina krogelnega odseka ($x^2 + y^2 = R^2$ na $[R - h, R] \rightarrow \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$)*

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Uporaba v fiziki
Pripomočki: tabla

(Začnemo s konstantno hitrostjo, narišemo graf, koliko je pot? Ploščina pravokotnika. Kaj pa, če je hitrost odsekoma konstantna? Še vedno ploščina, pač seštevaš ploščine stolpcev. Kaj pa, če je vijuga? Dobimo isto slikco kot pri določenem integralu, waw, pot je v bistvu določen integral hitrosti)

Kolikšno pot prepotujemo v $10s$, če se v času $t = 0$ začnemo gibati s hitrostjo, ki jo opisuje funkcija $v(t) = t^2$?

(R: $s = \int_0^{10} t^2 dt$.)

Ali pa, da je $a = \frac{dv}{dt}, v = \frac{ds}{dt}$.