**Université Côte d'Azur**
Enrico FORMENTI

**Année 2022/23**
**PO2 SITE**
**TD OFI**

# Logique (partie 1)

## 1 Logique des propositions

### Exercice 1

Soient $p$ : "je travaille le cours d'OFI" et $q$ : "je passe l'examen". Ecrire une phrase simple qui correspond à chacun des énoncés suivants :

1. $\neg p$ Je ne travaille pas le cours d'OFI
2. $p \wedge q$ Je travaille le cours d'OFI et je passe l'examen
3. $p \vee q$ Je travaille le cours d'OFI ou je passe l'examen
4. $q \vee \neg p \approx \neg p \vee q \approx p \to q$ si je travaille le cours alors je passe l'examen
5. $\neg p \wedge \neg q \approx \neg(p \vee q)$ ce n'est pas vrai que je travaille le cours d'OFI ou que je passe l'examen
6. $\neg\neg q \approx q$ Je passe l'examen
7. $p \to q$ pareil que 4.

### Exercice 2

Soient $p$ :"Eric lit *Match*", $q$ : "Eric lit l'*Express*" et $r$ : "Eric lit les *Echos*". Ecrivez en notation symbolique chacune des phrases suivantes :

1. Eric lit *Match* ou l'*Express*, mais ne lit pas les *Echos*. $(p \vee q) \wedge \neg r$
2. Eric lit *Match* et l'*Express*, ou il ne lit ni *Match* ni les *Echos*. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$
3. Ce n'est pas vrai qu'Eric lit *Match* mais pas les *Echos*. $\neg(p \wedge \neg r) \approx \neg p \vee r \approx p \to r$
4. Ce n'est pas vrai qu'Eric lit les *Echos* ou l'*Express* mais pas *Match*. $\neg((r \vee q) \wedge \neg p) \approx \neg(r \vee q) \vee p \approx (r \vee q) \to p$

### Exercice 3

Enoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d'employer l'expression *"il est faux que ..."* :

— "s'il pleut demain ou s'il fait froid je ne sortirai pas". $\neg((p \vee f) \to \neg s) \approx \neg(\neg(p \vee f) \vee \neg s) \approx (p \vee f) \wedge s$ "il pleut ou il fait froid demain mais je sortirai"

— "le nombre 522 n'est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7". $\neg(\neg d_3 \wedge d_7) \approx d_3 \vee \neg d_7 \approx d_7 \to d_3$

— "ce quadrilatère n'est ni un rectangle, ni un losange". $\neg(\neg r \wedge \neg \ell) \approx r \vee \ell$ "ce quadrilatère est un rect. ou un losange"

— "si Paul ne va pas travailler ce matin, il va perdre son emploi". $\neg(\neg t \to p) \approx \neg(t \vee p) \approx \neg t \wedge \neg p$ "Paul ne va pas travailler ce matin mais il ne perd pas son emploi"

— "tout triangle équilatéral a ses angles égaux à 60°". $\neg p$ ce n'est pas vrai que ...

RAPPEL : contraposée de $a \to b = \neg b \to \neg a$
réciproque de $a \to b = b \to a$

### Exercice 4

Trouvez :

1. La contraposée de $p \to (q \vee r)$ $= \neg(q \vee r) \to \neg p \approx q \vee r \vee \neg p$
2. La réciproque de $(p \wedge q) \to \neg r$ $= \neg r \to (p \wedge q)$
3. La contraposée de la réciproque de $p \to q$ contr.(recip.$(p \to q)$) = contr$(q \to p) = \neg p \to \neg q$
4. La réciproque de la contraposée de $p \to q$. recip.(contr$(p \to q)$) = recip$(\neg q \to \neg p) = \neg p \to \neg q$

### Exercice 5

En utilisant les équivalences logiques de De Morgan, déterminer les négations des propositions suivantes (la barre est mise pour la négation) :

1. $(\bar{y} \wedge z) \vee (z \wedge x)$
2. $(y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge x) \vee (x \wedge z)$
3. $\left(y \wedge \overline{(x \vee y)}\right) \vee \left(\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge z}\right)$
4. $x \wedge \overline{\left(y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee \bar{y})}\right)}$

### Exercice 6

Montrer que $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ est une tautologie.

## 2 La méthode de Quine

### Exercice 7

Utilisez la méthode de Quine pour trouver tous les modèles des formules suivantes :

1. $\bar{x} \wedge \left(y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee \bar{y})}\right)$
2. $\left(y \vee \overline{(x \wedge y)}\right) \vee \left(\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge x}\right)$

### Exercice 8

Pour chacun des ensembles suivants utilisez la méthode de Quine pour trouver tous les modèles qui rendent vraies toutes les formules de l'ensemble en même temps :

1. $\{a \to (b \vee c), b \to (a \vee c), a \vee c, (a \wedge b) \vee c\}$ ;
2. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\}$.

### Exercice 9

Démontrez ou invalidez les suivantes :

1. $\{a \to (b \vee c), b \to (a \vee c), a \vee c, (a \wedge b) \vee c\} \overset{?}{\models} a \vee b$ ;
2. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\} \overset{?}{\models} b$ ;
3. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\} \overset{?}{\models} a \to c$ ;

## 3 Conséquence logique

### Exercice 10

Que peut-on dire d'une forme propositionnelle :

1. qui a pour conséquence une contradiction ?
2. qui a pour conséquence une tautologie ?
3. qui est conséquence d'une contradiction ?
4. qui est conséquence d'une tautologie ?

$f \models \bot$ ssi
$\emptyset \subseteq \mathcal{M}(f) \subseteq \mathcal{M}(\bot) = \emptyset$
donc $\mathcal{M}(f) = \emptyset$
donc $f$ est une antilogie

$f \models \top$ ssi $\mathcal{M}(f) \subseteq \mathcal{M}(\top) = U$
c'est tout le temp vrai !

$\bot \models f$ ssi $\emptyset = \mathcal{M}(\bot) \subseteq \mathcal{M}(f)$

$\top \models f$ ssi $U = \mathcal{M}(\top) \subseteq \mathcal{M}(f) \subseteq U$ donc
$\mathcal{M}(f) = U$ donc $f$ est une tautologie

Distribué le 8 novembre 2022.

5

1. $(\bar{y} \wedge z) \vee (z \wedge x)$

$$\neg((\neg y \wedge z) \vee (z \wedge x)) \approx \neg(z \wedge (x \vee \neg y)) \approx \neg z \vee \neg(x \vee \neg y)$$

$$\approx \neg z \vee (\neg x \wedge y)$$

2. $(y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge x) \vee (x \wedge z)$

$$\neg((y \wedge \neg z) \vee ((\neg y \wedge x) \vee (x \wedge z)))$$

$$\approx \neg((y \wedge \neg z) \vee (x \wedge (\neg y \vee z)))$$

on pose $A = z \vee \neg y$

$\neg A = \neg z \wedge y$

$$\approx \neg(\neg A \vee (x \wedge A))$$

$$\approx A \wedge \neg(x \wedge A)$$

$$\approx A \wedge (\neg x \vee \neg A)$$

$$\approx (A \wedge \neg x) \vee \underbrace{(A \wedge \neg A)}_{\approx 1} \approx A \wedge \neg x \approx (z \vee \neg y) \wedge \neg x$$

3. $\left(y \wedge \overline{(x \vee y)}\right) \vee \left(\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge z}\right)$

$\neg\left(\left(y \wedge \neg(x \vee y)\right) \vee \neg\left((\neg x \vee y) \wedge z\right)\right)$

$\approx \underbrace{\neg(y \wedge \neg(x \vee y))} \wedge (\neg x \vee y) \wedge z$

$\approx \underbrace{(\neg y \vee x \vee y)} \wedge \left((\neg x \vee y) \wedge z\right) \approx (\neg x \vee y) \wedge z$

$\neg(y \wedge \neg(x \vee y))$

$\neg y \vee \neg\neg(x \vee y)$

$\neg y \vee (x \vee y)$

$\neg y \vee x \vee y$

$\underline{(\neg y \vee y)} \vee x$

$\approx \top$

$\top \vee x \approx \top$

$$4.\quad x \wedge \overline{\left(y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee \bar{y})}\right)}$$

$$\neg(x \wedge \neg(y \vee \neg x \vee \neg(x \vee \neg y)))$$

$$\approx \neg x \vee (y \vee \neg x \vee \neg(x \vee \neg y))$$

$$\approx \neg x \vee \neg x \vee y \vee (\neg x \wedge y)$$

$$\approx \neg x \vee (\underbrace{y \vee (\neg x \wedge y)}_{\approx y}) \approx \neg x \vee y \approx x \to y$$

TSVP $\Longrightarrow$

6 Montrer que $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ est une tautologie.

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

$$\approx ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \to (\neg p \vee r)$$

$$\approx \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r)$$

$$\approx (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)$$

$$\approx ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee ((q \wedge \neg r) \vee r)$$

$$\approx (\underbrace{(p \vee \neg p)}_{\approx T} \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee ((q \vee r) \wedge \underbrace{(\neg r \vee r)}_{\approx T})$$

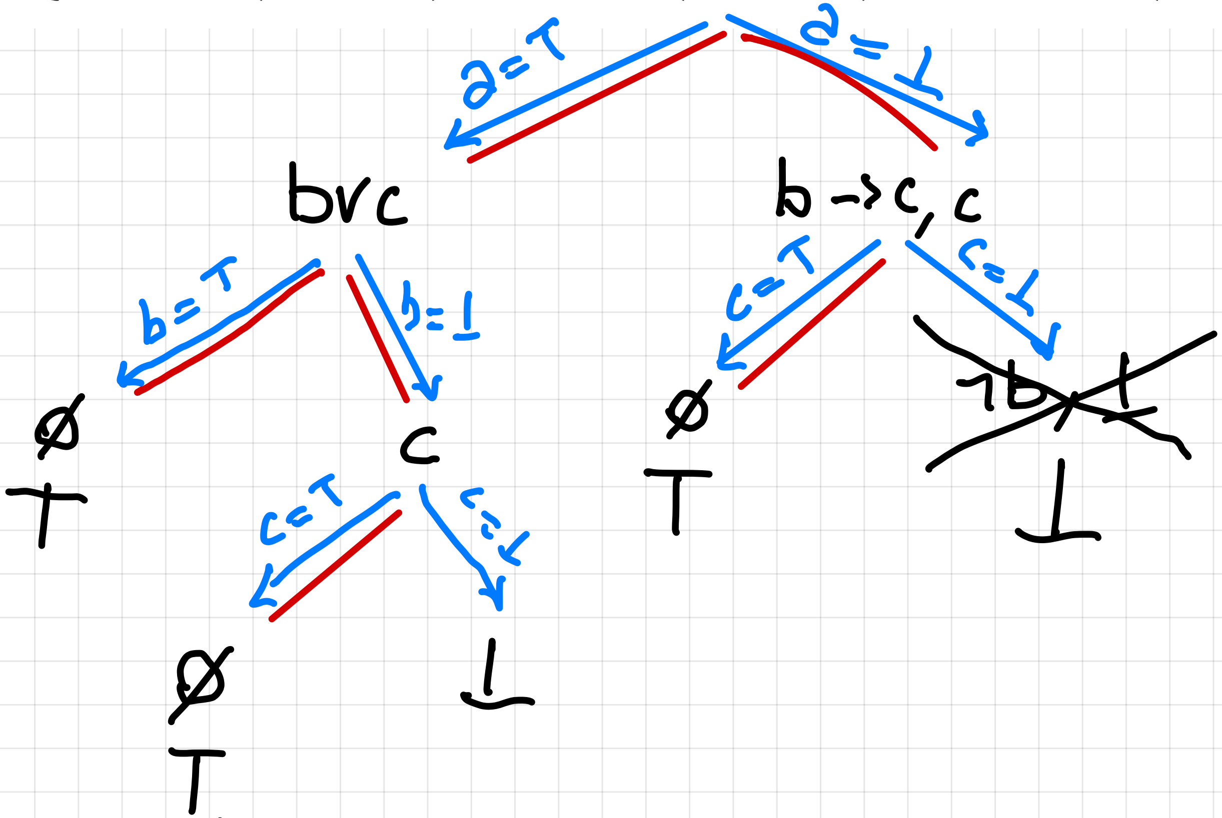
$$\approx (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r)$$

$$\approx \underbrace{\neg q \vee q}_{\approx T} \vee \neg p \vee r$$

$$\approx T$$

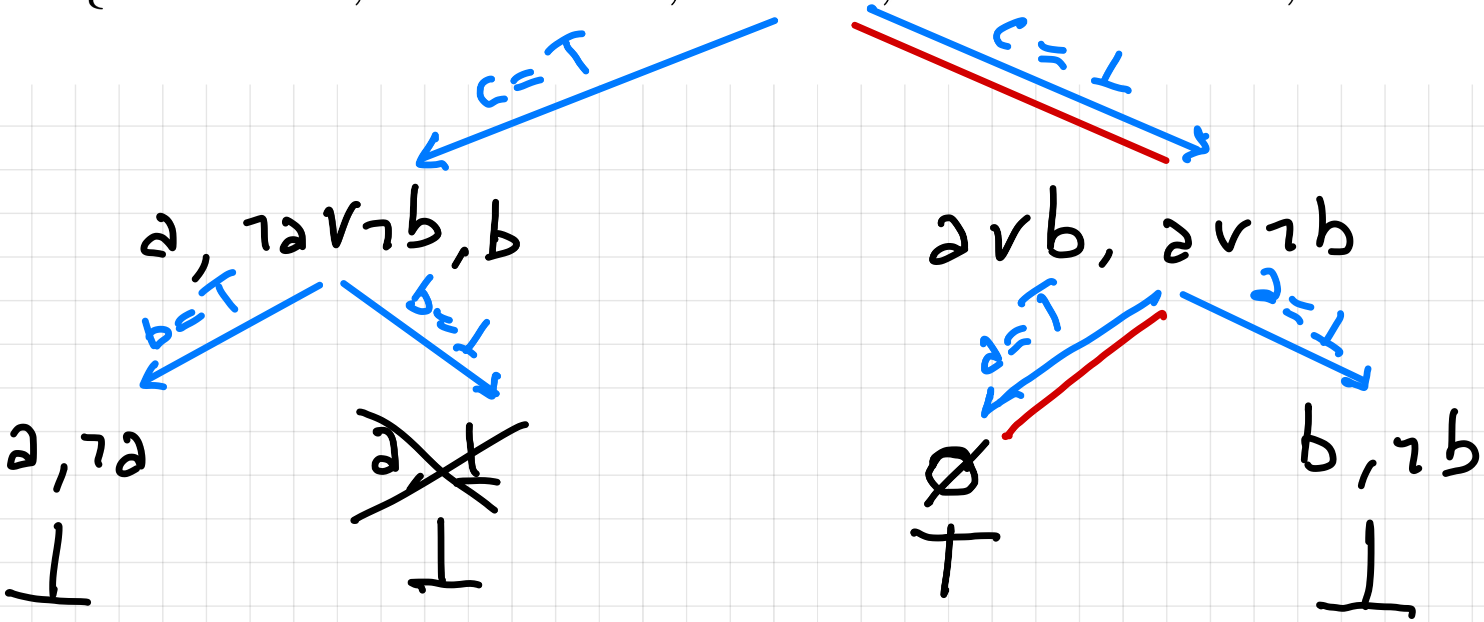
8

1. $\{a \to (b \vee c), b \to (a \vee c), a \vee c, (a \wedge b) \vee c\}$;




$\begin{cases} a = \top \\ b = \top \\ c = * \end{cases}$ $\begin{cases} a = \top \\ b = \bot \\ c = \top \end{cases}$ $\begin{cases} a = \bot \\ c = \top \\ b = * \end{cases}$ 5 modèles

2. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\}$.




$$\begin{cases} c = \perp \\ a = \top \\ b = * \end{cases}$$

2 modèles

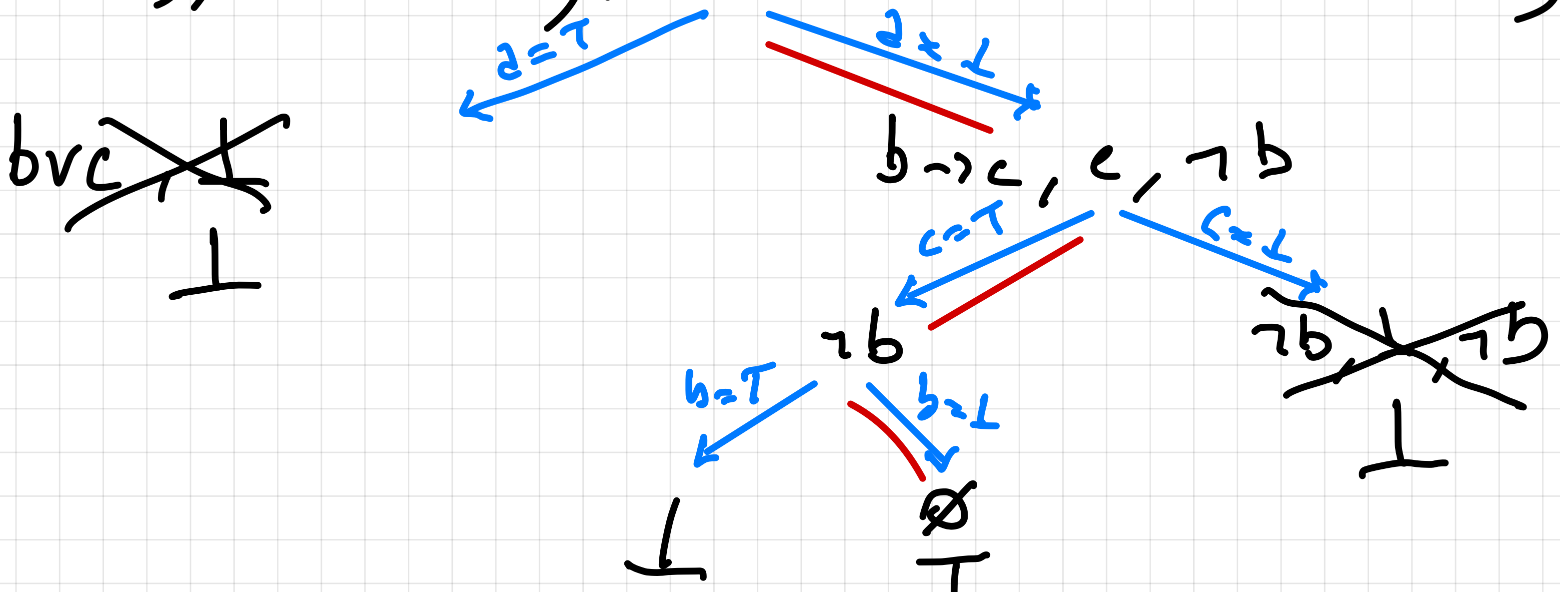
9

1. $\{a \to (b \vee c), b \to (a \vee c), a \vee c, (a \wedge b) \vee c\} \overset{?}{\models} a \vee b;$

$$\{f_1, f_2, \dots, f_k\} \models f$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{M}(f_i) \subseteq \mathcal{M}(f)$$

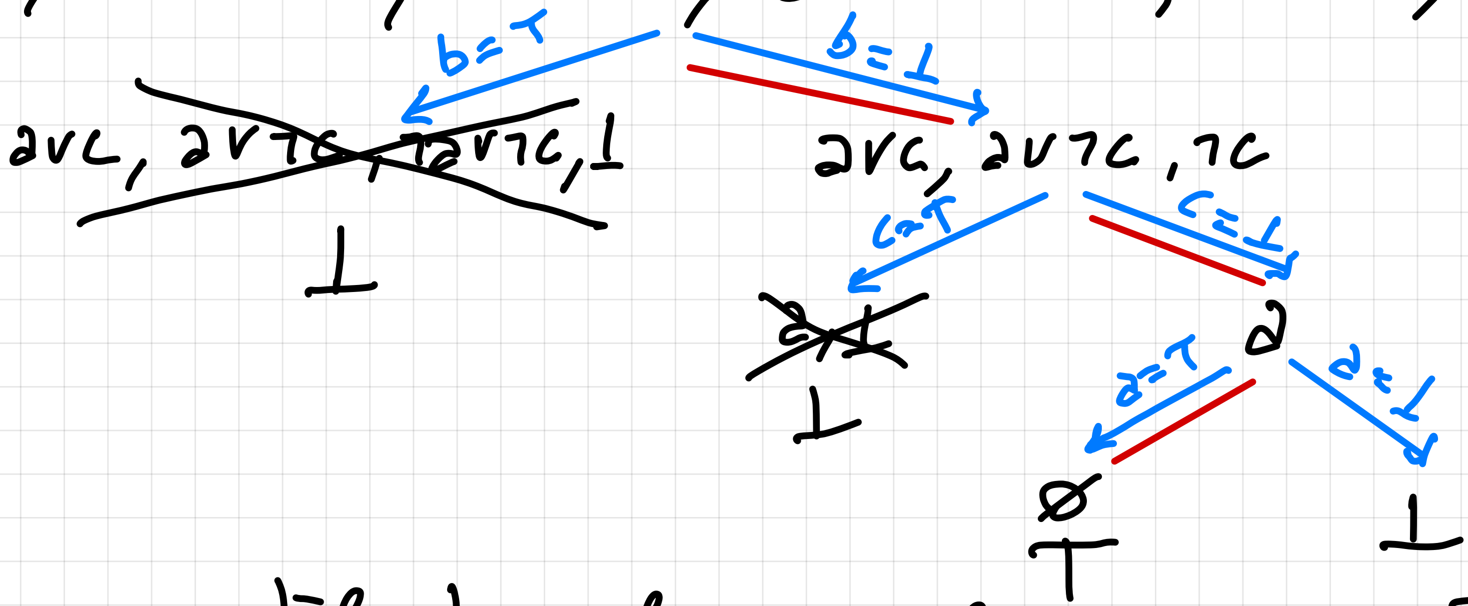
$$a \to (b \vee c),\ b \to (a \vee c),\ a \vee c,\ (a \wedge b) \vee c,\ \neg(a \vee b)$$




on a trouvé un modèle donc a∨b n'est pas conséquence logique du jeu de formule donné.

2. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\} \overset{?}{\models} b$;

$a \vee b \vee c,\ a \vee \neg b \vee c,\ a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b \vee \neg c,\ b \vee \neg c,\ \neg b$




il existe un modèle donc la cons. logique en question n'est pas vraie

TSVP $\Longrightarrow$

3. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\} \overset{?}{\models} a \to c$;

$a \vee b \vee c,\ a \vee \neg b \vee c,\ a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b \vee \neg c,\ b \vee \neg c,\ \neg(a \to c)$

$\xrightarrow{c=\top}$ $\cancel{a, \neg a \vee \neg b, b, \bot}$ $\quad \bot$

$\xrightarrow{c=\bot}$ $a \vee b,\ a \vee \neg b,\ a$

- $\xrightarrow{a=\top}$ $\cancel{\emptyset}$ $\quad \top$
- $\xrightarrow{a=\bot}$ $\cancel{b, \bot}$ $\quad \bot$

On trouve un modèle donc $a \to c$ n'est cons. log. du jeu de formules donné.

# 4 La méthode de résolution

## Exercice 11 - Formes clausales

Mettre sous forme de clauses les formules suivantes :

1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ ;
2. $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ ;
3. $\neg((a \vee b) \vee (c \vee d))$ ;
4. $\neg((a \wedge b) \wedge (c \wedge d))$ ;
5. $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s)$ ;
6. $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$.

## Exercice 12 - Formes clausales et Résolution

Indiquez le résultat de l'application de la résolution aux paires de formes clausales suivantes :

1. $p \vee \neg q \vee r$ et $p \vee q \vee r$ ; $R(p \vee \neg q \vee r, p \vee q \vee r; q, \neg q) = p \vee r$
2. $\neg p \vee q \vee r$ et $p \vee q \vee r$ ; $R(\neg p \vee q \vee r, p \vee q \vee r; p, \neg p) = q \vee r$
3. $\neg p \vee \neg q \vee r$ et $p \vee q \vee r$ ; $\cancel{R(\neg p \vee \neg q \vee r, p \vee q \vee r; p, \neg p) = \neg q \vee r \vee q \vee r \approx \neg q \vee q \vee r \vee r \approx \neg q \vee q \vee r \approx T}$
4. $p \vee \neg q \vee r$ et $p \vee q \vee a \vee b$. $R(p \vee \neg q \vee r, p \vee q \vee a \vee b; q, \neg q) = p \vee r \vee a \vee b$

## Exercice 13 - Inconsistance

Montrez que les ensembles de formules suivants sont inconsistants à l'aide de la méthode de résolution :

1. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow p, r \rightarrow \neg p$ ;
2. $a \vee b \vee c \vee d, a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a, b \rightarrow \neg d$.

## Exercice 14 - Conséquence logique et résolution

En utilisant la méthode de résolution décidez des questions suivantes :

1. $(p \rightarrow q) \wedge \neg r \overset{?}{\models} \neg p$ ;
2. $\neg q \overset{?}{\models} (p \wedge \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ ;
3. $p \rightarrow (q \wedge r) \overset{?}{\models} p \rightarrow q \rightarrow r$ ;
4. $p \vee (\neg q \wedge r) \overset{?}{\models} (q \vee \neg r) \rightarrow p$.
5. $(p \wedge q) \vee r \overset{?}{\models} (p \rightarrow q) \rightarrow r$.

## Exercice 15 - L'affaire McGregor

Utilisez la méthode de résolution pour aider Mr. McGregor (et la police de Scotland Yard). En effet, McGregor, commerçant londonien, appelle Scotland Yard pour signaler que sa boutique vient d'être cambriolée. Après enquête, la police a établi les faits suivants :

1. il y a 3 suspects. Chacun des trois, $a$, $b$ et $c$ est entré dans la boutique le jour du vol et personne d'autre ne peut être coupable ;
2. si $a$ est coupable, alors il y a un et un seul complice ;
3. si $b$ est innocent, alors $c$ l'est aussi ;
4. s'il y a deux coupables (et deux seulement), alors $a$ est l'un d'entre eux.

Est-ce que $a$ est coupable ?

Forme clausale

c'est le résultat d'une transformation d'une formule en un ensemble de clauses.

11

1. $(p \wedge q) \to (r \vee s)$;

$\neg(p \wedge q) \vee (r \vee s)$

$\underbrace{(\neg p \vee \neg q)} \vee \underbrace{(r \vee s)}$

$\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$

2. $(p \vee q) \to (r \vee s)$;

$\neg(p \vee q) \vee \underbrace{(r \vee s)}$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \vee s)$

$(\neg p \vee (r \vee s)) \wedge (\neg q \vee (r \vee s))$

$(\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee s)$

forme clausale

$\{\neg p \vee r \vee s, \neg q \vee r \vee s\}$

3. $\neg((a \vee b) \vee (c \vee d))$;

$\neg(a \vee b) \wedge \neg(c \vee d)$

$\neg(a \vee b)\ ,\ \neg(c \vee d)$

$\neg a \wedge \neg b,\ \neg c \wedge \neg d$

$\{\neg a, \neg b, \neg c, \neg d\}$ ← forme clausale

4. $\neg((a \wedge b) \wedge (c \wedge d))$;

$\neg(a \wedge b) \vee \neg(c \wedge d)$

$(\neg a \vee \neg b) \vee (\neg c \vee \neg d)$

$\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d$ ← forme clausale

5. $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s)$;

$$\underbrace{((p \wedge q) \to (r \vee s))}_{\text{formule}} \underbrace{\wedge}_{\wedge} \underbrace{((r \vee s) \to (p \wedge q))}_{\text{formule}}$$

$(p \wedge q) \to (r \vee s)$ , $(r \vee s) \to (p \wedge q)$

$\neg(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ , $\neg(r \vee s) \vee (p \wedge q)$

$(\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee s)$ , $(\neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q)$

$\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$ , $\underbrace{(\neg r \vee (p \wedge q))} \wedge \underbrace{(\neg s \vee (p \wedge q))}$

$\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$ , $\neg r \vee (p \wedge q)$ , $\neg s \vee (p \wedge q)$

$\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$ , $\underbrace{(\neg r \vee p)} \wedge \underbrace{(\neg r \vee q)}$ , $\underbrace{(\neg s \vee p)} \wedge \underbrace{(\neg s \vee q)}$

$\{ \neg p \vee \neg q \vee r \vee s, \neg r \vee p, \neg r \vee q, \neg s \vee p, \neg s \vee q \}$ ← forme clausale

6. $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$.

$((p \vee q) \to (r \wedge s)) \wedge ((r \wedge s) \to (p \vee q))$

$(p \vee q) \to (r \wedge s)$ , $(r \wedge s) \to (p \vee q)$

$\neg(p \vee q) \vee (r \wedge s)$ , $\neg(r \wedge s) \vee (p \vee q)$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$ , $(\neg r \vee \neg s) \vee (p \vee q)$

$((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee s)$ , $\neg r \vee \neg s \vee p \vee q$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$ , $(\neg p \wedge \neg q) \vee s$ , $\neg r \vee \neg s \vee p \vee q$

$(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r), (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s), \neg r \vee \neg s \vee p \vee q$

$\{\neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee \neg s \vee p \vee q\}$ forme clausale

RESOLUTION entre deux formes clausales partageantes une même variable mais de "signe" different

signe : negation ou pas

ex : $x$ a 'signe' $+$

$\neg x$ a 'signe' $-$

ex : 1) $a \vee b \vee c$
2) $a \vee \neg b \vee d$

ces deux clauses partagent la var. b mais dans 1) le signe est $+$, dans 2) est $-$

$R(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k \vee \dots \vee a_n, \; b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee \neg a_k \vee \dots b_n, \; \underline{a_k}, \underline{\neg a_k})$

$= a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \vee b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n$ mais ne sont présentes ni $a_k$ ni $\neg a_k$

$R(a \vee b \vee c,\ a \vee \neg b \vee d,\ b, \neg b) = a \vee c \vee a \vee d \approx$

$a \vee a \vee c \vee d \approx$

$a \vee c \vee d$

$a \vee c \vee d$ est cons. log. de $a \vee b \vee c,\ a \vee \neg b \vee d$

# INCONSISTANCE

On dit qu'un ens. de formules $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ est inconsistant ssi $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{M}(f_i) = \emptyset$ ssi $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n$ est une antilogie

12

1. $p \vee q, p \to r, q \to p, r \to \neg p$;

$\underset{D_1}{p \vee q},\ \underset{D_2}{\neg p \vee r},\ \underset{D_3}{\neg q \vee p},\ \underset{D_4}{\neg r \vee \neg p}$

$D_5 = R(D_1, D_2; p, \neg p) = q \vee r$

$D_6 = R(D_1, D_3; q, \neg q) = p$

$D_7 = R(D_2, D_4; r, \neg r) = \neg p$

$D_8 = R(D_6, D_7; p, \neg p) = \perp$

2. $a \vee b \vee c \vee d, a \to b, b \to c, c \to d, d \to a, b \to \neg d.$

$\underbrace{a \vee b \vee c \vee d}_{D_1}, \underbrace{\neg a \vee b}_{D_2}, \underbrace{\neg b \vee c}_{D_3}, \underbrace{\neg c \vee d}_{D_4}, \underbrace{\neg d \vee a}_{D_5}, \underbrace{\neg b \vee \neg d}_{D_6}$

$D_7 = R(D_1, D_2 ; a, \neg a) = b \vee c \vee d$

$D_8 = R(D_7, D_3 ; b, \neg b) = c \vee d$

$D_9 = R(D_8, D_4 ; c, \neg c) = d$

$D_{10} = R(D_9, D_5 ; d, \neg d) = a$

$D_{11} = R(D_9, D_6 ; d, \neg d) = \neg b$

$D_{12} = R(D_2, D_{10} ; a, \neg a) = b$

$D_{13} = R(D_{11}, D_{12} ; b, \neg b) = \bot$

14

1. $(p \to q) \wedge \neg r \overset{?}{\models} \neg p;$

$\{(p \to q) \wedge \neg r, p\}$ est contradictoire

$\underbrace{\neg p \vee q}_{D_1}, \underbrace{\underline{\neg r}}_{D_2}, \underbrace{\underline{p}}_{D_3}$

$D_4 = R(D_1, D_3 ; p, \neg p) = \underline{q}$

$\begin{cases} q = T \\ p = T \\ r = \bot \end{cases}$

on a trouvé un modèle pour $D_1, D_2, D_3$ donc la cons. log. n'est pas vraie.

2. $\neg q \overset{?}{\models} (p \wedge \neg q) \to (p \wedge q)$;

$\neg q, \neg((p \wedge \neg q) \to (p \wedge q))$

$\left\{\begin{array}{l} \neg((p \wedge \neg q) \to (p \wedge q)) \\ \neg(\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \\ (p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q) \\ p, \neg q, \neg p \vee \neg q \end{array}\right.$

$\underset{D_1}{\neg q}, \underset{D_2}{p}, \underset{D_3}{\neg p \vee \neg q}$

$\left\{\begin{array}{l} q = \bot \\ p = \top \end{array}\right.$ c'est un modèle pour $D_1, D_2, D_3$ donc la cons. log. n'est pas vraie.

3. $p \to (q \wedge r) \overset{?}{\models} p \to q \to r$;

$p \to (q \wedge r), \neg((p \to q) \to r)$

$\neg p \vee (q \wedge r), \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r), (\neg p \vee q) \wedge \neg r$

$\underset{D_1}{\neg p \vee q}, \underset{D_2}{\neg p \vee r}, \underset{D_3}{\neg r}$

$D_4 = R(D_2, D_3 ; r, \neg r) = \neg p$

$\left\{\begin{array}{l} p = \bot \\ r = \bot \\ q = * \end{array}\right.$

on a trouvé 2 modèles dans la cons. log. est fausse.

4. $p \vee (\neg q \wedge r) \overset{?}{\models} (q \vee \neg r) \rightarrow p.$

$p \vee (\neg q \wedge r), \neg((q \vee \neg r) \rightarrow p)$

$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r), \neg(\neg(q \vee \neg r) \vee p)$

$p \vee \neg q, p \vee r, (q \vee \neg r) \wedge \neg p$

$\underset{D_1}{p \vee \neg q}, \underset{D_2}{p \vee r}, \underset{D_3}{q \vee \neg r}, \underset{D_4}{\neg p}$

$D_4 = R(D_2, D_4; p, \neg p) = r$

$D_5 = R(D_3, D_4; r, \neg r) = q$

$D_6 = R(D_1, D_5; q, \neg q) = p$

$D_7 = R(D_4, D_6; p, \neg p) = \perp$

Donc $(q \vee \neg r) \rightarrow p$ est cons. log. de $p \vee (\neg q \wedge r)$

5. $(p \wedge q) \vee r \overset{?}{\models} (p \rightarrow q) \rightarrow r.$

$(p \wedge q) \vee r, \neg((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

$(p \vee r) \wedge (q \vee r), \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r)$

$p \vee r, q \vee r, (\neg p \vee q) \wedge \neg r$

$\underset{D_1}{p \vee r}$, $\underset{D_2}{q \vee r}$, $\underset{D_3}{\neg p \vee q}$, $\underset{D_4}{\neg r}$

$D_5 = R(D_2, D_4 ; r, \neg r) = q$

$D_6 = R(D_1, D_4 ; r, \neg r) = p$

$\begin{cases} p = \top \\ q = \top \\ r = \bot \end{cases}$

on a trouvé un modèle donc la cons. log. n'est pas vraie

TSVP $\Longrightarrow$

## Exercice 15 - L'affaire McGregor

Utilisez la méthode de résolution pour aider Mr. McGregor (et la police de Scotland Yard). En effet, McGregor, commerçant londonien, appelle Scotland Yard pour signaler que sa boutique vient d'être cambriolée. Après enquête, la police a établi les faits suivants :

1. il y a 3 suspects. Chacun des trois, $a$, $b$ et $c$ est entré dans la boutique le jour du vol et personne d'autre ne peut être coupable ;
2. si $a$ est coupable, alors il y a un et un seul complice ;
3. si $b$ est innocent, alors $c$ l'est aussi ;
4. s'il y a deux coupables (et deux seulement), alors $a$ est l'un d'entre eux.

Est-ce que $a$ est coupable ?

1) $a \vee b \vee c$

2) $(a \wedge (b \wedge \neg c)) \vee (a \wedge (\neg b \wedge c)) \approx a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c))$

$a, (b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c)$

$a, ((b \wedge \neg c) \vee \neg b) \wedge ((b \wedge \neg c) \vee c)$

$a, (b \wedge \neg c) \vee \neg b, (b \wedge \neg c) \vee c$

$a, \underbrace{(b \vee \neg b)}_{\approx \top} \wedge (\neg c \vee \neg b), (b \vee c) \wedge \underbrace{(c \vee \neg c)}_{\approx \top}$

$a, \neg c \vee \neg b, b \vee c$

3) $\neg b \rightarrow \neg c$ donc $b \vee \neg c$

4) $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \rightarrow a$

$\neg((a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)) \vee a$

$((\neg(a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c)) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge c)) \vee a$

$((\neg(a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c)) \vee a) \wedge (\neg(\neg a \wedge b \wedge c) \vee a)$

$(\neg(a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c)) \vee a, \quad \underline{\neg(\neg a \wedge b \wedge c)} \vee a$

$\neg(a \wedge b \wedge \neg c) \vee a, \quad \neg(a \wedge \neg b \wedge c) \vee a, \quad a \vee \neg b \vee \neg c \vee a$

$\neg a \vee \cancel{\neg b \vee c} \vee a, \quad \neg a \vee \cancel{b \vee \neg c} \vee a, \quad \underline{a \vee \neg b \vee \neg c}$

$\{a \vee b \vee c, a, \neg c \vee \neg b, b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c\} \overset{?}{\vDash} a$

TH: $F \vDash G$ ssi $F, \neg G \vDash \bot$

on utilise la méthode de résolution pour voir si de notre ens. de formules uni à $\neg a$ on peut déduire le faux.

$$\{\underbrace{a \vee b \vee c}_{D_1}, \underbrace{a}_{D_2}, \underbrace{\neg c \vee \neg b}_{D_3}, \underbrace{b \vee c}_{D_4}, \underbrace{b \vee \neg c}_{D_5}, \underbrace{a \vee \neg b \vee \neg c}_{D_6}, \underbrace{\neg a}_{D_7}\}$$

$$D_8 = R(D_2, D_7 ; a, \neg a) = \perp$$

donc $a$ est coupable !