
Partiel

JUSTIFIEZ PRÉCISÉMENT VOS RÉPONSES.

SEULE UNE FEUILLE A4 MANUSCRITE RECTO-VERSO EST AUTORISÉE.

Exercice 1 - Des mots sous-contraintes

Considérez l'ensemble D des mots de longueur 4 sur l'alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lesquelles toutes les lettres de l'alphabet apparaissent.

1. Quel est le cardinal de D ? (1 point)
2. Soit M les sous-ensemble de D obtenu en interdisant les motifs 12, 23 et 34. Quel est le cardinal de M ? (3 points)

Exercice 2 - Aidons un petit robot

Un petit robot se déplace sur une grille bidimensionnelle. A chaque instant, il se déplace en ajoutant ± 1 à l'une (et une seule) de ses coordonnées. Par exemple, si le robot se trouve sur le point (x, y) à l'instant t , il pourra se trouver dans l'un des quatre points $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$ ou $(x, y - 1)$ à l'instant $t + 1$. Combien de chemins distincts peut le robot emprunter entre le point de départ $(0, 0)$ et le point d'arrivée $(4, 4)$ en 10 instant de temps ? (Valeur 4 Points)

Exercice 3 - Fonctions et cycles

Soit A un ensemble fini de cardinal a . On dit qu'une fonction $f: A \rightarrow A$ a un cycle d'ordre 2 s'ils existent deux éléments $u, v \in A$ tels que $f(u) = v$ et $f(v) = u$ avec $u \neq v$. Notons D_a^k , le cardinal de l'ensemble de fonctions $f: A \rightarrow A$ telles que $|A| = a$ et qui ont au moins k cycles distincts.

1. Donnez une expression pour D_a^k en fonction de a et k seulement.
2. Notons à présent, C_a^k le nombre de fonctions $f: A \rightarrow A$ telles que $|A| = a$ et qui ont exactement k cycles distincts. Calculez C_a^2 en fonction de a seulement.

(Valeur 6 Points)

Exercice 4 - Séries génératrices et récurrences

Considérez la fonction suivante :

$$F(X) = \frac{2X + 3}{(1 - X)^2}$$

1. Si l'on suppose que $F(X)$ est la série génératrice d'une récurrence, quel est le terme général de cette récurrence ?
2. Maintenant que vous avez le terme général, disons, c_n , écrivez une équation de récurrence qui a c_n comme terme général (trouvez aussi les conditions initiales à imposer).

(Valeur 6 Points)