Université Côte d'Azur
FORMENTI

Année 2018/19
L2 Sciences
OFI

Examen

JUSTIFIEZ PRÉCISÉMENT VOS RÉPONSES.

SEULE UNE FEUILLE A4 MANUSCRITE RECTO-VERSO EST AUTORISÉE.

Exercice 1 - Ensembles dénombrables

Soit f l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ainsi définie $f(x, y) = 2^x(2y + 1)$ pour tout $x, y \in \mathbb{N}$. Est-ce qu'il s'agit d'une bijection. Si oui, en déduire la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$. (Valeur 4 Points)

Exercice 2 - Un peu d'induction (ça ne fait pas de mal ?)

Pour tout entier naturel n, soient les propriétés $\mathcal{P}(n)$: "9 divise $10^n - 1$" et $\mathcal{Q}(n)$: "9 divise $10^n + 1$".

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n+1)$.
2. Donnez les valeurs de n pour lesquelles $\mathcal{P}(n)$ (respectivement $\mathcal{Q}(n)$) est vraie.

(Valeur 4 Points)

Exercice 3 - Mettons de l'ordre dans les tas de sable !

Qui n'a pas joué avec le sable dans son enfance ? Et bien, sachez qu'il s'agit d'une affaire sérieux. En effet, pour mieux cerner la dynamique de la formation des tas de sable, on va en faire un petit modèle mathématique dont les secrets peuvent très bien s'apprendre à l'aide de ce que vous avez appris dans le cours d'OFI. De plus, si tout va bien vous allez aussi emporter un bon nombre de points de l'examen.

Pour ne pas rendre les choses trop compliquées, nous allons considérer que des tas de sable bidimensionnels, c'est-à-dire qu'on prend une section d'épaisseur infiniment petit des tas de sable à trois dimension avec lesquels vous avez joué quand vous étiez petit.

Formellement, un tas de sable est une séquence ordonnée d'entier naturels non-nuls. De plus, pour simplifier encore plus le modèle on va prétendre que la séquence soit strictement décroissante. De cette manière chaque entier de la séquence représente le nombre de grain de sable qui sont empilés à cette position. Pour mieux comprendre, considérez la séquence $(5, 3, 2, 1)$ elle donne lieu au tas de sable que vous voyez représenté en figure 1.

1. Nous voudrions à présent compter le nombre $T(n)$ de tas de sable distincts que l'on peut former sachant que le premier élément de la séquence vaut $n > 1$. Par exemple, pour $n = 3$, l'on peut former tous les tas en figure 2, c'est-à-dire $T(3) = 4$. Calculez $T(4)$. (2 points)
2. Trouvez l'expression de $T(n)$ en fonction de n seulement sachant que $T(0) = 1$. (6 points)
3. Etant donné deux tas de sable $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_l)$. On note $x \preceq y$ si et seulement s'il existe un entier i tel que $x_j = y_j$ pour $1 \leq j < i$ et $x_i < y_i$. Montrez que $\preceq$ est un ordre sur les tas de sable. Est-ce que $\preceq$ est un ordre total ? (2 points)
4. Dessinez les tas de sable dont la première colonne est de hauteur 4 en suivant l'ordre $\preceq$, du tas le plus petit (à gauche) au plus grand. (1 point)

Distribué le 26 juin 2019.

5. La *règle verticale* V est une relation binaire sur les tas de sable. On dit que deux tas de sable $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ sont en relation V si et seulement s'il existe un entier i tel que $x_i - x_{i+1} \geq 2$ et pour j compris entre 1 et l on a :

$$\begin{cases} x_i - 1 & \text{si } j = i \\ x_{i+1} + 1 & \text{si } j = i + 1 \\ x_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Si un i tel que $x_i - x_{i+1} \geq 2$ n'existe pas alors on dit que le tas x est un *point fixe*. En d'autres mots, deux tas de sable x et y sont en relation xVy s'ils sont identiques sauf pour deux colonnes successives dans lesquelles il y a eu un grain de sable qui est passé de la colonne i à celle $i+1$. La figure 3 donne des exemples d'application de la règle verticale. Montrez que pour toute paire de tas de sable $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ tels que xVy alors l'on a $y \preceq x$. (2 points)

6. (*Facultatif*). Etant donné un tas de sable $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, considérez l'ensemble O_x tel que $x \in O_x$ et si $y \in O_x$ alors il existe une suite de tas de sable $z_1, z_2, \ldots, z_h$ tels que $z_1 = x$, $z_h = y$ et $z_i V z_{i+1}$ pour tout $1 < i < h$. En d'autres mots, un tas de sable y appartient à O_x s'il peut être obtenu par un certain nombre d'applications de la règle verticale à partir de x. On dit que O_x est l'*orbite de* x. Si $x = (4, 2, 1)$ alors son orbite O_x est montrée en figure 3. Considérez des tas de sable de la forme (n) pour un entier n, c'est-à-dire, considérez des tas de sable formés par une seule colonne contenant n grains. Montrez que pour tout n, $O_{(n)}$ contient un nombre fini de tas de sable et, en particulier, contient un et un seul point fixe. Ceci démontre de manière formelle l'observation que vous aviez faite quand vous étiez petits qu'un tas de sable dont les cotés ont une pente trop rapide vont se réorganiser par une suite d'éboulements jusqu'à arriver à un tas stable (un point fixe !). (4 points)

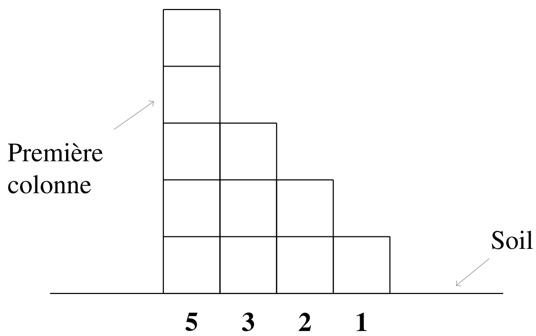

FIGURE 1 – Représentation graphique du tas de sable $(5, 3, 2, 1)$. On peut aussi voir le tas de sable comme une séquence de colonnes contenants un certain nombre de grains. Ainsi dans l'exemple en figure, la première colonne (à partir de la gauche) contient 5 grains, la deuxième 3 et ainsi de suite.

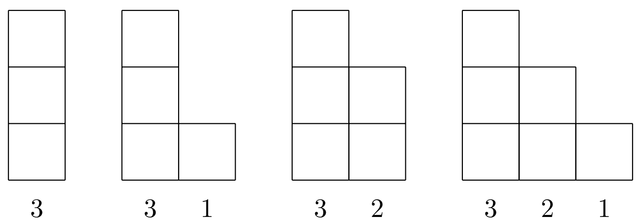

FIGURE 2 – Représentation graphique des tas de sable dont l'élément le plus à gauche a hauteur 3. Nous avons donc le 4 tas : (3), (3,1), (3,2), (3,2,1).

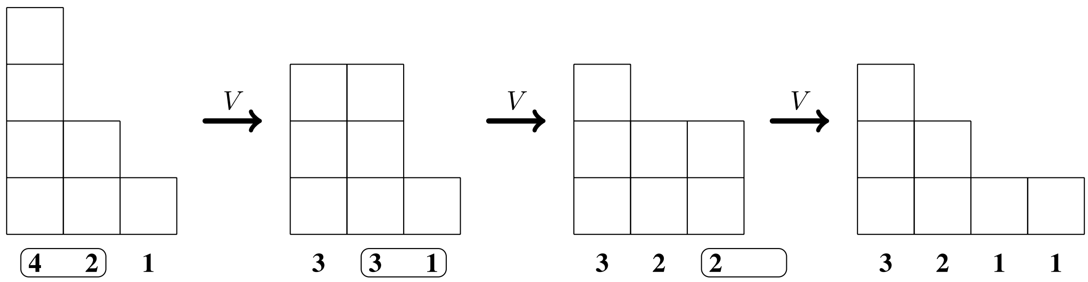

FIGURE 3 – Applications successives de la règle verticale V. Nous avons encerclé les colonnes dans lesquelles il va y avoir un grain qui passe d'une colonne à l'autre. On remarque que dans le tas le plus à droite aucune application de la règle verticale est possible. Il s'agit donc d'un point fixe.