Exercice 1 - De l'amour

Formaliser les assertions suivantes en utilisant le prédicat $p(x, y) =$ « x aime y » :

1. tout le monde aime quelqu'un ;
2. quelqu'un est aimé par tout le monde ;
3. si l'on aime alors on aime une seule personne.

1) $p(x,y) =$ "x aime y"   eq

$\forall x \exists y \ p(x,y)$

2) $\exists y \forall x \ p(x,y)$

3) $\forall x \ \exists y \ p(x,y) \rightarrow (\forall z \ p(x,z) \rightarrow eq(z,y))$

Exercice 2 - Hommes et immortalité

Considérez les trois prédicats suivants :

$$h(x) = \text{« } x \text{ est un homme »}$$
$$m(x) = \text{« } x \text{ est mortel »}$$
$$g(x) = \text{« } x \text{ est grec »}$$

Écrivez des formules pour les énoncés suivants puis dites quelles sont les relations entre ces formules (par exemple : est-ce que 1. implique 2. ?) :

1. Tous les hommes sont mortels ;
2. tous les hommes sont immortels ;
3. aucun homme n'est mortel ;
4. aucun homme n'est immortel ;
5. il existe un homme immortel ;
6. il existe un homme mortel.

1) $\forall x \; h(x) \to m(x)$

2) $\forall x \; h(x) \to \neg m(x)$

3) $\hat{m}$ chose que 2)

4) $\hat{m}$ que 1)

5) $\exists x \; h(x) \wedge \neg m(x)$

6) $\exists x \; h(x) \wedge m(x)$

Exercice 3 - Les curés et les vélos

Soient les prédicats c(x) : « x est un curé » ; v(x) : « x est un vélo » ; p(x,y) : « x possède y » et e(x,y) : « x égale y ». Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x\,(v(x) \rightarrow (\exists z\, c(z) \wedge p(z,x)))$
2. $\forall x\, c(x) \rightarrow (\forall z\, \forall y\, (v(z) \wedge v(y) \wedge \neg e(z,y)) \rightarrow (\neg p(x,y) \vee \neg p(x,z)))$
3. $\exists x\, c(x) \wedge (\forall y\, v(y) \rightarrow \neg p(x,y))$

1) $\underbrace{\forall x}_{\text{pour tout}}\ (\underbrace{v(x)}_{\text{vélo}} \rightarrow (\underbrace{\exists z}_{\text{il existe}}\ \underbrace{c(z)}_{\text{un curé}} \wedge \underbrace{p(z,x)}_{\text{qui le possède}}))$

pour tout vélo il existe un curé qui le possède

2) tout curé possède au plus un vélo

traduction plus littérale :

"pour tout curé s'il y a deux vélos distincts alors il ne possède pas l'une ou l'autre" mais attention que le ou ici est vrai si l'un ($\neg p(x,y)$) ou l'autre ($\neg p(x,z)$) ou les deux sont à vrai...

3) Il y a un curé qui ne possède pas de vélo.

Exercice 4

Pour chaque formule, donner une interprétation qui la rend vraie et une qui la rend fausse :

1. $(\forall x)(\exists y)(p(x,y))$
2. $(\exists x)\, p(x) \to (\forall x)\, p(x)$
3. $(p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z)$

4. $p(x) \to \neg p(x)$

D = domaine
p(x,y) = prédicat binaire
p(x) = prédicat unaire

1) VRAI : $D = \mathbb{N}$, $p(x,y) = <$ "l'ens. des naturel n'est pas borné"
FAUX : $D = \mathbb{N}$, $p(x,y) = >$ "Tout entier possède un minorant"

2) $\exists x\, p(x) \to \forall x\, p(x) \approx \neg(\exists x\, p(x)) \vee \forall x\, p(x)$

$\approx \forall x \neg p(x) \vee \forall x\, p(x)$

VRAI : $D = \mathbb{N}$ $p(x) =$ "x est un entier"
FAUX : $D = \mathbb{N}$ $p(x) =$ "x est pair"

3) cette formule possède 3 variables libres

VRAI : $D = \mathbb{N}$ $p(x,y) = x \leq y$

FAUX : D = "droites du plan 2D" $p(x,y) =$ "x est perpendiculaire à y"
(voir TD n° 1 ou 2)

4) $p(x) \to \neg p(x) \approx \neg p(x)$

VRAI : $D = \mathbb{N}$ $p(x) =$ "x est le plus grand entier"
FAUX : $D = \mathbb{N}$ $p(x) =$ "x est plus grand ou égal à 0"

Exercice 5

Écrire la négation des formules suivantes :

1. $\forall x (p(x) \to q(x))$
2. $\exists x\, (p(x) \land q(x))$
3. $\forall x (p(x) \leftrightarrow q(x))$
4. $\forall x \exists y (p(x,y) \to (\forall z\, r(z)))$

1) $\neg(\forall x \; p(x) \to q(x)) \approx \neg(\forall x \; \neg p(x) \lor q(x)) \approx \exists x \neg(\neg p(x) \lor q(x))$

$\approx \exists x \; p(x) \land \neg q(x)$

2) $\neg \exists x (p(x) \land q(x)) \approx \forall x \neg (p(x) \land q(x)) \approx \forall x \; \neg p(x) \lor \neg q(x)$

$\approx \forall x \; p(x) \to \neg q(x)$

3) $\neg(\forall x \; p(x) \leftrightarrow q(x)) \approx \exists x \; \neg(p(x) \leftrightarrow q(x)) \approx \exists x \; \neg((p(x) \to q(x)) \land (q(x) \to p(x)))$

$\approx \exists x \; \neg(p(x) \to q(x)) \lor \neg(q(x) \to p(x))$

$\approx \exists x \; (p(x) \land \neg q(x)) \lor (q(x) \land \neg p(x))$

4) $\neg \; \forall x \exists y (p(x,y) \to \forall z \, r(z)) \approx \exists x \neg \exists y (p(x,y) \to \forall z \; r(z))$

$\approx \exists x \; \forall y \neg (p(x,y) \to \forall z \; r(z)) \approx \exists x \forall y \;\; p(x,y) \land \neg \forall z \; r(z)$

$\approx \exists x \forall y \;\; p(x,y) \land \exists z \neg r(z) \approx \exists x \forall y \exists z \;\; p(x,y) \land \neg r(z)$ attention ici !

Exercice 6 - Tout en un : formules, structures et premier ordre!

Considérez les structures suivantes :

1) $L_1 = \{c, *\}$	$\mathfrak{U}_1 = \{\mathbb{N}, \times\}$	$\mathfrak{V}_1 = \{\mathbb{Z}, \times\}$
2) $L_2 = \{c, d, \oplus, *\}$	$\mathfrak{U}_2 = \{\mathbb{R}, 0, 1, +, \times\}$	$\mathfrak{V}_2 = \{\mathbb{Q}, 0, 1, +, \times\}$
3) $L_3 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_3 = \{\mathbb{Z}, \equiv_2\}$	$\mathfrak{V}_3 = \{\mathbb{Z}, \equiv_3\}$

où $+$ et $\times$ sont les opérations habituelles de somme et produit, $\equiv_k$ est la relation de congruence modulo k et c, d sont des constantes. Pour $i = 1, 2, 3$ proposez une formule close (*i.e.* sans variables libres) qui est vraie dans $\mathfrak{U}_i$ et fausse dans $\mathfrak{V}_i$.

→ relation de congruence modulo 2

→ " " " " 3

1) Pour U_1 on interprète c comme 1 et $*$ comme $\times$

D_1 pareil

si l'on considère la formule :

$$\exists x \quad x * x = c \rightarrow (\forall y \ \neg(x = y) \rightarrow \neg(y * y = c))$$

elle est vraie dans U_1 mais fausse dans D_1

2) on interprète c comme 0 dans les deux modèles

d " 1

$\oplus$ " $+$

$*$ " $\times$

Alors la formule

$\exists x \quad x * x = d \oplus d$ est vraie dans U_2 et fausse dans D_2

3) Il faut s'imaginer une propriété qui soit différente entre les deux domaines et puis le traduire en formules.
Idée : dans $\langle \mathbb{Z}, \equiv_2 \rangle$ tous les nombres sont soit congrus à 0 ou à 1, ce qui n'est pas le cas dans $\langle \mathbb{Z}, \equiv_3 \rangle$

$$\forall x \forall y \forall z \quad x R y \vee y R z \vee x R z$$

qui est vraie si l'on interprète R comme $\equiv_2$ (car sur trois nombres il y en a sûrement deux qui sont dans la même classe de restes) et fausse si on interprète R comme $\equiv_3$.