Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

Vizualizacija Kakeya-množice

Terezija Krečič
Pedagoška matematika, 5. letnik

Predmet: Matematika z računalnikom
Mentor: Sergio Cabello

Ljubljana, 21. 5. 2024

Uvod

V tej projektni nalogi je bil cilj vizualizirati Kakeya-množico s pomočjo programa Ipe. Najprej sem morala sploh predelati problem, ki ga je zastavil Kakeya več kot sto let nazaj, poleg tega pa se še spoznati z novo programsko opremo.

V poročilu bom na kratko predstavila glavno vprašanje in eno strategijo, kako ga rešiti. Vse slike, ki so vključene zraven, sem ustvarila sama s pomočjo Geogebre in omenjenega orodja Ipe.

Poročilo je izhaja iz Besicovitchevega članka [1], vendar sem nekaj delov poenostavila in predelala, saj sem se poskusila čimbolj izogniti upeljevanju novih oznak. Tako npr. pri poljubno majhni ploščini Pálovega spoja nisem strogo matematično zapisala, kakšen poljubno majhen kot moramo vzeti, in iz kota izpeljala formulo za ploščino spoja, temveč sem idejo zapisala le z besedami.

V poročilu bo najprej predstavljeno zastavljeno vprašanje, ki ga rešujemo, nato pa še en način generiranja take množice, ki ustreza pogoju iz vprašanja in nanj tudi odgovori.

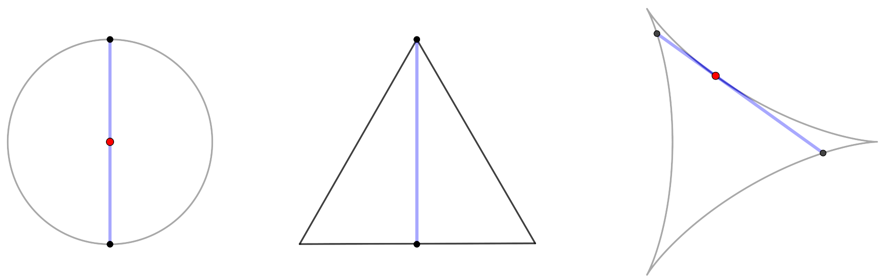
Kakeyev problem igle

Japonski matematik Sōichi Kakeya je leta 1917 zastavil naslednje vprašanje, ki se ga je v kasnejšem času prijelo ime "*Kakeyev problem igle*"[1]:

Kolikšna je lahko najmanjša ploščina območja, znotraj katerega se daljica dolžine 1 zvezno obrne za 180°?

Poglejmo si tri primere geometrijskih likov, ki ustrezajo pogoju iz vprašanja:

1. krog s premerom 1 $\to$ ploščina $= \frac{\pi}{4} \doteq 0{,}79$
2. enakostranični trikotnik z višino 1 $\to$ ploščina $= \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}58$
3. deltoida[2], včrtana v krog s premerom $\frac{2}{3}$ $\to$ ploščina $= \frac{\pi}{8} \doteq 0{,}39$



Slika 1: Primeri, ki ustrezajo pogoju.

Nekaj časa so verjeli, da je deltoida odgovor na vprašanje Kakeye, vendar je ruski matematik Abram Besicovitch uspel dokazati, da **spodnja meja za iskano ploščino *ne* obstaja**. K enostavni konstrukciji primera takega lika je pripomogel nemški matematik Oskar Perron, svoj del pa je prispeval tudi madžarsko-danski matematik Gyula Pál.

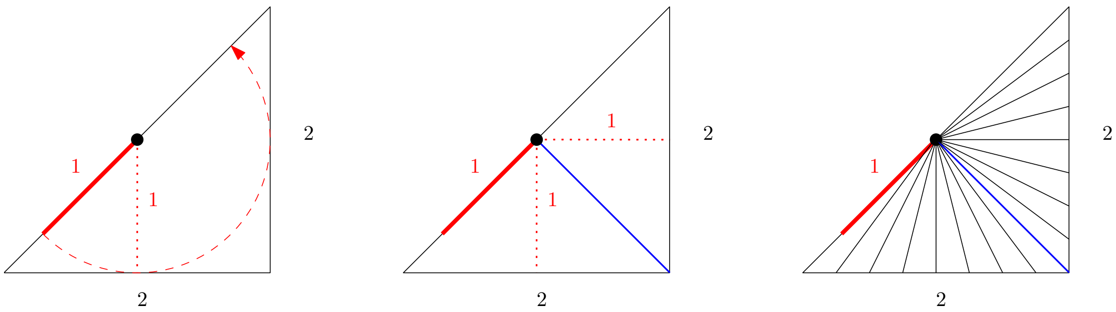
Ideja za konstrukcijo

Vzemimo enakokraki pravokotni trikotnik s katetama dolžine 2. Če v središče hipotenuze postavimo en konec enotske daljice, njen drugi konec opiše kot 180°, pri čemer daljica ves čas ostane znotraj lika. Trikotnik sicer ustreza pogoju iz vprašanja, vendar je njegova ploščina enaka 2 in večja od vseh treh zgornjih primerov.

[1]orig. *the Kakeya needle problem*, op. prev.

[2]za konstrukcijo deltoide gl. [2], za animacijo obračanja igle znotraj nje pa [3]

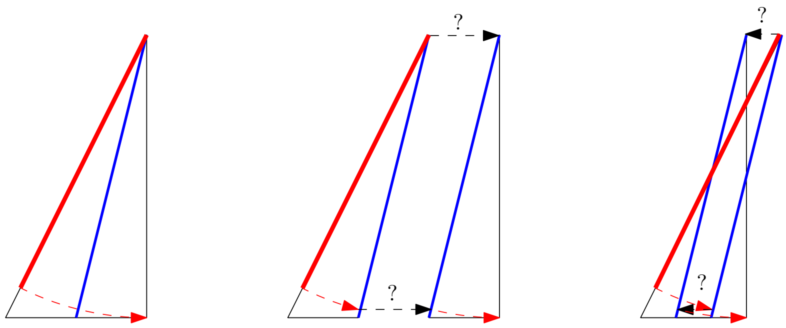
Sedaj ga razdelimo na pol, kot kaže slika 2, ter vsakega izmed delov (ki sta še vedno enakokraka pravokotna trikotnika, imenujmo ju "*osnovna trikotnika*") še dodatno razdelimo na n manjših trikotnikov (imenujmo jih "*podtrikotniki*") z osnovnico dolžine $\frac{2}{n}$ in višino 1. Enotska daljica se tako obrne za 180°, ko se v enem krajišču zasuče čez vrh vsakega izmed podtrikotnikov in prehaja med njimi preko skupnih stranic.



Slika 2: Generiranje $2n$ podtrikotnikov z višino 1.

Ideja je, da teh $2n$ trikotnikov tako vzporedno premaknemo, da skupno prekritje tvori lik s poljubno majhno ploščino, ko $n \to \infty$.

Takoj opazimo, da se s translacijo podtrikotnikov prekine zvezen prehod enotske daljice iz enega podtrikotnika na drugega. Na sliki 3 so narisane možne translacije sosednjih dveh podtrikotnikov. Skupne stranice so obarvane modro, enotska daljica pa z rdečo. Na levi ni spremembe in podtrikotnika se držita za skupno stranico, torej daljica zvezno preide iz levega podtrikotnika na desnega. V sredi imata podtrikotnika prazen presek, na desni pa se podtrikotnika prekrivata in pojavi se vprašanje, kako naj daljica iz modre stranice levega podtrikotnika preskoči na modro stranico desnega, kjer bi potem nadaljevala svoje vrtenje.



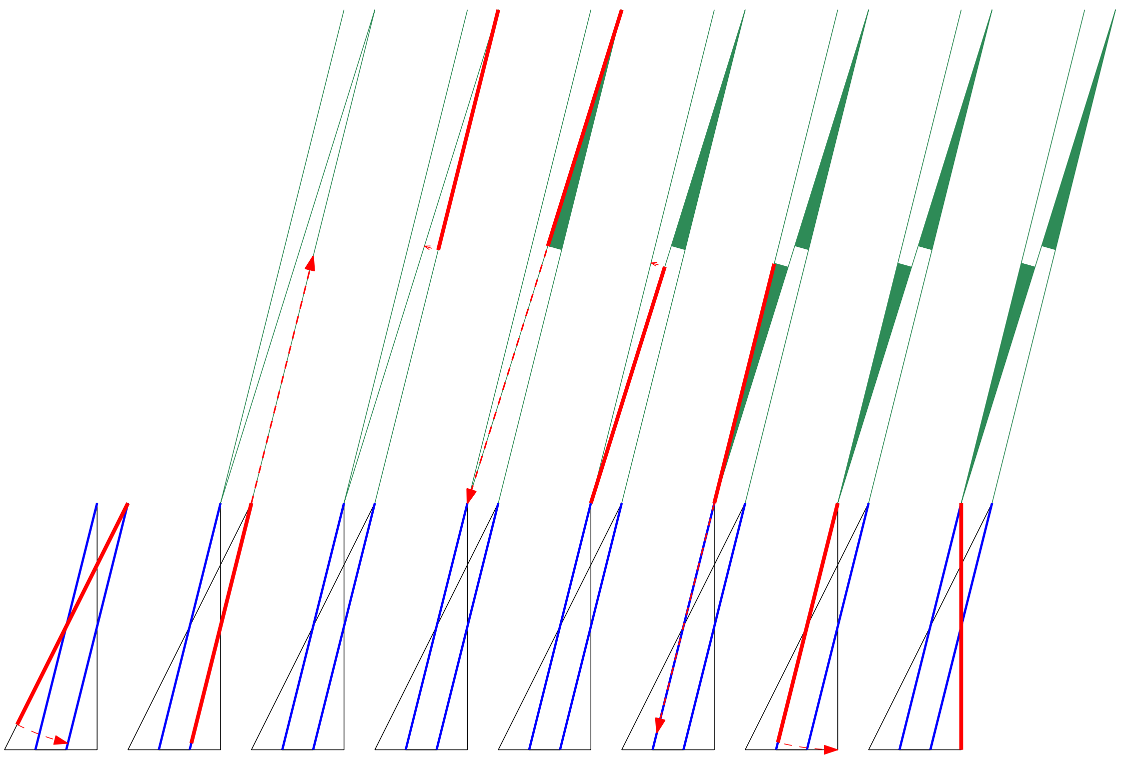
Slika 3: Možne translacije sosednjih podtrikotnikov in vrtenje daljice skozi njiju

Preskakovanje daljice med sosednjima trikotnikoma

Pál je za preskakovanje daljice med dvema sosednjima podtrikotnikoma, ki se ne stikata več na skupni stranici (sredinski in desni primer na sliki 3), podal nadvse enostavno rešitev v naslednjih dveh korakih (gl. sliko 4):

1. **Konstrukcija Pálovega spoja** (označen z zeleno): Nad prekrivajočima sosednjima podtrikotnikoma narišemo nosilki obeh modrih stranic, ki sta seveda vzporedni. Nato zarišemo daljico, ki ju povezuje, kot je narisano na sliki.

2. **Gibanje po črki "N"**: Ko se enotska daljica obrne v vrhu prvega podtrikotnika in pristane na modri stranici, jo pošljemo po prvi nosilki do začetka povezovalne daljice, kjer jo zavrtimo okoli zgornjega krajišča, da pristane na povezovalni daljici, nato jo premaknemo po tej daljici do vrha drugega podtrikotnika, jo zavrtimo v nasprotno smer, da pristane na drugi nosilki, po kateri jo nato potisnemo v drugi podtrikotnik.



Slika 4: Preskok daljice preko Pálovega spoja

Smer enotske daljice se na ta način pri preskoku v sosednji podtrikotnik ohrani, daljica pa med tem prehodom (gibanjem po zelenem liku) opiše poljubno majhno ploščino, saj je kot vrtenja, če za zgornje krajišče povezovalne daljice izberemo poljubno oddaljeno točko na prvi nosilki, lahko poljubno majhen ter s tem tudi ploščina orisanega krožnega izseka, daljice pa k skupni ploščini tako ali tako ne prispevajo ničesar.

Torej za vsak preskok enotske daljice med sosednjima podtrikotnikoma *potrebujemo* (in znamo konstruirati) *dodatno ploščino*, vendar je le-ta lahko *poljubno majhna*.

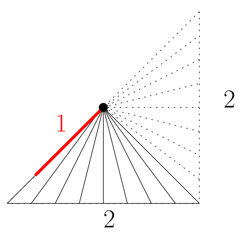
Perronova drevesa

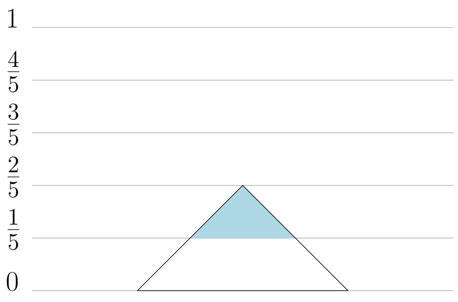
S Pálovimi spoji smo rešili težavo vzporednih translacij enotske daljice, pri čemer se je skupna ploščina lika povečala le za poljubno majhno vrednost.

Ostane nam še vprašanje, kako medsebojno prekriti podtrikotnike, da bo ploščina celotnega območja prekritja poljubno majhna, ko gre število podtrikotnikov proti neskončnosti. Tako bo skupaj s Pálovimi spoji ploščina območja, v katerem se enotska daljica obrne za 180°, poljubno majhna in s tem vprašanje Kakeye odgovorjeno.

Perron je odkril zanimiv, a preprost in učinkovit način prekrivanja podtrikotnikov.

Spomnimo se, kako smo iz pravokotnega enakokratkega trikotnika dobili $2n$ manjših trikotnikov (slika 2). Vzemimo spodnji osnovni trikotnik, ki je na desni označen z neprekinjeno črto, in na njem poglejmo konstrukcijo. Za drugi osnovni trikotnik, ki je pravokoten na prvega, bo postopek enak, le vse je obrnjeno za pravi kot v levo.





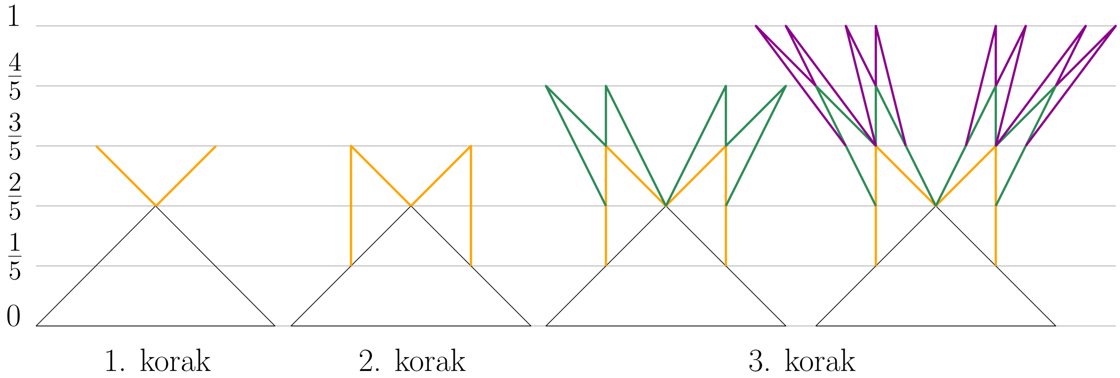
Slika 5: Sistem za $k = 5$

Pri konstrukciji bomo povečevali število podtrikotnikov, na katere je razdeljen osnovni trikotnik. Najprej izberemo poljuben $k \in \mathbb{N}$ in zarišemo koordinatni sistem, kot ga kaže slika 5. V vertikalni smeri smo dolžino 1 razdelili na k skladnih delov in dobili k "nivojev". Na sredo spodnje horizontalne črte položimo osnovni trikotnik z višino $\frac{2}{k}$. Z naslednjim postopkom bomo zgenerirali osnovni trikotnik z višino 1, ki je razdeljen na medsebojno že premaknjenih 2^{k-2} podtrikotnikov.

Najprej definirajmo *vrh trikotnika* – to je trikotnik, ki ima zgornje oglišče skupno osnovnemu trikotniku in višino $\frac{1}{k}$ (na sliki 5 pobarvano modro).

Izvedemo $k-2$ enakih korakov (slika 6):

1. nehorizontalne stranice vsakega vrha podaljšamo za en nivo navzgor
2. zgornje krajišče podaljšane daljice povežemo z najbližjim presečiščem originalnega trikotnika in horizontalne črte pri nižjem nivoju (torej se spustimo za dva nivoja navzdol). Tako originalen trikotnik dobi dve "ušesi"
3. postopek ponovimo za vsak nov vrh, dokler ne pridemo do nivoja 1.



Slika 6: Postopek generiranja osnovnega trikotnika in podtrikotnikov

Zaključek

Literatura

[1] A. S. Besicovitch. “The Kakeya Problem”. V: *The American Mathematical Monthly* 70.7 (1963).

[2] Wikipedia contributors. *Deltoid curve*. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Deltoid_curve&oldid=1212969039`. 2024.

[3] Wikipedia contributors. *Kakeya Set*. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kakeya_set&oldid=1216951959`. 2024.