Exercice 1

Un programme utilise les objets d'une classe `Date`.

1. Proposez une description de l'ensemble E des objets possibles.
2. Quel est le cardinal de E ?

Solution.

Pour un objet 'Date' il faut au grand minimum :

Jour : $\{1, \dots, 31\}$

mois : $\{1, \dots, 12\}$

année : $\{1900, \dots, 2100\}$

astuce : au lieu d'utiliser ceci mieux vaut se le représenter comme $1900 + \{0, \dots, 200\}$

ne pouvant pas représenter toutes les années possibles nous choisissons une plage 'raisonnable'

Du coup $|E| = |\text{Jour} \times \text{mois} \times \text{année}|$

$= |\text{Jour}| \cdot |\text{mois}| \cdot |\text{année}| = 31 \cdot 12 \cdot 201$

Exercice 2 - Attention !

On appelle B l'alphabet binaire $\{0, 1\}$.

1. Est-ce que $\{0\} \subseteq \emptyset$? $\{0\} \in B$? $\{0\} \in \mathcal{P}(B)$?
2. A-t-on $B \subseteq B$?
3. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(B)$?
4. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$?
5. Même questions pour $\emptyset$ à la place de B.

1) $\{0\} \subseteq \emptyset$? Non ! En effet l'ens. vide ne contient rien...

$\{0\} \in B$? Non ! En effet B contient deux éléments (0 et 1) et pas l'ensemble qui contient l'élém. 0

$\{0\} \in \mathcal{P}(B)$? Oui ! En effet $\mathcal{P}(B)$ contient toutes les boites qui peuvent être fabriquées en choisissant (ou pas) des éléments de B.

2) $B \subseteq B$? Oui !

3) $$\mathcal{P}(B) = \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{card } 0}, \underbrace{\{0\}, \{1\}}_{\text{card } 1}, \underbrace{B}_{\text{card } 2} \}$$

← stratégie : on choisit d'abord les boîtes avec 0 élém, puis celles avec 1, ensuite avec 2...

4) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, B\})$

$$= \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{card } 0}, \underbrace{\{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{B\}}_{\text{card } 1}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\},$$

$$\underbrace{\{\emptyset, B\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, B\}, \{\{1\}, B\}}_{\text{card } 2}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\},$$

$$\underbrace{\{\emptyset, \{0\}, B\}, \{\emptyset, \{1\}, B\}, \{\{0\}, \{1\}, B\}}_{\text{card } 3}, \underbrace{\mathcal{P}(B)}_{\text{card } 4} \}$$

5) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{card } 0}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{\text{card } 1} \}$$

Exercice 3 - Un grand classique

Une enquête révèle que sur 100 étudiants interrogés, 52 suivent le cours de mathématiques, 52 suivent le cours d'informatique, 37 suivent le cours d'économie, 20 suivent les cours de mathématiques et d'informatique, 15 suivent les cours de mathématiques et d'économie, 10 suivent les cours d'informatique et d'économie, et enfin, 3 suivent les trois cours. Sur ces 100 étudiants, combien y en a-t-il

1. qui ne suivent aucun de ces trois cours ?
2. qui ne suivent que le cours d'informatique ?
3. qui suivent au moins deux des trois cours ?
4. qui suivent exactement deux des trois cours ?

$T = 100$

$M = 52$ $\quad MI = 20$

$I = 52$ $\quad ME = 15$

$E = 37$ $\quad IE = 10$

$MIE = 3$

Solution.

1) $|T \setminus (M \cup I \cup E)| = ?$

$|M \cup I \cup E| =$

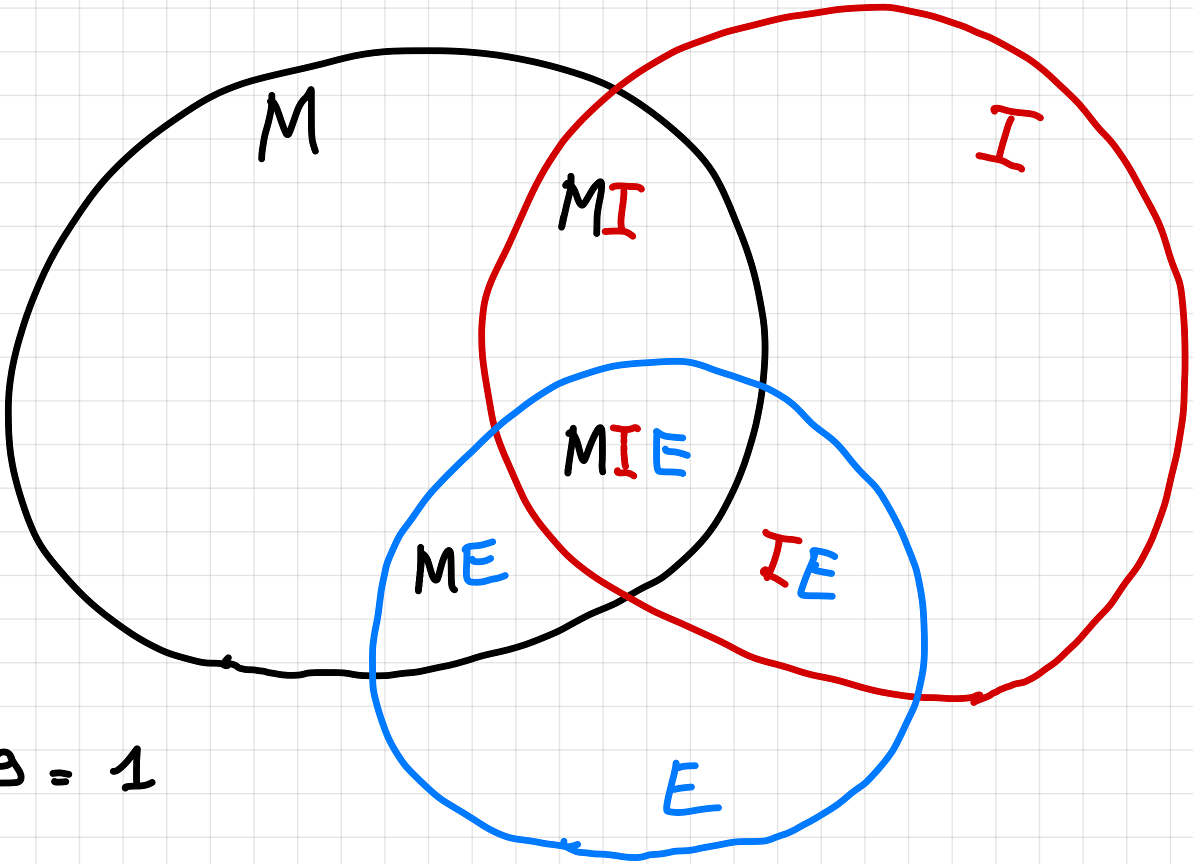
$= |M| + |I| + |E|$

$- |MI| - |IE| - |ME|$

$+ |MIE|$

(formule du cribble)

du coup $|T \setminus (M \cup I \cup E)| = 100 - 99 = 1$



2) $|I \setminus (MI \cup IE)| = ?$

$$|I \setminus (MI \cup IE)| = |I| - |MI| - |IE| + |MIE|$$

car on a enlevé $|MIE|$ 2 fois : une ici et une ici ; or il fallait l'enlever qu'une fois donc on rajoute $|MIE|$ pour rééquilibrer....

3) $|MI \cup ME \cup IE| = ?$

attention : nous n'avons pas rajouté l'union de MIE (ceux qui suivent 3 cours) car ceci est déjà à l'interieur de MI...

$$|MI \cup ME \cup IE| = |MI| + |ME| + |IE| - 2 \cdot |MIE|$$

car nous l'avons compté trois fois précédement et il fallait le compter qu'une fois

4) $|(MI \cup ME \cup IE) \setminus MIE| = ?$

$$|(MI \cup ME \cup IE) \setminus MIE| = |MI| + |ME| + |IE| - 3 \cdot |MIE|$$

ici $|MIE|$ il faut le compter 0 fois car nous voulons ceux font 2 cours seulement

Exercice 4

On s'intéresse à la dénombrabilité de l'ensemble F des parties finies de $\mathbb{N}$.

1. Montrez qu'il y a bijection entre l'ensemble F et l'ensemble des mots sur l'alphabet $B = \{0, 1\}$, noté B^*.
2. Montrez que l'ensemble B^* est dénombrable.
3. Déduisez-en que l'ensemble F est lui-même dénombrable.

Rappel : la fonction caractéristique de B est

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{N}$

1) Idée on va se servir de la fonction caractéristique pour définir l'encodage e qui réalisera la bijection.

Soit $B \in F$ alors on lui associe le mot suivant :

$$\chi_B(0)\,\chi_B(1)\,\chi_B(2)\ldots\ldots\chi_B(m-1)$$

où $m = \max B$.

Exemple :

Soit $B = \{1, 2, 4\}$ alors on lui associe $\underset{0}{\chi_B(0)}\,\underset{1}{\chi_B(1)}\,\underset{1}{\chi_B(2)}\,\underset{0}{\chi_B(3)}$

donc $\{1,2,4\} \xrightarrow{e} 0110$

Notre encodage semble bien fonctionner mais si l'on fait un peu plus attention on se rend compte qu'on ne savait encoder '0'. Du coup on modifie notre encodage comme suit :

$S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ $\quad M = \max S$ et $S \neq \emptyset$

$$e(S) = \begin{cases} \chi_S(0)\chi_S(1)\cdots\chi_S(M-1) & \text{si } M > 0 \\ \varepsilon & \text{si } M = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire pour l'instant on laisse de coté l'ensemble vide.

On s'occupera du vide tout à la fin.

Ainsi on a, par exemple :

$e(\{0\}) = \varepsilon$ $\qquad e(\{1,2\}) = 01$

$e(\{1\}) = 0$ $\qquad e(\{0,2\}) = 10$

$e(\{0,1\}) = 1$ $\qquad e(\{0,1,2\}) = 11$

$e(\{2\}) = 00$ $\qquad$ et ainsi de suite...

- Montrons qu'il s'agit d'une injection.
En effet, soyent $U, V \subseteq \mathbb{N}$ distincts. S'ils sont distinct c'est qu'il y a un élément p dans U qui n'est pas dans V et/ou vice-versa. Supposons que ce soit donc $p \in U$ et $p \notin V$. Alors à la position $p+1$ de l'encodage de U on trouvera $\chi_U(p) = 1$ et à la même position de l'encodage de V on trouvera $\chi_V(p) = 0$ (si le max de V est $> p$, sinon on trouvera rien du tout...). Donc les deux encodages sont différents. Le cas $p \in V$ et $p \notin U$ est parfaitement similaire.
- Montrons qu'il s'agit d'une surjection.
Soit $w = w_0 w_1 \dots w_n$ un mot de B^*.
Soit A l'ensemble $\{ i \in \mathbb{N} \mid w_i = 1 \} \cup \{n+1\}$ si $w \neq \varepsilon$
$A = \{0\}$ sinon.
Il est évident que A est une préimage de l'encodage $e()$.
$e()$ est donc surjectif.

2) Pour répondre à la question construisons une bijection f entre B^* et $\mathbb{N}$

Rappelons-nous tout d'abord de la fonction DEC qui prend en entrée un mot du type $w_0 w_1 w_2 \dots w_n 1$

chaque w_i peut être soit 0 soit 1

poid fort

et nous renvoye la représentation décimale du nombre $w_0 \dots w_n 1$.

De cette manière on règle la question pour tout mot binaire avec un 1 à droite, le problème est ce qu'on fait avec les mots qui terminent avec un 0 à droite ?

Pour palier à cet inconvenient on adoptera la même astuce que précédement : on ajoute un symbole 1 à tout mot.

Donc en résumant :

pour chaque mots binaire $w_0 \dots w_n$

$$f(w_0 \dots w_n) = DEC(w_0 \dots w_n 1) - 1$$

nous avons ajouté ceci pour faire en sorte que ε soit encodé par 0

- injectivité : soyent $\alpha_0 \dots \alpha_m$ et $\beta_0 \dots \beta_n$ deux mots binaires
  - si $m > n$ alors il clair que $DEC(\alpha_0 \dots \alpha_m 1) > DEC(\beta_0 \dots \beta_n 1)$
  - si $m < n$ " " " " $DEC(\beta_0 \dots \beta_n 1) > DEC(\alpha_0 \dots \alpha_m 1)$
  - si $m = n$ alors il existe J tq $\alpha_J \neq \beta_J$ et donc $DEC(\alpha_0 \dots \alpha_n 1) \neq DEC(\beta_0 \dots \beta_n 1)$.

- surjectivité : on doit montrer que pour chaque entier n il existe un mot binaire $w_0 \dots w_k$ tq. $f(w_0 \dots w_k) = n$ ce qui revient à dire $DEC(w_0 \dots w_k 1) = n+1$. Maintenant c'est banal car nous savons que la fonction DEC est surjective.

3) Nous avons

$$F \setminus \emptyset \xrightarrow{e} B^* \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$

donc $f \circ e : F \to \mathbb{N}$ est une bijection car composition de bijections. On conclut que $F \setminus \{\emptyset\}$ est dénombrable. Proposez une idée pour rendre $f \circ e$ une bijection de F tout entier vers $\mathbb{N}$.

Exercice 5

Dans un club de tennis, tous les membres jouent mais il y a ceux qui ne changent pas souvent d'adversaires et ceux qui en changent sans arrêt. Démontrez qu'il y a au moins deux joueurs qui ont déjà joué contre le même nombre d'adversaires.

Il s'agit ici de l'exercice dont on a parlé lors du premiers cours. Remarquons que pour un joueur X donné il pourra avoir joué, grand maximum, contre $n-1$ adversaires

distincts, si n est le nombre de membres du club.
Remarquez qu'on a mis $n-1$ car il est clair que X ne peut jouer contre sois-même :-)
Donc à chaque membre X on associera un entier n_x qui est compris entre 1 et $n-1$. Nous avons donc n nombres de type n_x qui doivent prendre une valeur $\leq n-1$
Par le lemme des tiroirs et des chaussettes il y aura au moins X et Y (joueurs) avec $n_x = n_y$.

Le secret ici est de comprendre qui joue le rôle des tiroirs et qui celui des chaussettes !

Exercice 6

On s'intéresse à présent à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tout entier.

1. Montrez qu'il y a une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et l'ensemble S des suites infinies de 0 et de 1.
2. En utilisant la méthode diagonale de Cantor, montrez que l'ensemble S n'est pas dénombrable.
3. Déduisez-en que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

1) On s'inspire de ce que nous avons déjà fait précédement à l'ex. 4. On va définir une fonction $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

ens. des séquences infinie de 0 et 1

f associe à tout ens. (fini ou infini) d'entiers A la séquence infinie

$$\chi_A(0)\,\chi_A(1)\,\chi_A(2)\ldots\ \chi_A(n)\ldots$$

Exemple : soit $A = 2\mathbb{N}$ c'est-à-dire A c'est les entiers pairs

alors $f(A) = \chi_A(0)\chi_A(1)\chi_A(2)\chi_A(3)\ldots$

$= 1\,0\,1\,0\,1\,0 \ldots 1010 \ldots$ $\Leftarrow$ séquence alternée de 0 et 1 commençante par 1.

- injectivité : soyent $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ deux ens. d'entiers distincts.

Comme $A \neq B$ il existe un entier p qui est dans l'un ens. mais pas dans l'autre, à cet endroit pour l'un on trouvera 0 et pour l'autre on trouvera 1 (voir la construction)

Donc $f(A) \neq f(B)$.

- surjectivité : évidente par construction.

2) preuve identique à celle vue en cours à l'exception qu'ici on a un alphabet binaire et non $\{0,1,\dots,9\}$

3) clair car nous venons de démontrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont en bijection entre eux.

Exercice 7

Montrez que $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ est dénombrable.

Trivial. $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ et donc la fonction identité $I : \mathbb{N} \setminus \{3\} \to \mathbb{N} \setminus \{3\}$ réalise une bijection entre $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ et une partie de $\mathbb{N}$:)

Exercice 8

Montrez que si l'on prend 5 entiers entre 1 et 8 distincts alors il y en a au moins deux dont la somme est 9.

Considérons d'abord quelles sont les paires d'entiers entre 1 et 8 dont la somme donne 9.

On trouve alors :

1, 8
2, 7
3, 6
4, 5

on remarque tout de suite que ces paires donnent tous les nombres entre 1 et 8 et que c'est impossible de prendre 5 nombres sans tomber dans l'une de ces paires !

En effet c'est encore un cas d'application du lemme des tiroirs et des chaussettes :

4 tiroirs = les paires
5 chaussettes = les nombres à choisir.

FIN!