Tema: Integral
Poglavje: Nedoločeni integral
Oblika: frontalna
Pripomočki: tabla

(Začnemo s tabelo. Na levi so $F(x)$, na desni pa $F'(x) = f(x)$. Najprej izračunamo nekaj odvodov danih F, potem pa v naslednjo vrstico ne vpišeš več znanega F, temveč f) Katero funkcijo smo odvajali, da smo dobili $f(x) = 2x + 3$? *(Naj sami poskušajo ugotoviti, ker znajo odvajati $\rightarrow x^2 + 3x$. Potem temu dopišeš še npr. $+4$, kaj pa ta funkcija? Naj pogruntajo, da lahko dobljeni funkciji prištejejo katerokoli konstanto in se njen odvod s tem ne spremeni.)*

Problem: Iščemo $F(x)$, za katero velja $F'(x) = f(x)$. Določanju take funkcije pravimo *integriranje*. *(SLIKCA s puščicama: F(x) -> odvajanje -> f(x) ter f(x) -> integriranje -> F(x))* Ker je $c' = 0$, lahko $F(x)$ določimo do konstante natančno: $F(x) + c$.

Nedoločen integral funkcije $f(x)$ je funkcija, katere odvod je enak $f(x)$. Oznake:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Longleftrightarrow (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

Razlaga dx: Mogoče kar tako, da je to pač oznaka. Pred dx NI MNOŽENJA, ampak je to zraven. dx pove, po kateri spremenljivki integriramo (npr. če je v integralu več črk, vse razen x obravnavamo kot konstante). Ni treba preveč se trudit, pač ga bomo potrebovali kasneje (pri uvedbi nove spremenljivke in določenem integralu).

Tabela integralov

(Naj bo enake oblike kot pri odvodih (če je bila tam po alinejah, naj bo tudi tu itd.) Naj pravila sami pogruntajo.)

- $\int kdx = kx + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- ...

Opomba: $ln|x|$, od kje pride absolutna? funkcijo $ln|x|$ se spoznain odvaja že pri odvodih! Izkaže se, da je njen odvod enak $1/x$ ne glede na predznak x-sa.

Pravila

(sledijo iz odvajanja)

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$
- za produkt in količnik (kot pri odvodu) to ne gre!
  Primer: $\int 2xdx \neq \int 2dx \cdot \int xdx$, $\int \frac{x}{2}dx \neq \frac{\int xdx}{\int 2dx}$

Vaje:

- *Začnemo postopoma, z osnovnimi integrali, s + in -, nato kakšno racionalno, kotne funkcije, pač golo računanje, MENJUJEMO ČRKE (ne le x) ...*
- *Poišči predpis za funkcijo, ki gre skozi $A(1,2)$ in je njen odvod enak $g'(x) = \frac{2}{x^3} + 4$. (lahko najprej geometrijsko, s tangentami, ampak mora biti vredu izbran primer)*

Uvedba nove spremenljivke

Izračunaj integral $\int (3x-4)^6 dx$.

(Ni treba pisati postopka. Lahko bi izračunali šesto potenco izraza, vendar obstaja lažja pot. Označimo izraz $3x-4$ s spremenljivko, npr. s t (t je sedaj funkcija x) in to vstavimo v integral):
$\int t^6 dx$ *(V integralu je t, ampak mi integriramo po x-su, torej bo treba nekaj popravit ...)*

$t = 3x - 4$ *(sedaj uporabimo znanje od diferencialih)*
$dt = t'dx = 3dx \rightarrow dx = \frac{dt}{3}$
$\int (3x-4)^6 dx = \int t^6 \frac{dt}{3} = \int \frac{t^6}{3} dt = \frac{t^7}{3 \cdot 7} + c = \frac{(3x-4)^7}{21} + c$

Vaje:

- *Veliko izbire za golo računanje ...*
- $\int \frac{3x^2}{x^3+2} dx \rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)dx} = \ln |f(x)| + c$
- $\int \frac{dx}{x^2+4} \rightarrow \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} dx$*: če je stopnja števca $\geq$ stopnja imenovalca, se deli in posebej integrira.*
- $\int \frac{2}{1-x^2} dx$*: če je stopnja števca $<$ stopnja imenovalca in se ne da zlahka integrirat, se izraz razstavi s pomočjo parcialnih ulomkov:*
  $\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$ ...

Per partes (integriranje po delih)

(Uvodni primer za motivacijo, ker ga ne znamo z novo spremenljivko rešit ...)

$\int xe^x dx =$?

(Radi bi integral preoblikovali v obliko, ki bi jo znali rešiti:)

$u(x) \cdot v(x)$ *(2 puščici, v desno "odvajanje", v levo "integriranje")* $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Torej $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$

Zaradi boljše preglednosti spustimo argument (x) ter preuredimo v obliko $\int uv'dx = u \cdot v - \int u'vdx$

odvajamo: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
integriramo: $\int (u(x) \cdot v(x))'dx = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx$
dobimo: $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = \int v(x)du + \int u(x)dv$ *(kjer sta $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv$)*
$u \cdot v = \int vdu + \int udv$
Običajno zapišemo v obliki $\int udv = u \cdot v - \int vdu$ *(Večkrat je integral na desni enostavnejši od levega.)*

(Rešimo začetni primer. Za u običajno daš tisti del, ki se z odvajanjem poenostavi. Na koncu rezultat odvajamo, da preverimo, ali smo prav.)
$u = x \to du = dx$
$dv = e^x dx \to v = e^x$ (pri integriranju dv ne pišemo c-ja)

Vaje:

- $\int x \sin x dx$
- $\int \ln x dx$
- $\int x^3 \ln x dx$
- $\int e^x sinxdx$ *Dvakratni per partes!* *($u = e^x$)*

Še kakšne posebne vaje:

- *Dan odvod funkcije in točka, skozi katero gre (poišči to funkcijo)*
- $\int cosxsin3xdx$ *zahteva uporabo* $sinxcosy = \frac{1}{2}(sin(x-y) + sin(x+y))$

Zanimive stvarce

Geometrijski pomen integrala npr. $f'(x) = 1 - x, f(0) = 0$. Narišeš si premico, ki jo predstavlja odvod, na drugem grafu pa s tangentami začrtaš obliko parabole.

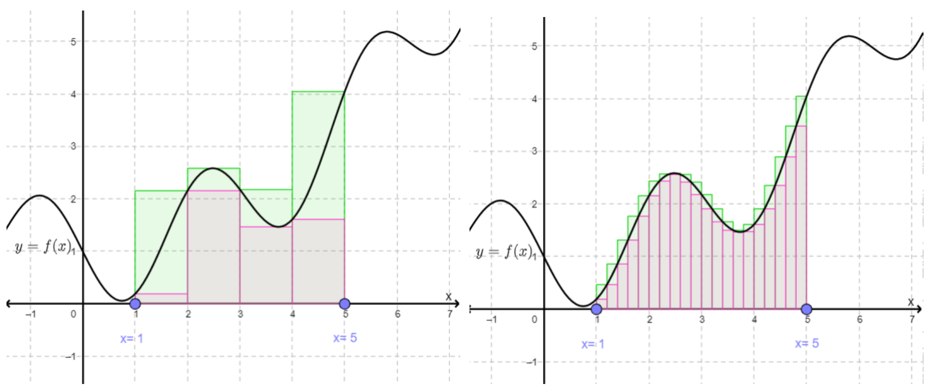
Tema: Integral **Poglavje:** Določeni integral
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Začnemo z nečim, kar na prvi pogled nima veze z integralom.)

Geometrijski pomen

Koliko je ploščina območja, ki ga funkcija $f(x) = x - 1$ na intervalu $[2, 4]$ oklepa z x-osjo? *(Izračunamo iz slikce. Nato pa zakopliciramo.)*

(Narišeš dovolj vijugasto funkcijo $f(x)$, nenegativno na intervalu $[a, b]$, zdaj pa nas zanima ploščina pod njenim grafom. Dobimo jo z razdelitvijo območja na znane like, mi vzamemo pravokotnike, ampak s kakšno višino? Ploščino lahko omejimo z zgornjo in spodnjo vsoto (razloži, kaj je to, čim manj oznak!), če delamo vedno drobnejše delitve, pa pridemo prav do te ploščine: aplet v Geogebri (https://www.geogebra.org/m/Fv6t696j, tega si ne rabijo pisat!))



(Iz animacije vidimo, da je ploščina območja omejena od spodaj s spodnjo vsoto, od zgoraj pa z zgornjo vsoto. In to ne glede na število delilnih točk. Tako se vidi, da se vsoti približujeta ploščini oz. nekemu številu, ki ga imenujemo:)

Določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ je enak ploščini lika, ki je omejen z grafom funkcije f, x-osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$. Pogoj: $f(x)$ je zvezna in na $[a, b]$ nenegativna.

a imenujemo *spodnja meja* integrala, b pa *zgornja meja*.

(Zraven podobna slikica, kjer je označen pravokotnik s širino dx in višino $f(x)$ (pač integral je izlimitirana vsota ...) Poudari, da je dol. integral število (ne pa funkcija)! Zaenkrat ga še ne znamo izračunati, še pride)

(Narišeš dve slikci, eno pod drugo. Na zgornji je graf nad x-osjo, na drugi pa pod. Obakrat naj bo označena ploščina S. Čim manj pisanja.)

- (slikca s pozitivno funkcijo) $\int_a^b f(x)dx = S_1$
- (slikca z negativno funkcijo) $\int_a^b f(x)dx = -S_2 \rightarrow$ ploščina $= |\int_a^b f(x)dx|$

Kaj pa, če je na $[a, b]$ funkcija malo pozitivna, malo negativna? *(Slikca [a, c, b] interval, najprej pozitivna, nato negativna. $S = S1 + S2 =$ prvi integral - drugi integral. Oziroma, celoten integral $=$ vsota dveh podintegralov $=$ prva ploščina - druga ploščina)*

Kratka vaja *(npr. slikco s polinomom z znanimi ploščinami, računaš le po eno območje naenkrat, pač enkrat bo +, enkrat -)*, potem pa še nekaj logičnih lastnosti *(sledijo iz ploščine (lahko zraven skice), se jih tudi preveri, ko spoznajo N-L formulo)*:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, kjer je $c \in [a, b]$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ *(To je bolj dogovor ...)*
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Izrek o povprečni vrednosti *(Območje na $[a, b]$ deformiramo v pravokotnik s širino $b - a$ (SLIKA!!). Koliko je višina? Ker sta ploščini enaki, velja $\int_a^b f(x)dx = (b - a)p \rightarrow$)*: $p = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Vaje:

- *Lahko naloge - funckije z znano ploščino (jo znaš razbrati iz grafa, kakšne premice, absolutno, krožnice ...), najprej na enem območju, pozitivno/negativno, nato malo pozitivno in malo negativno*
- *funkcije, kjer se ploščine odštejejo v 0 (npr. lihe funkcije, $\int_0^{2\pi} \sin x dx$)*
- *sode funkcije na simetričnem intervalu $[-a, a]$ – lahko integriraš po $[0, a]$ in podvojiš! (včasih je to enostavneje, saj vstavljaš v eno mejo 0)*
- *valovita funkcija z odsekoma znanimi ploščinami (ampak neznanim predpisom) in morajo izračunati določeni integral na različnih intervalih, pa 2.f(x), pa -f(x), |f(x)| ipd.*
- *Oceni ploščino funkcije (npr. na [0, 2], min = 1 in max = 2 -> ploščina je med 2 in 4. Nato jo še izračunamo.) ALI npr. Za integral $\int_e^{e^2} \ln x dx$ ugotovi, ali je večji od 2, ali je večji od 30. (Naj sami razmislijo, kako se tega lotiti.)*

Zdaj pa nam že malo nagaja, ker ne znamo izračunati določenega integrala ...

Newton-Leibnizova formula

(Za začetek ponoviš nedoločen integral. Potema pa kar poveš formulo, zgodovinsko ozadje?)

Nedoločen integral: $\int f(x)dx = F(x) + c, (F(x) + c)' = f(x)$

Določen integral: $\int_a^b f(x) = F(x)|_a^b = F(a) - F(b)$ (N-L formula) *(Oznako $F(x)|_a^b$ napiši na koncu (pustiš prazen prostor). Pojasni, zakaj tu ni konstante.)*

(Dokaz formule, če se ti zdi. Jih vprašaš, koliko jih zanima. Če se odločite za dokaz, ga ni treba pisat. Ideja: $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ je nedoločen integral za f ($G'(x) = f(x)$ preko limite), torej $G(x) = F(x) + c$. Velja $G(a) = 0 = F(a) + c \rightarrow G(x) = F(x) - F(a)$. $\int_a^b f(x)dx = G(b) = F(b) - F(a)$.)

Določen integral funkcije je enak razliki vrednosti njenega nedoločenega integrala na zgornji in spodnji meji.

Izračunamo prvi primer še s to formulo: $\int_2^4 (x - 1)dx = (\frac{x^2}{2} - x)|_2^4 = 4$.

Vaje:

- *Z N-L formulo preveri veljavnost pravil, ki smo jih našteli zgoraj (razen povprečne vrednosti)*
- *basic vaje*
- *odsekoma zvezna funkcija (Sami pogruntajo, da morajo ločiti na vsoto več integralov)*

Uvedba nove spremenljivke

$\int_1^3 (2x+1)^5 dx$ lahko rešimo na dva načina:

- kot do sedaj (izračun nedoločenega integrala): $\int (2x+1)^5 dx = \int \frac{t^5}{2} dt = \frac{(2x+1)^6}{12} + c$

  $\int_1^3 (2x+1)^5 dx = \frac{(2x+1)^6}{12}|_1^3 = \ldots = \frac{29230}{3}$
- s spremembo meje: $\int_1^3 (2x+1)^5 dx = \int_3^7 \frac{t^5}{2} dt = \frac{t^6}{12}|_3^7 = \frac{29230}{3}$

(Nazorno zapiši pri mejah $2 \cdot 1 + 1 = 3$ itd.)

Vaje: Spet nekaj primerov za zamenjavo spremenljivk.

Tema: Integral **Poglavje:** Ploščina med dvema funkcijama
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Slikca pozitivnih funkcij, iz katere je očitno, da moraš izračunati presečišči in je ploščina enaka razliki ploščin, torej razlika integralov oz. integral razlike.)

Izračun ploščine med dvema funkcijama:

1. izračunamo presečišča *(dovolj je x-koordinate)*
2. $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ *(zgornja - spodnja)*

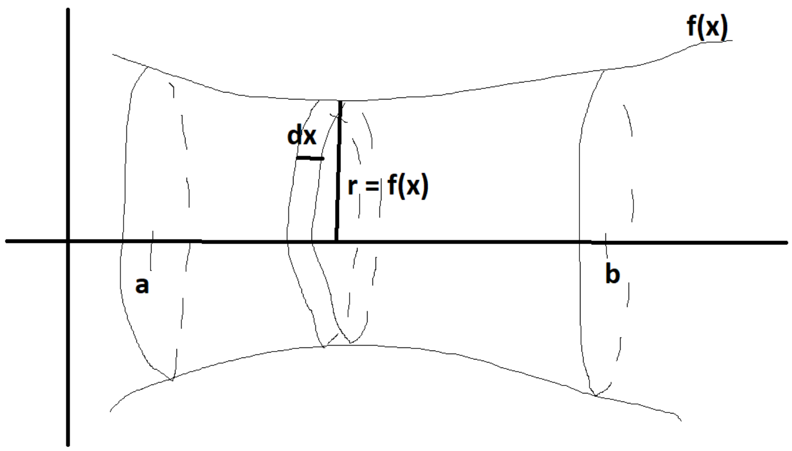
(Še ena slika, kjer spodnja funkcija gre pod x-os, premislek, da se pri odštevanju integrala g tisti negativni del v bistvu prišete k ploščini in formula velja v vseh primerih.)

Vaje:

- *Ploščine funkcij, ki jih grafi oklepajo z x-, y-osjo in drugimi premicami ipd., ploščina med funckijama in eno osjo ...*

Tema: Integral **Poglavje:** Vrtenine
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Če funkcijo $f(x)$, ki je na $[a, b]$ enakega predznaka, zavrtimo za 360 okoli x-osi, dobimo *rotacijsko telo* ali *vrtenino* *(Mogoče kakšen aplet, ki v živo prikazuje rotacijo in dobljen plašč?)*.



Dobljeno vrtenino narežemo *(Kot salamco. Naj čimveč sami ugotovijo)* na tanke kolobarje/valje (presek je krog). Vsak mali valj ima prostornino $\pi r^2 \cdot dx = \pi f^2(x)dx$. Gledamo vse x-e na $[a, b]$, zato za celoten volumen vzamemo integral:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Vaje:

- *(Naj sami predlagajo funckije!) Volumen krogle ($x^2 + y^2 = r^2$, integriraš na $[0, r]$ in pomnožiš z 2), valja ($y = r$ na $[0, v]$), stožca ($y = \frac{r}{v}x$ na $[0, v]$), elipsoida ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4\pi ab^2}{3}$)*
- $y = \sqrt{x}, [0, 3]$
- *Območje, ki ga nad x-osjo omejujeta funkciji $y = \sqrt{x}, y = -x + 6$, zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunaj prostornino nastale vrtenine (Vsota dveh vrtenin).*
- *Podobno za $y = \sqrt{x}, y = x$ (Razlika prostornin, pač morajo videti, kaj je treba prištet, odštet ...)*
- *Prostornina krogelnega odseka ($x^2 + y^2 = R^2$ na $[R - h, R] \rightarrow \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$)*

Bolj kot zanimivost (za eno nalogico): kaj, če funkcijo zavrtimo okoli y-osi? Samo zamenjaš:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Uporaba v fiziki
Pripomočki: tabla

(Izbirno)

Kolikšno pot prepotujemo v $10s$, če se v času $t = 0$ začnemo gibati s hitrostjo, ki jo opisuje funkcija $v(t) = t^2$?

(R: V nekem kratkem časovnem intervalu dt je trenutna hitrost praktično konstantna, zato v tem času prepotujemo $v(t)dt$ poti. Celotna pot je potem integral teh majhnih poti, $s = \int_0^{10} t^2 dt$.)