
Examen

Justifiez précisément vos réponses.
Seule une feuille A4 manuscrite recto-verso est autorisée.

Exercice 1 - Une petite question de géométrie

Etant donnée un polygone de \mathbb{R}^2 avec n cotés, notons D_n le nombre de diagonales (droites connectant deux points qui n'appartiennent pas à un même coté du polygone). Montrez par récurrence que $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ pour tout entier $n \geq 2$. (Valeur 4 Points)

Exercice 2 - Les mots de Monsieur Lyndon

Monsieur Roger Lyndon s'est amusé à jouer avec un ensemble L de mots sur un alphabet $A = \{a, b\}$. Ce qui l'intéressait dans ces mots c'était certaines propriétés sur leur facteurs et plus particulièrement la propriété de conjugaison. En effet, on dit que deux mots w et w' sont conjugués s'il existe deux autres mots $u, v \in A^+$ tels que $w = uv$ et $w' = vu$. Notons $w \approx w'$ si w et w' sont conjugués. On a alors, par exemple, $abaaab \approx aaabab$ en prenant $u = ab$ et $v = aaab$.

1. Monsieur Lyndon a démontré que \approx est une relation d'équivalence. Démontrez cela à votre tour. (Valeur 2 points)
2. Ecrivez les classes d'équivalence de la relation pour les mots de longueur 4. (Valeur 1 point)
3. Voici donc comment Lyndon sélectionnait les mots qui lui tenaient à cœur. Un mot $w \in L$ lorsqu'il est strictement plus petit (par rapport à l'ordre lexicographique) que tous ses conjugués, c'est-à-dire que lorsque $w = uv$ alors $w < vu$ (ici $<$ est l'ordre lexicographique strict). Trouvez tous les mots de L de longueur 4. (Valeur 2 points)

Exercice 3 - Un peu de logique

Démontrez ou invalidez les suivantes :

1. $\{a \rightarrow (b \vee c), b \rightarrow (a \vee c), (a \wedge b) \vee c\} \stackrel{?}{\models} a \vee b$;
2. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\} \stackrel{?}{\models} b$;

(Valeur 6 Points)

Exercice 4 - Pour terminer, voici un exercice avec un bonus

Considérez un alphabet à deux lettres $A = \{a, c\}$ et définissez un langage L sur A ayant les propriétés suivantes :

- tout mot de L commence par ca ;
- tout mot de L termine par a ;
- aucun mot de L ne contient le motif aa ;
- aucun mot de L ne contient le motif ccc .

Notons L_n les mots de L de longueur n . Cherchez à répondre aux questions suivantes :

1. Écrivez les mots de L_n pour n compris entre 0 et 7 (extrêmes inclus). (Valeur 1 point)
2. Donnez une expression régulière pour L . (Valeur 4 points)
3. (Très difficile!) Trouvez une expression pour $|L_n|$ en fonction de n seulement. ($|L_n|$ est le cardinal de L_n) (Valeur 10 points)