Université Nice Sophia Antipolis — **Année 2018/19**
FORMENTI — **L2 Sciences**
OFI

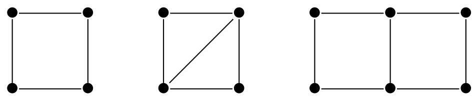
Examen

JUSTIFIEZ PRÉCISÉMENT VOS RÉPONSES.
SEULE UNE FEUILLE A4 MANUSCRITE RECTO-VERSO EST AUTORISÉE.

Exercice 1 - Petite excursion dans les arbres couvrants

Etant donné un graphe non-orienté G, un *arbre couvrant* A pour G est un sous-graphe de G ayant la propriété d'être un arbre et d'avoir le même ensemble de sommets que G.

1. Dessiner tous les arbres couvrants pour les graphes ci-dessous. (3 points)



a) b) c)

2. Notons maintenant M_1 le graphe $a)$ dans le point précédent, puis M_2 le graphe $c)$ du point précédent. Plus en général, M_n sera un réseau maillé de base n et hauteur 1. Etant donné le réseau M_n, soit A_n son nombre d'arbres couvrants. Exprimez A_n en fonction de n seulement. (4 points)
3. De quelle équation de récurrence A_n est une solution ? (1 point)

Exercice 2 - Un goûté parfait

Chaque jour, je peux composer mon goûter avec un nombre quelconque de barre(s) chocolatée(s) (B) à 1€, un nombre quelconque de pomme(s) (P) à 1€, et un nombre quelconque de pain(s) au chocolat (C) à 2€. Si je dispose d'une somme de 5€, je pourrais par exemple composer mon goûter avec une barre chocolatée suivie de deux pains au chocolat (BCC) ou bien avec un pain au chocolat suivi de trois pommes (CPPP) ou bien encore avec un pain au chocolat suivi d'une barre chocolatée puis encore un pain au chocolat (CBC). Notez bien que l'ordre est pris en compte puisque la composition BCC est considérée différente de la composition CBC (bien qu'au final on mange la même chose mais pas dans le même ordre). On note G_n le nombre de compositions de goûters différents que l'on peut acheter avec n euros.

1. Déterminez G_1, G_2 et G_3 en donnant les compositions correspondantes. (1 point)
2. Montrez que pour $n \geq 3$ on a $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$. (3 points)
3. Résolvez l'équation de récurrence du point précédent. (2 points)

Exercice 3 - Bientôt la fête des mères

C'est bientôt la fête des mères et l'examen d'OFI peut être l'occasion d'un cadeau un quelque peu original. Considérez le langage L défini sur l'alphabet $\{a, m\}$ dont les mots satisfont (toutes) les règles suivantes :

— a peut être suivi par ε, m ou mm mais pas par a ;
— m peut être suivi par ε, a ou m à condition qu'on ne trouve pas plus de deux lettres m consécutives ;

Distribué le 30 avril 2019.

— mm doit être suivi par a ;
— un mot ne peut commencer ou terminer par mm.

Par exemple, les mots $mam, mama$ et $mamma$ font partie de L mais pas amm ou $mammma$.

1. Écrivez tous mots de L de longueur k pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. [1 points]
2. Trouvez une expression régulière pour L. [3 points]
3. Donnez une définition inductive du langage L. [2 points]
4. Est-ce que votre définition est ambigüe (et pourquoi) ? Si elle est ambigüe, donnez une version non-ambigüe. [2 points]