

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

Лабораторна робота з фізики №4

КОНДЕНСАТОР І ІНДУКТИВНІСТЬ В КОЛІ ЗМІННОГО СТРУМУ

Виконав:
студент групи ФІ-12
Завалій Олександр

Київ-2022

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ

ТЕОРЕТИЧНА ДОВІДКА

Частина 1: Ємність в колі змінного струму.

Ключові поняття: Змінний струм, ємність, конденсатор, правила Кірхгофа для змінного струму, стала часу, паралельне з'єднання, послідовне з'єднання, імпеданс, фазовий зсув, векторна діаграма, теорема Фур'є.

Мета роботи

Визначення реактивного опору конденсатора як функції частоти та його ємності. Визначення фазового зсуву між напругою на конденсаторі та струмом у колі як функції частоти та ємності конденсатора.

Теоретичне підґрунтя

Розглянемо конденсатор та дві пластини (А) та (В), що розділені діелектриком (рис. 1).

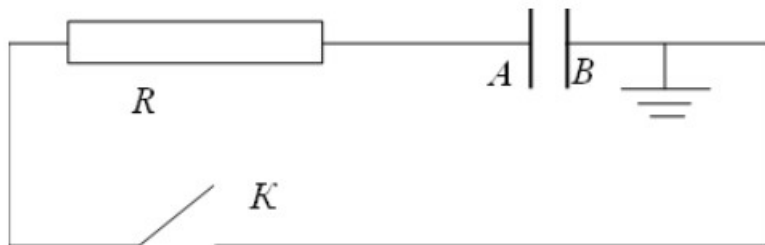


Рис. 1: Схема під'єднання конденсатора.

Оскільки пластина (В) знаходиться під потенціалом землі, різниця потенціалів, що приходить на конденсатор, дорівнює потенціалу φ_A пластини (А) і пов'язана з кількістю електрики Q_A на пластині (А) так:

$$Q_A = C \cdot \varphi_A \quad (1)$$

де C - ємність конденсатора.

Якщо замкнути ключ (рис. 1), через резистор R потече струм:

$$R = \frac{\varphi_R}{I} \quad (2)$$

З правила Кіргофа витікає, що $\varphi_K = -\varphi_C$. Тому $I = -\frac{\varphi_C}{R}$. З іншого боку диференціюючи (1), отримаємо

$$I = \frac{C \cdot d\varphi}{dt} \quad (3)$$

Тобто, струм розряду пропорційний зменшенню заряду конденсатора і, відповідно, його потенціалу. Порівнюючи (1) та (3) отримаємо:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{RC \cdot \varphi} \quad (4)$$

Шляхом розділення змінних диференційне рівняння (4) розв'язується як:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot e^{-t/RC} \quad (5)$$

де φ_0 – початковий потенціал конденсатора.

Величина $\tau = RC$ має розмірність часу і називається сталою часу RC –кола. Вона відповідає характерному часу розрядки конденсатора C через резистор R

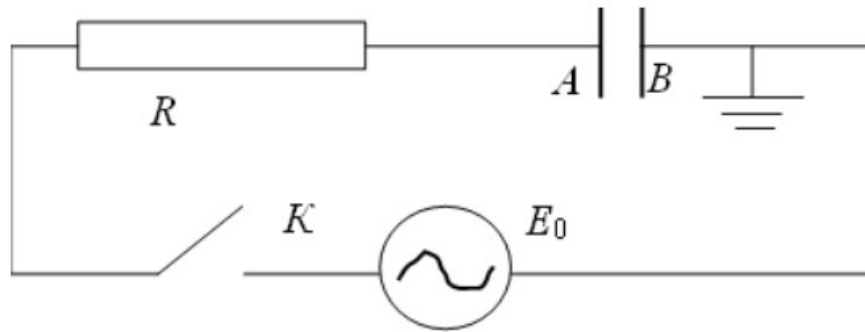


Рис. 2: Схема зарядки конденсатора.

Розглянемо процес зарядки конденсатора (рис. 2). Повторюючи викладки, які наведені вище, і враховуючи джерело ЕРС в рівнянні Кіргофа $U_R + U_C + E_0 = 0$, отримаємо

$$\varphi = E_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (6)$$

Отже процес зарядки конденсатора протікає з тією ж швидкістю, що і розрядки.

Знайдемо тепер енергію конденсатора. Істотно, що в міру зарядки конденсатора його потенціал змінюється. Додавання конденсатору з потенціалом невеликої кількості електрики змінює його енергію на $dW = \varphi dQ$. Інтегруючи від 0 до Q_0 , отримуємо повну енергію:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} C E_0^2 \quad (7)$$

З іншого боку повна робота, що виконується джерелом напруги дорівнює $E_0 Q_0 = C E_0^2$.

Вищенаведені міркування вказують на те, що можна говорити про струм через конденсатор так само, як і через резистор або через індуктивність. Єдина відмінність полягає в іншому вигляді зв'язку між струмом через конденсатор та потенціалом на його обкладинках. До того ж цей зв'язок варто розглядати тільки в колах зі змінною напругою.

Розглядемо схеми, в яких джерело напруги генерує гармонічний сигнал, тобто ЕРС елементу змінюється з часом періодично з частотою. Різниця потенціалів на обкладинках конденсатора при певному струмі буде тим менше, чим більше частота. При збільшенні частоти зменшується час протягом якого струм, зберігаючи свій напрямок, буде заряджати або розряджати конденсатор. Тому, як видно з (5), зі збільшенням частоти зменшується заряд, до якого встигає зарядитись конденсатор, а, отже, і потенціал на його обкладинках. Друга особливість полягає в тому, що максимальному струмові відповідає максимальна зміна напруги на обкладинках конденсатора. Викладемо ці ж міркування в математичній формі.

Зручно представити потенціал на обкладинках конденсатора в комплексному вигляді:

$$\varphi = \varphi_0 \exp(i\omega t + \psi_0) = \varphi_0 [\cos(\omega t + \psi_0) + i \sin(\omega t + \psi_0)] \quad (8)$$

де φ_0 та ψ_0 амплітуда та початкова фаза потенціалу.

Підставляючи (8) в (3) для струму отримаємо:

$$I = i\omega C \cdot \varphi_0 \exp(i\omega t + \psi_0) = i\omega C \cdot \varphi \quad (9)$$

Величину

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C} \quad (10)$$

називають імпедансом конденсатора. Підставляючи в (9) отримаємо зв'язок між струмом через конденсатор та потенціалом на його обкладинках у вигляді закону Ома:

$$I = \varphi \cdot Z_c \quad (11)$$

Як перше та і друге правило Кірхгофа можна застосовувати до змінних струмів, якщо омичний опір всюди замінити на відповідний імпеданс.

Зв'язок між струмом та потенціалом конденсатора зручно представити в вигляді **векторної діаграми**. В будь який момент струм (9) можна представити в вигляді вектора, що обертається з частотою ω . При цьому вектор струму (8) випереджає вектор потенціалу на пів періоду. Зсув фаз між вектором струму та вектором потенціалу (напруги) через конденсатор становить $\frac{\pi}{2}$.

Розглянемо тепер зв'язок між напругою та струмом в колі з послідовно з'єднаними конденсатором та резистором (рис. 2). Скориставшись правилами Кірхгофа для кола зі змінним струмом отримаємо:

$$U_i = I \cdot R + \frac{I}{i\omega C} = I \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) \quad (12)$$

Якщо вхідний сигнал можна представити в вигляді $U_{in} = U_0 \cos(\omega t)$, користуючись (12) неважко знайти струм в колі:

$$I = \frac{U_{in}}{\left(R + \frac{1}{i\omega C} \right)} = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

де $-\phi$ зсув фаз між вхідною напругою та струмом в RC-колі:

$$\operatorname{tg}(\phi) = -\frac{1}{\omega RC} \quad (14)$$

I_0 - амплітуда струму:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad (15)$$

Загальний імпеданс RC кола становить:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (16)$$

Якщо прийняти до уваги, що напруга на резисторі пропорційна струму, то на векторній діаграмі струм в колі можна представити у вигляді вектора зсунутого на кут ϕ відносно вектора вхідної напруги.

Яким же чином буде змінюватись струм в RC-колі за довільної форми вхідного сигналу? Це питання визначає теорема Фур'є, згідно з якою будь-який сигнал можна представити у вигляді ряду гармонічних сигналів:

$$U_{in}(t) = \sum_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} A_0 \cdot \exp\{\omega t\} \quad (17)$$

Тоді, з огляду на принцип суперпозиції, до кожної з гармонічних складових сигналу (17) можна застосувати формули (12 – 16). Отже:

$$I(t) = \sum_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \frac{A_\omega}{R + \frac{1}{i\omega C}} \cdot \exp\{\omega t\} \quad (18)$$

З (18) випливає, що в загальному випадку вхідний сигнал може в значній мірі спотворюватись RC-колом. Однак, в деяких випадках такі схеми працюють доволі прозоро. Розглянемо рис. 3. Вихідний сигнал:

$$U_{out} = \frac{\int I \cdot dt}{C} = \frac{\int U_{in} \cdot dt}{C \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right)}$$

За умов коли $R \gg \left| \frac{1}{\omega C} \right|$ на рис. 3 працює як інтегратор, тобто вихідний сигнал є інтеграл від вхідного:

$$U_{out} = \frac{\int I \cdot dt}{C} = \frac{\int U_{in} \cdot dt}{RC} = \frac{\int U_{in} \cdot dt}{\tau} \quad (19)$$

Умова інтегрування фактично означає, що характерний час заряду конденсатора має бути набагато більше періоду найвисокочастотної компоненти вхідного сигналу. Для кола на рис. 3 вихідний сигнал:

$$U_{out} = I \cdot R = R \cdot \frac{dQ}{dt} = RC \cdot \frac{dU_c}{dt} = \tau \cdot \frac{d(U_{in} - U_R)}{dt}$$

За умов коли $|U_{in}| \gg |U_R|$ вихідний сигнал є диференціалом вхідного, тобто коло працює як таке, що диференціює:

$$U_{out} = \tau \cdot \frac{dU_{in}}{dt} \quad (20)$$

З умови $|U_{in}| \gg |U_R|$ безпосередньо слідує, що $|U_C| \gg |U_R|$, отже, і імпеданс конденсатора набагато більший за опір $\left| \frac{1}{\omega C} \right| \gg R$. Іншими словами час розрядки конденсатора набагато менше періоду низькочастотної компоненти вхідного сигналу.

РОЗДІЛ ДРУГИЙ

Теоретичні основи експерименту

Схему установки для дослідження RC-кола наведено на рис. 3.

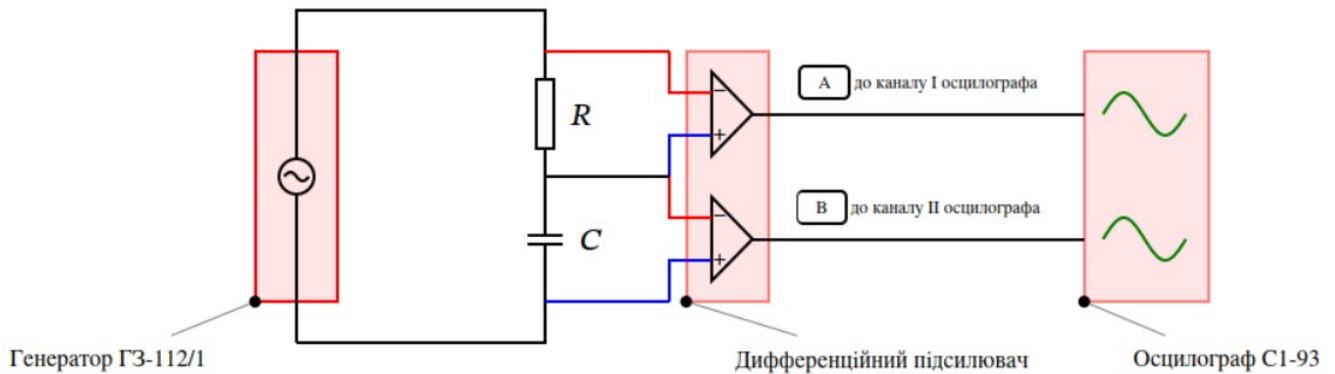


Рис. 3: Схема дослідження RC-кола.

Вона складається з монтажної коробки, диференціальних повторювачів, осцилографа та генератору ГЗ-11/1. RC-коло монтується на монтажній коробці з набору резисторів (50; 100; 200 Ом) та конденсаторів. Низькочастотний генератор синусоїдального сигналу використовується для визначення імпедансу кола. Та дозволяє вивчити особливості роботи диференціюючого та інтегруючого кола.

Диференціальний підсилювач використовуються для одночасного вимірювання двох напруг при підключенні до входів двоканального осцилографа. Його входи можуть бути підключені до будь-якої точки кола не впливаючи на його електричну поведінку.

Він має два входи, які позначені літерами (A) та (B), кожен з яких має пару 4 мм сокетів червоного та синього кольору. В роботі використовується двоканальний осцилограф, що дозволяє одночасно вивчати сигнал на резисторі та конденсаторі. Осцилограф може працювати в двох режимах. В режимі осцилографа можна спостерігати часову розгортку досліджуваних сигналів. Зсув фаз вимірюється безпосередньо на осцилографі за допомогою маркера на синхронізованих синусоїдах сигналу генератора та напруги на резисторі. Тангенс зсуву фаз обчислюється відносно амплітуд напруги на резисторі та конденсаторі.

В режимі осцилоскопа на канал "A" подається сигнал від резистора (пропорційний струму в колі); на канал "B" сигнал від конденсатора чи безпосередньо від генератора. На екрані при цьому спостерігаються фігури Ліссажу. Форма фігури залежить від зсуву фаз між сигналами, що подаються на вхід "A" та "B". Так, якщо на вхід "B" подається сигнал від конденсатора, то спостерігається еліпс:

$$\text{канал "A" (вісь X): } X = I_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{канал "B" (вісь Y): } Y = I_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

Звідки, виключивши t , $y = \left(\frac{1}{C\omega}\right) \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$ отримуємо формулу еліпсу:

$$\left(\frac{x}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{I_0}{C\omega}}\right)^2 = 1$$

Якщо на канал "B" подається вхідний сигнал, осі еліпса вже не співпадають з осями X та Y .

Хід експерименту

1. Зберіть схему, як показано на рис. 3.
2. Візьміть конденсатор ємністю $1\mu\text{Ф}$, резистор з найменшим опором. За допомогою ручки генератора підберіть частоту, коли амплітуда напруги на конденсаторі (канал "В") дорівнюватиме амплітуді напруги на резисторі (канал "А"). Це також означає, що при цій частоті $X_C = R$.
3. Поступово збільшуйте опір резисторів (10, 15, 25, 50, 75, 100, 150, 200 Ом) і знімайте залежність $X_C = f(\nu)$. Перемикніть осцилограф в режим осцилоскопа, переконайтесь, що ви бачите коло на екрані.
4. Візьміть конденсатор ємністю $2, 2\mu\text{Ф}$. Повторіть вимірювання як зазначено в п. 3, після чого візьміть конденсатор ємністю $4, 4\mu\text{Ф}$ і також повторіть п.3.
5. Візьміть конденсатор ємністю 1 мкФ та резистор опором 50 Ом. Змінюючи частоту генератора в межах п. 3 вимірюйте відношення амплітуди напруги на конденсаторі U_{0C} до амплітуди напруги на резисторі U_{0R} . Відношення цих амплітуд є тангенсом зсуву фаз між струмом в колі та напругою генератора.

$$\text{tg } \varphi = \frac{U_{0C}}{U_{0R}}$$

Даний пункт можна виконати також/або теоретично, взявши весь ряд значень реактивних опорів, та підставивши значення активного опору 50 Ом, розрахувати:

$$\text{tg } \varphi = -\frac{X_C}{R}$$

Завдання

1. За результатами вимірювання побудуйте отримані залежності $X_C = f(\nu)$ в лінійних та логарифмічних координатах для всіх випадків. Зробіть це на одній координатній площині. Апроксимуйте дані теоретичною залежністю.
2. Зробіть зріз апроксимованих залежностей, побудованих в п. 1 для кількох частот і побудуйте залежність імпедансу від ємності $X_C = f(C)$. З параметрів апроксимації визначте показник виконання залежності.
3. Побудуйте залежність зсуву фаз від частоти згідно п.5.
4. Зробіть висновки.

РОЗДІЛ ТРЕТІЙ

Експериментальні дані

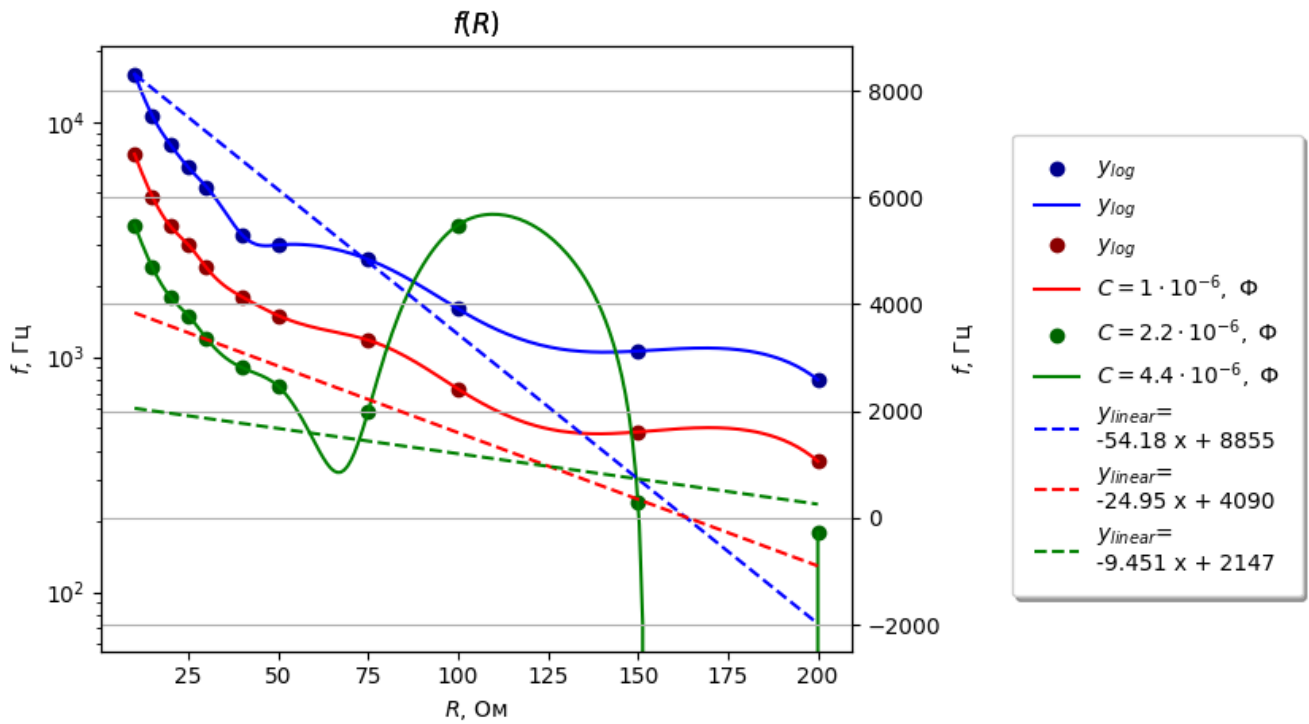


Рис. 4: Залежність $X_C = f(\nu)$ в лінійних та логарифмічних координатах для всіх випадків.

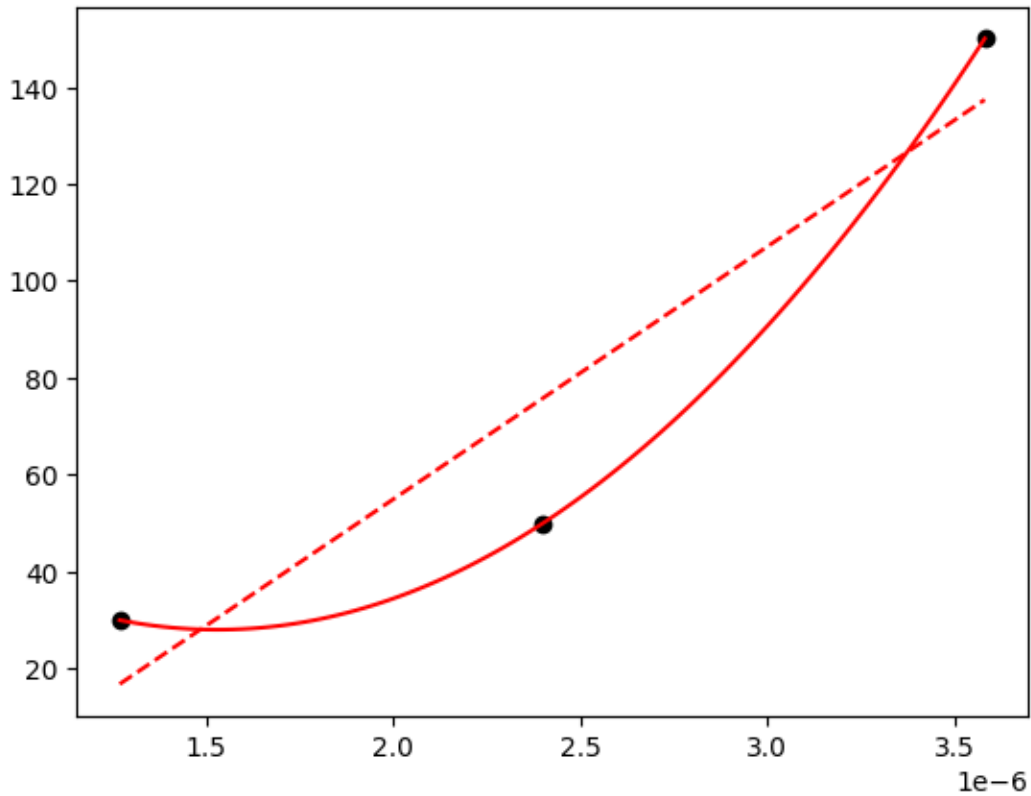


Рис. 5: Зріз апроксимованих залежностей, залежність імпедансу від ємності $X_C = f(C)$

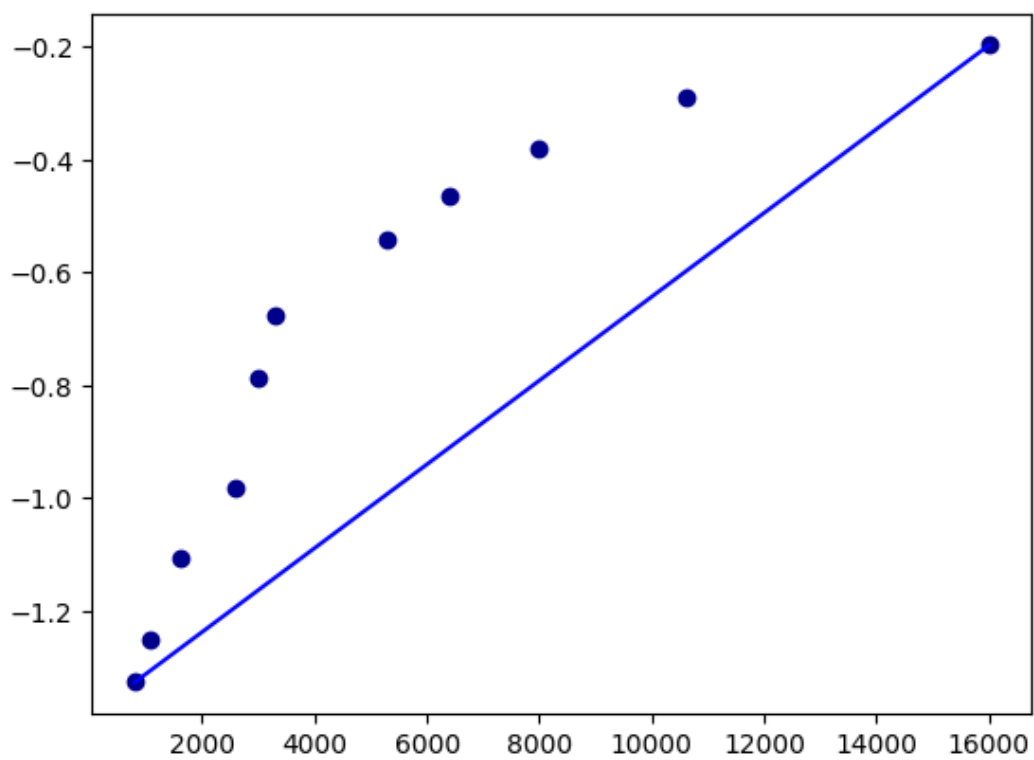


Рис. 6: Залежність зсуву фаз від частоти.

РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ

Висновки

За результатами обробки дослідних даних отримано ...
Похибки.

$\langle \mathbf{b} \rangle$	$L_{\text{теор}}$	$L_{\text{експ}}$	$\varepsilon_{abs}\%$	$\varepsilon\%$
$-1.155 \cdot 10^{-13}$	0.01	0.01	5.3	0.5
$-1.108 \cdot 10^{-12}$	0.001	0.001	5.3	0.5
$-5.539 \cdot 10^{-13}$	0.002	0.0002	0.2	90

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ (Частина II)

ТЕОРЕТИЧНА ДОВІДКА

Частина 2: Індуктивність в колі змінного струму.

Ключові поняття: Індуктивність, котушка індуктивності, реактивний та активний опір, імпеданс, зсув фаз, опір втрат, згасання, закони Кірхгофа.

Мета роботи

Дослідження залежності імпедансу і зсуву фаз між током та напругою RL-кола від частоти коливань. Дослідження перехідних процесів на прикладі реакції RL-кола на примусову силу сходинкоподібної форми.

Теоретичне підґрунтя

Розглянемо RL-коло в момент підключення до джерела електрорушійної сили ЕРС (Рис. 7).

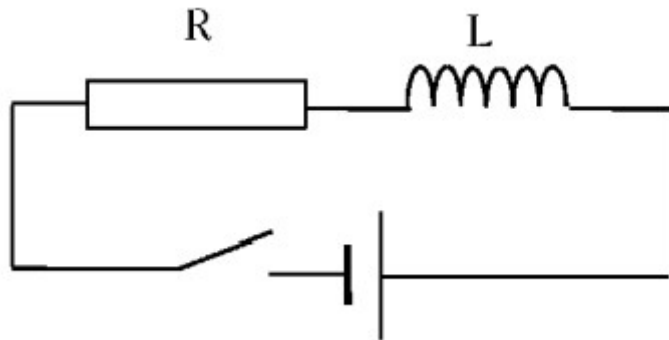


Рис. 7: Схема кола, яке містить резистор R , котушку індуктивності L та джерело ЕРС.

Зміна струму крізь коло буде приводити до зміни магнітного потоку Φ котушки, що, в свою чергу, приводить до генерації ЕРС самоіндукції котушки:

$$E = -\frac{1}{C} \frac{dF}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (21)$$

В ідеальному випадку активним опором котушки можна знехтувати, тому загальний струм крізь коло буде визначатись опором резистора:

$$U - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (22)$$

$$U = IR + L \frac{dI}{dt}$$

З рівняння (22), яке є 2 правилом Кірхгофа для RL – кола, зрозуміло, що часозалежна форма сигналу на індуктивності є похідною сигналу на резисторі.

Напруга навантаження RL – кола в момент включення ЕРС описується таким чином:

$$U(t) = 0, \text{ при } t < 0; U(t) = U_0 \text{ при } t \geq 0; \quad (23)$$

$$I(t) = 0 \text{ при } t = 0$$

Враховуючи граничні умови, маємо:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \exp \left[-\frac{1}{\tau} \right] \right); \tau = \frac{L}{R} \quad (24)$$

при цьому розподіл напруги на котушці та резисторі виглядатиме так:

$$U_R(t) = U_0 \left(1 - \exp \left[-\frac{R}{L} \cdot t \right] \right); U_L(t) = \frac{U_0 R}{L} \exp \left(-\frac{R}{L} \cdot t \right) \quad (25)$$

Загальна картина відгуку RL - кола на сходинкоподібний сигнал зображено на рис. 8.



Рис. 8: RL - коло.

Саме тут варто звернути увагу на відмінності характеру активного та реактивного опорів: активний опір приводить до розсіювання енергії роботи зовнішніх сил у вигляді тепла (направлений рух електронів перетворюється на хаотичний тепловий), індуктивний опір L є реакцією стану котушки на зміну зовнішніх сил. В останньому випадку робота зовнішніх сил зберігається котушкою і може бути повернута у коло. Енергія котушки із струмом I дорівнюватиме:

$$E_L = \frac{LI^2}{2} \quad (26)$$

Час переходу усього кола до нового стану τ визначається відношенням величин реактивного L та активного R опорів (25). Відгук будь якої системи на сигнал сходинкоподібної форми (як на рис. 8) називається перехідною характеристикою системи. Будь який вхідний сигнал складної форми можна розкласти на суму функцій у вигляді простих сходінок, та обчислити результат реакції системи на цей сигнал, знаючи тільки перехідну характеристику.

Але, частіше за все, RL – коло приймає участь у періодичних процесах, які описуються гармонічними функціями:

$$I = I_0 \{ \cos(\omega t) \} + i \sin(\omega t) \} = I_0 \cdot \exp(i\omega t) \quad (27)$$

З математичних курсів ви дізнаєтесь, що будь який періодичний сигнал завжди можна розкласти на суму гармонік вигляду (27) з частотами коливань кратними ω . Тоді використання (27) у (22) приводить до виразу:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad (28)$$

$$U + U_0 \cdot \exp(i(\omega t + \delta))$$

Сума у фігурних дужках називається імпедансом кола.

$$Z = R + iL\omega = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \cdot \exp(i\delta) \quad (29)$$

З рівнянь (26) та (27) видно, що для періодичних сигналів у $(R^2 + (L\omega)^2)^{1/2}$, колі буде спостерігатися зсув фаз між напругою та струмом. Перетворення імпедансу (29) у вигляді амплітуди та фазового додатку $\exp(i\delta)$ зручне для графічної ілюстрації співвідношень між напругами на котушці, резисторі, зсувом фаз між струмом та вхідною напругою в залежності від частоти методом векторних діаграм (Рис. 9).

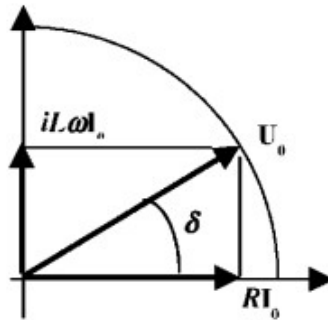


Рис. 9:

Загальний опір RL-кола для послідовного з'єднання залежить від опорів окремих елементів таким чином:

$$Z_{tot} = \sum Z_i \quad (30)$$

а для паралельного:

$$\frac{1}{Z_{tot}} = \frac{1}{\sum Z_i} \quad (31)$$

У випадку індуктивного опору:

$$Z_L = iL\omega \quad (32)$$

РОЗДІЛ ДРУГИЙ (Частина II)

Теоретичні основи експерименту

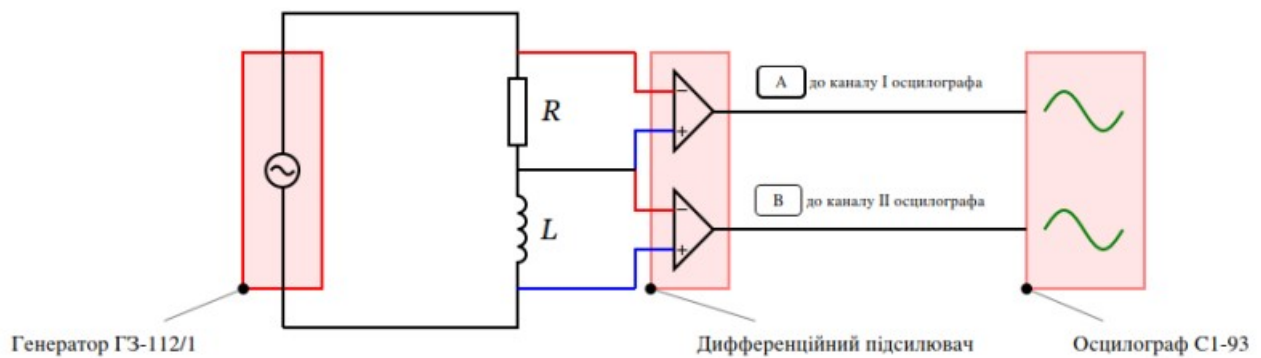


Рис. 10: Схема дослідження RL-кола.

Загальна схема досліду на Рис. 10 складається з монтажної коробки з RL – колом, диференціальних підсилювачів, осцилографа, частотометра, суміщеного з генератором. Генератор використовується для дослідження імпедансу та дозволяє побачити відмінності прямого (на резисторі) та диференційованого (на котушці) сигналів. На послідовно з'єднані резистор та конденсатор подають синусоїдальну зовнішню напругу з контрольованою частотою $\omega = 2\pi\nu$, яка задається генератором ГЗ-112. Напруги на конденсаторі і резисторі вимірюються за допомогою осцилографа С1-93. Знаючи опір резистора можна знайти опір конденсатора, якщо підібрати частоту, на якій напруги, вимірювані осцилографами будуть мати однакову амплітуду. Диференціальні повторювачі використовуються для "розв'язки" електричних сигналів з резистору такої котушки, оскільки обидва входи "А" і "В" осцилографа мають загальне заземлення. RL коло може складатися з набору резисторів (50; 100; 200 Ом) та двох котушок індуктивності (2 та 9 мН).

Хід експерименту

1. Зберіть схему для дослідження реактивного опору котушки індуктивності та зсуву фаз (рис. 10).
2. Візьміть котушку індуктивністю 1 сГн, резистор з найменшим опором. За допомогою ручки генератора підберіть частоту, коли амплітуда напруги на котушці (канал B) дорівнюватиме амплітуді напруги на резисторі (канал A). Це також означає, що при цій частоті $X_L = R$.
3. Поступово збільшуйте опір резисторів (10, 15, 25, 50, 75, 100, 150, 200 Ом) і знімайте залежність $X_C = f(\nu)$. Перемикайте осцилограф в режим осцилоскопа, переконайтесь, що ви бачите коло на екрані.
4. Візьміть котушку індуктивністю 1 мГн. Повторіть вимірювання як зазначено в п. 3, після чого візьміть котушку індуктивністю 2 мГн і також повторіть п.3.
5. Візьміть котушку індуктивністю 2 мГн та резистор опором 50 Ом. Змінюючи частоту генератора в межах п. 3 вимірюйте відношення амплітуди напруги на котушці індуктивності U_{0L} до амплітуди напруги на резисторі U_{0R} . Відношення цих амплітуд є тангенсом зсуву фаз аз між струмом в колі та напругою генератора.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0L}}{U_{0R}}$$

Даний пункт можна виконати також/або теоретично, взявши весь ряд значень реактивних опорів, та підставивши значення активного опору 50 Ом, розрахувати кут за допомогою співвідношення: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}$

Завдання

1. За результатами вимірювання побудуйте отримані залежності $X_L = f(\nu)$ в лінійних координатах для всіх випадків. Зробіть це на одній координатній площині. Апроксимуйте дані теоретичною залежністю. З параметрів апроксимації визначте показник виконання залежності реактивного опору від частоти.
2. Зробіть зріз апроксимованих залежностей, побудованих в п. 1 для кількох частот і побудуйте залежність імпедансу від ємності $X_L = f(L)$.
3. Побудуйте залежність зсуву фаз від частоти згідно п.5.
4. Зробіть висновки.

РОЗДІЛ ТРЕТІЙ (Частина II)

Експериментальні дані

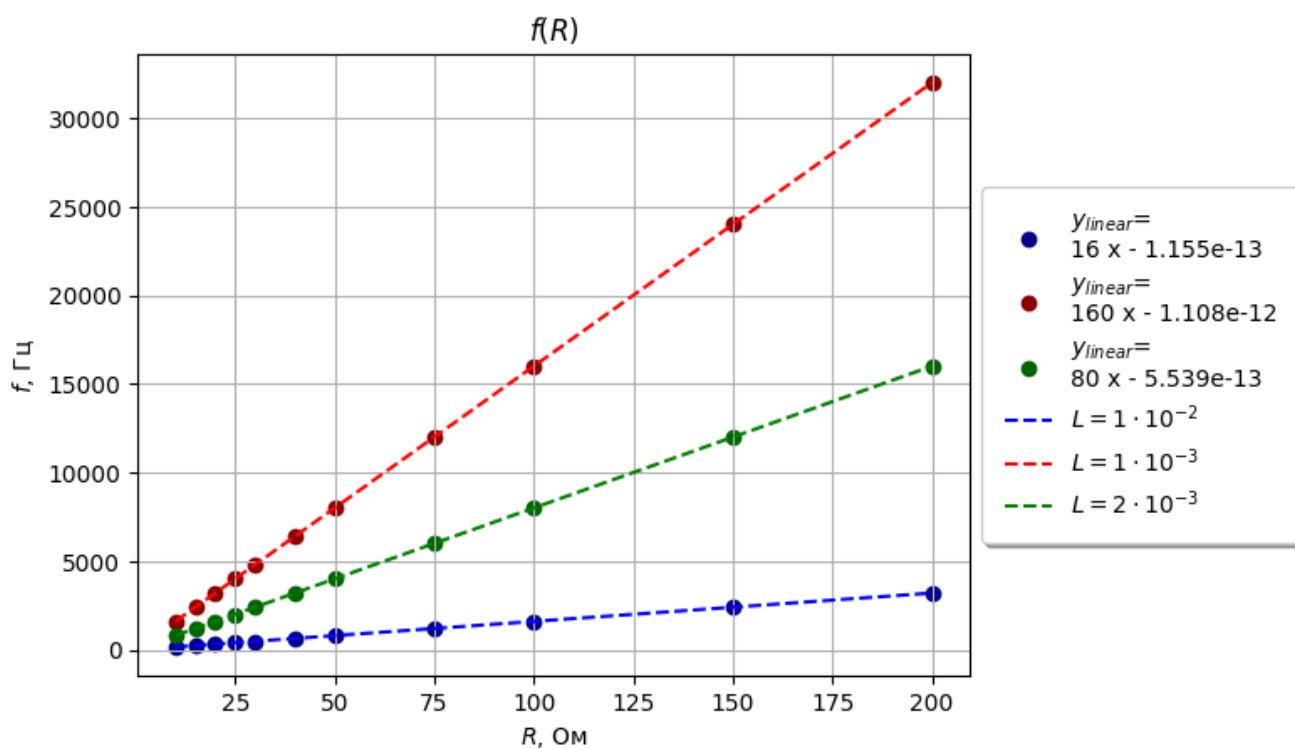


Рис. 11: Залежність $X_L = f(\nu)$ в лінійних та логарифмічних координатах для всіх випадків.

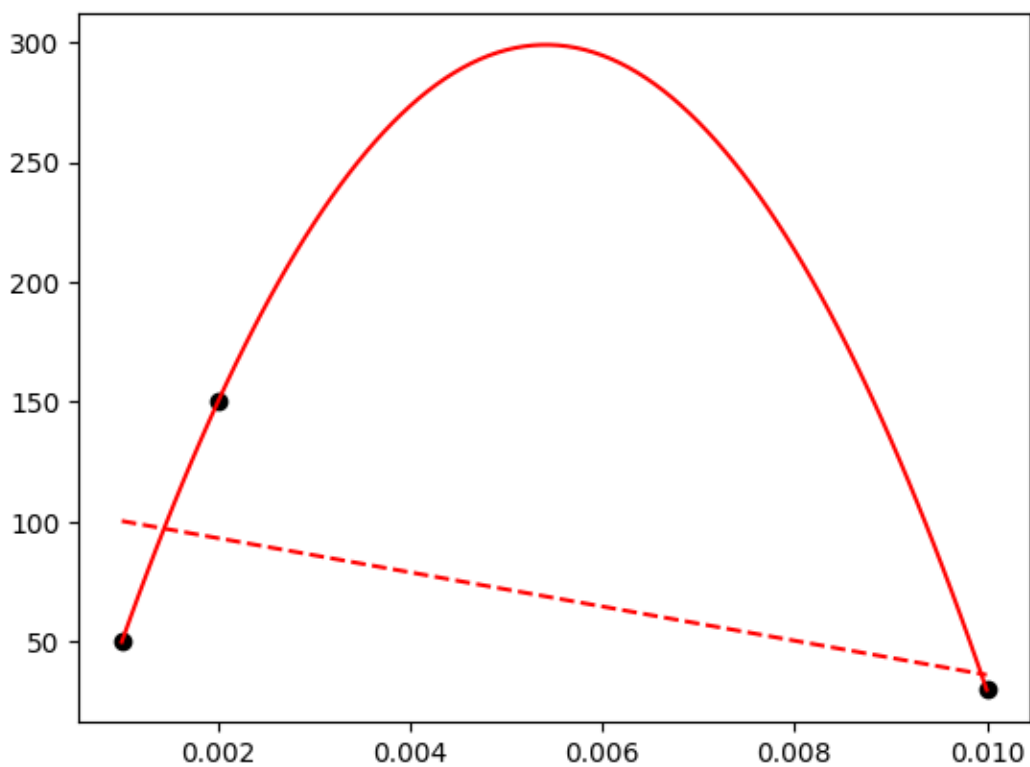


Рис. 12: Зріз апроксимованих залежностей, залежність імпедансу від ємності $X_L = f(L)$

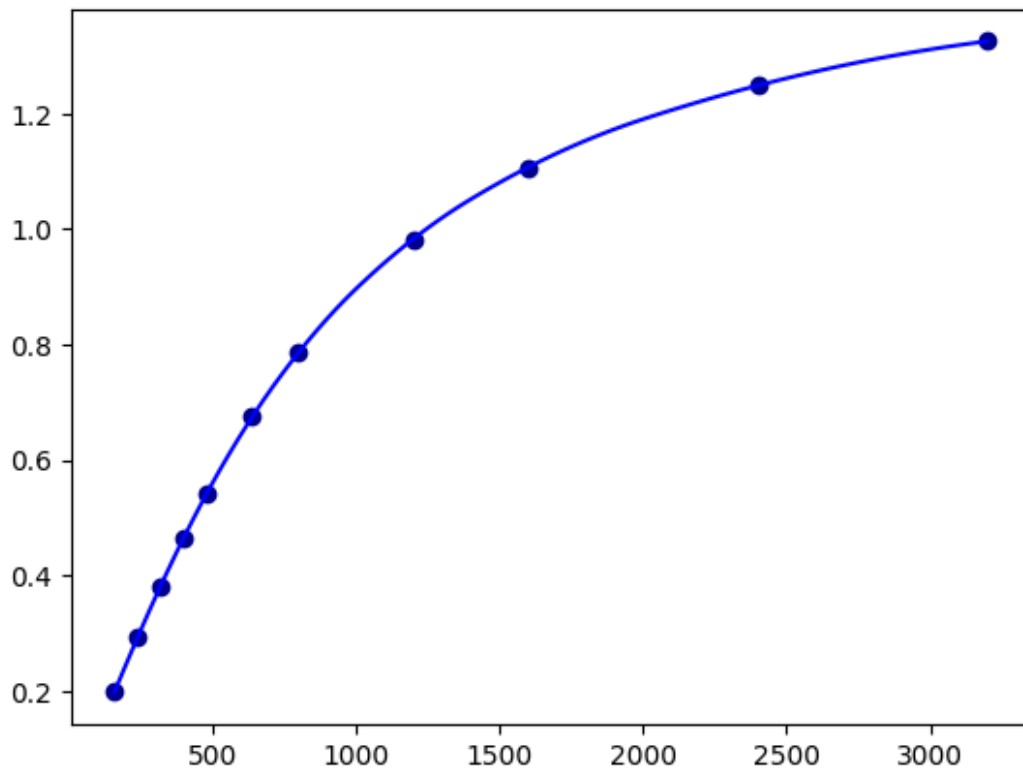


Рис. 13: Залежність зсуву фаз від частоти.

РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ (Частина II)

Висновки