Exercice 1 - Une récurrence complète

Résoudre la récurrence suivante :

$$\forall n > 0,\ \ u_n = 3\sum_{k=0}^{n-1} u_k + 1$$

en sachant que $u_0 = 1$.

i) $\begin{cases} u_n = 3 \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + 1) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

il s'agit d'une récurrence linéaire <u>complète</u>

$u_1 = 3u_0 + 3 = 6$

$$u_n = 3 \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + 1)$$

$$u_{n-1} = 3 \sum_{k=0}^{n-2} (u_k + 1)$$

$$u_n - u_{n-1} = 3 \cdot (u_{n-1} + 1)$$

$$u_n - u_{n-1} = 3u_{n-1} + 3$$

$$\begin{cases} u_n = 4u_{n-1} + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Nouveaux problème de Cauchy équivalent au précédent.

$$4^0 \cdot u_n = 4u_{n-1} + 3 \cdot 4^0$$

$$4^1 \cdot u_{n-1} = 4^2 u_{n-2} + 3 \cdot 4^1$$

$$4^2 u_{n-2} = 4^3 u_{n-3} + 3 \cdot 4^2$$

$$\vdots$$

$$4^{n-2} \cdot u_2 = 4^{n-1} u_1 + 3 \cdot 4^{n-2}$$

$$4^{n-1} \cdot u_1 = 4^n u_0 + 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$u_n = 4^n u_0 + 3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 4^i = 4^n + \cancel{3}^{1} \cdot \frac{4^n - 1}{\cancel{4-1}_{1}} = \underline{\underline{2 \cdot 4^n - 1}}$$

$$\Longrightarrow$$

ii) $$u_n = \left(3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + 1$$

$$u_{n-1} = \left(3 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} u_k\right) + 1$$

$$u_n - u_{n-1} = 3u_{n-1} \quad ; \quad \begin{cases} u_n = 4u_{n-1} \\ u_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_n = 4^n$$

Exercice 2 - Deux récurrences non-homogènes

Résoudre les récurrence suivantes :

1. $\forall n > 0, \; u_n = u_{n-1} + 2^n$
2. $\forall n > 0, \; u_n = 2u_{n-1} + 1$

en sachant que dans les deux cas $u_0 = 1$.

i) $$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2^n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + 2^n$$
$$\cancel{u_{n-1}} = \cancel{u_{n-2}} + 2^{n-1}$$
$$\cancel{u_{n-2}} = \cancel{u_{n-3}} + 2^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\cancel{u_1} = u_0 + 2^1$$

$$u_n = u_0 + \sum_{i=1}^{n} 2^i = 1 + \sum_{i=1}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

ii) $\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

$$2^0 \cdot u_n = 2\cancel{u_{n-1}} + 1$$
$$2^1 \cdot \cancel{u_{n-1}} = 2^2 \cancel{u_{n-2}} + 2^1$$
$$2^2 \cdot \cancel{u_{n-2}} = 2^3 \cancel{u_{n-3}} + 2^2$$
$$\vdots$$
$$2^{n-1} \cdot \cancel{u_1} = 2^n u_0 + 2^{n-1}$$

$$u_n = 2^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^i = 2^n + 2^n - 1$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

Exercice 3 - Et voici une récurrence homogène

Résoudre la récurrence suivante :

$$\forall n > 1, \; u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$$

en sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

(méthode de l'équation caracteristique)

$$X^n = 4 \cdot X^{n-1} - 3X^{n-2}$$

$$X^2 = 4X - 3$$

$$X^2 - 4X + 3 = 0$$

|| polynôme caracteristique

$$X = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$u_n = a \cdot 1^n + b \cdot 3^n = a + 3^n b$$

|| grâce au problème de Cauchy on va trouver les valeurs de a et b

pour $n=0$ on trouve : $u_0 = a + b = 0$

pour $n=1$ on trouve : $u_1 = a + 3b = 1$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+3b=1 \end{cases} \Rightarrow$$ en sous-tractant la première de la deuxieme on obtient :

$$2b = 1 \; ; \; \begin{cases} b = 1/2 \\ a = -1/2 \end{cases}$$

et donc

$$u_n = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$

Exercice 4 - Une récurrence non-homogène d'ordre 3

Résoudre la récurrence suivante :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} + 1$$

avec conditions initiales $u_2 = u_1 = u_0 = 1$.

$$\underbrace{u_n - u_{n-2}}_{v_n} = \underbrace{u_{n-1} - u_{n-3}}_{v_{n-1}} + 1$$

donc si l'on pose : $v_n = u_n - u_{n-2}$

$$\begin{cases} v_n = v_{n-1} + 1 & \text{pour } n > 2 \\ v_2 = u_2 - u_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v_n &= \cancel{v_{n-1}} + 1 \\
\cancel{v_{n-1}} &= \cancel{v_{n-2}} + 1 \\
\cancel{v_{n-2}} &= \cancel{v_{n-3}} + 1 \\
&\vdots \\
\cancel{v_3} &= v_2 + 1 \\
\hline
v_n &= v_2 + n - 2 = n - 2
\end{aligned}$$

$v_n = n-2$ et on sait que $v_n = u_n - u_{n-2}$

donc on a que

$$\begin{cases} u_n - u_{n-2} = n-2 \\ u_2 = u_1 = u_0 = 1 \end{cases} ; \quad u_n = u_{n-2} + (n-2)$$

n est pair

$$u_{2k} = u_{2k-2} + (2k-2)$$
$$u_{2k-2} = u_{2k-4} + (2k-4)$$
$$\vdots$$
$$u_4 = u_2 + 2$$

$$u_{2k} = u_2 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k-2i)$$
$$= 1 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} 2k\right) - 2\sum_{i=1}^{k-1} i$$

n est impair

$$u_{2k+1} = \cancel{u_{2k-1}} + (2k-1)$$
$$\cancel{u_{2k-1}} = \cancel{u_{2k-3}} + (2k-3)$$
$$\cancel{u_{2k-3}} = \cancel{u_{2k-5}} + (2k-5)$$
$$\vdots$$
$$\cancel{u_3} = u_1 + 1$$

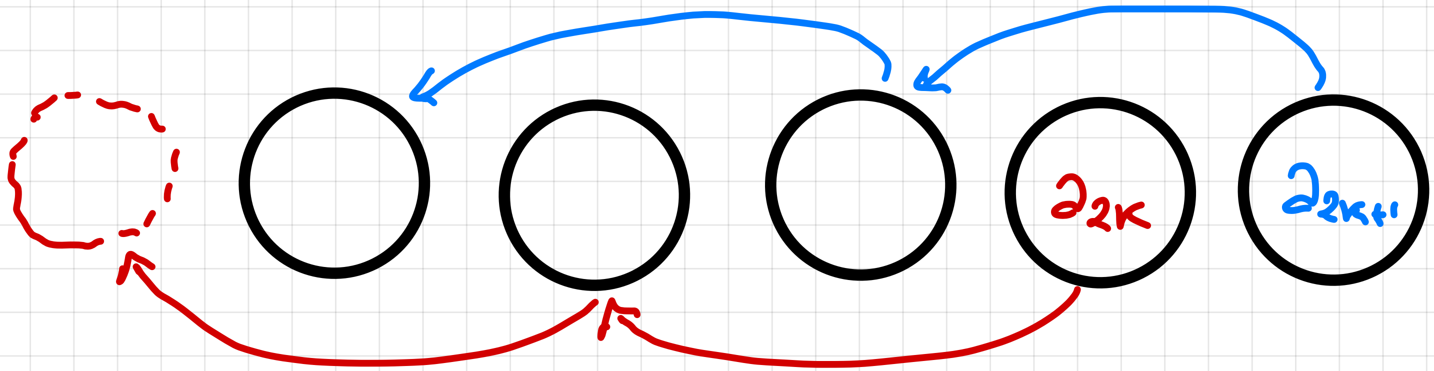
$$u_{2k+1} = u_1 + \sum_{i=1}^{k} (2k+1-2i)$$

$$u_{2k} = 1 + 2k(k-1) - \cancel{2}\,\frac{(k-1)k}{\cancel{2}}$$
$$= 1 + 2k^2 - 2k - k^2 + k$$
$$= k^2 - k + 1$$

$$u_{2k+1} = 1 + (2k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) - \left(2\sum_{i=1}^{k} i\right)$$
$$= 1 + (2k+1)k - \cancel{2}\cdot\frac{k(k+1)}{\cancel{2}}$$
$$= 1 + 2k^2 \cancel{+k} - k^2 \cancel{-k}$$
$$= k^2 + 1$$

si l'on met tout ensemble :

$$u_n = \begin{cases} k^2 - k + 1 & \text{si } n = 2k \\ k^2 + 1 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$



Exercice 5 - Mots et sous-séquences

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ tels que les suites (maximales) de c consécutifs soient toujours de longueur paire. Ainsi, le mot $accbcccca$ est un mot de $\mathcal{M}$, mais le mot $accbccca$ n'est pas un mot de $\mathcal{M}$.

1. Trouvez tous les mots de $\mathcal{M}$ de longueur n inférieure ou égale à 3.
2. On considère la définition inductive suivante de l'ensemble $\mathcal{M}$:
   (B) $\varepsilon \in \mathcal{M}$
   (I) Pour tout $m \in \mathcal{M}$,
   longueur n
   $am \in \mathcal{M}$ → donc $|m| = n-1$
   $bm \in \mathcal{M}$ → " $|m| = n-1$
   $ccm \in \mathcal{M}$ → " $|m| = n-2$
3. Cette définition inductive est-elle ambigüe ?
4. Trouvez une relation de récurrence caractérisant le nombre M_n des mots de longueur n appartenant à $\mathcal{M}$.

5.1) $M_0 = 1 \quad M_1 = 2 \quad M_2 = 5 \quad M_3 = 12$

5.2) $M_n = M_{n-1} + M_{n-1} + M_{n-2}$

⋮

5.4) $\begin{cases} M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2} \\ M_0 = 1 \\ M_1 = 2 \end{cases}$

$$M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2}$$

$$X^n = 2X^{n-1} + X^{n-2}$$

$$X^2 = 2X + 1$$

$$X^2 - 2X - 1 = 0$$

$$X = 1 \pm \sqrt{1+1} = \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$M_n = a\cdot(1+\sqrt{2})^n + b\cdot(1-\sqrt{2})^n$$

on trouve a et b grâce au problème de Cauchy :

pour $n=0$ $\quad a+b = 1$

pour $n=1$ $\quad a(1+\sqrt{2}) + b(1-\sqrt{2}) = 2$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ a+b+\sqrt{2}(a-b) = 2 \end{cases} ; \quad a-b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ a-b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$2a = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad a = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$b = 1-a \; ; \quad b = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$M_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

5. Résolvez l'équation de récurrence correspondante i.e. exprimez M_n en fonction de n seulement.

Listing 1 – L'algorithme de tri rapide.

```

Table T of integer;

function echange(a,b: integer)
begin
  tmp: integer;

  tmp = T[a];
  T[a] = T[b];
  T[b] = tmp;
end

function choixprivot(d, f)
begin
  return d;
end

function partitionner (d, f, pivot: integer)
begin
  i, j: integer;

  echange(f, pivot);
  j = d;
  for i = d to f step 1
    begin
      if T[i]<= T[f] then
        begin
          echange(i,j);
          j = j+1;
        end
    end
  echange(f,j);
  return j;
end

function trirapide (d, f: integer)
begin
  pivot: integer;

  if (d < f) then
    begin
      pivot = choixpivot(d, f);
      pivot = partitionner(d, f, pivot);
      trirapide(d, pivot-1)
      trirapide(pivot+1, d)
     end
end
```

Exercice 6 - Le tri rapide

La complexité $c(n)$ dans le pire des cas de l'algorithme du tri rapide (*quick-sort* en anglais) pour trier une liste de n nombres vérifie l'équation de récurrence ci-dessous. Résolvez-la, c'est-à-dire exprimez le terme général $c(n)$ de la suite $(c(n))_{n\geq 2}$ en fonction de n uniquement.

$$\begin{cases} c(2) = 3 \\ c(n) = c(n-1) + n + 1 \quad \text{pour } n > 2 \end{cases}$$

EX6

$$\begin{cases} c_n = c_{n-1} + (n+1) \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1} + (n+1) \\
c_{n-1} &= c_{n-2} + (n) \\
c_{n-2} &= c_{n-3} + (n-1) \\
&\vdots \\
c_3 &= c_2 + 4
\end{aligned}$$

$$c_n = c_2 + \sum_{i=4}^{n+1} i = 3 + \sum_{i=4}^{n+1} i = \sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2-6}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n-4}{2}$$

Exercice 7 - Comptons les tas de sable !

Qui n'a pas joué avec le sable dans son enfance ? Et bien, sachez qu'il s'agit d'une affaire sérieux. En effet, pour mieux cerner la dynamique de la formation des tas de sable, on va en faire un petit modèle mathématique dont les secrets peuvent très bien s'apprendre à l'aide de ce que vous avez appris dans le cours d'OFI. De plus, si tout va bien vous allez aussi emporter un bon nombre de points de l'examen.

Pour ne pas rendre les choses trop compliquées, nous allons considérer que des tas de sable bidimensionnels, c'est-à-dire qu'on prend une section d'épaisseur infiniment petit des tas de sable à trois dimension avec lesquels vous avez joué quand vous étiez petit.

Formellement, un tas de sable est une séquence ordonnée d'entier naturels non-nuls. De plus, pour simplifier encore plus le modèle on va prétendre que la séquence soit strictement décroissante. De cette manière chaque entier de la séquence représente le nombre de grain de sable qui sont empilés à cette position. Pour mieux comprendre, considérez la séquence $(5, 3, 2, 1)$ elle donne lieu au tas de sable que vous voyez représenté en figure 1.

1. Nous voudrions à présent compter le nombre $T(n)$ de tas de sable distincts que l'on peut former sachant que le premier élément de la séquence vaut $n > 1$. Par exemple, pour $n = 3$, l'on peut former tous les tas en figure 2, c'est-à-dire $T(3) = 4$. Calculez $T(4)$.
2. Trouvez l'expression de $T(n)$ en fonction de n seulement sachant que $T(0) = 1$.

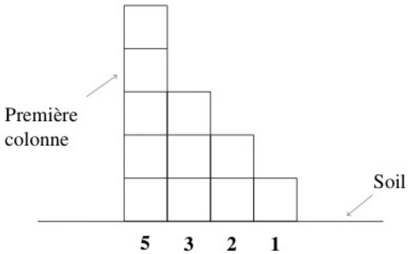


FIGURE 1 – Représentation graphique du tas de sable $(5, 3, 2, 1)$. On peut aussi voir le tas de sable comme une séquence de colonnes contenants un certain nombre de grains. Ainsi dans l'exemple en figure, la première colonne (à partir de la gauche) contient 5 grains, la deuxième 3 et ainsi de suite.

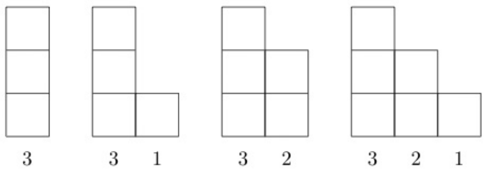
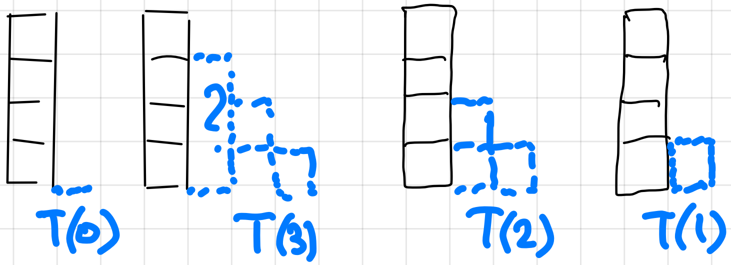


FIGURE 2 – Représentation graphique des tas de sable dont l'élément le plus à gauche a hauteur 3. Nous avons donc le 4 tas : (3), (3,1), (3,2), (3,2,1).

1.) $T_4 = ?$



$T_4 = T_3 + T_2 + T_1 + T_0 = 8$

$4 + 2 + 1 + 1$

2.) $\begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + \dots + T_0 \\ T_0 = 1 \end{cases}$

$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$

ATTENTION : $T_1 = 1$

récurrence complète donc...

$T_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} T_i$

$T_n - T_{n-1} = T_{n-1}$; $\begin{cases} T_n = 2\,T_{n-1} \\ T_0 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} T_n = 2^{n-1} & \text{pour } n > 0 \\ T_0 = 1 & \text{pour } n = 0 \end{cases}$

Il s'agit donc de $T_n = 2^n$ avec le début décalé d'une position...

FIN