

**Tema:** Limita funkcije**Oblika:** frontalna**Poglavje:** Računanje s funkcijami**Pripomočki:** tabla*(Ponovimo glavno o funkcijah, ker itak vse pozabijo od prejšnjih let)*

**Funkcija** = predpis, ki vsakemu elementu prve množice priredi natanko en element druge množice.

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$f : x \mapsto 3x + 2$$

$$f(x) = 3x + 2$$

Vsaka funkcija ima določen:

- predpis
- definicijsko območje (*definirano za x-e*)
- zalogo vrednosti (*definirano za y-e*)

Definicijsko območje ni vedno definirano za vse  $x$ -e iz realne osi, npr. (*naj sami predlagajo*)

$$f(x) = \log_a x, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = \tan x \dots$$

*(lahko se še kaj ponovi, npr. sodost, lihost ...)*

**Operacije funkcij:** imejmo funkciji  $f$  in  $g$  na intervalu  $[a, b]$ . Potem za vsak  $x$  iz tega intervala velja:

- VSOTA/RAZLIKA funkcij:  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- PRODUKT funkcij:  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- KVOCIENT funkcij:  $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Vaje:

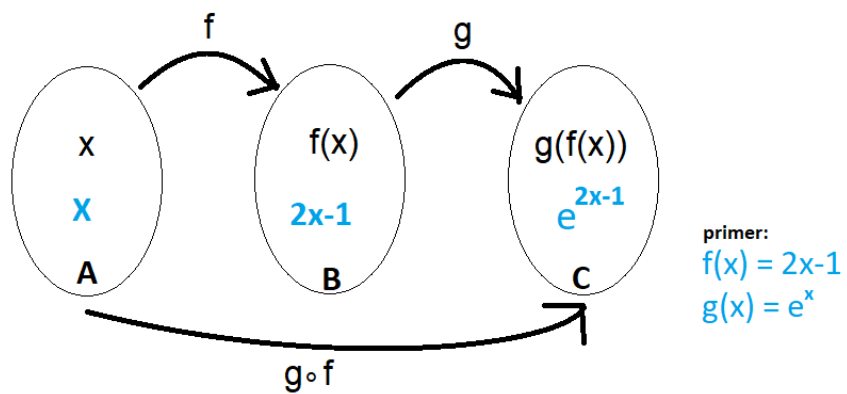
- *Preproste vaje z podanima  $f$  in  $g$  ter različnimi  $x$ -i (7, 2, splošen  $x$ , 3  $x$ ,  $4 - 2x$ ), lahko jih tudi narišejo*

**SESTAVA ali KOMPOZITUM FUNKCIJ:**

Ana, Blaž, Cene in Darja pišejo test. Funkcija  $f$  vsakemu testu priredi odstotek doseženih točk, funkcija  $g$  pa odstotkom priredi ustrezno oceno (*pomoč s sliko – tri množice s puščicami*).

Npr.  $f(\text{Ana}) = 71, g(71) = 3 \rightarrow g(f(\text{Ana})) = 3$ , kar z oznako zapišemo kot  $(g \circ f)(\text{Ana}) = 3$ .

Splošno za  $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  in  $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$  je  $g \circ f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ :



Vaje:

- Preproste vaje, kjer iz sestavljene funkcije ugotavljajo, katera je zunanja ( $g$ ) in katera notranja ( $f$ )
- kompozitum  $f$  in njenega inverza je  $x \mapsto x$
- iz danih  $f$  in  $g$  računajo  $f \circ g$  in  $g \circ f$  ipd.

---

**Tema:** Limita funkcije  
**Oblika:** frontalna

**Poglavje:** Zveznost funkcije  
**Pripomočki:** tabla

---

Funkcija je **zvezna**, če je njen graf neprekinjena črta (linearna funkcija, kvadratna, polinomi, logaritemska ...).

Racionalna funkcija ni zvezna v polih.

*Vaje:*

- *Risanje kosoma definiranih funkcij in ugotavljanje točk nezveznosti. (tudi, če se črta grafa "le" zlomi, je funkcija tam zvezna)*

*(najprej tako definiramo zveznost, ker jim je najbolj enostavna za razumeti, brez tistih limit. Sedaj gremo na limite in potem tam omenimo še enkrat zveznost.)*

**Tema:** Limita funkcije

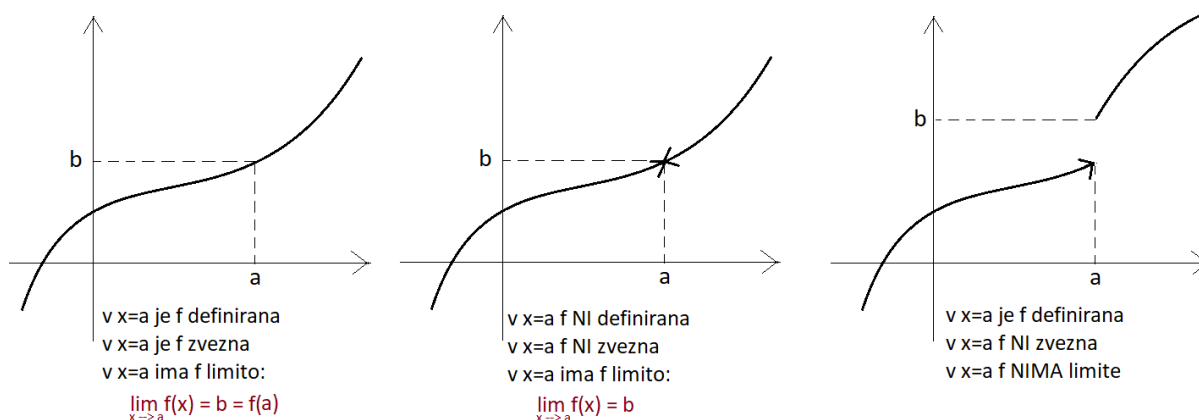
**Oblika:** frontalna

**Poglavje:** Limita funkcije

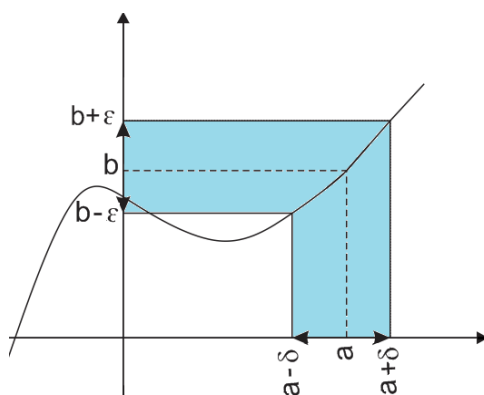
**Pripomočki:** tabla

(Pojem limite in okolice so spoznali že v zaporedjih, tako da ne preveč čarati tukaj, da se ne zmedejo. Limita zanje pomeni približevanje zaporedja/funkcije neki vrednosti, ko gre  $n, x$  ali katerakoli druga črka proti nekam.)

Poglejmo si tri primere funkcije:



Število  $b$  je **limita funkcije**  $f$  v točki  $a$ , če za vsak  $x$  iz okolice  $a$  velja, da so funkcijske vrednosti v izbrani okolici  $b$ .



(pri tretji sliki za majhno okolico  $b$ -ja vsaka vrednost  $f$  levo od  $a$  pade ven iz te okolice, zato tam limita ne obstaja.)

(Meni se ne zdi potrebno, da jih matramo s temi epsiloni in deltami :D )

(dopolnimo definicijo zveznosti:)

Funkcija je **zvezna** v  $a$ , če je v  $a$  definirana in ima limito. Limita je v tem primeru kar vrednost  $f$  v  $a - f(a)$ . (prvi primer iz slikice)

## Računanje z limitami: *(intuitivno, saj veljo enako kot za zaporedja)*

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , če  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

Kako računati npr.  $\lim_{x \rightarrow 3} x + 8$ ?

1. Najprej poskusi vstaviti vrednost.
2. Če v imenovalcu dobiš 0, poglej, ali se da kaj okrajšati z razstavljanjem ali razširjanjem

*Vaje:*

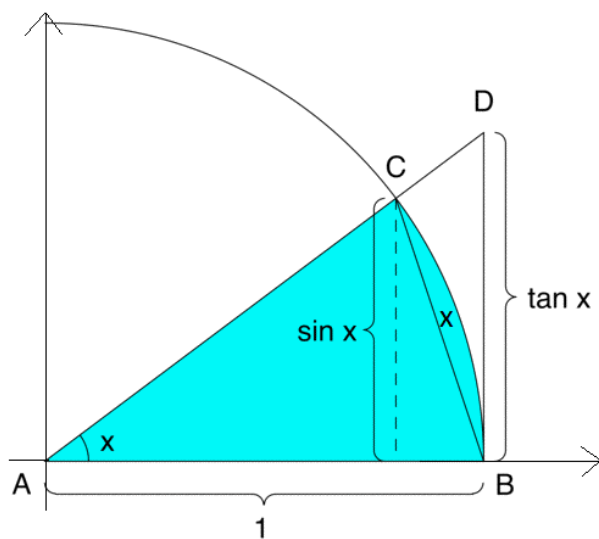
- *Enostavne naloge, kjer samo vstavijo vrednost noter in izračunajo*
- *primeri, kjer imenovalec pride 0, ampak se problematični deli okrajšajo, ko uporabimo npr. Vietovo pravilo, razliko kvadratov, racionaliziramo števec*

Kaj lahko poveš o funkciji, če veš, da: *(naj sami razmislijo)*

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \rightarrow f$  je zvezna v  $a$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \rightarrow f$  ima vodoravno asimptoto  $y = a$  *(slika!)*
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ali  $-\infty \rightarrow f$  ima v  $a$  pol sode stopnje (pri polu lihe stopnje limita ne obstaja)

## Limita trigonometrijske funkcije:

najprej nekaj limit, kjer se vseeno da vstaviti in ni problema. Potem pa problem:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$ , kaj pa tu?



$$\sin x < x < \tan x \quad / : \sin x$$

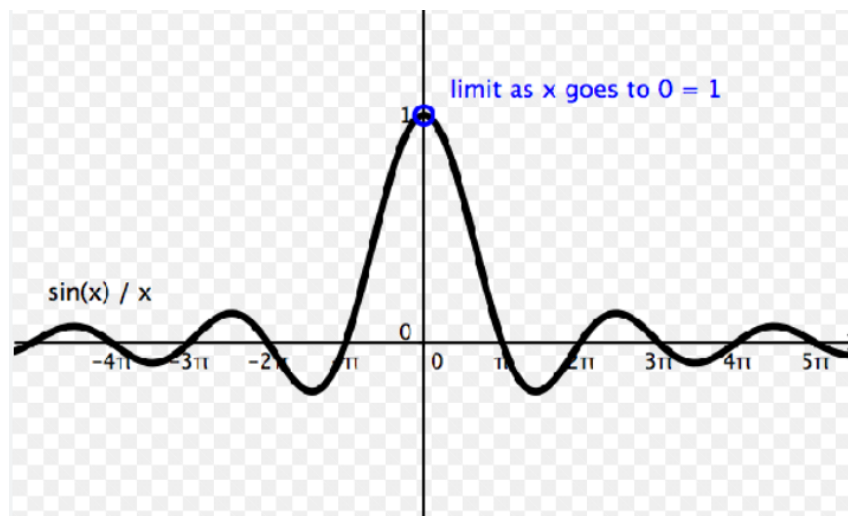
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad /^{-1}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad / \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$

Sledi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (Lahko pokažeš slikco  [\$\frac{\sin x}{x}\$](#) )



Še nekaj vaj, kjer se to uporabi, tudi na problemu (razširiš števec in imenovalec z argumentom v sinusu), upoštevaš trigonometrične lastnosti npr. dvojni koti ipd.