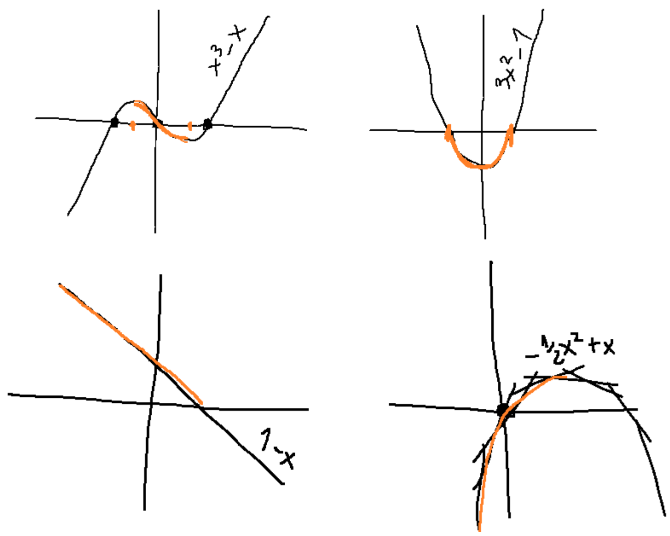
Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Nedoločeni integral
Pripomočki: tabla

(Še ena možnost začetne motivacije: Na enem primeru narišemo graf f in nato njenega odvoda, npr. $x^3 - x$ in $3x^2 - 1$. Potem pa naredimo obratno. Recimo, da imamo $f(x) = 1 - x$ in želimo narisati graf funkcije, katere odvod je f in ki gre skozi $(0, 0)$ (s tangentami ...).)



(Računska motivacija: začnemo s tabelo, kjer vrstice sproti pišeš. Po treh primerih pa se vaja obrne.) *Katero funkcijo smo odvajali, da smo dobili $f(x) = 4x - 3$?*

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$3x^2 - 5$	
$6x$	
$2\cos\frac{x}{2}$	
	$4x - 3$
	$\frac{1}{2}\cos x$
	e^{-x}

(Naj sami poskušajo ugotoviti, ker znajo odvajati $\to 2x^2 - 3x$. Rešijo vse tri primere. Potem pa vsakemu prištevaš še neko naključno konstanto, kaj pa ta funkcija, ali je tudi ta vredu? Naj pogruntajo, da lahko dobljeni funkciji prištejejo katerokoli konstanto in se njen odvod s tem ne spremeni.)

(Problem: Iščemo $F(x)$, za katero velja $F'(x) = f(x)$. Ker je $c' = 0$, lahko $F(x)$ določimo do konstante natančno: $F(x) + c$. Določanju take funkcije pravimo integriranje.*)*

$$\begin{tikzcd} F(x)+c \arrow[r, bend left, "\text{odvajanje}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{integriranje}"] \end{tikzcd}$$

Nedoločen integral funkcije $f(x)$ je funkcija, katere odvod je enak $f(x)$. Označimo jo z $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$
$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

(Napišemo zraven ob strani na enak način še en primer iz tabele:)

$$\int (4x - 3)dx = 2x^2 - 3x + c$$
$$(2x^2 - 3x + c)' = 4x - 3$$

Razlaga dx: Mogoče kar tako, da je to pač oznaka. Pred dx NI MNOŽENJA, ampak je to zraven. dx pove, po kateri spremenljivki integriramo (npr. če je v integralu več črk, vse razen x obravnavamo kot konstante). Ni treba preveč se trudit, pač ga bomo potrebovali kasneje (pri uvedbi nove spremenljivke in določenem integralu).

Tabela integralov

(Naj bo enake oblike kot pri odvodih (če je bila tam po alinejah, naj bo tudi tu itd.) Naj pravila sami pogruntajo.)

- $\int k dx = kx + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- ...

Opomba: $\ln|x|$, od kje pride absolutna (TO POGLEJTE ŽE PRI ODVODIH!!!)? funkcijo $\ln|x|$ se spozna (funkcijo $\ln x$ se samo preslika še na desno stran), in jo lahko odvajamo na vsaki strani osi, v obeh primerih dobiš odvod enak $1/x$ ne glede na predznak x.

Pravila

(sledijo iz odvajanja)

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$
- za produkt in količnik (kot pri odvodu) to ne gre!
  (Primer: $\int 2xdx \neq \int 2dx \cdot \int xdx$, $\int \frac{x}{2}dx \neq \frac{\int xdx}{\int 2dx}$)

Vaje:

- *Začnemo postopoma, z osnovnimi integrali, s + in -, nato kakšno racionalno, kotne funkcije, pač golo računanje, MENJUJEMO ČRKE (ne le x) ...*
- *Poišči predpis za funkcijo, ki gre skozi $A(1,2)$ in je njen odvod enak $g'(x) = \frac{2}{x^3} + 4$. (lahko najprej geometrijsko, s tangentami, ampak mora biti vredu izbran primer)*

Uvedba nove spremenljivke

Izračunaj integral $\int (3x-4)^6 dx$.

(Ni treba pisati postopka. Lahko bi izračunali šesto potenco izraza, vendar obstaja lažja pot. Označimo izraz $3x-4$ s spremenljivko, npr. s t (t je sedaj funkcija x) in to vstavimo v integral):

$\int t^6 dx$ *(V integralu je t, ampak mi integriramo po x, torej bo treba nekaj popravit ...)*

$t = 3x - 4$ *(sedaj uporabimo znanje od diferencialih)*

$dt = t'dx = 3dx \rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

$\int (3x-4)^6 dx = \int t^6 \frac{dt}{3} = \int \frac{t^6}{3} dt = \frac{t^7}{3 \cdot 7} + c = \frac{(3x-4)^7}{21} + c$

Še en način:

$\int (3x-4)^6 dx = \int (3x-4)^6 \frac{d(3x-4)}{3} = \frac{1}{3} \int \Box^6 d\Box = \frac{1}{3} \frac{\Box^7}{7} + c = \frac{(3x-4)^7}{21} + c$

Vaje:

- *Veliko izbire za golo računanje ...*
- $\int \frac{3x^2}{x^3+2}dx \rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)dx} = \ln|f(x)| + c$
- $\int \frac{dx}{x^2+4} \rightarrow \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}dx$: *če je stopnja števca $\geq$ stopnja imenovalca, se deli in posebej integrira.*
- $\int \frac{2}{1-x^2}dx$: *če je stopnja števca $<$ stopnja imenovalca in se ne da zlahka integrirat, se izraz razstavi s pomočjo parcialnih ulomkov:*
  $\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$ ...
- $\int \cos x \sin 2x dx$ *(uporaba dvojnih kotov)*

Per partes (integriranje po delih)

(Uvodni primer za motivacijo, ker ga ne znamo z novo spremenljivko rešit ...)

$\int xe^x dx = ?$

(Radi bi integral preoblikovali v obliko, ki bi jo znali rešiti:)

$$U(x)v(x) \underset{\int}{\overset{'}{\rightleftarrows}} u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Torej $u(x) \cdot v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$

Zaradi boljše preglednosti spustimo argument (x) ter preuredimo v obliko $u \cdot v = \int u'vdx + \int uv'dx = \int vdu + \int udv$ *(kjer sta $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv$)*

Običajno zapišemo v obliki $\int udv = u \cdot v - \int vdu$

(Večkrat je integral na desni enostavnejši od levega.)

(Rešimo začetni primer. Za u običajno daš tisti del, ki se z odvajanjem poenostavi. Na koncu rezultat odvajamo, da preverimo, ali smo prav.)

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$ (pri integriranju dv ne pišemo c-ja)

Vaje:

- $\int x \sin x dx$
- $\int \ln x dx$
- $\int x^3 \ln x dx$
- $\int e^x sinxdx$ *Dvakratni per partes!* $(u = e^x)$

Še kakšne posebne vaje:

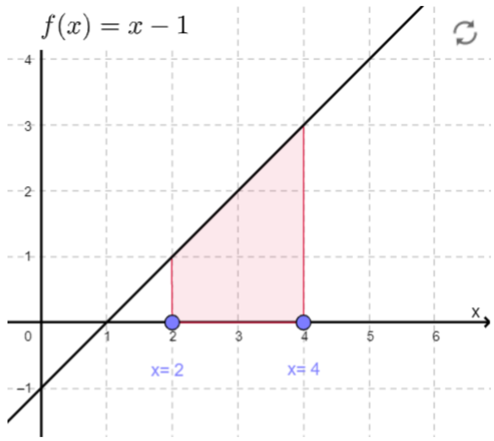
- *Dan odvod funkcije in točka, skozi katero gre (poišči to funkcijo)*
- $\int cosxsin3xdx$ *zahteva uporabo* $sinxcosy = \frac{1}{2}(sin(x-y) + sin(x+y))$

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Določeni integral
Pripomočki: tabla

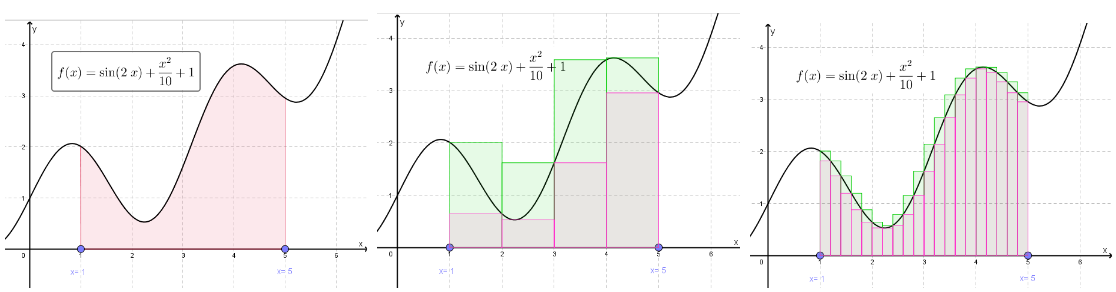
(Začnemo z nečim, kar na prvi pogled nima veze z integralom.)

Geometrijski pomen

Koliko je ploščina območja, ki ga funkcija $f(x) = x - 1$ na intervalu $[2, 4]$ oklepa z x-osjo? *(Izračunamo iz slikce preko trikotnika in pravokotnika (4).)*

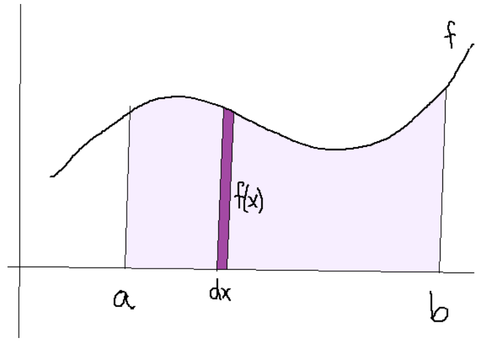


(Zdaj pa si pogledamo aplet na Geogebri (https://www.geogebra.org/m/Fv6t696j), v zvezek si bomo risali potem. Vzamemo drugačno funkcijo: $f(x) = \sin 2x + \frac{x^2}{10} + 1$ na intervalu $[1, 5]$. Kako bi izračunali ploščino pod grafom?)



(Naj sami predlagajo, da območje razdelimo na znane like, pravokotnike, recimo z enako širino – ampak s kakšno višino? Ploščino lahko omejimo z zgornjo in spodnjo vsoto (razloži, kaj je to, čim manj oznak, le aplet glej!), in velja, da je ploščina območja vedno omejena od spodaj s spodnjo vsoto, od zgoraj pa z zgornjo vsoto. Če vzamemo vedno ožje pravokotnike, se vsoti z obeh strani približujeta ploščini.)

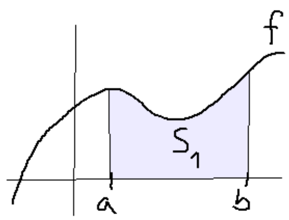
(Zdaj pa rišemo v zvezek, kot kaže spodnja slika. Ploščino lahko zapišemo kot vsoto pravokotnikov s širino dx in višino $f(x)$, kjer so x-i neke točke iz intervala $[a, b]$. Ker hočemo zelo zelo tanke pravokotnike, bomo namesto ene velike vsote zapisali to kot integral – integral je v bistvu ena vsota, kjer se pomikamo po res majcenih korakih.)



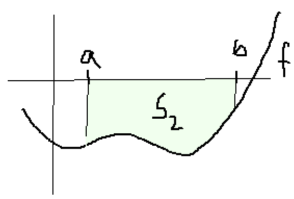
Določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ je enak ploščini lika, ki je omejen z grafom funkcije f, x-osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$. Pogoj: $f(x)$ je zvezna in na $[a, b]$ nenegativna. *(Za zvezno lahko pokažeš, da odsekoma zvezne funkcije ne moreš sploh vpisat v integral. Za negativno pa si bomo potem pogledali.)*

a imenujemo *spodnja meja* integrala, b pa *zgornja meja*.

(Poudari, da je dol. integral število (ne pa funkcija)! Zaenkrat ga še ne znamo izračunati, še pride)

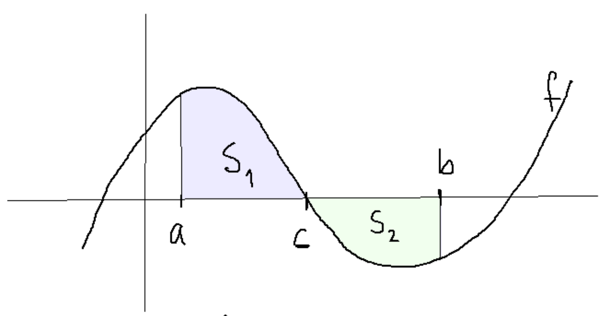


$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -S_2$$

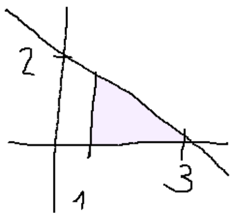
Kaj pa, če je na $[a, b]$ funkcija malo pozitivna, malo negativna?

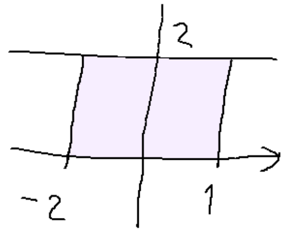


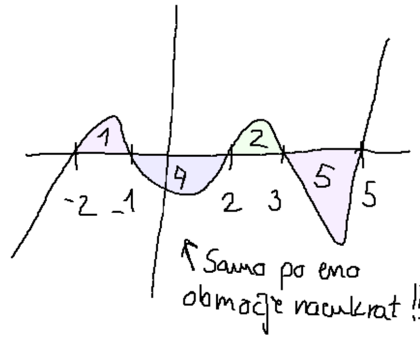
$$S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

Kratka vaja *(npr. slikco s polinomom z znanimi ploščinami, računaš le po eno območje naenkrat, pač enkrat bo +, enkrat -)*:



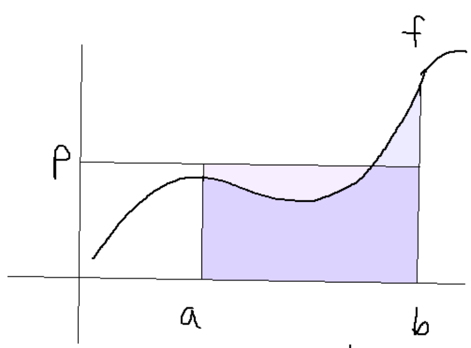




Potem pa še nekaj logičnih lastnosti *(sledijo iz ploščine (lahko zraven skice), se jih tudi preveri, ko spoznajo N-L formulo)*:

Lastnosti

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, kjer je $c \in [a, b]$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ *(To je bolj dogovor ...)*
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Izrek o povprečni vrednosti: $\int_a^b f(x)dx = (b-a)p \rightarrow$: $p = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$



$$p \cdot (a-b) = S = \int_a^b f(x)dx$$

$$p = \frac{1}{a-b} \int_a^b f(x)dx$$

Vaje:

- *Lahko naloge - funckije z znano ploščino (jo znaš razbrati iz grafa, kakšne premice, absolutno, krožnice ...), najprej na enem območju, pozitivno/negativno, nato malo pozitivno in malo negativno*
- *funkcije, kjer se ploščine odštejejo v 0 (npr. lihe funkcije, $\int_0^{2\pi} \sin x dx$)*
- *sode funkcije na simetričnem intervalu $[-a, a]$ – lahko integriraš po $[0, a]$ in podvojiš! (včasih je to enostavneje, saj vstavljaš v eno mejo 0).*

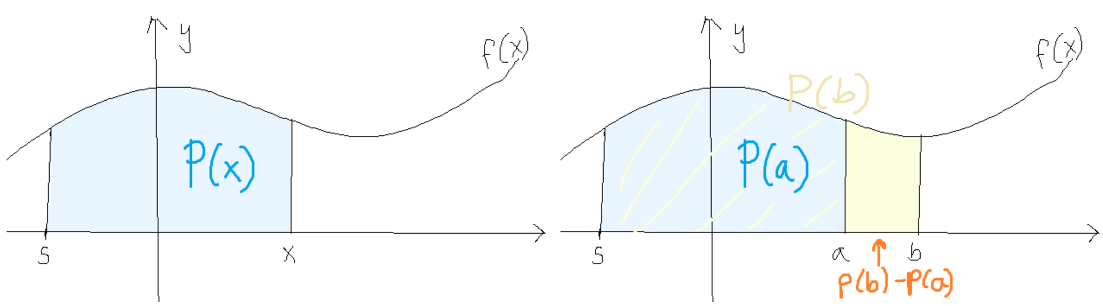
  tudi $\int_{-\pi/2}^{pi/2} \cos x dx$ je vredu primer, pač se da poenostavit v $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$.
- *valovita funkcija z odsekoma znanimi ploščinami (ampak neznanim predpisom) in morajo izračunati določeni integral na različnih intervalih, pa $2f(x), -f(x), |f(x)|$ ipd.*
- *Oceni ploščino funkcije (npr. na [0, 2], min = 1 in max = 2 -> ploščina je med 2 in 4. Nato jo še izračunamo.) ALI npr. Za integral $\int_e^{e^2} \ln x dx$ ugotovi, ali je večji od 2, ali je večji od 30. (Naj sami razmislijo, kako se tega lotiti.)*

Zdaj pa nam že malo nagaja, ker ne znamo izračunati določenega integrala ...

Newton-Leibnizova formula

Da bomo lahko integral lahko tudi izračunali, si za začetek poglejmo funkcijo na sliki (levo). Funkcija $P(x)$ pogleda območje med grafom f in x-osjo na intervalu $[s, x]$ *(s je pač eno število, NI VAŽNO)* in prišteje območje, kjer je f pozitivna, in odšteje območje, kjer je f negativna. Tako vidimo, da se P obnaša ravno tako kot integral:

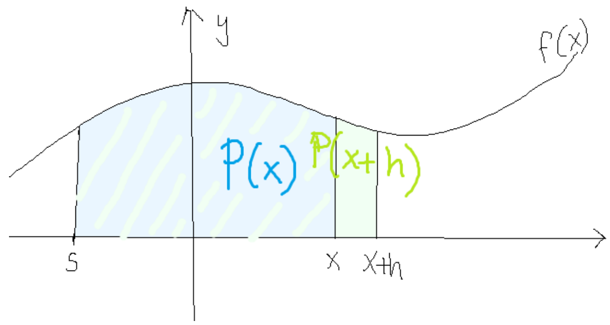
$$P(x) = \int_s^x f(t)dt$$



Izrazimo še (očitno sledi iz slike) $\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$. Waw, to pa smo že bližje. Manjka nam samo še predpis za P. Zato si *(hint)* poglejmo njen odvod:

$$P'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$

Pri tem smo iz slike videli, kaj je $P(x+h) - P(x)$ in ko gre h proti 0, je višina tega "pravokotnika" kar $f(x)$.



Že vemo, da $P'(x) = f(x)$ pomeni, da je $P(x)$ nedoločen integral funkcije f ($\int f(x)dx = P(x)+c$), torej P dejansko že znamo določiti!

Povzemimo: če $\int f(x)dx = F(x) + c$, potem je $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ *(Oznako s | napiši nazadnje, pač to je krajši zapis. Tu ni več c-jev!)* Newton-Leibnizova formula (NL-formula).

Z besedo: Določen integral funkcije je enak razliki vrednosti njenega nedoločenega integrala na zgornji in spodnji meji.

Izračunamo prav ta prvi primer pri določenem integralom še s to formulo: $\int_2^4 (x-1)dx = (\frac{x^2}{2} - x)|_2^4 = 4$.

Vaje:

- *Z N-L formulo preveri veljavnost pravil, ki smo jih našteli zgoraj (razen povprečne vrednosti)*
- *basic vaje*
- *odsekoma zvezna funkcija (Sami pogruntajo, da morajo ločiti na vsoto več integralov)*

Uvedba nove spremenljivke

$\int_1^3 (2x+1)^5 dx$ lahko rešimo na dva načina:

- kot do sedaj (izračun nedoločenega integrala): $\int (2x+1)^5 dx = \int \frac{t^5}{2} dt = \frac{(2x+1)^6}{12} + c$

  $\int_1^3 (2x+1)^5 dx = \frac{(2x+1)^6}{12}|_1^3 = \ldots = \frac{29230}{3}$
- s spremembo meje: $\int_1^3 (2x+1)^5 dx = \int_3^7 \frac{t^5}{2} dt = \frac{t^6}{12}|_3^7 = \frac{29230}{3}$

(Nazorno zapiši pri mejah $2 \cdot 1 + 1 = 3$ itd.)

Vaje: Spet nekaj primerov za zamenjavo spremenljivk.

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Ploščina med dvema funkcijama
Pripomočki: tabla

(Slikca pozitivnih funkcij, iz katere je očitno, da moraš izračunati presečišči in je ploščina enaka razliki ploščin, torej razlika integralov oz. integral razlike.)

Izračun ploščine med dvema funkcijama:

1. izračunamo presečišča *(dovolj je x-koordinate)*
2. $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ *(zgornja - spodnja)*

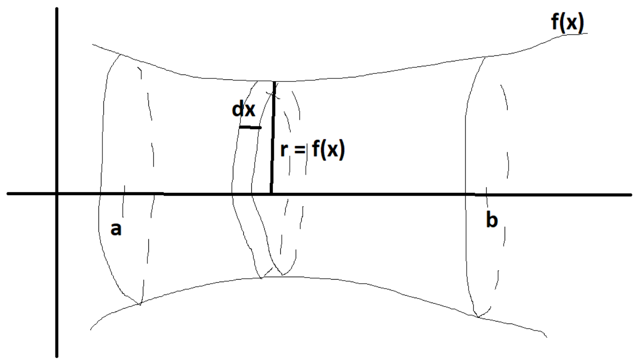
(Še ena slika, kjer spodnja funkcija gre pod x-os, premislek, da se pri odštevanju integrala g tisti negativni del v bistvu prišete k ploščini in formula velja v vseh primerih.)

Vaje:

- *Ploščine funkcij, ki jih grafi oklepajo z x-, y-osjo in drugimi premicami ipd., ploščina med funckijama in eno osjo ...*

Tema: Integral **Poglavje:** Vrtenine
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

Če funkcijo $f(x)$, ki je na $[a,b]$ enakega predznaka, zavrtimo za 360 okoli x-osi, dobimo *rotacijsko telo* ali *vrtenino* *(Mogoče kakšen aplet, ki v živo prikazuje rotacijo in dobljen plašč?)*.



Dobljeno vrtenino narežemo *(Kot salamco. Naj čimveč sami ugotovijo)* na tanke kolobarje/valje (presek je krog). Vsak mali valj ima prostornino $\pi r^2 \cdot dx = \pi f^2(x)dx$. Gledamo vse x-e na $[a,b]$, zato za celoten volumen vzamemo integral:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Vaje:

- *(Naj sami predlagajo funckije!) Volumen krogle ($x^2+y^2=r^2$, integriraš na $[0,r]$ in pomnožiš z 2), valja ($y=r$ na $[0,v]$), stožca ($y=\frac{r}{v}x$ na $[0,v]$), elipsoida ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \to \frac{4\pi ab^2}{3}$)*
- $y=\sqrt{x}, [0,3]$
- *Območje, ki ga nad x-osjo omejujeta funkciji $y=\sqrt{x}, y=-x+6$, zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunaj prostornino nastale vrtenine (Vsota dveh vrtenin).*
- *Podobno za $y=\sqrt{x}, y=x$ (Razlika prostornin, pač morajo videti, kaj je treba prištet, odštet ...)*
- *Prostornina krogelnega odseka ($x^2+y^2=R^2$ na $[R-h,R] \to \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$)*

Bolj kot zanimivost (za eno nalogico): kaj, če funkcijo zavrtimo okoli y-osi? Samo zamenjaš:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Kaj pa POVRŠINA VRTENINE? (samo namesto volumna tistega valja vzameš njegovo plašč) $\to P = \int_a^b 2\pi f(x)dx = 2\pi \int_a^b f(x)dx$???

Tema: Integral
Oblika: frontalna
Poglavje: Uporaba v fiziki
Pripomočki: tabla

(Izbirno)

Naj pogruntajo (saj mogoče že vedo), da formula $s = v\dot{t}$ izhaja iz ploščine pravokotnika pod grafom, kjer je v konstantna funkcija časa. Torej če v ni konstantna, je pot kar integral!

Kolikšno pot prepotujemo v $10s$, če se v času $t = 0$ začnemo gibati s hitrostjo, ki jo opisuje funkcija $v(t) = t^2$?

(R: V nekem kratkem časovnem intervalu dt je trenutna hitrost praktično konstantna, zato v tem času prepotujemo $v(t)dt$ poti. Celotna pot je potem integral teh majhnih poti, $s = \int_0^{10} t^2 dt$.)

Ali pa, da je $a = \frac{dv}{dt}, v = \frac{ds}{dt}$.