Tema: Verjetnostni račun **Poglavje:** Uvod
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Motivacija: Kolikšna je verjetnost, da pri metu kocke pade 6?

Pojmi: *(na primeru meta kocke)*

POSKUS: vsako dejanje, ki se dogaja v določenih pogojih (met kocke/kovanca, vlečenje kroglic iz posode, žreb ...)

DOGODEK: kar se zgodi (označujemo s velikimi tiskanimi črkami: A, B, C, D ...)

- GOTOV DOGODEK: dogodek, ki se zagotovo zgodi (pri metu kocke pade manj kot 7)
- NEMOGOČ DOGODEK: dogodek, ki se ne more zgoditi (pade 9 pik)
- SLUČAJNI DOGODEK: dogodek, ki se včasih zgodi, včasih pa ne (padejo 4 pike)

Verjetnost je število – razmerje med ugodnimi izidi in vsemi izidi:

$$P(A) = \frac{\text{št. ugodnih izidov}}{\text{št. vseh izidov}}$$

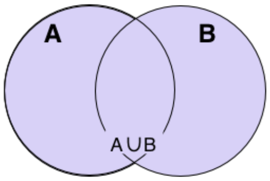
(Najprej nekaj enostavnih vaj, kjer lahko preštevamo dogodke. Naj na začetku povejo za vsak primer – kaj je dogodek, kaj je uspeli poskus, kaj so vsi poskusi.)

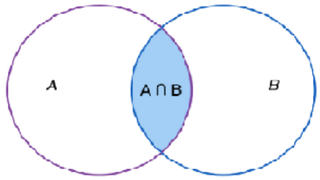
Vaje:

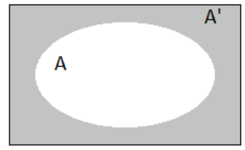
- *(uvodni primer) Mečemo eno kocko. Kolikšna je verjetnost, da pade 6? Da pade manj kot 5? Da pade soda številka?*
- *Mečemo dve kocki. Kolikšna je verjetnost, da na eni kocki pade 1? Da je na obeh liho število? Da je padeta 4 in 6? (za prvič lahko narediš 6x6 tabelico vseh možnih parov in se ven prešteje pare)*
- *Desetkrat vržemo kovanec. Kolikšna je verjetnost, da vsakič pade grb? Kaj pa, da pade cifra trikrat?*

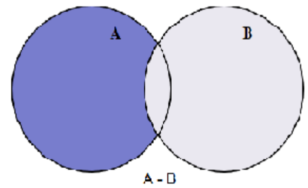
Z dogodki računamo podobno kot z množicami. *(slikce zraven vsake vrste + praktični primeri!)*

- *Vsota dogodkov A in B*: dogodek, ki se zgodi takrat, ko se zgodi dogodek A ali B ali oba hkrati. *(npr. pade 3 ali liho število)*
- *Produkt dogodkov A in B*: dogodek, ki se zgodi, ko se zgodita oba dogodka A in B hkrati. *(pade liho število, manjše od štiri)*
- *Nasprotni dogodek (komplement) dogodka A*: dogodek, ki se zgodi, ko se *ne* zgodi dogodek A. *(njuna unija pa je gotov dogodek; npr. ne pade 4)*
- *Razlika dogodkov A in B*: dogodek, ki se zgodi, ko se zgodi A, vendar se hkrati *ne* zgodi B. *(pade liho število, ki ni deljivo s 3)*
- *Poddogodek A dogodka B*: Če se zgodi B, se zgodi tudi A, obratno pa ni nujno res. *(primer?)*









Aksiomi Kolmogorova: *(aksiom je trditev, ki jo privzamemo kot veljavno)*

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\text{gotov dogodek}) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, če sta dogodka **nezdružljiva** (se ne moreta zgoditi hkrati, npr. v enem metu pade 1 in 3)

Iz teh lastnosti sledi: *(naj sami ugotavljajo, kaj je po enačaju)*

- $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$
- $P(\text{nemogoč dogodek}) = 0$ (iz 3., ker sta gotov dogodek in nemogoč dogodek nezdružljiva)
- za $A \subset B$ velja $P(A) \leq P(B)$ *($B = A \cup (B - A)$, daš čez P in upoštevaš $P(B - A) \geq 0$)*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(enako kot pri moči množic)*

(Sledi precej vaj (gl. učbenik), ampak še brez produkta in odvisnih dogodkov!)

Tema: Verjetnostni račun
Oblika: frontalna
Poglavje: Odvisnost in pogojna verjetnost
Pripomočki: tabla

Odvisni in neodvisni dogodki:

(V prejšnjem poglavju smo računali verjetnosti posameznih dogodkov in njihovih unij. Ali imamo formulo za $P(A \cap B)$? Mogoče bojo intuitivno predlagali $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, zato si pogledamo primer.)

Primer: V škatlli imamo oštevilčene listke od 1 do 10. Na slepo izberemo en listek. Računamo verjetnost, da je na izbranem listku liho število, deljivo s 3.

Imamo presek dveh dogodkov:

- A: izvlečemo liho število
- B: izvlečemo število, deljivo s 3

Koliko je $P(A \cap B)$? Uspeli izidi: $\{3, 9\}$, zato je odgovor $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
Koliko pa je verjetnost posameznega dogodka? $P(A) = \frac{5}{10}, P(B) = \frac{3}{10}$
Vidimo, da ne naša naivna formula tu ne deluje: $P(A \cap B) = \frac{1}{5} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{20}$

(Kaj je tukaj catch? Dogodek B je odvisen od dogodka A, kajti če je npr. izvlečeno liho število, ki ni deljivo s tri, npr. 5, se dogodek B ne more zgoditi.)

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Če sta **odvisna**, velja *(Verjetnost, da se zgodi B, če se zgodi A je: ugodni izidi so, ko se zgodita oba hkrati (zato presek), vsi izidi pa, ko se zgodi A)*
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ oz.
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Naloga: V škatli je 5 belih in 3 modre kroglice. Zapored izvlečemo 2 kroglici. Kolikšna je verjetnost, da je prva bela (dogodek A) in druga modra (dogodek B), če:

- *prvo vrnemo:* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$
- *prve ne vrnemo:* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

Vaje:

- *(učbenik)*

Tema: Verjetnostni račun **Poglavje:** Bernoullijevo zaporedje
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Sedemkrat zapored mečemo kocko. Kolikšna je verjetnost, da pade ena šestica? Kaj pa dve, tri, štiri, pet, šest ali sedem šestic?

(verjetnost računamo tako, da si predstavljamo zaporedje poskusov kot vrsto črtic, kjer zbiramo mesta za šestico. Očitno so dogodki neodvisni, ker vsakič znova mečemo in prejšnji meti ne vplivajo na naslednjega)

$P(\text{št. šestic} = 1) = 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \doteq 0{,}279$

$P(\text{št. šestic} = 1) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \doteq 0{,}234$

...

Kaj pa če vržemo kocko n-krat in iščemo verjetnost, da šestica pade k-krat?

$P(\text{št. šestic} = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$

Bernoullijevo zaporedje je zaporedje neodvisnih dogodkov, ki se lahko vsi zgodijo z verjetnostjo p (nasprotni dogodek torej z verjetnostjo $(1-p)$). Verjetnost, da se v n ponovitvah dogodek zgodi natanko k-krat, izračunamo:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Vaje:

-