Université Côte d'Azur
FORMENTI/JULIA

Année 2020/21
PO2 SITE
TD OFI

Induction

Exercice 1 - Des pièces de monnaye à tout faire

Nous voulons justifier l'introduction d'une nouvelle pièce de monnaye de 3 centimes d'Euro. Pour cela montrez que pour tout objet ayant un prix supérieur ou égal à 8 centimes, il est possible de le payer avec des pièces de 3 et 5 centimes uniquement.

Exercice 2

Montrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5 ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre donné par l'expression $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.

Exercice 3

Montrer par récurrence que le nombre $|\mathcal{P}(E)|$ de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n.

Exercice 4 - Attention aux conclusions trop rapides

Considérez l'induction généralisée suivante sur l'ensembles de points du plan 2D. Soit $P(n)$ la propriété :
"n points distincts du plan 2D sont alignés".

1. Vérifiez que $P(2)$ est vraie.
2. Supposez que $P(n)$ soit vraie et considérez $n + 1$ points $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Comme $P(n)$ est vraie, les sous-ensemble de points $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est aligné sur une droite d_1 et, de même, le sous-ensemble de points $p_2, \ldots, p_{n+1}$ est sur une droite d_2. Comme d_1 et d_2 ont n points en commun (avec $n \geq 2$), alors $d_1 = d_2$.

Peut-on donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie ?

Exercice 5 - De l'induction pour vérifier des programmes

Prouver que l'algorithme donné au listing 1 est correct, c'est-à-dire que pour chaque paire d'entiers a, b il renvoie bien le $PGCD$ de a et b. (*Suggestion*: Il convient de faire une induction généralisée sur $a + b$.)

Listing 1 – L'algorithme d'Euclide.

```
function PGCD(a,b: integer)
begin
  if(b>a) then
    return PGCD(b,a);
  if(b==0) then
    return a;
  else
    return PGCD(a-b,b);
end
```

Exercice 2

Montrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5 ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre donné par l'expression $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.

1) Par induction sur $n \in \mathbb{N}$.

base : $n=0$ donc $0^5 - 0 = 0$ est divisible par 5 donc ok

hyp : pour $k \geq 0$ la thèse est vraie

clôture : pour $n = k+1$ la thèse est vraie

En effet on a :

binôme de Newton

$$(k+1)^5 - (k+1) = \left(\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} k^i\right) - k - 1$$

$=$ on sort de la somme les éléments pour $i=0$ et $i=5$

$$= k^5 \cancel{+1} - k \cancel{-1} + \sum_{i=1}^{4} \binom{5}{i} k^i \quad (*)$$

↳ par hyp c'est un multiple de 5.

reste à prouver que $\sum \binom{5}{i} k^i$ l'est aussi mais considérons

$$\binom{5}{i} = \frac{5!}{(5-i)!\,i!} = 5 \cdot \frac{4!}{(5-i)!\,i!} \quad \text{pour } i = 1 \dots 4$$

Remarquez q'ici le dénominateur ne se simplifiera jamais avec le 5 que j'ai mis en coeff. car i est comprise entre 1 et 4. Donc $\binom{5}{i}$ s'écrit toujours comme $5 \times$ quelque chose donc c'est un multiple de 5.

Donc tout (*) est multiple de 5 ■

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ est multiple de 3.

<u>base</u> : $n = 0$ $\quad 0^3 + 2 \cdot 0 = 0$ qui est multiple de 3. OK

<u>hyp</u> : assumons la thèse vraie pour $n = k > 0$

clôture : mq. ça marche pour $n = k+1$.

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = \left(\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} k^i \right) + 2k + 2 =$$

= on isole dans la somme les élém. pour $i=0$ et $i=3$

$$= k^3 + 1 + 2k + 2 + \sum_{i=1} \binom{3}{i} k^i \quad (**)$$

par hyp est un multiple de 3 donc on l'écrit comme $3 \cdot a$

donc si l'on réécrit :

$$3 \cdot a + 3 + \sum_{i=1}^{2} \binom{3}{i} K^i$$

montrons que c'est un multiple de 3 :

mais $\binom{3}{i} = 3 \cdot \frac{2}{(2-i)!\, i!}$ pour $i = 1 \dots 2$

cette valeur ne se simplifie pas avec le dénominateur !

Donc tout est multiple de 3 dans (**) $\blacksquare$

3) base : $n = 0$ $(3+\sqrt{5})^0 + (3-\sqrt{5})^0 = 1+1 = 2$ ok

hyp : ça marche pour $n = K > 0$

clôture : on prouve que ça marche aussi pour $n = K+1$

$$(3+\sqrt{5})^{k+1} + (3-\sqrt{5})^{k+1} =$$

$$(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{k} + (3-\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})^{k}$$

$$3\cdot(3+\sqrt{5})^{k} + \sqrt{5}(3+\sqrt{5})^{k} + 3(3-\sqrt{5})^{k} - \sqrt{5}(3-\sqrt{5})^{k}$$

$$3\underbrace{\left[(3+\sqrt{5})^{k}+(3-\sqrt{5})^{k}\right]}_{\text{hyp: entier pair}} + \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^{k}-(3-\sqrt{5})^{k}\right]$$

$A = (3+\sqrt{5})$ $\quad B = (3-\sqrt{5})$

A est le coeff

B est le coeff

Il nous reste à montrer que $\sqrt{5}[A-B]$ est un entier pair.

$$\sqrt{5}\,[A-B] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 3^{i}\, 5^{\frac{k+1-i}{2}} \left[1-(-1)^{k-i}\right]$$

on a donc 2 cas :

$k-i$ est pair : alors $\left[1-(-1)^{k-i}\right] = [1-1] = 0$

$k-i$ est impair : alors $\left[1-(-1)^{k-i}\right] = [1+1] = 2$

et $k+1-i$ est aussi pair donc

l'exposant du 5 est un entier

et donc toute l'expression

donne un nombre entier pair

$\blacksquare$

Exercice 3

Montrer par récurrence que le nombre $|\mathcal{P}(E)|$ de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n.

base : $n=0 \Rightarrow |E|=0 \Rightarrow E=\emptyset$, $|\mathcal{P}(\emptyset)|=|\{\emptyset\}|=2^0=1$ OK

hyp : on suppose la thèse vrai pour $n=k>0$

clôture : on montre pour $n=k+1$

Prenons $E=\{e_1,\dots,e_k,e_{k+1}\}=\overset{=E'}{\underbrace{\{e_1,\dots,e_k\}}_{k \text{ éléments}}}\cup\{e_{k+1}\}$

$|\mathcal{P}(E)|=|\underbrace{\{\text{les parties de } E'\}}_{\text{hyp} = 2^k}|\cup|\underbrace{\{\text{les parties de } E' \text{ auxquelles on ajoute } e_{k+1}\}}_{=2^k}|$

car on a juste ajouté e_{k+1} à une boîte qui se trouve

$= 2^k+2^k=2^{k+1}$ OK

Exercice 4 - Attention aux conclusions trop rapides

Considérez l'induction généralisée suivante sur l'ensembles de points du plan 2D. Soit $P(n)$ la propriété : "n points distincts du plan 2D sont alignés".

1. Vérifiez que $P(2)$ est vraie.
2. Supposez que $P(n)$ soit vraie et considérez $n+1$ points $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Comme $P(n)$ est vraie, les sous-ensemble de points $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est aligné sur une droite d_1 et, de même, le sous-ensemble de points $p_2, \ldots, p_{n+1}$ est sur une droite d_2. Comme d_1 et d_2 ont n points en commun (avec $n \geq 2$), alors $d_1 = d_2$.

Peut-on donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie ?

P(2) vraie mais P(3) faux

Donc $P(2) \to P(3)$ est faux et donc toute la preuve est fausse.

$\Rightarrow$

Exercice 5 - De l'induction pour vérifier des programmes

Prouver que l'algorithme donné au listing 1 est correct, c'est-à-dire que pour chaque paire d'entiers a, b il renvoie bien le $PGCD$ de a et b. (*Suggestion*: Il convient de faire une induction généralisée sur $a + b$.)

Listing 1 – L'algorithme d'Euclide.

```
1 function PGCD(a,b: integer)
2 begin
3   if(b>a) then
4     return PGCD(b,a);
5   if(b==0) then
6     return a;
7   else
8     return PGCD(a-b,b);
9 end
```

<u>base</u> : $n = a+b = 0 \rightarrow a = 0$ et $b = 0$ alors si on regarde le code on passe directement à exécuter l'instruction 5 et 6 et on renvoie 0 ce qui est <u>OK</u>

<u>hyp</u> : on assume la thèse vrai pour tout $n \leq k > 0$

clôture : on mq ça marche pour $n = a+b = k+1$

donc si $a+b = k+1 > 0$ on sait que soit $a > 0$ soit $b > 0$

si $b > a$ alors instr. 3 nous fait passer à 4

i.e. return PGCD(b, a) mais ça c'est correct car $PGCD(a,b) = PGCD(b,a)$.

si $b < a$ alors deux cas :

i) $b = 0$ donc l'algo exécute l'instr. 5 et 6

et retourne a ce qui est correct car $PGCD(a,0) = a$

ii) $b \neq 0$ on exécute ligne 8 :

return $PGCD(\underline{a-b}, \underline{b})$;

en effet $a-b+b = a < K < K+1$ et donc

par hypothèse de réc. gén. la réponse est correcte. $\blacksquare$

Exercice 6 - Les arbres binaires

L'ensemble AB des arbres binaires est défini inductivement par :
— $\emptyset \in AB$
— si $g \in AB$ et si $d \in AB$ alors $x = (., g, d) \in AB$.

Soient h, n et f les fonctions donnant respectivement la hauteur, le nombre de nœuds et le nombre de feuilles d'un arbre binaire.

1. Définir inductivement chacune des fonctions h, n et f ;
2. Montrer que pour tout arbre binaire $x \in AB$, $n(x) \leq 2^{h(x)} - 1$ et $f(x) \leq 2^{h(x)-1}$.
3. Montrer que l'ensemble AB des arbres binaires est inductif.

Attention : la définition donnée au TD ne prénait pas en compte l'arbre vide $\emptyset$ i.e. l'arbre avec aucun noeud

L'idée est d'aller définir les fonctions h, n et f en suivant la déf. inductive d'arbre binaire.

Donc pour h :

base : $h(\emptyset) = 0$ car la hauteur est le plus long chemin entre la racine et une feuille $+1$, si l'on a que la racine alors il est clair que la long. en question est $0+1=1$.

hyp : soyent $g \in AB$ et $d \in AB$ tq. $h(g)$ et $h(d)$ sont déjà définies

clôture : alors

$$h\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ g & & d \end{smallmatrix}\right) = \max(h(g), h(d)) + 1$$

ceci vient du fait que l'on a 1 arête de plus pour arriver à la racine

↳ i.e. on prend le plus long chemin sur l'un des sous-arbres

Le nombre de noeuds n est similaire:

base : $n(\emptyset) = 0$

hyp : soient $g \in AB$ et $d \in AB$ et $n(g)$, $n(d)$ déjà définies

clôture: alors

$$n\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ g & & d \end{smallmatrix}\right) = n(g) + n(d) + 1$$

Finalement, pour le nombre de feuilles:

base: $f(\emptyset) = 1$ ← en effet la racine toute seule est en réalité une feuille. En effet on appelle feuille tout noeuds qui n'a pas d'enfants (noeuds qui lui sont rattachés).

hyp: soient $g \in AB$, $d \in AB$ et $f(g)$, $f(d)$ déjà définies:

clôture: alors

$$f\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ g & & d \end{smallmatrix}\right) = f(g) + f(d)$$ ← en rajoutant une racine on n'introduit pas des nouvelles feuilles donc leur nombre est la somme de ce qu'on trouve dans les sous-arbres

2) Montrons que si $x \in AB$ alors $n(x) \leq 2^{h(x)} - 1$ par induction sur AB.

base: $n(\emptyset) = 0 \leq 2^{h(\emptyset)} - 1 = 1 - 1 = 0$ donc OK.

hyp: soient $g, d \in AB$

clôture: alors l'on a:

$$n\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ g & & d\end{smallmatrix}\right) = n(g) + n(d) + 1 \underset{\text{hyp induction}}{\leq} 2^{h(g)} - 1 + 2^{h(d)} - 1 + 1$$

donc :

$$n\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ g & & d\end{smallmatrix}\right) \leq 2^{h(g)} + 2^{h(d)} - 1$$

$$\leq 2^{\max(h(g),\, h(d))} + 2^{\max(h(g),\, h(d))} - 1$$

$$\leq 2 \cdot 2^{\underbrace{\max(h(g),\, h(d))}_{\max(h(g),\, h(d)) \,=\, h\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ g & & d\end{smallmatrix}\right) - 1}} + 1$$

$$\leq 2^{\cancel{1} + h\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ g & & d\end{smallmatrix}\right) \cancel{-1}} - 1 = 2^{h\left(\begin{smallmatrix} & \bullet & \\ g & & d\end{smallmatrix}\right)} - 1$$

Pour l'autre inégalité on procède de manière similaire.

3) Comme nous avons dit en séance cette question n'a pas beaucoup de sens car nous avons déjà donné une définition inductive de AB et ceci implicitement dit que l'ens. est inductif. Par contre, supposons de ne pas être à connaissance de cela et montrons que l'on peut donner sur AB un bon ordre.

L'idée est définir d'abord que l'arbre vide est plus petit que tout le monde et ensuite dire que $a \leq b$

avec $a \equiv \begin{array}{c} / \ \backslash \\ g_1 \quad d_1 \end{array}$ et $b \equiv \begin{array}{c} / \ \backslash \\ g_2 \quad d_2 \end{array}$ ssi $g_1 \leq g_2$

ou $g_1 = g_2$ et $d_1 \leq d_2$

Montrons qu'il s'agit d'un ordre :

- reflexivité évidente
- symetrie "
- transitivité considerons $a \equiv \begin{array}{c} / \ \backslash \\ g_1 \quad d_1 \end{array}$, $b \equiv \begin{array}{c} / \ \backslash \\ g_2 \quad d_2 \end{array}$ et

$c \equiv \begin{array}{c} / \ \backslash \\ g_3 \quad d_3 \end{array}$

supposons $a \leq b$ et $b \leq c$ montrons que $a \leq c$

si $a \leq b$ alors 2 possibilités :

i) $g_1 \leq g_2$ comme on a $b \leq c$ alors $g_2 \leq g_3$ et donc $g_1 \leq g_3$

ou $g_2 = g_3$ et donc $g_1 \leq g_3$

ce qui implique $a \leq c$

ii) $g_1 = g_2$ et $d_1 \leq d_2$ mais comme $b \leq c$ alors

soit $g_2 \leq g_3$ et donc $g_1 = g_2 \leq g_3$ donc $a \leq c$

soit $g_2 = g_3$ et $d_2 \leq d_3$ donc $g_1 = g_2 = g_3$ mais
$d_1 \leq d_2 \leq d_3$ donc $a \leq c$

Montrons que c'est un ordre totale i.e. étant donnés
$a \equiv \begin{array}{c} / \backslash \\ g_1 \quad d_1 \end{array}$ et $b \equiv \begin{array}{c} / \backslash \\ g_2 \quad d_2 \end{array}$ on a soit $a \leq b$ soit $b \leq a$

Supposons que $a \not\leq b$ donc on a deux cas possibles :

i) $g_1 \geqslant g_2$ ce qui implique $b \leq a$

ii) $g_1 = g_2$ et $d_1 \geqslant d_2$ ce qui implique $b \leq a$

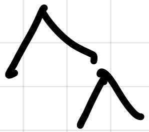
donc soit $a \leq b$ est vrai soit, si ce n'est pas le cas, $b \leq a$
est vrai

Maintenant il nous reste de démontrer que $\leq$ est bien fondé. Considérons un ensemble infini d'arbres A. Nous devons montrer qu'il admet un élément minimal. Soit n le plus petit nombre entier tel qu'il existe $a \in A$ qui a ce nombre de noeuds. Soit $A_n \subseteq A$ le sous-ensemble de tous les éléments de A qui ont exactement n noeuds. Remarquez que A_n contient un nombre fini d'éléments et comme l'ordre est total alors il contient au moins un élément a minimal pour A_n. Montrons que a est un minimum. Soit $b \in A \setminus A_n$ alors il a au moins 2 noeuds plus que a. Si ces deux noeuds se trouvent dans le sous-arbre de gauche alors on a $g_a \leq g_b$ et donc $a \leq b$

$b =$ 

sinon les deux noeuds se trouvent forcément dans le sous-arbre de droite et donc $g_a = g_b$ et $d_a \leq d_b$ ce qui implique $a \leq b$

<u>REM</u> : Dans le raisonnement précédent les arbres

 et  sont identiques !

Exercice 7

Soit E l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ contenant autant de a que de b : $E = \{w \in A^\star \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que l'ensemble F engendré par le schéma inductif suivant est égal à E :

base : $\varepsilon \in F$;

règle : si $uv \in F$ alors $uabv \in F$ et $ubav \in F$.

Montrons que si $w \in F$ alors $w \in E$ i.e. $F \subseteq E$ par induction.

Base : $\varepsilon \in F$ et $|\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$ donc ok

Hyp : tout mot w de longueur $2k$ pour $k>0$ est telle que si $w \in F$ alors $w \in E$.

Clôture : montrons que c'est de m̂ pour les mots de longueur $2k+2$.

Soit donc $w \in F$ tq $|w| = 2k+2$ alors il existe $uv \in F$ tq $w = uabv$ ou $w = ubav$ mais $|uv| = 2k$ donc par hyp. $|uv|_a = |uv|_b$ et donc $|w|_a = |uabv|_a = |uabv|_b = |w|_b$ ou $|w|_a = |ubav|_a = |ubav|_b = |w|_b$.

Montrons que si $w \in E$ alors $w \in F$ i.e. $E \subseteq F$ par induction sur la longueur du mot.

base : $\varepsilon \in E$ et $\varepsilon \in F$ donc ok.

Hyp. pour tout mot $w \in E$ tq $|w| = 2k$ on a que $w \in F$.
Clôture : montrons qu'il en est de $\hat{m}$ pour $w \in E$ et $|w| = 2k+2$.
Si $w \in E$ alors $|w|_a = |w|_b = k+1$. Remarquons que w doit forcement contenir le motif ab ou ba car sinon w serait un mot formé que par des a ou formé que par des b. Supposons donc que w s'écrit $uabv$ pour deux mots u, v opportunes.
Remarquons que donc $|uv|_a = |uv|_b = k$ donc par hyp $uv \in F$ et donc $uabv \in F$ aussi. C'est clair que ça marche de $\hat{m}$ si l'on avait pris $w = ubav$ ici.

∎