

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

Vizualizacija Kekeya-množice

Terezija Krečič
Pedagoška matematika, 5. letnik

Predmet: Matematika z računalnikom
Mentor: Sergio Cabello

Ljubljana, 21. 5. 2024

Uvod

V tej projektni nalogi je bil cilj vizualizirati Kakeya-množico s pomočjo programa Ipe. Najprej sem morala sploh predelati problem, ki ga je zastavil Kakeya več kot 100 let nazaj, poleg tega pa se še spoznati z novo programsko opremo.

V poročilu bom na kratko predstavila glavno vprašanje in eno strategijo, kako ga rešiti. Vse slike, ki so vključene zraven, sem ustvarila sama s pomočjo Geogebre in omenjenega orodja Ipe. Poročilo je povzeto po Besicovitchevem članku [1].

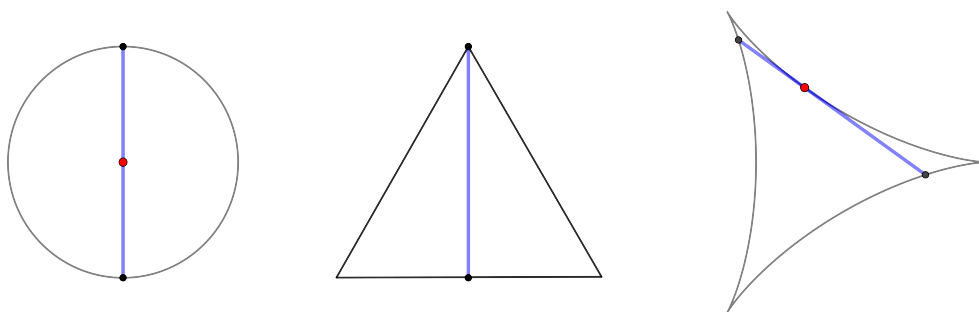
Kakeyev problem igle

Japonski matematik Sōichi Kakeya je leta 1917 zastavil naslednje vprašanje, ki se ga je v kasnejšem času prijelo ime “*the Kakeya needle problem*”¹:

Kolikšna je lahko najmanjša ploščina območja, znotraj katerega se daljica dolžine 1 zvezno obrne za 180 °?

Poglejmo si tri primere geometrijskih likov, ki ustrezajo pogoju iz vprašanja:

1. krog s premerom 1 \rightarrow ploščina = $\frac{\pi}{4} \doteq 0,79$
2. enakostranični trikotnik z višino 1 \rightarrow ploščina = $\frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0,58$
3. deltoida², včrtana v krog s premerom $\frac{2}{3} \rightarrow$ ploščina = $\frac{\pi}{8} \doteq 0,39$



Slika 1: Primeri, ki ustrezajo pogoju.

Nekaj časa je veljalo, da je tretji primer, tj. deltoida, odgovor na vprašanje Kakeya, vendar je ruski matematik Abram Besicovitch uspel dokazati, da **spodnja**

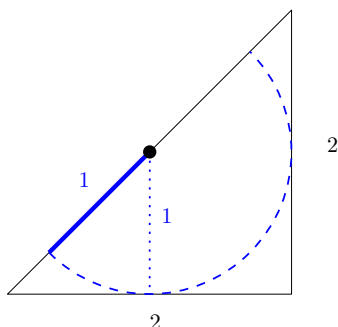
¹Kakeyev problem igle, op. prev.

²za konstrukcijo deltoide gl. [2], za animacijo obračanja igle znotraj nje pa [3]

meja za iskano ploščino *ne obstaja*. K enostavnejši konstrukciji primera takega lika je pripomogel tudi nemški matematik Oskar Perron, svoj del pa prispeval še madžarsko-danski matematik Gyula Pál.

Ideja za konstrukcijo

Vzemimo enakokraki pravokotni trikotnik s katetama dolžine 2. Če v središče hipotenuze postavimo en konec enotske daljice, lahko njen drugi konec opiše kot 180° , ne da bi kakršenkoli del daljice zapustil trikotnik.



Zaključek

Literatura

- [1] A. S. Besicovitch. "The Kakeya Problem". V: *The American Mathematical Monthly* 70.7 (1963).
- [2] Wikipedia contributors. *Deltoid curve*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Deltoid_curve&oldid=1212969039. 2024.
- [3] Wikipedia contributors. *Kakeya Set*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kakeya_set&oldid=1216951959. 2024.