Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

Vizualizacija Kakeya-množice

Terezija Krečič
Pedagoška matematika, 5. letnik

Predmet: Matematika z računalnikom
Mentor: Sergio Cabello

Ljubljana, 21. 5. 2024

Uvod

V tej projektni nalogi je bil cilj vizualizirati Kakeya-množico s pomočjo programa Ipe. Najprej sem morala sploh predelati problem, ki ga je zastavil Kakeya več kot 100 let nazaj, poleg tega pa se še spoznati z novo programsko opremo.

V poročilu bom na kratko predstavila glavno vprašanje in eno strategijo, kako ga rešiti. Vse slike, ki so vključene zraven, sem ustvarila sama s pomočjo Geogebre in omenjenega orodja Ipe. Poročilo je izhaja iz Besicovitchevega članka [1], vendar sem nekaj delov poenostavila in predelala.

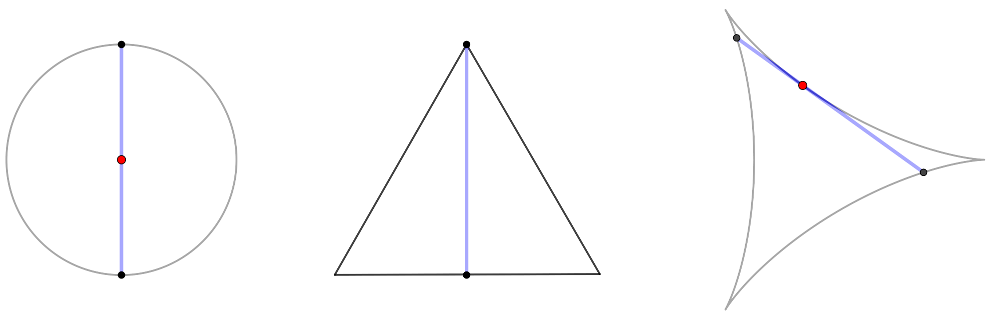
Kakeyev problem igle

Japonski matematik Sōichi Kakeya je leta 1917 zastavil naslednje vprašanje, ki se ga je v kasnejšem času prijelo ime "*the Kakeya needle problem*[1]":

Kolikšna je lahko najmanjša ploščina območja, znotraj katerega se daljica dolžine 1 zvezno obrne za 180°?

Poglejmo si tri primere geometrijskih likov, ki ustrezajo pogoju iz vprašanja:

1. krog s premerom 1 $\rightarrow$ ploščina $= \frac{\pi}{4} \doteq 0{,}79$
2. enakostranični trikotnik z višino 1 $\rightarrow$ ploščina $= \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}58$
3. deltoida[2], včrtana v krog s premerom $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ ploščina $= \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}39$



Slika 1: Primeri, ki ustrezajo pogoju.

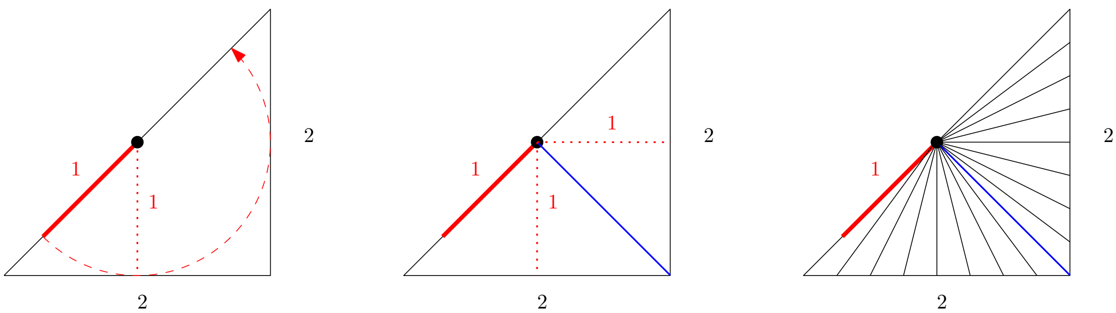
[1]Kakeyev problem igle, op. prev.
[2]za konstrukcijo deltoide gl. [2], za animacijo obračanja igle znotraj nje pa [3]

Nekaj časa je veljalo, da je tretji primer, tj. deltoida, odgovor na vprašanje Kakeye, vendar je ruski matematik Abram Besicovitch uspel dokazati, da **spodnja meja za iskano ploščino *ne* obstaja**. K enostavnejši konstrukciji primera takega lika je pripomogel tudi nemški matematik Oskar Perron, svoj del pa prispeval še madžarsko-danski matematik Gyula Pál.

Ideja za konstrukcijo

Vzemimo enakokraki pravokotni trikotnik s katetama dolžine 2. Če v središče hipotenuze postavimo en konec enotske daljice, lahko njen drugi konec opiše kot 180°, ne da bi kakršenkoli del daljice zapustil trikotnik.

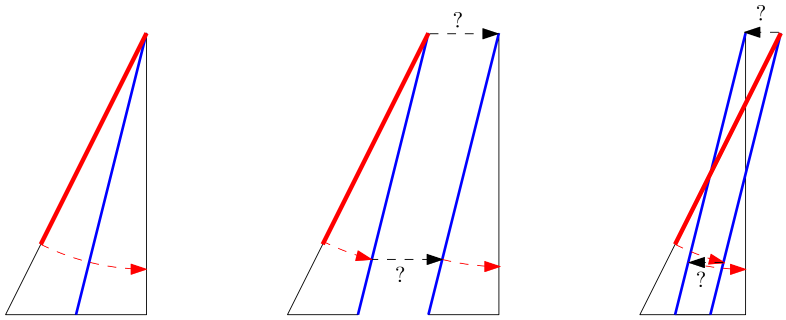
Ta trikotnik sicer ustreza pogoju iz vprašanja, vendar je njegova ploščina enaka 2 in večja od vseh treh zgornjih primerov. Sedaj ga razdelimo na pol, kot kaže slika 2, ter vsakega izmed delov (ki sta še vedno enakokraka pravokotna trikotnika) še dodatno razdelimo na n manjših trikotnikov z osnovnico dolžine $\frac{2}{n}$ in višino 1. Enotska daljica se tako obrne za 180°, ko se v enem krajišču zasuče čez vrh vsakega izmed malih trikotnikov in prehaja med njimi preko skupnih stranic.



Slika 2: Generiranje $2n$ trikotnikov z višino 1.

Ideja je, da se teh $2n$ trikotnikov tako medsebojno prekrije, da skupaj tvorijo lik z poljubno majhno ploščino, ko se n oz. število malih trikotnikov povečuje v neskončnost.

Takoj opazimo, da se s translacijo trikotnikov prekine zvezen prehod enotske daljice iz enega trikotnika na drugega. Na sliki 3 so narisane možne translacije sosednjih dveh trikotnikov. Skupne stranice so obarvane modro, enotska daljica pa z rdečo. Na levi ni spremembe in trikotnika se držita za skupno stranico, torej daljica zvezno preide iz levega trikotnika na desnega. V sredini imata trikotnika prazen presek in mora daljica na nek način iz modre stranice levega trikotnika preskočiti na modro stranico desnega ter nadaljevati svoje vrtenje. Na desni pa imamo primer prekrivanja, kjer se ravno tako pojavi vprašanje, kako daljica preskoči iz ene modre stranice na drugo.



Slika 3: Možne translacije sosednjih dveh trikotnikov in vrtenje daljice skozi njiju

Preskakovanje daljice med sosednjima trikotnikoma

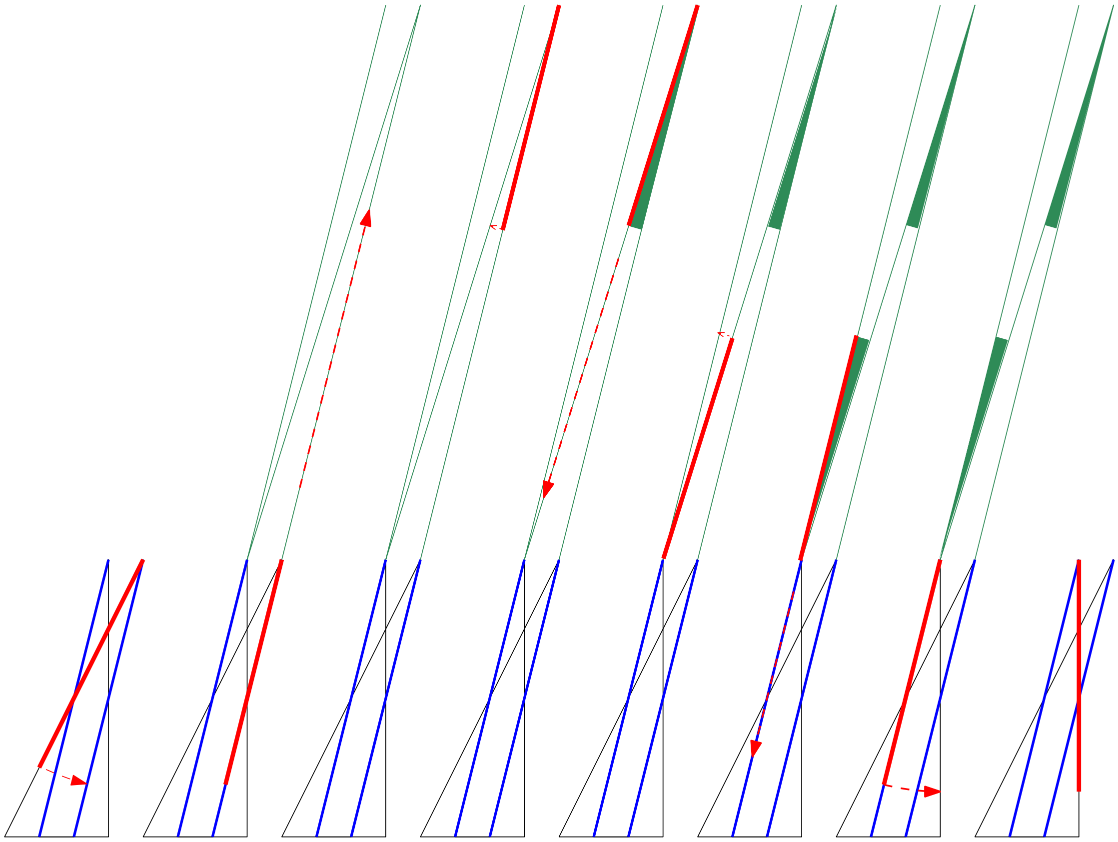
Pál je za preskakovanje daljice med dvema sosednjima trikotnika, ki se ne stikata več na skupni stranici (sredinski in desni primer na sliki 3), podal nadvse enostavno rešitev (gl. sliko 4):

1. **Konstrukcija Pálovega spoja** (označen z zeleno): Nad prekrivajočima sosednjima trikotnikoma narišemo nosilki obeh modrih stranic, ki sta seveda vzporedni. Nato zarišemo daljico, ki ju povezuje, kot je narisano na sliki.

2. **Gibanje po črki "N"**: Ko se enotska daljica obrne v vrhu prvega trikotnika in pristane na modri stranici, jo pošljemo po prvi nosilki do začetka povezovalne daljice, kjer jo zavrtimo okoli zgornjega krajišča, da pristane na povezovalni daljici, nato jo premaknemo po tej daljici do vrha drugega trikotnika, jo zavrtimo v nasprotno smer in potisnemo po drugi nosilki v drugi trikotnik.

Smer enotske daljice se na ta način ohrani, daljica pa med tem preskokom (gibanjem po zelenem liku) opiše poljubno majhno ploščino, saj je kot vrtenja z daljšanjem povezovalne daljice proti neskončnosti lahko poljubno majhen ter s tem tudi orisan krožni izsek, premice pa nimajo ploščine.

Torej za vsak preskok enotske daljice med trikotnikoma potrebujemo (in znamo konstruirati) dodatno ploščino, vendar je le-ta lahko poljubno majhna.



Slika 4: Preskok daljice med dvema prekrivajočima se sosednjima trikotnika preko lika s poljubno majhno ploščino po Pálovi zamisli

Perronova drevesa

S Pálovimi spoji smo rešili težavo vzporednih translacij enotske daljice, pri čemer se je skupna ploščina lika povečala le za poljubno majhno vrednost. Ostane nam še odkritje načina prekritja trikotnikov, da bo ploščina celotnega območja prekritja prav tako poljubno majhna, ko gre število trikotnikov proti neskončnosti.

Zaključek

Literatura

[1] A. S. Besicovitch. “The Kakeya Problem”. V: *The American Mathematical Monthly* 70.7 (1963).

[2] Wikipedia contributors. *Deltoid curve*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Deltoid_curve&oldid=1212969039. 2024.

[3] Wikipedia contributors. *Kakeya Set*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kakeya_set&oldid=1216951959. 2024.