Exercice 1

Vérifier l'appartenance du mot au langage décrit par l'expression régulière :

1. mot 10100010 et expression régulière $(0^*10)^*$?
2. mot 011100 et expression régulière $(0 + (11)^*)^*$?
3. mot 000111100 et expression régulière $((011 + 11)^*(00)^*)^*$?
4. mot 010111010 et expression régulière $(01 + 10)^*$?

1) La stratégie consiste à parcourir le mot une lettre à la fois de gauche à droite et de voir si l'expression régulière "autorise" la lettre courante. Si l'on arrive à parcourir le mot en entier alors il appartient au langage, sinon il n'appartient pas.

Considérons donc $\underset{w_1}{1}\underset{w_2}{0}\underset{w_3}{1}\underset{w_4}{0}\underset{w_5}{0}\underset{w_6}{0}\underset{w_7}{1}\underset{w_8}{0}$ et $(0^*\underline{10})^*$

$w_1 w_2 = 10$ est ok car il suffit de prendre $\underline{0^*}$ comme ε et ensuite prendre $\underline{10}$

$w_3 w_4 = 10$ est ok car il suffit de prendre $*$ (qui nous autorise à recommencer à lire l'ER dès le début) et ensuite on prend 0^* comme ε et enfin on prend 10

$w_5 w_6 = 00$ est ok car on prend $*$ et ensuite on prend 0^* comme 0^2

$w_7 w_8 = 10$ est ok car il suffit de prendre le 10 just après.

2) $0\,1\,1\,1\,0\,0$ par rapport à l'ER $(0+(11)^*)^*$
$w_1\,w_2\,w_3\,w_4\,w_5\,w_6$

$w_1 = 0$ est ok car on peut prendre 0 ici

$w_2 w_3 = 11$ est ok car on peut prendre * , recommencer à relire l'ER ne pas prendre le 0 (en effet + représente une alternative) et ensuite prendre $(11)^*$ avec $* = 1$

$w_4 = 1$ n'est pas ok car comme on voit par l'ER les symboles 1 se prendent par paires et donc il n'y a pas moyen d'en prendre que un seul

conclusion : 011100 n'appartient pas au langage décrit par $(0+(11)^*)^*$.

3) $0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0$ et l'ER $E = ((\underbrace{011}_{E_1} + \underbrace{11}_{E_2})^* \underbrace{(00)}_{E_3}{}^*)^*$
$w_1\,w_2\,w_3\,w_4\,w_5\,w_6\,w_7\,w_8\,w_9$

Maintenant qu'on a compris comment ça marche on ira un peu plus vite...

$w_1 w_2 = 00 = E_3$

$w_3 w_4 w_5 = 011 = E_1$

$w_6 w_7 = 11 = E_2$

$w_8 w_9 = 00 = E_3$ on conclut que ce mot appartient au langage decrit par E.

4) le mot 010111010 $\underset{w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7 w_8 w_9}{}$ et l'ER $E = (\underbrace{01}_{E_1} + \underbrace{10}_{E_2})^*$

$w_1 w_2 = 01 = E_1$

$w_3 w_4 = 01 = E_1$

$w_5 w_6 = 11 =$ impossible car on doit choisir entre E_1 et E_2 et aucune des deux nous laisse mettre deux uns à la suite

<u>conclusion</u>: 010111010 n'appartient pas au langage décrit par E.

Exercice 2

Considérons l'expression régulière suivante :

$$E : (a + ab + abb)(c + bc + cc)$$

1. Donner tous les éléments du langage L décrit par l'expression régulière E.
2. Donner une autre expression régulière définissant L.
3. Ordonner les éléments de L par ordre lexicographique.
4. Trouver l'ensemble $Pref(L)$ des préfixes des mots de L.
5. Donner une expression régulière pour le langage $Pref(L)$.

1) en exécutant la concatenation on obtient
$E = ac + abc + abbc + abbbc + acc + abcc + abbcc$
L est donc formé par exactement 7 mots

2) on peut factoriser la lettre 'a' à gauche et la lettre 'c' à droite

ce qui donne :

$E = a(\varepsilon + b + bb)(\varepsilon + b + c)c$

3) $abbbc <_{lex} abbc <_{lex} abbcc <_{lex} abc <_{lex} abcc <_{lex} ac <_{lex} acc$

4) on cherchera seulement les préfixes propres.

$abbb, abb, abbc, ab, abc, a, ac$

5) on voit que chaque prefixe (propre) commence par a, on pourrait donc donner :

$a(bbb + bb + b + bc + bbc + c + \varepsilon)$

Exercice 3

Décrire en langage courant les mots définis par les expressions régulières suivantes :

1. $((0+1)(0+1))^*$; = les mots de taille paire
2. $0+1^*$; = le symbole 0 ou les mots formées par une séquence (possiblement de long. zéro) de 1
3. $(0+1)^*(00+11)(0+1)^*$; ↳ = les mots qui contiennent le motif 00 ou 11
4. $(0+\varepsilon)(10)^*(1+\varepsilon)$. ↳ = les séquences alternées de 0 et 1 de longueur quelconque.

Exercice 4

Pour chaque expression régulière de l'exercice précédent, écrivez la série génératrice associée.

On va utiliser les règles pratiques vues en cours...

1) $$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+2x} = \frac{A+2Ax+B-2Bx}{1-4x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2x}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=0 \end{cases} \qquad 4A=2\ ;\ A=\frac{1}{2} \qquad B=\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\left[1+(-1)^n\right]x^n$$

2) $$x + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{avec} \quad c_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) $$\frac{1}{1-2x}\cdot 2x^2 \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{2x^2}{(1-2x)^2} = 2x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n x^n$$

$$= x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)2^{n-1}x^n$$

4) $$(x+1)\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot(x+1) = \frac{(x+1)^2}{1-x^2} = \frac{2x+1}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}$$

on va d'abord s'occuper de $\frac{2x+1}{1-x^2}$

$$\frac{2x+1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A+Ax+B-Bx}{1-x^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

et donc $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases}$ $\quad A = 3/2$, $B = -1/2$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[3-(-1)^n]}{2} x^n$$

et maintenant on s'occupe de $\frac{x^2}{1-x^2}$:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = x^2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}\right] = \frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right] = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-2}}{2}x^n$$

Du coup en mettant tout ensemble :

$$\frac{(x+1)^2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-2}}{2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ avec}$$

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ \dfrac{3-(-1)^n+1+(-1)^{n-2}}{2} = 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 5

Donner quand c'est possible une expression régulière décrivant les langages suivants. Par défaut, l'alphabet utilisé est $A = \{0, 1\}$:

1. l'ensemble de tous les octets $(0+1)^8$
2. les mots qui se terminent par 011 ; $(0+1)^*011$
3. les mots qui contiennent le motif 101 ; $(0+1)^*101(0+1)^*$
4. l'ensemble des mots comportant au moins 3 caractères et dont la troisième lettre à partir de la fin est un a ou un c, sur l'alphabet $\{a, b, c\}$; $(a+b+c)^*(a+c)(a+b+c)^2$
5. les représentations binaires des nombres impairs (sans 0 inutile en tête) ; $1 + 1(0+1)^*1$
6. $\{0^n 1^n / n \geq 0\}$. → impossible car ce langage n'est pas régulier nous n'avons pas le moyen pour affirmer cela formellement (vous verrez cela lors du cours de 'Langages Formels' en L3). Pour l'heure, un critère c'est de se dire que si l'on voulait écrire un petit programme qui serait capable de reconnaître ce langage il est impossible de le faire sans l'usage de variables

temporaires dans lesquelles stocker de l'information. Par exemple, dans le cas présent on doit stocker dans une variable le nombre de zéros lus pour pouvoir ensuite voir s'il y a autant de 1 à la suite.

Exercice 6

Pour chacun des langages suivants sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, donner une expression régulière représentant son complémentaire dans A^* :

1. $(a + b)^* b$;
2. $((a + b)(a + b))^*$.

Donc pour un langage régulier L donné on cherche L'ER de $A^* \setminus L$. Une manière pour faire cela consiste à comprendre (disons "en français") l'expression de L, la complémenter (toujours "en français") et ensuite écrire l'ER correspondante.

1) $L = (a+b)^* b$ est "le langage des mots sur A qui terminent par b et ont longueur au moins un". Du coup, son complémentaire est "l'ensemble des mots sur A qui terminent par a union le mot vide", ce qui donne:
$(a+b)^* a + \varepsilon$

2) L est "les mots sur A de taille paire". Donc, le complémentaire

est "les mots sur A de taille impaire". Alors l'ER correspondante est $((0+1)(0+1))^*(0+1)$

Exercice 7

Montrer qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$. De façon similaire, trouver des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1.L_2)^* \neq L_1^*.L_2^*$.

Pour la première partie il suffit de considérer $L_1 = \{0\}$ et $L_2 = \{1\}$ et de même pour la deuxième partie.

Conclusion : il faut faire extrêmement attention quand on utilise l'étoile de Kleene en combinaison avec d'autres opérations.