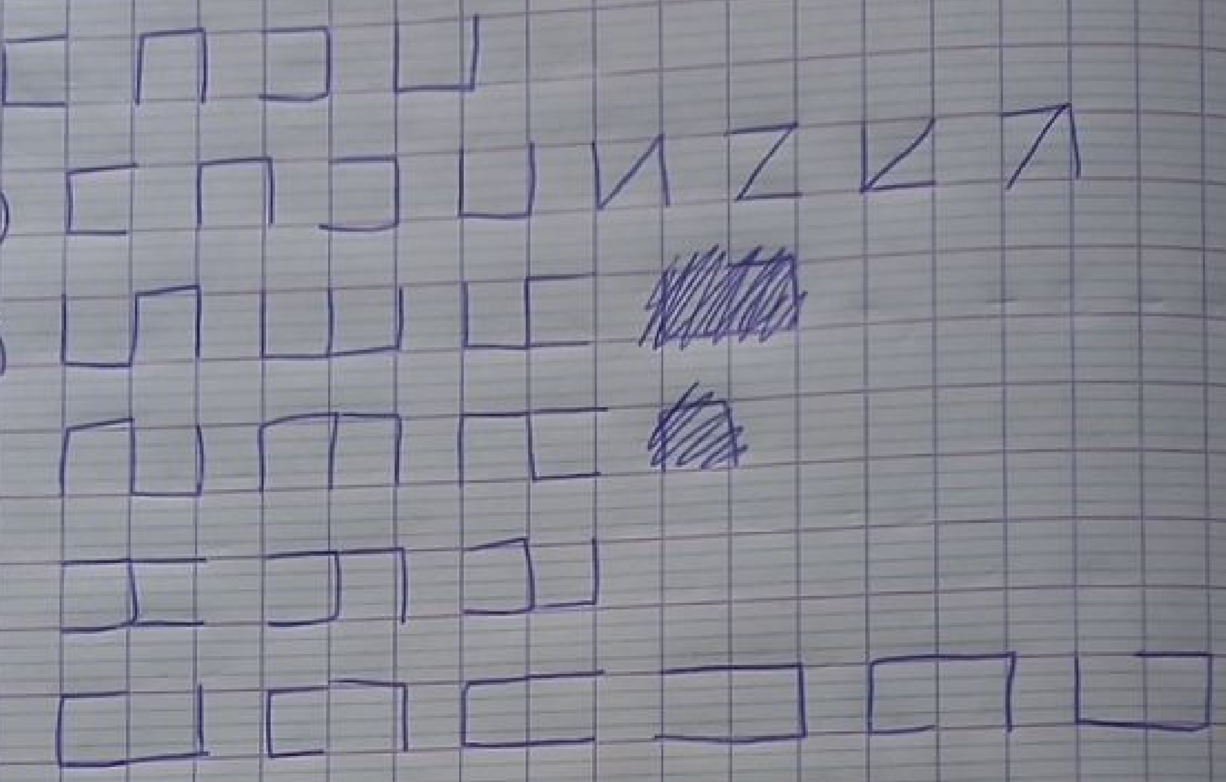
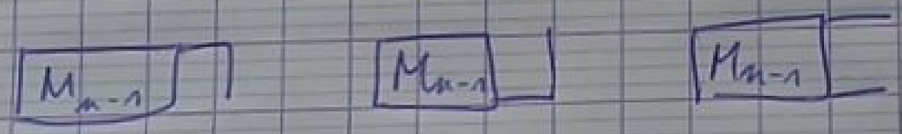
Examen 2018/2019

Exercice 1

1. a) b) c)



2. 3 façon de créer un arbre courant de M_n à partir de M_{n-1}



Si l'arbre de M_{n-1} peut accepter un ⊐

il y a une quatrième façon

Notons T_n le nombre d'ordre finissant par ⊐

$T_1 = 1 \qquad T_2 = 3 \qquad T_3 = 5$

$$T_n = T_{n-1} + 2 \qquad T_n = 2n-1$$

$$M_n = 3M_{n-1} + T_n$$
$$3M_{n-1} = 3^2 M_{n-2} + 3T_{n-1}$$
$$3^2 M_{n-2} = 3^3 M_{n-3} + 3^2 T_{n-1}$$
$$3^{n-1} M_1 = 3^{n-1} \times 4$$

$$M_n = 3^{n-1} \times 4 + \sum_{i=2}^{n} T_i \cdot 3^{n-i} = 3^{n-1} \times 4 + \sum_{i=2}^{n} (2i+1) 3^{n-i}$$

Exercice 2

1. $G_1 = \{B, P\}$
$G_2 = \{BP, BB, PB, PP, C\}$
$G_3 = \{BPB, BPP, BBB, BBP, PBB, PBP, PPB, PPP, CB, CP, BC, \cancel{BP}\ PC\}$

2. $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$
Le $2G_{n-1}$ correspond à toutes les possibilités precedentes auxquelles on ajoute soit B, soit P.
Donc c'est bien 2 fois les possibilités précédentes.
Le G_{n-2} correspond à toutes les possibilités 2 temps avant auxquelles on ajoute C. Comme il n'y a que une possibilités de combinaison, on ne la rajoute qu'une fois.

3. $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$
$X^n = 2X^{n-1} + X^{n-2}$
$X^2 = 2X + 1$
$X^2 - 2X - 1 = 0$ $\Delta = 8$
$x_1 = 1-\sqrt{2}$ $x_2 = 1+\sqrt{2}$

$$G_n = a \times (1-\sqrt{2})^n + b(1+\sqrt{2})^n$$

$$\begin{cases} G_1 = 2 = a \times (1-\sqrt{2}) + b \times (1+\sqrt{2}) \\ G_2 = 5 = a \times (1-\sqrt{2})^2 + b \times (1+\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ $b = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$$G_n = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)(1-\sqrt{2})^n + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)(1+\sqrt{2})^n$$

Exercice 3

1. $k=0$ ε

$k=1$ m, a

$k=2$ ma, am

$k=3$ mam, ama

$k=4$ $mama$, $amma$, $amam$

2. $(m+\varepsilon)(am+amm)^*(a+am) + \varepsilon + m$

3. • Si $x \in L$ et si x commence par "a" alors $mx \in L$ et $ammx \in L$

• Si $x \in L$ et si x commence par "m" alors $ax \in L$ et $am \in L$

• Si $x \in L$ et si x finit par "a" alors $xm \in L$ et $xmma \in L$

• Si $x \in L$ et si x finit par "m" alors $xa \in L$ et $xma \in L$

• Si $x = \varepsilon$ alors xa et $xm \in L$