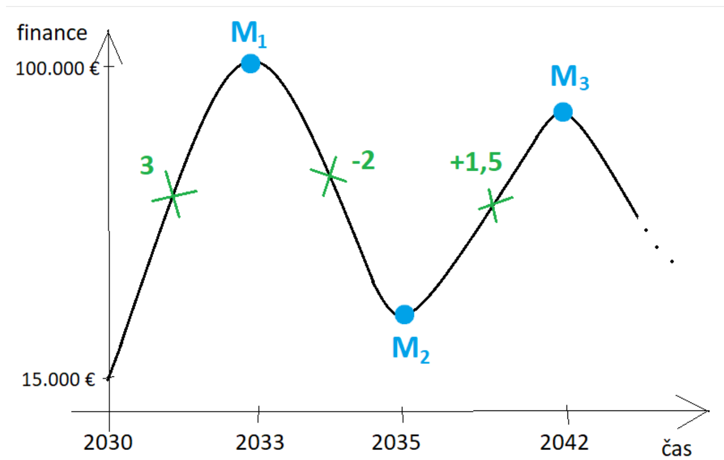
Tema: Odvod **Poglavje:** Uvod
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Začnemo pa takoj po poglavju limite funkcije, brez omenjanja besede "odvod". Šele po omembi lahko na začetek napišemo naslov novega poglavja: "ODVOD")

Uvodna motivacija (graf finančnega stanja) *(To govoriš in zraven rišeš graf)*:

Leta 2030 magistriraš in začneš svoje podjetje, na začetku imaš 15.000 €. V treh letih profitiraš na 100.000 € in ti ni treba več biti menedžer sam sebi, ampak enega najameš. Nadajnje stanje financ pa opiše ta graf *(in dorišeš potem dolino, na dnu se menja menedžer, gre navzgor, na vrhu nov menedžer, ker je ta drugi šel v penzijo, pa gre spet navzdol . . .)*.



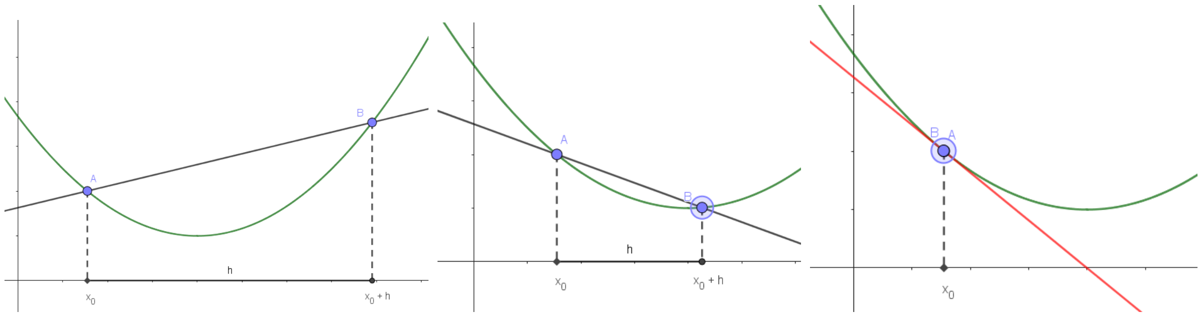
Kateri menedžer je boljši? *(tisti, po katerem graf začne naraščati)*. Torej ocena za menedžerja je to naraščanje/padanje (M_1 dobi oceno $-2, M_2$ oceno $+1{,}5$, čeprav je pri prvem več financ. *(Še sebe oceniš z +3, za primerjavo s ta dobrim menedžerjem, da pride do izraza razlika v koeficientih)*)

Kako pa bi lahko izračunali to "strmino"? *(Koeficient neke premice. (če ne vejo, greš z naslednjim primerom naprej, tam pa bojo ja pogruntali) Narišeš še en primer s premicami – pot v odvisnosti od časa za avto, tekača in polža, torej tre premice iz izhodišča z različnim koeficientom – katera je bolj strma? Od avta, ampak kaj na premici ti pove strmino? → koeficient.)*

Ponovimo koeficient premice ($k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *(s slikco!)*)

Torej pri primeru z avtom, tekačem in polžem je strmejša tista premica, ki ima višji koeficient. Kaj pa pri menedžerjih? Tam nimamo premic, ampak je graf ukrivljen. *(naj probajo sami pridet na idejo tangente. Fora pa je ista – višji koeficient tangente, boljši je menedžer (primerjava sebe in M_2))*.

Naslednji problem je, kako izračunati koeficient tangente na ukrivljen graf. *(tu pa zdaj začnemo na splošno risati in namignemo na sekanto, uporabi GEOGEBRO!)*



(Ustno povemo idejo tangente – točko, v kateri jo želimo, fiksiramo, si izberemo eno drugo točko, potegnemo skozi sekanto in točko približujemo prvi. Vidimo, da dobimo res tangento.)

Zapišimo koeficient sekante: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tangento dobimo, ko gre h proti 0 *(To NI, da vstaviš $h = 0$, ker dobiš $\frac{0}{0}$, zato vzameš limito (spomnimo se limite $\frac{\sin x}{x}$))*

Koeficient tangente na f v točki x_0 je *(najprej zapiši limito in nato šele uvedi rdečo oznako)*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(Sedaj pa še ime za to oznako:)

Odvod funkcije v dani točki je smerni koeficient tangente na funkcijo v tej točki: $k_t = f(x_0)$.

Vaja:

- *Izračunaj splošen odvod funkcije $f(x) = 3x+2$ in $g(x) = 8$ (tukaj najprej razberejo odvod iz grafa (odvod premice kar koeficient premice, odvod konstante je 0, ker je to itak vodoravna premica), nato pa se prepričajo še računsko)*
  $\lim_{h\to 0} c = 0$

- *Zapiši koeficient tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ v točki $x = 2$ in $x = -3$ (najprej slikca, narišemo približno tangento in ugotavljamo, koliko prb. bi bil koeficient. Bistveno, da je v -3 negativen in v 2 pozitiven). Splošen koeficient:*
  $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$
  Narišeš slikco grafa odvoda in primerjaš z grafom f. Odvod je negativen točno tam, kjer je tangenta "padajoča" $k(2) = 4, k(-3) = -6$

PRAVILA: *(lahko dokažemo ta prvo, potem pa naj ostale npr. za DN ali pa sam pogledajo v učbenik, ne bi zgubljali časa s tem)*

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(izračunamo te tri primere po definiciji (drugega smo že pri vaji))
$x' = 1$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$ *(Tu se že kar namatramo, zato uporabimo pravilo produkta)* $(x^3)' = (x \cdot x^2)' = x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$
Za splošen n : $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

- $n \in \mathbb{N}$ – dokažemo z indukcijo na n:

  Za $n = 1$ očitno velja. IP: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, dokazujemo za $n + 1$:

  $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1)x^n$

- Kaj pa $(x^{-n})'$, kjer je $n \in \mathbb{N}$? Zapišemo $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ in upoštevamo pravilo odvoda obratne funkcije: $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}$

- izkaže se, da formula velja za vsak $n \in \mathbb{R}$ *(gl. učbenik, ne bomo mi dokazovali)*

Vaje:

- *Drug zapis definicije odvoda:*

  $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

  $f'(x) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

  $\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = -f(x_0) \ \ldots$

- *Basic vaje iz odvodov elementarnih funkcij*

Tema: Odvod **Poglavje:** Uporaba odvoda
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Že vemo, da nam odvod pove smerni koeficient tangente na graf. Ponovimo to, potem pa se še spomnimo povezave med koeficientom premice in kotom)

Enačba tangente in enačba normale

Imejmo funkcijo $f(x) = x^3$.

- *Zapiši enačbo tangente na graf f v točki $T(2, y_0)$.* *($y_t = 12x - 16$)*
- *Zapiši še enačbo normale ($k_n = -\frac{1}{k_t}$) v isti točki.* *($y_n = -\frac{1}{12}x + \frac{49}{6}$)*

Vaje iz tega

Kot med grafom funkcije in koordinatnima osema

Najprej se spomnimo *(nariši slikco in označi kote)*: Kot med premico in abscisno osjo *(pozitivnim poltrakom, drugi kot je potem 180° $-\phi$)*:

$$\tan\phi = k$$

Kot med funkcijo in abscisno osjo je potem kot med x-osjo in tangento na f v presečišču s to osjo *(slikca)*: $\tan\alpha = k_t = f'(x_0)$.

Kot β med funkcijo in ordinatno osjo se izračuna posredno preko kota z abscisno osjo (torej $\beta = 90° - \alpha$, kjer se za x_0 vzame $x = 0$.) *($\tan\beta = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(0)}$)*

Vaje iz tega

Kot med funkcijama *(nariši slikco in naj sami predlagajo, da je to kot med tangentama)*

Spomnimo se: Kot med premicama:

$$\tan\phi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Oba koeficienta izračunamo z odvodom obeh funkcij v točki presečišča in vstavimo noter.

Vaje iz tega

Naraščanje in padanje funkcije

(Narišeš neko valovito funkcijo. Itak znajo pokazati, kje narašča in kje pada, zdaj je pa treba to še formalizirati.)

*Funkcija je na intervalu (a, b) **naraščajoča**, če je $f'(x) > 0$ za vsak x iz tega intervala.*

*Funkcija je na intervalu (a, b) **padajoča**, če je $f'(x) < 0$ za vsak x iz tega intervala.*

(Kaj pa tam, kjer je $f'(x) = 0$?)

Stacionarne točke

To so točke, v katerih je odvod funkcije ničeln ($(f(x)' = 0$) *(kar pomeni vodoravno tangento)*. *(Katere točke na grafu so to? – Na vrhovih in dolinah, pa tudi sedlih. PAZI – ŠPIČKA NI STACIONARNA TOČKA, KER ODVOD TAM NI DEFINIRAN)*. "Vrhove" imenujemo **lokalni maksimum**, "doline" pa **lokalni minumum**. Oboje skupaj imenujemo **lokalni ekstremi**. "Sedlo" pa ni ekstrem. Za vse troje mora torej veljati $f(x)' = 0$, za vsako posebej pa še:

- LOKALNI MAKSIMUM: Vrednosti funkcije v okolici te točke so manjše od vrednost te točke. Odvod spremeni predznak *(slikca x-osi in kvadratne funkcije, levo je odvod +, desno pa -)*

- LOKALNI MINIMUM: Vrednosti funkcije v okolici te točke so večje od vrednost te točke. Odvod spremeni predznak *(slikca x-osi in kvadratne funkcije, levo je odvod -, desno pa +)*

- SEDLO: Vrednosti funkcije v okolici te točke so na eni strani manjše, na drugi strani pa večje od vrednost te točke. Odvod čez točko ne spremeni predznaka *(slikca x-osi in sedla, levo in desno je odvod + ali pa -)*

Poleg lokalnih ekstremov pa imamo še globalne ekstreme – to sta **globalni maksimum** in **globalni minimum**. To sta največja/najmanjša vrednost f na danem intervalu. Teh ne določimo z odvodom. *(slikca vijuge, kjer je max. vrednost na krajišču, kjer se vidi, da odvod ni 0)*

(Lahko povzameš, da se ne zmedejo: imamo ekstreme (globalne in lokalne), ter sedla. Lokalni ekstremi in sedla se imenujejo stac. točke in je tam odvod enak 0.)

Vaje:

- *zapis ekstremov dane funkcije*

- *nariši funkcijo, določi ničle, začetno vrednost, pole, ekstreme (sedaj se racionalne funkcije lahko riše še bolj natančno!)*

- *Dokaži, da $f(x) = \frac{3-x^2}{x^2}$ nima ekstrema (odvod ne more biti 0)*

Ekstremalni problemi

- Bolnik dobi zdravilo. Racionalna funkcija $f(t) = \frac{8t}{t^2+4}$ opisuje koncentracijo zdravila v krvi v mg/liter v odvisnosti od časa t po zaužitem zdravilu. Kdaj bo koncentracija zdravila največja?

  (pokažemo še graf in vsi vidijo, da je tam en hribček, torej iščemo t, kjer bo $f(t)' = 0$. Dobimo $t = \pm 2$, torej po dveh urah (-2 uri ni smiselno – torej je treba rezultat vedno še interpretirati!))

- Imamo karton velikosti 80x60 cm. Kakšne vogale moramo odrezati lepenki, da lahko iz nje dobimo škatlo (brez pokrova) z največjo prostornino? (11,31 cm)

- Ob hiši stoji pasja uta 1x1 m. Kupili smo za 9 m ograje. Kolikšna naj bo dolžina in širina pesjaka, da bo imel pes največ prostora za gibanje? (2,5x5 m)

- Ipd. (učbenik)

Tema: Odvod **Poglavje:** Odvodi drugih elementarnih funkcij
Oblika: frontalna **Pripomočki:** tabla

(Do sedaj smo odvajali le polinome in racionalne funkcije.)

Odvod sestavljene funkcije

Vemo že: $(x^5)' = 5 \cdot x^4$. Koliko pa je $((2x+1)^5)'$?

Spomnimo se kopozituma: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ *(dokaz v učb., ne bi ga med poukom)*

Primer $((2x+1)^5)'$: $f(x) = 2x+1 \to f'(x) = 2, g(x) = x^5 \to g'(x) = 5x^4$. Zato je $((2x+1)^5)' = 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$

Oz. $(\square^n)' = n \cdot \square^{n-1} \cdot \square'$.

Vaje: razne potence polinomov, korenske funkcije …

Odvod trigonometrijskih funkcij

Ponovimo pomembne lastnosti, ki nam pomagajo pri izpeljavi odvodov:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ in $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

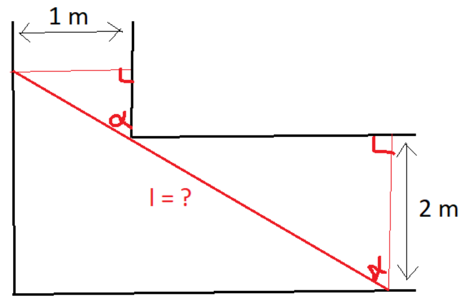
(Začnemo dokazovati za sin, ki je najtežji, ostali sledijo iz tega. Lahko dokažemo pri pouku (gl. učbenik))

$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(Tu je argument x v radianih – če je v stopinjah, imamo sestavljeno funkcijo: $(\sin(x^\circ))' = cos(\frac{x^\circ}{360^\circ}2\pi) \cdot (\frac{x^\circ}{360^\circ}2\pi)' = cos(x^\circ) \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$)

Vaje iz teh funkcij, tudi že sestavljene npr.

- $(\sin^2 x)', (x^5 \cdot \sin 7x)'$ …
- *Gasilci so poklicani v intervencijo v bolnišnico, kjer je hodnik dimenzije kot na sliki. S seboj želijo vzeti najdaljšo možno lestev, ki bo še šle čez ovinek. Kako dolgo lestev lahko vzamejo?*



$l(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{2}{\cos\alpha}$, *odvajaš in rešuješ* $l'(\alpha) = 0$ *in za izračunani* α *je rezultat* $f(\alpha)$.

Odvod inverzne funkcije

Vemo $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$
$$(f \circ f^{-1})'(x) = x'$$
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

Sledi $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Zdaj lahko odvajamo tudi krožne funkcije:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \arctan x}} = \cos^2 \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1+x^2}$

$(arccotx)' = \frac{1}{\frac{1}{-\sin^2 arccotx}} = -\sin^2 arccotx = -\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(arccotx)}} = -\frac{1}{1+x^2}$

Odvod logaritemske in eksponentne funkcije

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ *(po definiciji, gl. učbenik ALI pa najprej izpeljemo za* $\ln$ *in navaden logaritem zapišemo z novo osnovo. Saj ni važno.)*

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *(to sledi iz zgoraj za* $a = e$*)*

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ *(po formuli za odvod inverzne funkcije)*

$(e^x)' = e^x$ *(to sledi iz zgoraj za* $a = e$*)*

funkcijo $\ln|x|$ *se spozna (funkcijo* $\ln x$ *se samo preslika še na desno stran), in jo lahko odvajamo na vsaki strani osi, v obeh primerih dobiš odvod enak* $1/x$ *ne glede na predznak* x.

Odvod implicitno podane funkcije

Imejmo krožnico s polmerom $r = 2$ in središčem v $S(0,0)$. Točka A ima x-koordinato 1 in leži v 1. kvadrantu. Kakšen je koeficient tangente na krožnico, ki gre skozi točko A? Kakšna je njena enačba? *(rešimo na 3 načine)*

1. Koeficient izračunamo preko pravokotnice na tangento (daljica od izhodišča do A)

2. Koeficient izračunamo, da odvajamo enačbo krožnice, kjer smo izrazili y (ker je A na zgodnji polovici, vzamemo pri korenu predznak $+$)

3. Enačbo $x^2+y^2 = 4$ odvajamo kot sestavljeno funkcijo (pri tem je y odvisen od x, torej na y ne gledamo samo kot na spremenljivko, ampak kot funkcijo) $\to 2x + 2yy' = 0 \to y' = -\frac{x}{y}$, vstaviš noter A in dobiš.

podobne vaje

Tema: Odvod
Oblika: frontalna
Poglavje: Uporaba drugih odvodov
Pripomočki: tabla

(Najprej – grafična predstava odvoda: nekaj primerov grafov funkcij, pod njimi pa grafi odvodov. Npr. za x^2 je fora, da je na levi strani graf negativen, v 0 je 0, na desni pozitiven. Ni nujno, da je premica (seveda, ko izračunamo, pač je, ampak za slikco lahko določimo le predznak!))

Drugi odvod = odvod funkcije še enkrat odvajaš: $f''(x)$.

Naredimo tri slikice druga pod drugo. na vrhnji je prikazana f, pod njo f' in na spodnji f''. Primerjamo in ugotavljamo:

- Funkcija je **konkavna** za vse x, za katere velja $f''(x) < 0$.
- Funkcija je **konveksna** za vse x, za katere velja $f''(x) > 0$.

Stacionarne točke (torej $f'(x) = 0$):

- če $f''(x) < 0 \rightarrow$ maksimum
- če $f''(x) > 0 \rightarrow$ minimum
- če $f''(x) = 0 \rightarrow$ prevoj

Vaje:

-

Tema: Odvod
Poglavje: Diferenciali funkcije
Oblika: frontalna
Pripomočki: tabla

Diferenciali funkcije in računanje približnih vrednosti

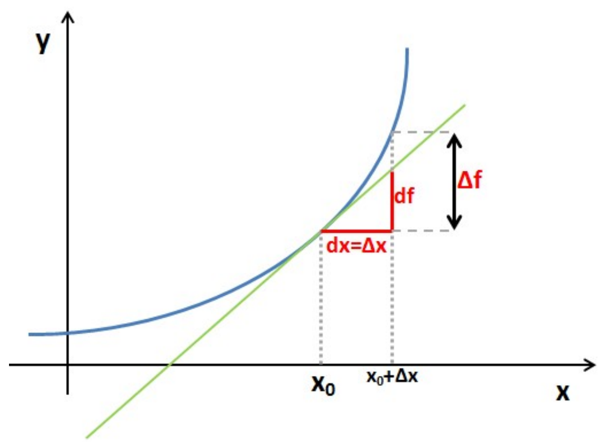
Primer: Okrog ekvatorja postavimo obroč (polmer je $x = 6370$ km). Nato obseg obroča povečamo za 1 m. Izračunaj, ali lahko gre miš skozi luknjo.

nov obseg $= 40.023.890{,}41m + 1m = 40.023.891{,}41m$

$r_n = \frac{40.023.891{,}41m}{2\pi} = 6370{,}000159km$

Torej je razlika 15,9 cm.

Diferencial funkcije:



V limiti diferenčnega kvocienta je sprememba Δx zelo majhna, praktično enaka 0. Označimo jo z dx. Tudi sprememba funkcijske vrednosti Δf je zaradi zveznosti f ustrezno majhna; označimo jo z df. Tako dobimo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

Izrazimo $df = f'(x)dx$ in to poimenujemo **diferencial**. Diferencial elahko uporabljamo pri približnem računanju funkcijskih vrednosti za funkcije, kjer je računanje prave funkcijske vrednosti prezapleteno.

Primer: Izračunaj približno vrednost $\sqrt{4{,}01}$.

Torej imamo $f(x) = \sqrt{x}$. Poznamo $f(4) = 2$ in $f'(4) = \frac{1}{4}$. Uporabimo formulo $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + df(x_0)$ *(ali jo izpeljemo ali samo povemo)*.

$f(4 + 0{,}01) = f(4) + f'(4) \cdot 0{,}01 = 2 + 0{,}025 = 2{,}025$.

Vrednost s kalkulatorjem: 2,002498439.

Vaje:

-