# OF1 - TD6 - CORRIGÉ

ENRICO FORMENTI

EX1

•)

$$\begin{cases} u_n = \left(3\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$u_n - u_{n-1} = \left(3\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + \cancel{1} - \left(3\sum_{k=0}^{n-2} u_k\right) - \cancel{1}$$

$$= 3u_{n-1}$$

$$\begin{cases} u_n = 4u_{n-1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 4u_{n-1} X^{n-1}$$

On pose $u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$

$$\frac{X}{X} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n X^{n-1} = 4\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n}{x} = 4\, u(x)$$

$$\frac{u(x) - u_0}{x} = 4\, u(x)$$

$$u(x) - 1 = 4x\, u(x)$$

$$(1-4x)\, u(x) = 1$$

$$u(x) = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

Identité rem.

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \implies u_n = 4^n$$

••)
$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2^n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

on pose :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1}$$

$$\frac{x}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{n-1}$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n}{x} = u(x) + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$\frac{u(x) - u_0}{x} = u(x) + 2 \cdot \frac{1}{1-2x}$$

$$\mathcal{U}(x) - 1 = x \cdot \mathcal{U}(x) + \frac{2x}{1-2x}$$

$$(1-x)\,\mathcal{U}(x) = 1 + \frac{2x}{1-2x} = \frac{1-2x+2x}{1-2x} = \frac{1}{1-2x}$$

$$\mathcal{U}(x) = \boxed{\frac{1}{(1-x)(1-2x)}}$$

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A-2Ax+B-Bx}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases} \quad -A = 1 \ ; \quad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1) x^n$$

Donc

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

...)

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

on pose: $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2u_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{U(x) - u_0}{x} = 2U(x) + \frac{1}{1-x}$$

$$U(x) - 1 = 2x\,U(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$(1-2x)\,u(x) = 1 + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$u(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-x)}$$

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

$$\begin{cases} u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2} \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-1} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} 3u_{n-2}\, x^{n-2}$$

on pose $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

$$\frac{x^2}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} u_n x^{n-2} = 4\frac{x}{x}\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1} x^{n-2} - 3\,u(x)$$

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} u_n x^{n}}{x^2} = \frac{4}{x}\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1} x^{n-1} - 3\,u(x)$$

$$\frac{u(x) - u_0 - u_1 x}{x^2} = \frac{4}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n} - 3\,u(x)$$

$$\frac{u(x) - x}{x^2} = \frac{4}{x}\cdot\left(u(x) - u_0\right) - 3\,u(x)$$

$$u(x) - x = 4x\,u(x) - 3x^2 u(x)$$

$$(1 - 4x + 3x^2)\,u(x) = x$$

$$\mathcal{U}(x) = \frac{x}{1 - 4x + 3x^2}$$

on applique la méthode de réduction en fractions simples :

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \; ; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} = \begin{cases} 1 \\ 1/3 \end{cases}$$

$$\underbrace{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3 \cdot \frac{3x-1}{3} \cdot (x-1) = (3x-1)(x-1) = (1-3x)(1-x)$$

$$\mathcal{U}(x) = \frac{x}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x} = \frac{A-3Ax+B-Bx}{(1-x)(1-3x)} = \frac{x}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-B=1 \end{cases} \qquad -2A=1 \;;\; A=-1/2$$

$$B = 1/2$$

$$u(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 1^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(3^n-1)x^n$$

Donc

$$u_n = \frac{3^n-1}{2}$$

EX2

$$\begin{cases} m_{n+2} = m_{n+1} - m_n + \pi \cdot n \\ m_0 = 2 \\ m_1 = 3 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+2} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1} \cdot x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} m_n \cdot x^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi \cdot n \cdot x^n$$

On pose $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n$

$$\frac{x^2}{x^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+2} x^n = \frac{x}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1} x^n - M(x) + \pi x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}}$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+2} x^{n+2}}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1} x^{n+1}}{x} - M(x) + \frac{\pi x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{M(x) - m_0 - m_1 x}{x^2} = \frac{M(x) - m_0}{x} - M(x) + \frac{\pi x}{(1-x)^2}$$

$$M(x) - 2 - 3x = x\,M(x) - 2x - x^2 M(x) + \frac{\pi x^3}{(1-x)^2}$$

$$(1 - x + x^2) M(x) = 2 + x + \frac{\pi x^3}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2 + \cancel{2x^2} - 4x + x + x^3 - \cancel{2x^2} + \pi x^3}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{(1+\pi)x^3 - 3x + 2}{(1-x)^2}$$

$$M(x) = \frac{(1+\pi)x^3 - 3x + 2}{(1 - x + x^2)(1-x)^2}$$

on va utiliser la méthode de réduction en fraction simples pour décomposer l'expression de $M(x)$.
On remarque tout d'abord que $(1-x)^2$ et $(1-x+x^2)$ n'ont pas de racines et que $(1-x+x^2)$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$, donc :

$$M(x) = \frac{Ax+B}{1-x+x^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{(1-x)^2}$$

ce qui donne

$$M(x) = \frac{(Ax+B)(1-2x+x^2) + C(1-x)(1-x+x^2) + D(1-x+x^2)}{(1-x+x^2)(1-x)^2}$$

$$= \frac{Ax-2Ax^2+Ax^3+B-2Bx+Bx^2+C(1-x+x^2-x-x^3)+D(1-x+x^2)}{(1-x+x^2)(1-x)^2}$$

$\Longrightarrow$

Ce qui donne lieu au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A - C = \pi + 1 \\ -2A + B + 2C + D = 0 \\ A - 2B - 2C - D = -3 \\ B + C + D = 2 \end{cases}$$

En multipliant la première par 2 et l'additionnant à la deuxième puis en additionnant la 3ème à la dernière on obtient :

$$\begin{cases} A - C = \pi + 1 \\ B + D = 2\pi + 2 \\ A - B - C = -1 \\ B + C + D = 2 \end{cases}$$

et finalement en soustrayant la première à la troisième on trouve :

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} A - C = \pi + 1 \\ B + D = 2\pi + 2 \\ B = 2 + \pi \\ B + C + D = 2 \end{cases} \quad \text{et donc:} \quad \begin{cases} A = 1 - \pi \\ B = 2 + \pi \\ C = -2\pi \\ D = \pi \end{cases}$$

On conclut:

$$M(X) = \frac{(1-\pi)X + (2+\pi)}{1 - x + x^2} - 2\pi \cdot \frac{1}{1-x} + \pi \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \quad (*)$$

Il nous reste donc à trouver une "bonne expression" pour le terme entouré en orange dans (*) pour arriver à exprimer M(x) comme somme de séries "connues".

Remarquons que $1 - x + x^2$ a deux racines complexes

$$\alpha = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

et que $\alpha\beta = 1$ (donc $\alpha = 1/\beta$ et $\beta = 1/\alpha$) et $\alpha + \beta = 1$

Alors : $1 - x + x^2 = (x-\alpha)(x-\beta) = \alpha\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\cdot\beta\left(\frac{x}{\beta}-1\right)$

$$= \alpha\beta\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)$$

$$= \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)$$

Donc :

$$\frac{(1-\pi)x+(2+\pi)}{1-x+x^2} = \frac{(1-\pi)x+(2+\pi)}{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)} = \frac{A}{1-\frac{x}{\alpha}} + \frac{B}{1-\frac{x}{\beta}}$$

$$= \frac{A}{1-\beta x} + \frac{B}{1-\alpha x}$$

$$= \frac{A(1-\alpha x)+B(1-\beta x)}{(1-\beta x)(1-\alpha x)}$$

$\Longrightarrow$

ce qui donne lieu au système suivant :

$$\begin{cases} A+B = 2+\pi \\ \alpha A+\beta B = \pi-1 \end{cases}$$

après quelques manipulation on trouve :

$$\begin{cases} A+B = 2+\pi \\ A-B = \dfrac{(\pi-4)\sqrt{3}\,i}{3} \end{cases}$$

Trouver la valeur précise de A et B se révèle assez long et fastidieux et finalement ce n'est même pas nécessaire si l'on se rappelle de la rapprésentation polaire des nombres complexes. En effet, rappelons ici ce qu'on a trouvé jusqu'à maintenant :

$$M(x) = \frac{A}{1-\beta x} + \frac{B}{1-\alpha x} - 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= \boxed{\frac{A}{1-\beta X} + \frac{B}{1-\alpha X}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\pi X^n$$

Si l'on se rappelle de la représentation polaire des nombres complexes alors on trouve :

$$\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \beta = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

et donc

$$\alpha^n = e^{in\frac{\pi}{3}} \qquad \beta^n = e^{-in\frac{\pi}{3}}$$

si l'on passe maintenant à la représentation trigonométrique on a :

$$\alpha^n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\beta^n = \cos\left(-n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

réprenons donc l'expression entourée en orange à la page précedent et écrivons les série correspondantes :

$$\frac{A}{1-\beta X} + \frac{B}{1-\alpha X} = A\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n X^n + B\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A\beta^n + B\alpha^n\right) X^n$$

développons maintenant la partie entourée en rouge :

$$A\beta^n + B\alpha^n = A\left[\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right] + B\left[\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= (A+B)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i(A-B)\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

si l'on se rappelle de ce qu'on a trouvé pour A+B et A-B :

$$A\beta^n + B\alpha^n = (2+\pi)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{(4-\pi)\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

Si l'on met tout ensemble, au final on trouve :

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (2+\pi)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + (4-\pi)\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + (n-1)\pi \right] X^n$$

Donc

$$m_n = (2+\pi)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + (4-\pi)\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + (n-1)\pi$$

$\blacksquare$