

Exercice 1 - De l'amour

Formaliser les assertions suivantes en utilisant le prédicat $p(x, y) = \ll x \text{ aime } y \gg$:

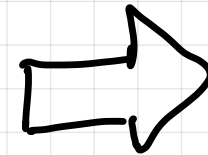
1. tout le monde aime quelqu'un ;
2. quelqu'un est aimé par tout le monde ;
3. si l'on aime alors on aime une seule personne.

$$1) \quad p(x, y) = "x \text{ aime } y" \quad \text{eq}$$

$$\forall x \exists y \quad p(x, y)$$

$$2) \quad \exists y \forall x \quad p(x, y)$$

$$3) \quad \forall x \quad \exists y \quad p(x, y) \rightarrow (\forall z \quad p(x, z) \rightarrow \text{eq}(z, y))$$



Exercice 2 - Hommes et immortalité

Considérez les trois prédicats suivants :

$h(x) = \ll x \text{ est un homme} \gg$

$m(x) = \ll x \text{ est mortel} \gg$

$g(x) = \ll x \text{ est grec} \gg$

Écrivez des formules pour les énoncés suivants puis dites quelles sont les relations entre ces formules (par exemple : est-ce que 1. implique 2. ?) :

1. Tous les hommes sont mortels ;
2. tous les hommes sont immortels ;
3. aucun homme n'est mortel ;
4. aucun homme n'est immortel ;
5. il existe un homme immortel ;
6. il existe un homme mortel.

1) $\forall x \quad h(x) \rightarrow m(x)$

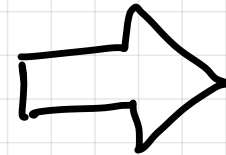
2) $\forall x \quad h(x) \rightarrow \neg m(x)$

3) \hat{m} chose que 2)

4) \hat{m} que 1)

5) $\exists x \quad h(x) \wedge \neg m(x)$

6) $\exists x \quad h(x) \wedge m(x)$



Exercice 3 - Les curés et les vélos

Soient les prédicats $c(x)$: « x est un curé » ; $v(x)$: « x est un vélo » ; $p(x,y)$: « x possède y » et $e(x,y)$: « x égale y ». Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x (v(x) \rightarrow (\exists z c(z) \wedge p(z, x)))$
2. $\forall x c(x) \rightarrow (\forall z \forall y (v(z) \wedge v(y) \wedge \neg e(z, y)) \rightarrow (\neg p(x, y) \vee \neg p(x, z)))$
3. $\exists x c(x) \wedge (\forall y v(y) \rightarrow \neg p(x, y))$

1) $\forall x (v(x) \rightarrow (\exists z c(z) \wedge p(z, x)))$
pour tout vélo il existe un curé qui le possède

2) tout curé possède au plus un vélo

traduction plus littérale:

"pour tout curé s'il y a deux vélos distincts alors il ne possède pas l'une ou l'autre", mais attention que le ou ici est vrai si l'un ($\neg p(x, y)$) ou l'autre ($\neg p(x, z)$) ou les deux sont à

3) vrai...
il y a un curé qui ne possède pas de vélo.

Exercice 4

Pour chaque formule, donner une interprétation qui la rend vraie et une qui la rend fausse :

1. $(\forall x)(\exists y)(p(x, y))$
2. $(\exists x) p(x) \rightarrow (\forall x) p(x)$
3. $(p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)$
4. $p(x) \rightarrow \neg p(x)$

$D = \text{domaine}$
 $p(x, y) = \text{prédicat binaire}$
 $p(x) = \text{prédicat unaire}$

1

- 1) VRAI : $D = \mathbb{N}$, $p(x, y) = <$ "l'ens. des naturel n'est pas borné",
 FAUX : $D = \mathbb{N}$, $p(x, y) = >$ "Tout entier possède un minorant,"

$$2) \exists x p(x) \rightarrow \forall x p(x) \approx \neg (\exists x p(x)) \vee \forall x p(x)$$

$$\approx \forall x \neg p(x) \vee \forall x p(x)$$

VRAI : $D = \mathbb{N}$ $p(x) = "x \text{ est un entier}"$

FAUX : $D = \mathbb{N}$ $p(x) = "x \text{ est pair}"$

- 3) cette formule possède 3 variables libres

VRAI : $D = \mathbb{N}$ $p(x, y) = x \leq y$

FAUX : $D = \text{"droites du plan 2D"}$, $p(x, y) = "x \text{ est perpendiculaire à } y"$
 (voir TD n° 1 ou 2)

- 4) $p(x) \rightarrow \neg p(x) \approx \neg p(x)$
- VRAI : $D = \mathbb{N}$ $p(x) = "x \text{ est le plus grand entier}"$
 FAUX : $D = \mathbb{N}$ $p(x) = "x \text{ est plus grand ou égal à } 0"$

Exercice 5

Écrire la négation des formules suivantes :

1. $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
2. $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
3. $\forall x(p(x) \leftrightarrow q(x))$
4. $\forall x \exists y(p(x, y) \rightarrow (\forall z r(z)))$

$$1) \neg (\forall x p(x) \rightarrow q(x)) \approx \neg (\forall x \neg p(x) \vee q(x)) \approx \exists x \neg (\neg p(x) \vee q(x)) \\ \approx \exists x p(x) \wedge \neg q(x)$$

$$2) \neg \exists x (p(x) \wedge q(x)) \approx \forall x \neg (p(x) \wedge q(x)) \approx \forall x \neg p(x) \vee \neg q(x) \\ \approx \forall x p(x) \rightarrow \neg q(x)$$

$$3) \neg (\forall x p(x) \leftrightarrow q(x)) \approx \exists x \neg (p(x) \leftrightarrow q(x)) \approx \exists x \neg ((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow p(x))) \\ \approx \exists x \neg (p(x) \rightarrow q(x)) \vee \neg (q(x) \rightarrow p(x)) \\ \approx \exists x (p(x) \wedge \neg q(x)) \vee (q(x) \wedge \neg p(x))$$

$$4) \neg \forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow \forall z r(z)) \approx \exists x \neg \exists y (p(x, y) \rightarrow \forall z r(z)) \\ \approx \exists x \forall y \neg (p(x, y) \rightarrow \forall z r(z)) \approx \exists x \forall y p(x, y) \wedge \neg \forall z r(z) \\ \approx \exists x \forall y p(x, y) \wedge \exists z \neg r(z) \approx \exists x \forall y \exists z p(x, y) \wedge \neg r(z) \quad \text{attention ici!}$$

Exercice 6 - Tout en un : formules, structures et premier ordre!

Considérez les structures suivantes :

- | | | |
|--------------------------------|---|---|
| 1) $L_1 = \{c, *\}$ | $\mathcal{U}_1 = \{\mathbb{N}, \times\}$ | $\mathcal{V}_1 = \{\mathbb{Z}, \times\}$ |
| 2) $L_2 = \{c, d, \oplus, *\}$ | $\mathcal{U}_2 = \{\mathbb{R}, 0, 1, +, \times\}$ | $\mathcal{V}_2 = \{\mathbb{Q}, 0, 1, +, \times\}$ |
| 3) $L_3 = \{R\}$ | $\mathcal{U}_3 = \{\mathbb{Z}, \equiv_2\}$ | $\mathcal{V}_3 = \{\mathbb{Z}, \equiv_3\}$ |

où $+$ et \times sont les opérations habituelles de somme et produit, \equiv_k est la relation de congruence modulo k et c, d sont des constantes. Pour $i = 1, 2, 3$ proposez une formule close (i.e. sans variables libres) qui est vraie dans \mathcal{U}_i et fausse dans \mathcal{V}_i .

relation de congruence modulo 2
" " " " 3

1) Pour \mathcal{U}_1 on interprète c comme 1 et $*$ comme \times
 \mathcal{D}_1 pareil

si l'on considère la formule:

$$\exists x \quad x * x = c \rightarrow (\forall y \neg (x = y) \rightarrow \neg (y * y = c))$$

elle est vraie dans \mathcal{U}_1 mais fausse dans \mathcal{D}_1

2) on interprète c comme 0 dans les deux modèles

d	"	1
\oplus	"	+
$*$	"	\times

Alors la formule

$\exists x \quad x * x = d \oplus d$ est vraie dans \mathcal{U}_2 et fausse dans \mathcal{D}_2

3) il faut s'imaginer une propriété qui soit différente entre les deux domaines et puis le traduire en formules.

Idee: dans $\langle \mathbb{Z}, \equiv_2 \rangle$ tous les nombres sont soit congrus à 0 ou à 1, ce qui n'est pas le cas dans $\langle \mathbb{Z}, \equiv_3 \rangle$

$$\forall x \forall y \forall z \quad x R y \vee y R z \vee x R z$$

qui est vraie si l'on interprète R comme \equiv_2 (car sur trois nombres il y en a sûrement deux qui sont dans le même classe de restes) et fausse si on interprète R comme \equiv_3 .