Relations, fonctions, ordres

Exercice 1

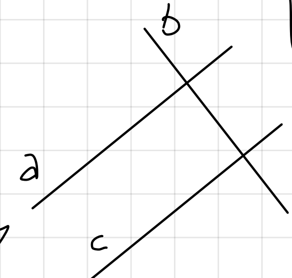
Donner les propriétés des relations suivantes parmi les cinq possibles (réflexive, irréflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive) :

1. la relation d'égalité sur les entiers.
2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites.
3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites.
4. la relation "est le carré de" sur les entiers.
5. la relation "avoir un côté de même longueur" sur l'ensemble des triangles.

En déduire lesquelles sont des ordres et lesquelles sont des relations d'équivalence.

1) 1.
refl. oui
irrefl non
sym. oui
anti sym oui
transitivité oui

2.
refl. non
irrefl. oui
sym. oui
antisym. non
trans. non



contre exemple pour la non-transitivité

3.
refl. oui
irrefl. non
sym. oui
anti sym. non
trans oui

4. a est le carré de b si $a = b^2$.

refl. non
irrefl. non
sym. non
antisym. oui

↳ en effet si $a = b^2$ et $b = a^2$

alors $a = a^2$ et donc $a = b = 1$ ou $a = b = 0$

Alors

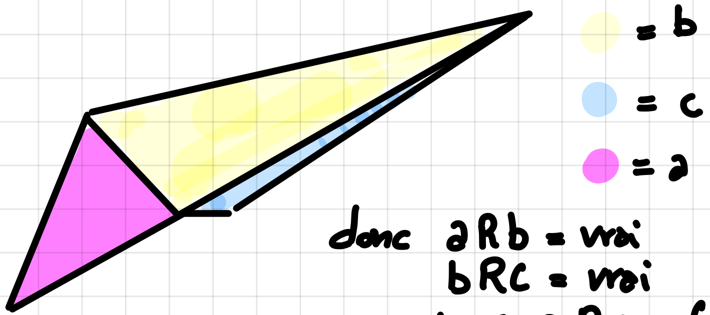
si $a = b = 1$ antisym ok
si $a = b = 0$ // ok

si $a \neq b$ alors aRb = faux
bRa = faux

et donc F et F → a = b est toujours vrai

donc la propriété est vérifiée aussi dans ce dernier cas.

5.
refl. oui
irr. non
sym. oui
antisym non
trans. non



donc aRb = vrai
bRc = vrai
mais aRc = faux

donc
$\underbrace{\underbrace{\underset{V}{aRb} \text{ et } \underset{V}{bRc}}_{V} \to \underset{F}{aRc}}_{\text{faux}}$

Exercice 2

Que peut-on dire d'une relation qui est symétrique et antisymétrique ?

Si R est symétrique alors $\forall x, y \in X \quad xRy \leftrightarrow yRx$ $(*)$

Si R est antisymétrique alors $\forall x, y \in X$, xRy <u>et</u> $yRx \rightarrow x = y$ $(**)$

Donc on conclut que si xRy alors $x = y$ et donc R est une <u>sous-relation</u> de l'égalité.

On dit sous-relation et pas que c'est l'identité car il se pourrait que pour certain éléments $x \not R y$ et donc par $(*)$ $y \not R x$ mais $(**)$ est quand même vérifiée.

Exercice 3

Considérez deux relations R et S sur un ensemble E. Montrez que

1. si R et S sont réflexives alors $R \cap S$ l'est aussi ;
2. si R et S sont réflexives alors $R \cup S$ l'est aussi.

1. Si R est reflexive alors $\forall x \in E \quad xRx$

   Si S est reflexive alors $\forall x \in E \quad xSx$

On conclut que $(x,x) \in R$ et $(x,x) \in S$ donc $(x,x) \in R \cap S$ et cela pour tout $x \in E$.

2. C'est trivial car $R \cap S \subseteq R \cup S$ et donc on peut conclure en utilisant le point précédent.

Exercice 4

Soit $R = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,3), (2,2), (3,0)\}$. Trouvez la fermeture transitive $R^\star$ de R.

Il faut d'abord donner la notion de fermeture transitive.

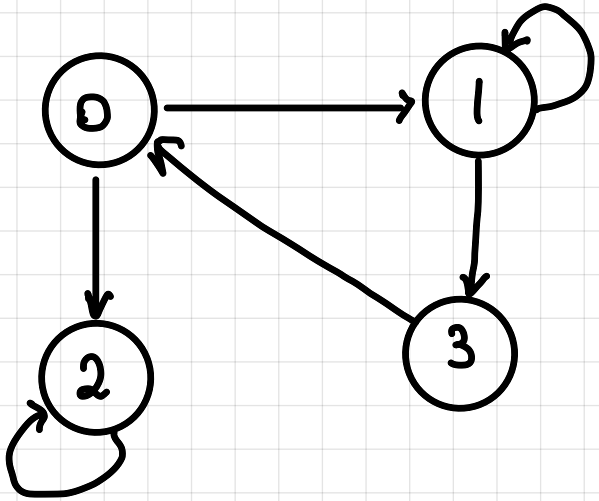
DEF. CHAÎNE D'UNE RELATION

Soit R une relation sur E. Une séquence $e_1, e_2, \dots, e_n$ est une chaîne pour R ssi $e_1 R e_2$, $e_2 R e_3, \dots, e_{n-1} R e_n$.

DEF. FERMETURE TRANSITIVE D'UNE RELATION

Soit R une relation sur E. La fermeture transitive $R^* \subseteq E \times E$ de R est telle que $\forall x, y \in E$, $x R^* y$ ssi il existe une chaîne pour R $e_1, e_2, \dots, e_n$ t.q. $e_1 = x$ et $e_n = y$.

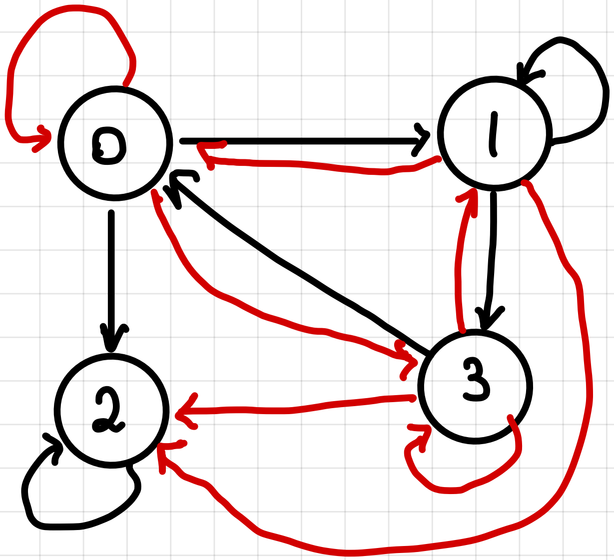
Venons à notre exercice. Dessinons le graphe de la relation



maintenant pour chaque paire de noeuds $x, y \in E$ on a $x R^* y$

Par exemple $0 R^* 0$ car $0 R 1$, $1 R 3$ et $3 R 0$

Si l'on teste toutes les paires possibles alors on trouve :



les arêtes en noir sont celles de R et donc elles sont par défaut dans R^*, les rouges sont celles que nous avons rajoutées.

Exercice 5

Est-ce que la relation $R = \{(0,1)\}$ est transitive ?

Il est clair que R est une relation sur $E = \{0,1\}$

Pour la transitivité de R il faut donc considérer deux cas :

1) xRy et yRz avec $x=0$ $y=1$ et z peu importe
comme $1Rz$ n'est jamais vrai alors

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{0R1}_{V} \text{ et } \underbrace{1Rz}_{F}}_{F} \longrightarrow \underbrace{0Rz}_{V \text{ ou } F}}_{V}$$

2) xRy et yRz avec $x=1$ on a que $1Ry$ est faux peu importe y donc

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1Ry}_{F} \text{ et } \underbrace{yRz}_{F/V}}_{F} \longrightarrow \underbrace{1Rz}_{F}}_{V}$$

Exercice 6

Considérez la relation R sur $\mathbb{N}$ définie comme suit :

$$xRy \text{ ssi } x = y \text{ ou } (x < y \text{ et } x \text{ est impair})$$

Montrez que R est un ordre. Dessinez le diagramme de Hasse pour les entiers inférieurs à 8. Est-ce que cet ordre a des éléments minimaux, des maximaux, un maximum ou minimum ?

- Reflexivité. La partie $x=y$ garantie la reflexivité (en effet c'est un 'ou' logique et donc il suffit que l'une de ses entrée soit vraie pour que le 'ou' soit vrai)
- Antisym.

si xRy on a deux possibilités

a) $x=y$ et donc l'antisymétrie est forcement vraie

b) $x<y$ et x impair mais alors yRx est obligatoirement faux et donc :

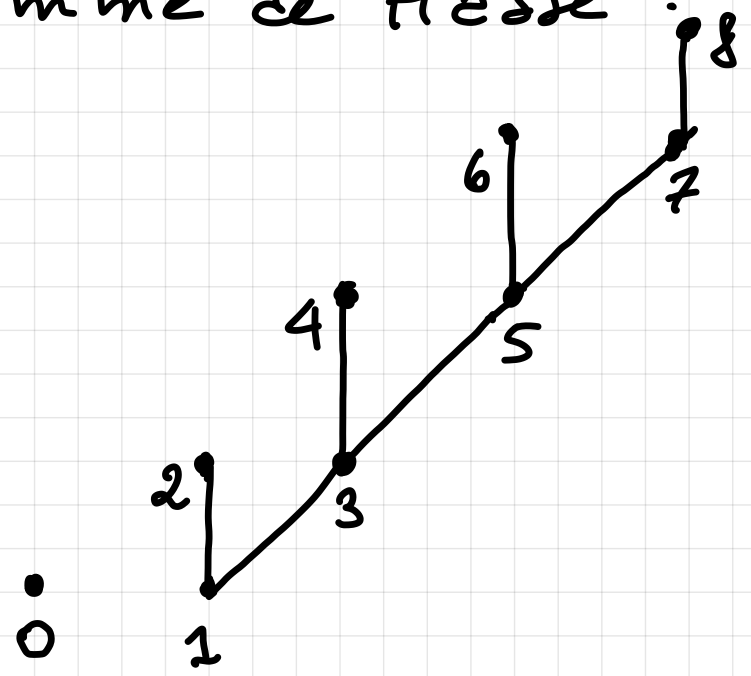
$$\underbrace{\underbrace{\underset{V}{xRy} \text{ et } \underset{F}{yRx}}_{F} \rightarrow x=y}_{V}$$

- Pour la transitivité on suppose xRy et yRz vraies on va montrer que cela entraine xRz vraie

Comme xRy est vrai alors on a 2 possibilités :

- $x=y$ et donc comme yRz on a xRz
- $x<y$ et x impair mais comme yRz est vrai on a deux sous-cas :
    - a) $y=z$ et donc $x<y=z$ et x impair donc par déf de R on a xRz
    - b) $y<z$ et y impair mais alors $x<y<z$ et donc $x<z$ et x impair c'est-à-dire xRz

Le diagramme de Hesse :



Exercice 7

Considérez un ensemble E de quatre éléments $\{a, b, c, d\}$ et les relations R_1, R_2, R_3 données par les matrices suivantes :

$$R_1 : \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R_2 : \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_3 : \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour chacune de ces relations dites quelles propriétés parmi les cinq habituelles elles ont.

R_1) réflexivité : non, car $b \not R b$
irréflexivité : non, car aRa
symétrie : oui car pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $m_{ij} = m_{ji}$
antisymêtrie : non, car bRa et aRb mais $a \neq b$
transitivité : non, car dRa et aRd mais $d \not R d$.

R_2) réfeexivité : oui, car $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $m_{ii} = 1$
irréflexivité : non, car aRa

symétrie : oui car $\forall i,j \in \{1 \dots n\}$ $m_{ij} = m_{ji}$

antisymétrie : non car dRa et aRd mais $a \neq d$

transitivité : oui car pour tout $i,j,k \in \{1, \dots, n\}$

si $m_{ik} == 1$ et $m_{kj} == 1$ alors $m_{ij} = 1$

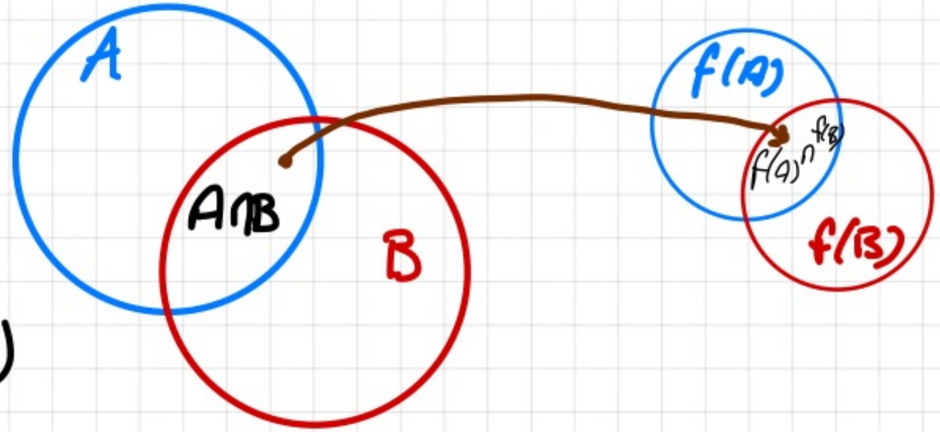
R_3) c'est l'identité donc on sait qu'elle est : réflexive, pas irréfl., sym. antisym (voir exercice 2) et transitive. ∎

TLP SVP

Exercice 8

Soit f une fonction d'un ensemble E vers F. Montrez que les trois affirmations suivante sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. pour tout $A, B \subseteq E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
3. pour tout $A, B \subseteq E$, $f(A \cap B) = \emptyset$ implique $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.



Montrons que 1) → 2)

Soit $x \in A \cap B$ alors $f(x) \in f(A \cap B)$

mais $x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$
$x \in B$ " $f(x) \in f(B)$ donc $f(x) \in f(A) \cap f(B)$

donc $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ || cela est indépendant du fait que f est injective ! C'est vrai pour toute fonction...

Montrons que si f injective alors
$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

Soit $y \in f(A) \cap f(B)$ et x sa pre-image via f. $x \in A \cap B$ car si par ex. $x \in A \setminus B$ alors il doit exister $x' \in B$ tq $f(x') = y$ mais alors f ne saurait être injective ; c'est similaire si $x \in B \setminus A$.

Si $x \in A \cap B$ alors $f(x) = y \in f(A \cap B)$.

Donc $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.

2) → 3) facile.

3) → 1) Soient $u, v \in E$ avec $u \neq v$ et posons $A = \{u\}$, $B = \{v\}$

remarquons que $A \cap B = \emptyset$ et donc $f(A \cap B) = \emptyset$ donc par 3) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

ce qui implique $f(u) \neq f(v)$.

Exercice 9

On considère l'ensemble E des vingt premiers entiers non nuls muni de la relation de divisibilité.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

1. Cette relation est-elle une relation d'ordre sur E ? d'ordre total sur E ? d'ordre strict sur E ? Pourquoi ?
2. Tracer le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur cet ensemble E.
3. Comment peut-on lire sur le diagramme précédent le PGCD et le PPCM des deux entiers 4 et 6 ?
4. Citer un élément minimal et un élément minimum pour cette relation d'ordre. Pouvez-vous citer un élément maximal ? un maximum ?

Ecrivons proprement la déf. de notre relation sur E :

$x R y$ ssi x divise y ssi $\exists b$ tq $y = bx$

Il est clair que R est réflexive car tout nombre non nul divise soi-même.

Pour l'antisymétrie :

supposons aRb et bRa donc il existe $c, d \in \mathbb{N}$ tq

$b = ac$ et $a = bd$ donc $b = ac = bdc$ donc $\cancel{b} = \cancel{b}dc \Rightarrow dc = 1$

mais comme on est sur les entier $dc = 1$ ssi $d = c = 1$ ce qui implique $a = b$ et donc la prop. de antisymétrie est vraie.

Il reste à montrer la transitivité :
si aRb et bRc alors il existe $u, v \in \mathbb{N}$ t.q.
$b = ua$ et $c = vb$ et donc $c = uva$ ce qui signifie que c est un multiple de a et donc aRc i.e. la transitivité est vérifiée.
Comme on a : réflexivité, antisymétrie et transitivité alors R est un ordre.

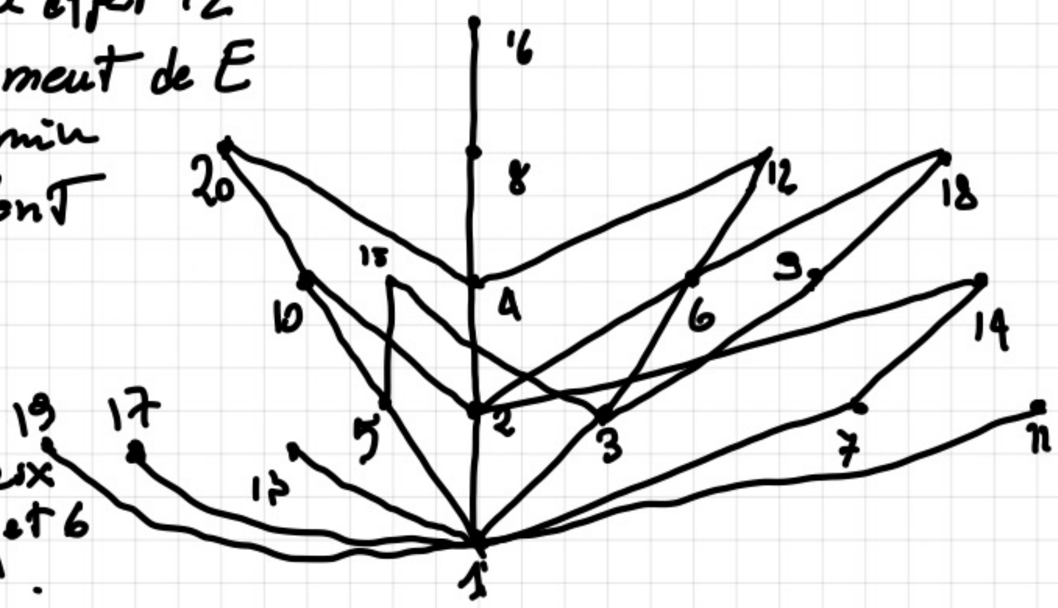
Remarquons que $3 \not R 5$ et $5 \not R 3$ donc R n'est pas un ordre total.
Ce n'est pas un ordre strict car, par exemple, $3R3$.

2)

orientation

PPCM(4,6) = 12 et en effet 12 est le plus petit element de E qui connecte un chemin sortant de 4 et allant vers le 'haut'

PGCD(4,6) = 2 car c'est le plus grand élément qui joigne deux chemins sortant de 4 et 6 et allant vers le 'bas'.



3) Elém minimal = 1 il est aussi le minimum. Exemple d'él maximal 16, pas de maximum car 17 et 19 sont élém maximaux incomparables !