Fakulteta za matematiko in fiziko

Računanje določenega integrala s trikotniki

Terezija Krečič
Pedagoška matematika

Mentor: Uroš Kuzman

Ljubljana
?. ?. 2023

Kazalo

1 Uvod

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna in pozitivna funkcija. Ploščino pod njenim grafom tipično aproksimiramo z Riemannovo vsoto oz. pravokotniki, da v limiti dobimo vrednost $\int_a^b f(x)dx$. V nalogi si bomo ogledali metodo, ki integral konveksnih funkcij izračuna s pomočjo trikotnih območij.

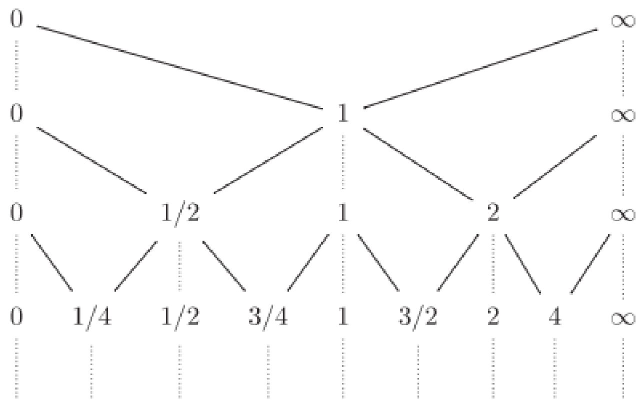
????? Naš pristop temelji na generiranju goste [1] podmnožice intervala, po katerem integriramo, preko neskončnega binarnega drevesa. To drevo generira vrsto, ki jo definira funkcija, ki jo integriramo, ter izbira vozlišč, zato lahko dobimo znano ali manj znano vrsto, za katero lahko vidimo, ali divergira ali konvergira in če, h kateri vrednosti. Še posebej zanimiv primer izhaja iz Stern-Brocot drevesa, ki izhaja iz enega tipa zeta funkcij.

[1] Množica D je *gosta* v topološkem prostoru X natanko tedaj, kadar je presek množice D z vsako neprazno odprto podmnožico v X neprazen. V našem primeru to pomeni, da se v vsakem odprtem podintervalu intervala integriranja nahaja vsaj en element iz te podmmnožice.

2 Motivacijski primer

Za boljšo predstavo o ideji integracije preko trikotnikov si poglejmo konkreten primer funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, \infty)$. Gosto podmnožico definicijskega območja $(0, \infty)$ generirajmo na sledeč način:

Začnimo z mejama intervala 0 in ∞. Med njiju vrinimo delilno točko 1, s čimer dobimo podintervala $(0, 1]$ in $[1, \infty)$. Vsakega izmed njiju razdelimo z dodatnima delilnima točkama 1/2 in 2. Dobimo štiri podintervale osnovnega intervala, in zopet vsakega razdelimo tako, da končne intervale razpolovimo, v neskončnem intervalu z največjo spodnjo končno mejo pa delilno točko izberemo kot naslednjo potenco števila 2 (torej v tem primeru 4). S tem postopkom nadaljujemo in tako dobimo neskončno binarno drevo, kot je prikazano na sliki 1.

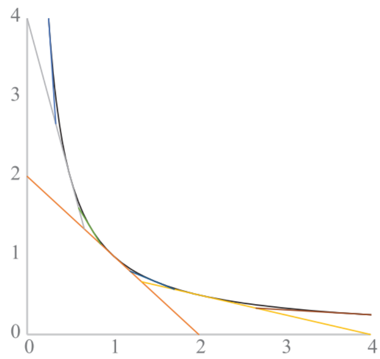


Slika 1: Vzeto iz [1].

Opazimo (in tudi vemo), da sta x- in y-osi asimptoti na graf f, torej nekakšni tangenti na f v točkah 0 in ∞ (slednja seveda ni točka). Generiramo novo tangento na graf f v prvi točki drevesa, ki leži med 0 in ∞. Te tri tangente se sekajo in skupaj tvorijo trikotnik, ki leži pod grafom f, in pokriva del območja prvega kvadranta. Postopek ponovimo, le da sedaj trikotnike tvorimo v do sedaj s trikorniki še nepokritem območju – vzamemo tangente v naslednjih točkah v drevesu: 1/2 in 2. Dobimo trikotnike, kot kaže slika 2. V naslednjem koraku bi vzeli tangente v naslednjih štirih točkah: 1/4, 3/4, 3/2 in 4. S ponavljanjem postopka v limiti trikotniki pokrijejo celotno območje pod grafom funkcije f.

Kratek izračun pokaže, da je ploščina vseh trikotnikov, ki z eno stranico ležino na eni od koordinatnih osi (razen prvega trikotnika z ogliščem v izhodišču) konstantna z vrednostjo 2/3 (VKLJUČI TA IZRAČUN?????). Iz tega sledi, da je ploščina pod območjem (ki je vsota ploščin vseh trikotnikov) navzgor neomejena, saj je divergentna že vsota ploščin trikotnikov ob oseh. To je v skladu z vrednostjo izlimitiranega integrala $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$. S tem načinom razdelitve območja na trikotnike lahko povežemo območje pod grafom in neskončno vrsto, ki ustreza ploščini teh trikotnikov.

Sedaj lahko raziščemo obnašanje teh vrst na primerih različnih funkcij in na različnih števnih gostih podmnožic.



Slika 2: Prve tri tangente v particiji območja na trikotnike. Vzeto iz [1].

3 Splošnejša obravnava problema

Pri Riemannovem integralu poskrbimo za vedno finejšo particijo intervalov, iz katere so ustvarjena pravokotna območja, ki skupaj v limiti, ko gre širina podintervalov proti 0, tvorijo območje pod grafom. Naš pristop je podoben, le da mora biti zaporedje particij dovolj organizirano, da lahko dobimo ustrezne trikotnike. Le-to pa omogoča neskončno binarno drevo.

Z določanjem zaporedja particij iz drevesa naš proces generiranja trikotnikov, ki napolnijo območje pod grafom funkcije f, potrebuje le nekaj ključnih predpostavk:

1. Funkcija f je definirana na intervalu oblike $(0, \infty)$, $[0, \infty)$, $(0, a]$ ali $[0, a]$, kjer je $0 < a < \infty$, in sta x- in y-os v točkah 0 ter a (oz. v ∞) njeni tangenti (oz. asimptoti, odvisno od oblike intervala).

2. Funkcija f je dvakrat zvezno odvedljiva, strogo monotono padajoča ($f'(x) < 0$) in strogo konveksna ($f''(x) > 0$) za vsak $x \in A$ (razen v krajiščih), kjer je A interval oblike, kot ga navaja točka 1.

3. Množica, generirana iz neskončnega binarnega drevesa, je gosta podmnožica intervala A.

Te tri predpostavke so dovolj. Predpostavka 1 zagotavlja, da bosta dve stranici prvega trikotnika ležali na koordinatnih oseh. Predpostavka 2 poskrbi, da se novo generirane tangente tako razlikujejo od tangent iz prejšnjega koraka, da se tretja stranica novega trikotnika ne prekriva s prejšnjimi, sam trikotnik pa leži pod grafom. Predpostavka 3 pomeni, da se bo vsaka točka (x_0, y_0) v prvem kvadrantu, ki leži pod grafom, nahajala v vsaj kakšnem trikotniku.

Računanje ploščine kateregakoli od teh trikotnikov je idejno preprost izračun. Za primer vzemimo tri zaporedne točke iz nekega istega nivoja drevesa: $0 < x_1 < x_{1,2} < x_2$. Naj bo točka $x_{1,2}$ generirana iz prejšnjih zaporednih točk x_1 in x_2. Znamo izračunati tangente na graf f v teh treh točkah ter medsebojna presečišča, kar so ravno vsi trije vrhovi novega trikotnika, iz koordinat oglišč pa znamo izračunati ploščino trikotnika. V konkretnem primeru je računanje dokaj enostavno, v splošnem pa je ploščina tega trikotnika enaka

$$P = \frac{A^2}{2B}, \tag{1}$$

kjer sta

$$\begin{aligned} A =& f'(x_1)f'(x_{1,2})(x_1 - x_{1,2}) + f'(x_1)f'(x_2)(x_2 - x_1) \\ &+ f'(x_2)f'(x_{1,2})(x_{1,2} - x_2) + f(x_1)(f'(x_2) - f'(x_{1,2})) \\ &+ f(x_2)(f'(x_{1,2}) - f'(x_1)) + f(x_{1,2})(f'(x_1) - f'(x_2)) \end{aligned}$$

in

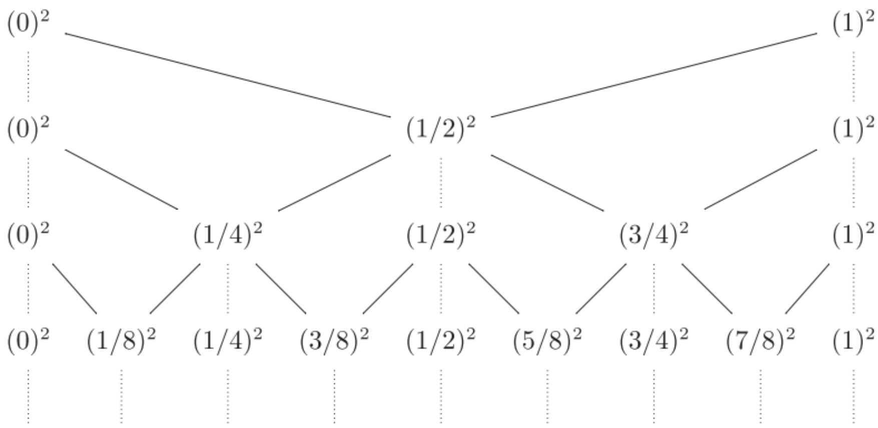
$$B = (f'(x_1) - f'(x_{1,2}))(f'(x_1) - f'(x_2))(f'(x_2) - f'(x_{1,2})).$$

```
In[1]:= ploščina[f_, x1_, x12_, x2_] := Module[
   {tangenta, tangentax1, tangentax12, tangentax2, xa, xb, xc, ya, yb, yc},
   tangenta[h_, x0_] := Simplify[h'[x0] * (x - x0) + h[x0]];
   tangentax1 = tangenta[f, x1];
   tangentax12 = tangenta[f, x12];
   tangentax2 = tangenta[f, x2];
   {xa} = Simplify[x /. Solve[tangentax1 == tangentax2, x]];
   {xb}  = Simplify[x /. Solve[tangentax12 == tangentax2, x]];
   {xc}  = Simplify[x /. Solve[tangentax1 == tangentax12, x]];
   ya = Simplify[tangentax1 /. x → xa];
   yb  = Simplify[tangentax2 /. x → xb];
   yc  = Simplify[tangentax1 /. x → xc];
   FullSimplify[1/2 * Det[
      {{xb - xa, yb - ya},
       {xc - xa, yc - ya}}]]
  ]

In[2]:= ploščina[f, x1, x12, x2]

Out[2]= -((-((f[x1] + (-x1 + x12) f'[x1]) f'[x12]) + f[x2] (-f'[x1] + f'[x12]) + f[x12]
        (f'[x1] - f'[x2]) + (f[x1] + (-x1 + x2) f'[x1] + (x12 - x2) f'[x12]) f'[x2])^2 /
      (2 (f'[x1] - f'[x12]) (f'[x1] - f'[x2]) (f'[x12] - f'[x2])))
```

Slika 3: Primer funkcije v programu Wolfram Mathemtatica, ki izračuna splošno ploščino (pod predpostavko, da se vse tri tangente paroma sekajo).

4 Ilustrativen primer

Vzemimo funkcijo $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ na $[0, 1]$ in drevo, ki ga prikazuje slika 4. Vsako novo vozlišče se nahaja natanko med prejšnjima dvema (če odmislimo kvadriranje).



Slika 4: Vzeto iz [1].

Zlahka preverimo, da za g in to drevo veljajo vse tri potrebne predpostavke. Radi bi izračunali ploščino pod grafom funckije g preko trikotnikov (z Riemannovim integralom dobimo rezultat 1/6).

Označimo nivoje drevesa z n. Nivo 0 sta točki $(0)^2$ in $(1)^2$, nivo 1 točke $(0)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ in $(1)^2$, nivo 2 točke $(0)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, in $(1)^2$, ... v splošnem torej nivo n predstavljajo točke $(0)^2$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$, $\left(\frac{2}{2^n}\right)^2$, $\left(\frac{3}{2^n}\right)^2$, ..., $\left(\frac{2^n-2}{2^n}\right)^2$, $\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^2$ in $(1)^2$. Z vsakim nivojem dobimo nove točke, s tem pa tudi nove trikotnike – natančneje, v nivoju n generiramo 2^{n-1} novih točk/trikotnikov.

Izkaže se, da je ploščina trikotnikov, ki jih dobimo v vsakem nivoju, enaka in odvisna le od n. Do nje pridemo postopoma: najprej premislimo, da je vsak nov trikotnik v nivoju n odvisen od treh sosednjih točk na tem nivoju, od katerih je srednja tista, ki je na novo generirana. Tako lahko nivo n razdelimo na 2^{n-1} trojic: $\{(0)^2, \left(\frac{1}{2^n}\right)^2, \left(\frac{2}{2^n}\right)^2\}$, $\{\left(\frac{2}{2^n}\right)^2, \left(\frac{3}{2^n}\right)^2, \left(\frac{4}{2^n}\right)^2\}$, ..., $\{\left(\frac{2^n-2}{2^n}\right)^2, \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^2, (1)^2\}$. Označimo s k zaporedno mesto novo generirane točke v n-tem nivoju, torej $k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$. Za vsak k lahko s pomočjo formule 1 izračunamo ploščino novega trikotnika, ki ima za oglišča presečišča tangenta v točkah $\{\left(\frac{k-1}{2^n}\right)^2, \left(\frac{k}{2^n}\right)^2, \left(\frac{k+1}{2^n}\right)^2\}$. Ploščina je res neodvisna od k in znaša $\frac{1}{2^{3n}}$.

Sedaj lahko izračunamo ploščino pod grafom funkcije g. Trikotnike dobimo od nivoja 1 naprej, zato je $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Na n-tem koraku dobimo 2^{n-1} novih trikotnikov s ploščino $\frac{1}{2^{3n}}$. Premisliti moramo le uvedbo nove spremenljivke, ki bo namesto k tekla po zaporednih celih številih: vzamemo npr. $t = \frac{k-1}{2}$, torej $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1} - 1$. Ploščina pod grafom je tako res enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}} = \frac{1}{2^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{6}.$$

Ta primer med drugim tudi prikazuje še en način generiranja gostih podmnožic domene funkcije.

```
In[3]:= g[x_] := (1 - Sqrt[x])^2

In[4]:= p = FullSimplify[ploščina[g, ((k - 1)/2^n)^2, (k/2^n)^2, ((k + 1)/2^n)^2], {k ≥ 1, n ≥ 0}]

Out[4]= 8^-n

In[5]:= ploscinapodgrafom = Sum[p, {n, 1, ∞}, {t, 0, 2^(n-1) - 1}]

Out[5]= 1/6

In[6]:= ploscinapodgrafom == Integrate[g[x], {x, 0, 1}]

Out[6]= True
```

Slika 5: Izračun ploščine trikotnikov iz n-tega nivoja danega drevesa ter celotna ploščina pod območjem funkcije g.

5 Generiranje gostih podmnožic z uporabo Stern-Brocotovega drevesa

Še en način razdelitve intervala $[0, \infty)$ na sliki 6 prikazuje t.i. Stern-Brocotovo drevo[2]. Neodvisno drug od drugega sta ga odkrila nemški matematik Moritz Stern leta 1858 in francoski urar Achille Brocot leta 1861. Drevo se začne z mejama intervala, ki ju lahko zapišemo v obliki $\frac{0}{1}$ in $\frac{1}{0}$, števila v drevesu pa generiramo kot mediante sosednjih ulomkov na istem nivoju. *Mediant* dveh racionalnih števil $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ je definiran kot $\frac{a+c}{b+d}$.

5.1 Lastnosti Stern-Brocotovega drevesa

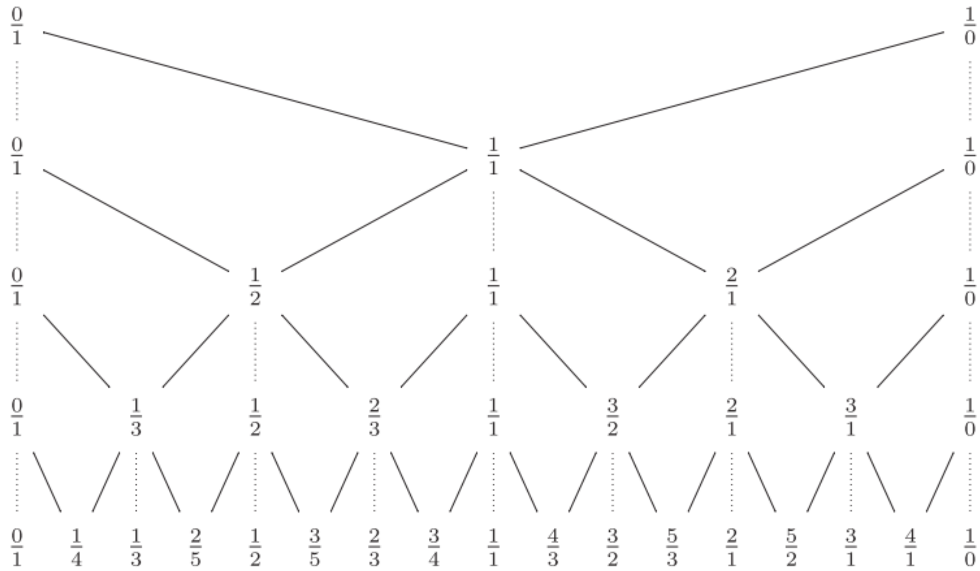
1. Za sosednja ulomka istega nivoja drevesa $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Preprost računski dokaz prepuščam bralcu.

2. Za sosednja ulomka $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ je očitno $bc - ad > 0$. Velja celo več: $bc - ad = 1$.

   To dokažemo z indukcijo na nivojih drevesa. Za 0-ti in prvi nivo trditev očitno velja. Recimo sedaj, da velja tudi za vse do n-tega nivoja. V $n+1$-vem nivoju skonstruiramo novo število, za katerega iz 1 velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Upoštevamo indukcijsko predpostavko in izračunamo: $c(b+d) - d(a+c) = bc - ad = 1$ ter $b(a+c) - a(b+d) = bc - ad = 1$.

3. Vsak element drevesa je pozitiven okrajšan ulomek. (?????) Opazimo tudi, da se v Stern-Brocotovem drevesu pojavijo prav vsa pozitivna racionalna števila. (??????)

[2] angl. Stern-Brocot tree, op. prev.



Slika 6: Stern-Brocotovo drevo. Vzeto iz [1].

5.2 Ploščina pod grafom funkcije g

Izračunajmo ploščino pod grafom iste funkcije $g(x) = (1-\sqrt{x})^2$, ki smo jo definirali v 4, le da so delilne točke intervala $[0,1]$ sedaj kvadratne vrednosti v vozliščih leve polovice Stern-Brocotovega drevesa. V funkcijo 1 za splošno ploščino damo splošne tri zaporedne točke $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, ki na enem koraku generirajo nov trikotnik, in dobimo $\frac{1}{2b^2d^2(b+d)^2}$. Skupna ploščina se torej izračuna po razmisleku, da v celotni levi polovici drevesa b in d pretečeta vsa naravna števila, vendar imata vsaka sosednja ulomka tuje imenovalce, torej vzamemo le tuje pare (b,d) (????????):

$$\sum_{\substack{b,d=1\\(b,d)=1}}^{\infty} \frac{1}{2b^2d^2(b+d)^2} = \frac{1}{6}. \tag{2}$$

S tem primerom smo pokazali, kako različna delitev istega intervala porodi drugačno obliko neskončne vrste. Formula 2 je posebni primer bolj splošne funkcije, imenovane *Mordell-Tornheim zeta funkcija*, ki ima splošno obliko

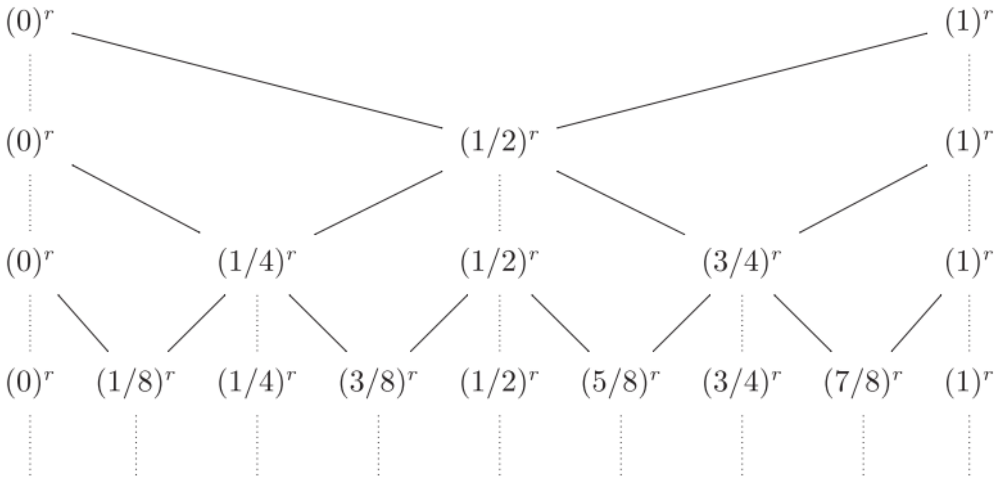
$$\sum_{(m,n)=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s3}}. \tag{3}$$

6 Razred konvergentnih vrst

Tudi če za funkcijo iz motivacijskega primera, $f(x) = \frac{1}{x}$, uporabimo zgornji dve drevesi, dobimo divergentno vrsto. (???? KAKŠNO????). Ali znamo generirati konvergentno vrsto iz funkcij, podobnih g iz 4? Na primer iz dela enotske krožnice $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

na $[0,1]\times[0,1]$ ali funkcije $y=(1-\sqrt[3]{x})^3$ na $[0,1]$? Izkaže se, da preoblikovanje drevesa pripomore k poenostavljenemu računanju ploščin trikotnikov, vendar v obeh primerih ne dobimo neke enostavne, lepe vrste.

Primer funkcije, kjer pa lahko dobimo družino neskončnih vrst še kar lepe oblike, je $f(x)=x^{-1/r}$ na $[0,1]$ za $r\in\mathbb{N}; r>1$. Vzemimo drevo, kot kaže slika 7 (za $r=2$ dobimo drevo iz 4):



Slika 7: Vzeto iz [1].

Kot v 4 na enak način izračunamo ploščino trikotnika v n-tem nivoju iz trojice zaporednih točk $\{\left(\frac{k-1}{2^n}\right)^r, \left(\frac{k}{2^n}\right)^r, \left(\frac{k+1}{2^n}\right)^r\}$, kjer $k=1,3,5,\ldots,2^n-1$ označuje zaporedno mesto novo generirane točke v n-tem nivoju. Ploščina je tokrat odvisna od k in znaša

$$P_k=\frac{\Big(((k-1)k)^r+(k(k+1))^r-2(k^2-1)^r\Big)^2(1+r)^2}{2^{nr-n+1}r\Big(k^{r+1}-(k-1)^{r+1}\Big)\Big((k+1)^{r+1}-(k-1)^{r+1}\Big)\Big((k+1)^{r+1}-k^{r+1}\Big)}.$$

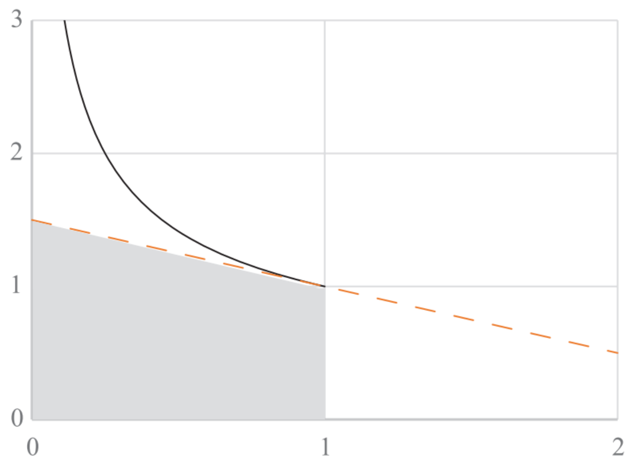
Za izračun celotne ploščine zopet uporabimo zvezo $t=\frac{k-1}{2}$:

$$P=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{2^n-1}\frac{\Big(t^r(2t+1)^r-2^{r+1}t^r(t+1)^r+(2t+1)^r(t+1)^r\Big)^2(1+r)^2}{2^{nr-n+1}r\Big((2t+1)^{r+1}-(2t)^{r+1}\Big)\Big((t+1)^{r+1}-t^{r+1}\Big)\Big((2t+2)^{r+1}-(2t+1)^{r+1}\Big)} \tag{4}$$

$$\text{oz. za } r=2 \text{ dobimo } P'=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{2^n-1}\frac{9(6t^2+6t+1)^2}{2^n(1+27(2t+1)^6)}. \tag{5}$$

Opazimo, da funkcija f ne ustreza povsem predpostavki 1, saj na $[0,1]$ x-os ni njena tangenta (gl. sliko 8). Zato vrsta 4, ki jo dobimo za splošen r, ne nujno konvergira k vrednosti $\int_0^1 f(x)dx$. Vendar je popravek k formuli enostaven – izračunamo ploščino trapeznega območja, ki ni pokrito s trikotniki, ter to odštejemo od določenega integrala in dobimo vrednost vrste. Za $r = 2$ tako vrsta 5 konvergira k $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$, za splošno funckijo $f(x) = x^{-1/r}$ pa njena vrsta 4 konvergira proti

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/r}} dx - \frac{2r+1}{2r} = \frac{r+1}{2r(r-1)}.$$



Slika 8: Sivoobarvano območje pod $f(x) = x^{-1/2}$ ni trikotnik. Vzeto iz [1].

7 Rimannova zeta funkcije

8 Zaključek

Glavna ideja računanja ploščine območja pod grafom s trikotniki je torej uporabiti neskončno binarno drevo, ki določen interval razdeli na goste podmnožice. Iz tega drevesa dobimo neskončno vrsto, ki je za isti določen integral pri različnih drevesih tudi sama različne oblike, njena vsota pa se seveda ne spremeni.

Tu se poraja vprašanje, kako sploh generiramo ta drevesa. Ali je kakršnakoli gosta delitev vredu? Kako lahko zagotovimo, da z nekim drevesom dobimo vrsto, ki jo znamo izračunati brez pomoči kalkulatorja?

Ali lahko naredimo obratno in če da, pod katerimi pogoji – iz dane vrste sproduciramo funkcijo, ki ji odgovarja?

Literatura

[1] Ryan Zerr Hans Musgrave. “Infinite Series as Sums of Triangular Areas”. V: *Mathematics Magazine* 95:1 (2022), str. 14–20.

[2] Anna-Maria von Pippich Jürg Kramer. “Special Values of Zeta Functions and Areas of Triangles”. V: (2015).

[3] Mikael Passare. “How to Compute $\sum 1/n^2$ by Solving Triangles”. V: *The American Mathematical Monthly* 115:8 (2008), str. 745–752.