Université Nice Sophia Antipolis
FORMENTI

Année 2017/18
L2 M/MI
OFI

Partiel

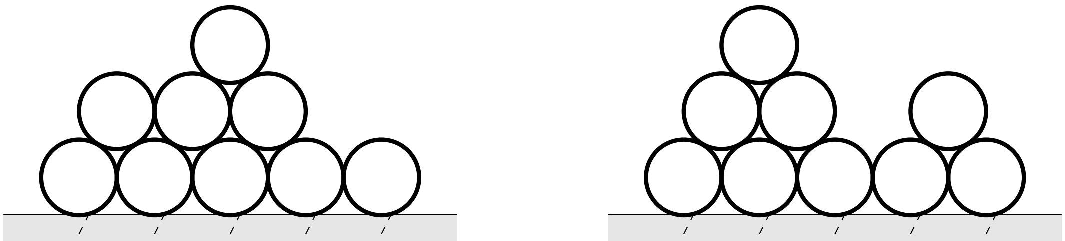
JUSTIFIEZ PRÉCISÉMENT VOS RÉPONSES.

SEULE UNE FEUILLE MANUSCRITE RECTO-VERSO EST AUTORISÉE.

Comment bien empiler ses tonneaux dans la cave

Marc LEBONCOUP vient de démarrer une petite activité de commerce de vieux bas armagnac et il a achète un gros stock à plusieurs producteurs. Après quelques jours, l'ensemble des tonneaux est livré en même temps. Puisque il soupçonne que le stock ne va pas s'écouler si rapidement que ça, il se dit qu'il vaut mieux disposer les tonneaux convenablement dans la cave afin d'éviter tout encombrement inutile. Il réalise donc que la meilleure façon de faire consiste à disposer les tonneaux l'un à coté de l'autre pour former une base solide et ensuite ranger ceux qui restent par dessus la base en faisant en sorte que chaque tonneau touche deux tonneaux de la rangée inférieure (voir figure 1). Il réalise ensuite que pour mieux accéder aux tonneaux d'une rangée et pour que l'ensemble tienne mieux, il faut que les tonneaux d'une rangée soient mis l'un à coté de l'autre (c'est-à-dire sans qu'il y ait des trous). On appellera une disposition de tonneaux *admissible* si chaque rangée ne contient pas de trous (Fig. 1a). Vice-versa une disposition est *non-admissible* si elle contient des trous (Fig. 1b).

Pendant que Marc range ses tonneaux, il commence à ses rappeler de ses vieux cours d'OFI et il se pose toute une série de questions. Il se pose en effet la question de combien de manières possibles il pourrait disposer ses tonneaux une fois qui il a formé une base de taille n. Bien sûr il n'est intéressé qu'aux dispositions admissibles. Comme ses cours commencent à remonter un peu loin dans le temps il a sans doute besoin de votre aide.



a) b)

FIGURE 1 – Exemple de disposition de tonneaux admissible (cas 1a) et non admissible (cas 1b) avec une base de 5.

1. Etant donnée une base de taille n, combien de tonneaux peut-on stocker au maximum (sans agrandir la base bien sûr !) ? [2 points]
2. Notons $f(n)$ le nombre de dispositions de tonneaux admissibles ayant une base n. On a bien sûr $f(0) = 1$ car il y a une seule manière de mettre 0 tonneaux. Calculez $f(i)$ pour $i = 1, \ldots, 4$. [1 point]
3. Marc remarque que calculer $f(5)$ commence déjà à être laborieux. Du coup il se dit qu'il faudrait peut-être trouver un moyen pour s'appuyer sur les calculs déjà effectués. Prouvez qu'il a raison et qu'en effet

Distribué le 20 mars 2018.

on peut donner la formule

$$f(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (n-k) f(k)$$

pour $n > 0$. [4 points]

4. Même avec la formule précédente, il est clair pour tout le monde que calculer $f(n)$ pour n grande va être assez compliqué. Aidez donc Marc à trouver l'expression de $f(n)$ en fonction de n seulement. [8 points]
5. Il est clair que la tâche de Marc n'est pas trop aisée même en ayant l'expression de $f(n)$ en fonction de n seulement. Il se dit donc qu'il pourrait se contenter d'une borne supérieur pas trop mauvaise. Après avoir disposé plusieurs dizaines de tonneaux, il se dit qu'expérimentalement il constate que $f(n) < 3^n$ pour $n > 1$. Sauriez-vous infirmer ou confirmer ses données expérimentales ? [4 points]
6. Y-a-t il une bonne borne inférieure pour $f(n)$? Si oui, laquelle ? [1 point]