Vizualizacija Kakeya-množice

Generiranje slik s programskim orodjem Ipe

Terezija Krečič

Fakulteta za matematiko in fiziko
Pedagoška matematika

29. maj 2024

Problem, ki ga rešujemo

Vprašanje Kakeye (1917)

Kolikšna je lahko najmanjša ploščina območja, znotraj katerega se daljica dolžine 1 zvezno obrne za 360°?

Problem, ki ga rešujemo

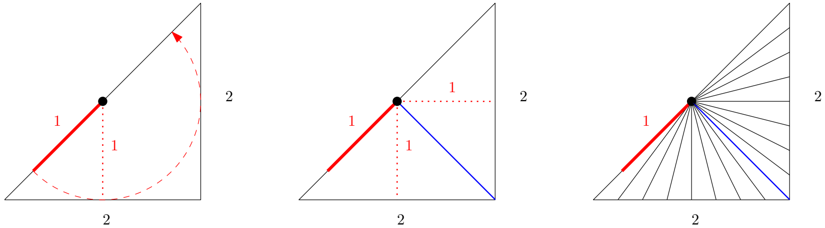
Vprašanje Kakeye (1917)

Kolikšna je lahko najmanjša ploščina območja, znotraj katerega se daljica dolžine 1 zvezno obrne za 360°?

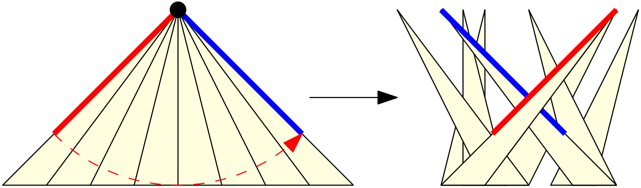
Matematiki, ki so prispevali k rešitvi:

- Abram Besicovitch (RUS)
- Oskar Perron (NEM)
- Gyula Pál (MADŽ-DAN)

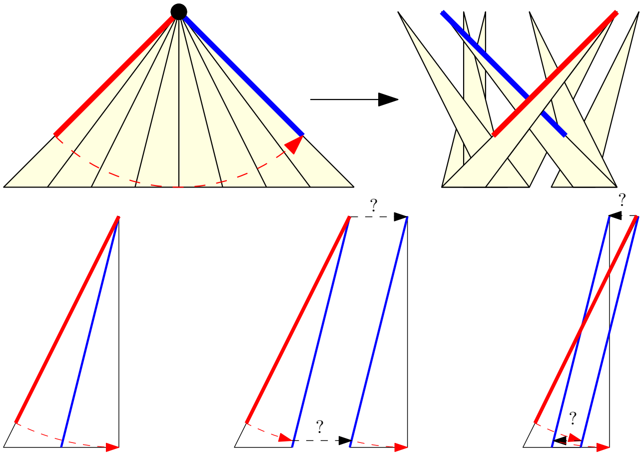
Konstrukcija – s čim začnemo



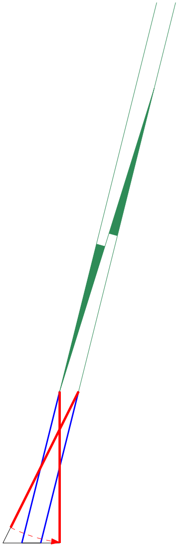
Konstrukcija – translacije podtrikotnikov



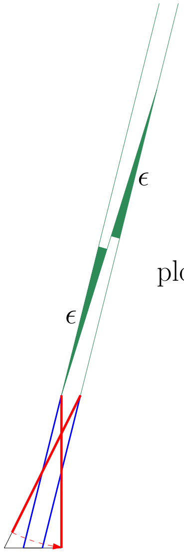
Konstrukcija – translacije podtrikotnikov



Konstrukcija – Pálov spoj



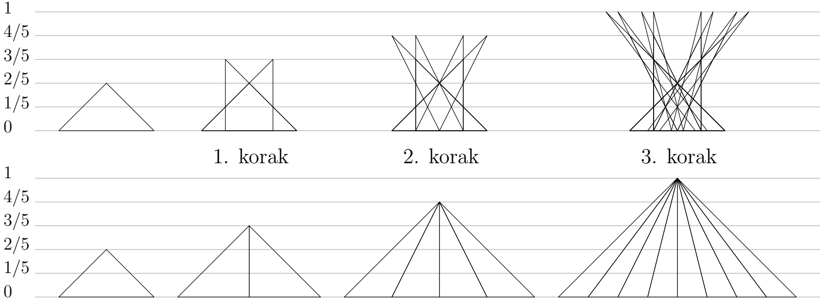
Konstrukcija – Pálov spoj



ploščina Pálovega spoja:

$$2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Perronovo drevo



Lastnosti pri brstenju Perronovega drevesa

1. Vsak vrh porodi skadna uhlja, ki imata enako ploščino kot taisti vrh.

Lastnosti pri brstenju Perronovega drevesa

1. Vsak vrh porodi skadna uhlja, ki imata enako ploščino kot taisti vrh.
2. V l-tem koraku ($l = 1, 2, \dots, k-2$) dobimo 2^l prekrivajočih se podtrikotnikov, ki skupaj sestavijo osnovnemu trikotniku podoben trikotnik z višino $\frac{l+2}{k}$.

Lastnosti pri brstenju Perronovega drevesa

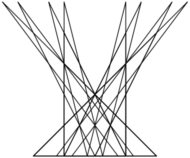
1. Vsak vrh porodi skadna uhlja, ki imata enako ploščino kot taisti vrh.
2. V l-tem koraku ($l = 1, 2, \ldots, k-2$) dobimo 2^l prekrivajočih se podtrikotnikov, ki skupaj sestavijo osnovnemu trikotniku podoben trikotnik z višino $\frac{l+2}{k}$.
3. V vsakem koraku se nam skupna ploščina poveča za natanko dvakratno ploščino vrha, s katerim začnemo prvi korak, tj. za $\frac{2}{k^2}$.

Lastnosti pri brstenju Perronovega drevesa

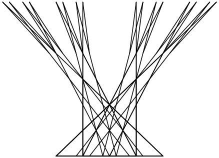
1. Vsak vrh porodi skadna uhlja, ki imata enako ploščino kot taisti vrh.
2. V l-tem koraku ($l = 1, 2, \ldots, k-2$) dobimo 2^l prekrivajočih se podtrikotnikov, ki skupaj sestavijo osnovnemu trikotniku podoben trikotnik z višino $\frac{l+2}{k}$.
3. V vsakem koraku se nam skupna ploščina poveča za natanko dvakratno ploščino vrha, s katerim začnemo prvi korak, tj. za $\frac{2}{k^2}$.
4. Skupna ploščina lika, ki ga dobimo na zadnjem koraku, je $\frac{2}{k}$.

Povzetek konstrukcije

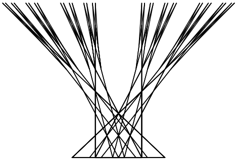
1. pravokotni enakostranični trikotnik z višino 1
2. $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \rightarrow n = 2^{k-2}$ podtrikotnikov
3. Perronovo drevo s ploščino $\frac{2}{k}$



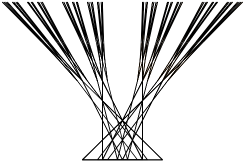
$k = 5$
$n = 8$
$S = \frac{2}{5}$



$k = 6$
$n = 16$
$S = \frac{1}{3}$

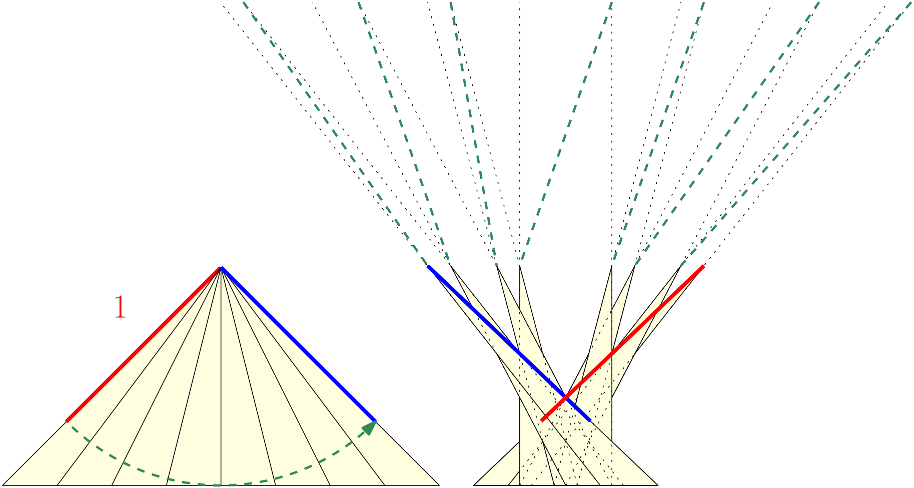


$k = 7$
$n = 32$
$S = \frac{2}{7}$

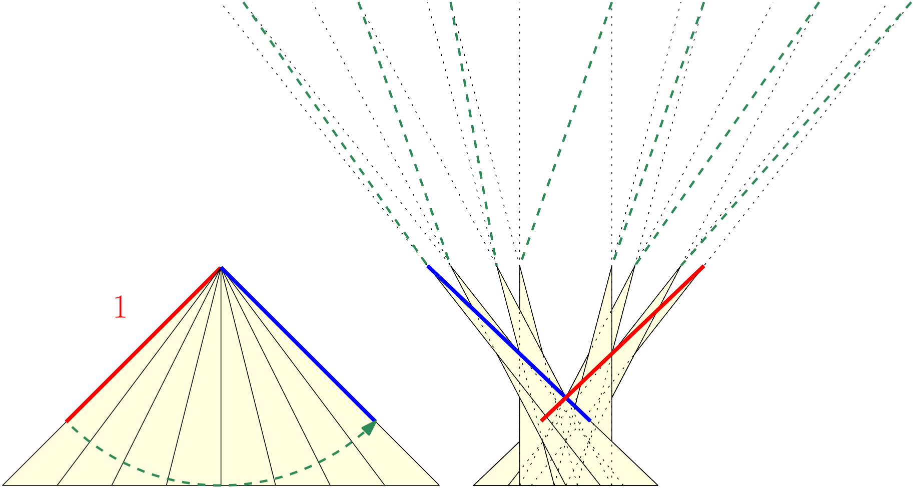


$k = 8$
$n = 64$
$S = \frac{1}{4}$

Povzetek konstrukcije

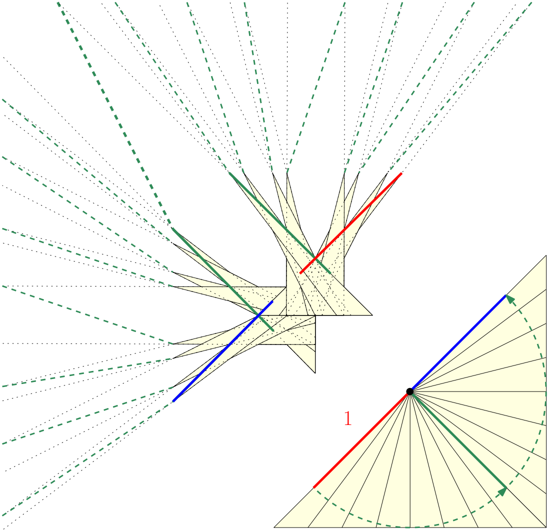


Povzetek konstrukcije

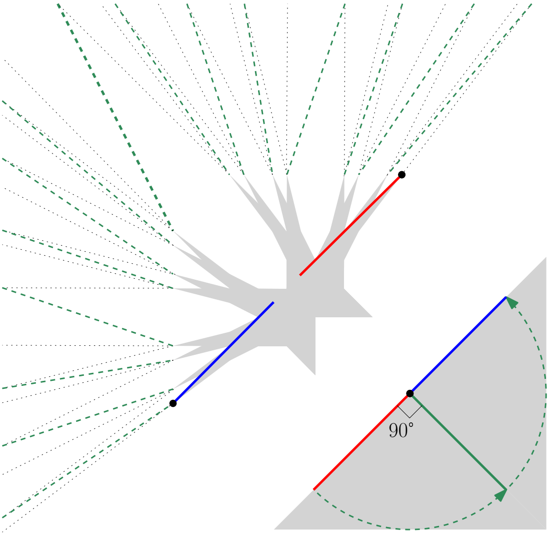


Ploščina: $\frac{2}{k} + (n-1)\epsilon = \frac{2}{k} + (2^{k-2}-1)\epsilon$

Združimo v Kakeya-množico

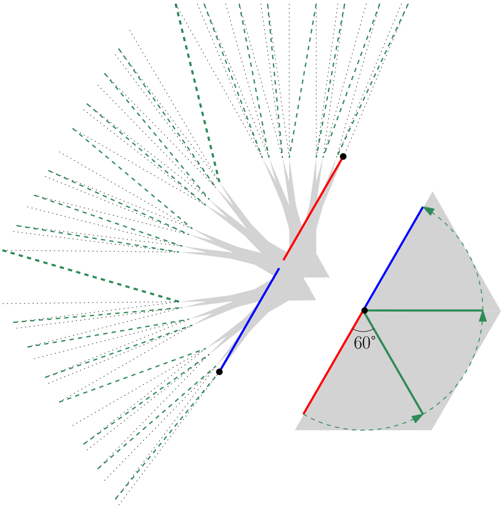


Združimo v Kakeya-množico



$S_{90} = 2 \cdot \left(\frac{2}{k} + (2^{k-2} - 1)\epsilon\right) + \epsilon = \frac{4}{k} + (2^{k-1} - 1)\epsilon \to$ **poljubno majhna!**

Ena od alternativnih rešitev



$$S_{60} = 3 \cdot \left(\frac{k+2}{k^2\sqrt{3}} + (2^{k-2} - 1)\epsilon \right) + 2\epsilon = \frac{\sqrt{3}(k+2)}{k^2} + (3 \cdot 2^{k-2} - 1)\epsilon$$

Vir

A. S. Besicovitch, “The kakeya problem,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 70, no. 7, 1963.

W. contributors, “Kakeya set.” https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kakeya_set&oldid=1216951959, 2024.

W. contributors, “Deltoid curve.” https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Deltoid_curve&oldid=1212969039, 2024.

Mathologer, “The kakeya needle problem (the squeegee approach).” https://www.youtube.com/watch?v=IM-n9c-ARHU,, 2015.

Numberphile, “Kakeya’s needle problem - numberphile..” https://www.youtube.com/watch?v=j-dce6QmVAQ, 2015.