Université Nice Sophia Antipolis
Enrico FORMENTI

Année ~~2022/23~~ 2023/24
PO2 SITE
TD OFI

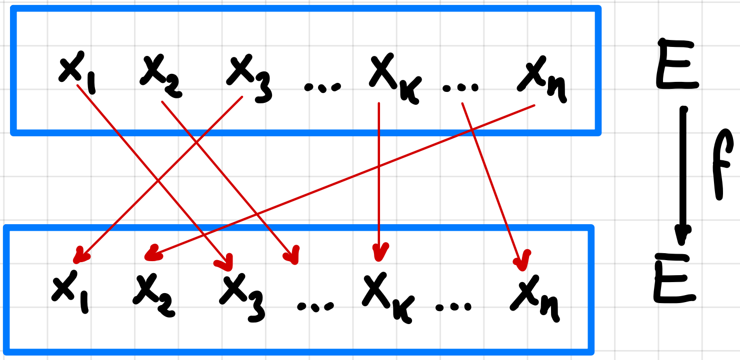
Dénombrement

Exercice 1 - Permutations et éléments invariants

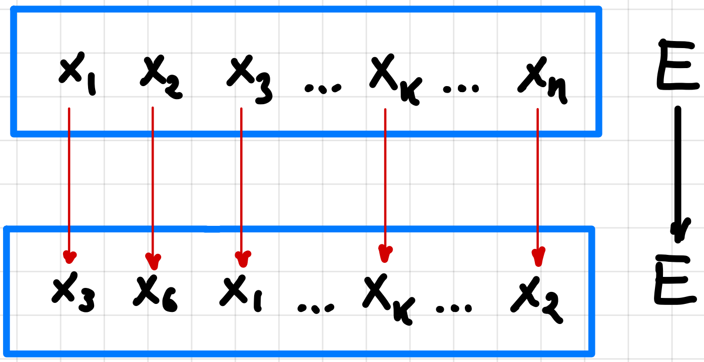
Si $k \leq n$, combien y-a-t il de permutations de n éléments qui laissent invariants *au moins* k éléments ? Et *exactement* k éléments ?

Rappelons la manière de représenter les permutations via la représentation saggitale (car après tout, il s'agit de fonctions) :

soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble à n éléments
alors



changeons légérement cette représentation :



on dit qu'un élément $x_k \in E$ est invariant pour f si $f(x_k) = x_k$
Pour completer notre reponse nous dévons aussi

introduire une nouvelle notion : les dérangements

DÉF.

Soit E un ensemble à n éléments. Nous appelons **dérangement** sur E toute permutation sur E ne laissant invariant aucun élément.

La formule suivante donne le nombre de dérangements sur un ens. à n éléments :

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

IDEA : si nous laissons invariants exactement k éléments alors tout autre élément ne peut être invariant

Donc le nombre de permutations laissant invariant exactement k éléments est

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nombre de manières de choisir les éléments inv.}} \cdot \underbrace{D_{n-k}}_{\text{nombre de dérangements à } n-k \text{ éléments}}$$

Donc pour compter les permutations laissant invariants au moins k éléments :

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} D_{n-j}$$

Exercice 2 - Des joueurs de football et des voitures

Pour se rendre en déplacement les 11 joueurs d'une équipe de football et leur entraineur utilisent 3 voitures identiques ayant chacune 4 places. De combien de façons ces 12 personnes peuvent- elles se répartir si toutes ont le permis de conduire ? Même question si 5 ne l'ont pas.

Précision : dans cet exercice on considère les joueurs indistinguables.

c'est la m̂ chose que le "problème des mariages" vu en cours :
à un mariage nous avons n invités et k tables chacune pouvant accueillir respectivement $t_1, t_2, \dots, t_k$ convives tels que

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = n$$

Alors le nombre de manières de distribuer le convives sur les tables est :

$$\frac{n!}{t_1! \cdot t_2! \cdot \dots \cdot t_k!}$$

donc dans notre cas :

$n = 12$
$k = 3$ et $t_1 = t_2 = t_3 = 4$

et donc $$\frac{12!}{4!\,4!\,4!}$$

Pour la deuxième question il convient de réfléchir d'abord sur comme distribuer les 5 personnes sans permis et puis voir comment completer les voitures avec les autres :

$\boxed{3}\quad\boxed{2}\quad\boxed{0}$ 3! possibilités

7 possibilites de completer la voiture avec ce nombre de personnes déjà dessus.

$\binom{6}{2}$ $\quad\binom{4}{4}=1$

Du coup au total on a:

$$\binom{5}{3}\cdot 3!\cdot 7\cdot\binom{6}{2}=10\cdot\cancel{6}^{\,3}\cdot 7\cdot\frac{\cancel{6!}^{\,6\cdot 5}}{\cancel{4!}\,\cancel{2!}_{\,1}}=6\,300 \text{ possib.}$$

$\boxed{3}\quad\boxed{1}\quad\boxed{1}$ 3 possibilités

1 possibilité

7 possibilités de completer

$\binom{6}{3}$ possibilités de completer

$$\text{Au total: }\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot 3\cdot 7\cdot\binom{6}{3}\cdot 1=20\cdot 3\cdot 7\cdot\frac{\cancel{6!}^{\,5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}}}{\cancel{3!}_{\,1}\,\cancel{3!}_{\,1}}=8400$$

$\boxed{2}\quad\boxed{2}\quad\boxed{1}$ 3 possibilités

1 possibilité

$\binom{7}{2}$ pour completer la voiture

$\binom{5}{2}$ pour completer la voiture

$$\text{Au total: }\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 3\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 1=30\cdot 3\cdot\frac{\cancel{7!}^{\,7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}}}{\cancel{5!}_{\,1}\,\cancel{2!}}\cdot\frac{\cancel{5!}^{\,1}}{\cancel{3!}_{\,1}\,\cancel{2!}}=18900$$

In fine: $6300+4800+18\,900=33600$ possibilités.

Dans les calculs précédents les nombres écrit en rouge représentent le nombre de façons de mettre les joueurs sens permis dans la 'configuration' courante.

On aurait pu faire autrement : compter les configurations interdites et ensuite les rétirer du total (celui calculé au point précédent i.e. 34650).

Donc

$$\binom{5}{4} \cdot 3 \cdot \binom{8}{4} \cdot 1 = 5 \cdot 3 \cdot \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4!}} = 210 \cdot 5 = 1050$$

façons de choisir les 4 sans permis à mettre dans une voiture

façons de choisir la voiture pour les 4 sans permis

façons de completer la deuxième voiture

façons de completer la dernière voiture

Donc : $34650 - 1050 = 33600$

Exercice 3 - Une application aux programmes informatiques

Quelle est la valeur de la variable "compteur" à la sortie du sous-programme ci-dessous ?

```
compteur ← 0
pour i de 1 à n faire
    pour j de 1 à n faire
        pour k de 1 à n faire
            compteur ← compteur + 1
```

Il est clair que la réponse est n^3 mais il faudrait que l'on justifie plus formellement cela.

Considérons maintenant ce nouveau programme :

```
compteur ← 0
pour i de 1 à n faire
    pour j de 1 à n faire
        pour k de j à n faire
            compteur ← compteur + 1
```

Révenons au progr. de départ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n = n\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1}_{=n}$$

$$= n\cdot\sum_{i=1}^{n} n = n^2\sum_{i=1}^{n} 1 = n^3$$

Pour la version modifiée :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{k=j}^{n} 1}_{=n-j+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n-j+1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} j}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^3 - \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} + \dots$$

$$= n^3 - \frac{n(n+1)}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1 + \dots = n^3 - \frac{n^2(n+1)}{2} + n^2$$

$$= \frac{2n^3 - n^3 - n^2 + 2n^2}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

Exercice 4 - Un peu de combinatoire sur les mots

— Quel est le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet binaire $A = \{0, 1\}$ comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 ? On supposera bien sûr que $p + q = n$.

— Combien y a-t-il de mots binaires commençant par 1 et de longueur inférieure ou égale à n ?

TSVP →

$$\overbrace{\underset{-}{o} \; - \; \underset{-}{o} \; \underset{-}{o} \; - \; \ldots \; - \; \underset{-}{o} \; -}^{n \text{ places}}$$

pour la 1ère partie

$$\binom{n}{p} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$$

pour la deuxième partie on doit compter tous les mots de taille au moins et au plus n qui commencent par 1 :

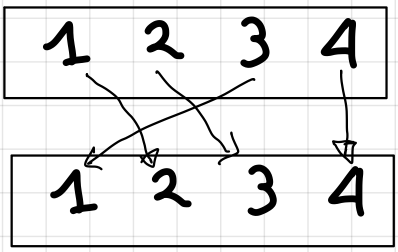
$$1 \underbrace{* * * \ldots *}_{\text{longueur } k}$$
$$= 2^k$$

donc au total : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$

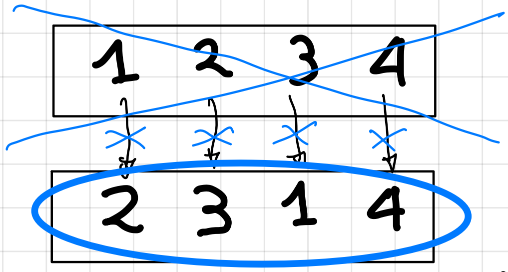
Exercice 5 - Permutations et motifs interdits

Parmi les permutations de 6 lettres a,b,c,d,e et f. Combien y en a-t-il qui n'admettent ni bde ni af comme facteur ? Combien y en a-t-il où les lettres sont dans l'ordre alphabétique ?

Avant d'attaquer la solution cherchons à avoir une représentation plus convenable d'une permutation



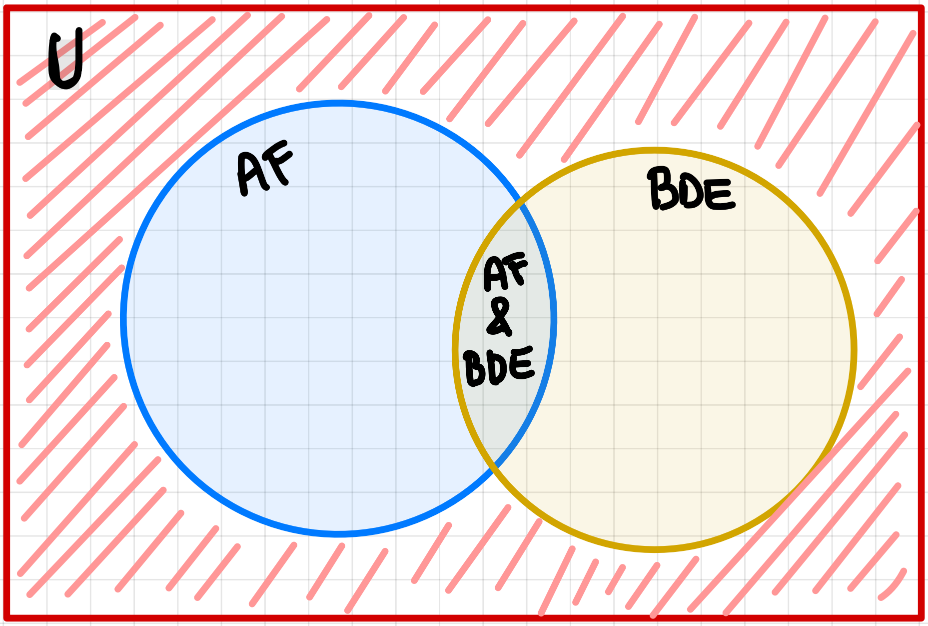
$\rightarrow$



donc on peut identifier cette permutation au mot 2314

Dans le contexte de notre exercice alors une permutation sur $\{a,b,c,d,e,f\}$ sera vue comme un mot sur cet alphabet dans laquelle toutes les lettres apparaissent et cela 1 seule fois.

Donc nous cherchons le cardinal de l'ens. hachuré:



AF = perm. contentes le motif af

BDE = " " " " bde

On considère af comme un nouveau caractère qui occupe "2 places" :

$$\underline{af}\ \_\ \_\ \_\ \_ \qquad 5 \cdot 4! = 5!$$

manières de placer af

manière de placer les autres caractères

On considère bde comme un nouveau caractère qui occupe "3 places" :

$$\underline{bde}\ \_\ \_\ \_ = 4 \cdot 3! = 4!$$

manières de placer bde

manière de placer les autres caractères

Calculons à présent le cardinal de BDE ∩ AF

$\underline{bde}\ \underline{af}\ \underline{c}$ on a 3 manières pour placer bde et ensuite 2 pour placer af, in fine il n'y a qu'un seul choix pour c

Donc: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Alors la partie hachurée :

$$|U| - |AF| - |BDE| + |AF \,\&\, BDE| = 6! - 5! - 4! + 3! = 582$$

Exercice 6 - Nombres sans répétitions dans leur représentation décimale

Combien peut-on écrire de nombres entiers de telle manière que chaque chiffre de sa représentation en base 10 ne soit pas répété ? Même question si l'on se restreint aux nombres inférieurs à 30 000.

pour 10 chiffres : $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 9 \cdot 9!/0!$

car on ne peut pas commencer par 0

car nous avons déjà mis une chiffre

car nous avons déjà mis 2 chiffres ...

pour 9 chiffres : $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 = 9 \cdot 9!/1!$

pour 8 chiffres : $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3 = 9 \cdot 9!/2!$

⋮ ⋮ ⋮

pour 3 chiffres : $9 \cdot 9 \cdot 8 = 9 \cdot 9!/7!$

pour 2 " : $9 \cdot 9 = 9 \cdot 9!/8!$

pour 1 chiffre : 10 ← car 0 est acceptable

Total : $10 + \sum_{k=0}^{8} 9 \cdot \frac{9!}{k!}$

Si l'on doit être < 30000 alors on a 5 chiffres max et la première chiffre d'un nombre à 5 chiffres peut être seulement 1 ou 2. Donc :

5 chiffres : $2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2 \cdot \frac{9!}{5!}$

4 " : $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9 \cdot \frac{9!}{6!}$

3 " : $9 \cdot 9 \cdot 8 = 9 \cdot \frac{9!}{7!}$

2 " : $9 \cdot 9 = 9 \cdot \frac{9!}{8!}$

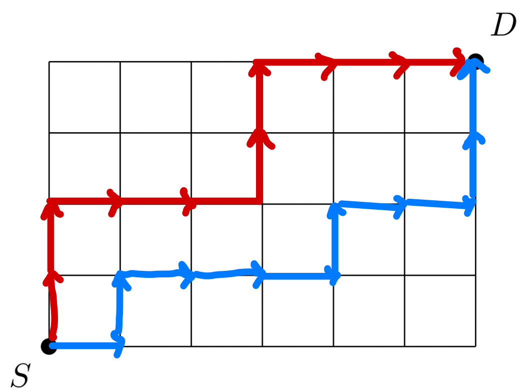
1 " : $10 = 1 + 9 \cdot \frac{9!}{9!}$

Donc au total :

$$2 \cdot \frac{9!}{5!} + 1 + 9 \cdot (9!) \sum_{K=5}^{9} \frac{1}{K!} = 11323$$

Exercice 7 - Compter les nombres de chemins dans les réseaux informatiques (simples)

Un certain réseau informatique est structuré en grille comme représenté ci-dessous. Des paquets de données doivent aller du point S au point D en suivant les mailles. Avec la contrainte supplémentaire que les paquets vont toujours de la gauche vers la droite et du bas vers le haut, combien d'itinéraires différents peuvent-ils suivre sachant que la grille comprend p mailles en largeur et q mailles en hauteur ?



On remarque que quoi qu'on fasse pour aller de S à D il faut utiliser p flèches horizontales et q verticales

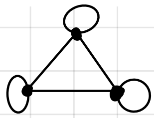
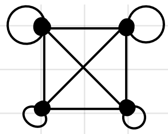
Donc d'après la remarque, il suffit d'abord de choisir les places pour les flêches horizontales et puis mettre les verticales sur les places restantes cela peut se faire de $\binom{p+q}{p}$ manières.

TSVP

Exercice 8 - Compter les graphes non-orientés

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est caractérisé par son ensemble de sommets S et son ensemble d'arêtes (non-orientées) A. Soit $S_n = \{s_1, ..., s_n\}$ un ensemble de n sommets. On veut dénombrer les graphes non-orientés qui ont S_n comme ensemble de sommets. Pour cela, on commence par chercher le nombre maximal d'arêtes pour de tels graphes.

1. Dessinez les trois graphes non-orientés G_1, G_2 et G_3 ayant respectivement S_1, S_2 et S_3 comme ensemble de sommets et dont le nombre d'arêtes est maximal.
2. Calculez le nombre maximal d'arêtes $a(n)$ d'un graphe non-orienté ayant S_n comme ensemble de sommets. Vous justifierez brièvement votre réponse.
3. Déduisez-en le nombre $g(n)$ de graphes non-orientés sur l'ensemble de sommets S_n, sachant que chaque graphe a forcément entre 0 et $a(n)$ arêtes.
4. *Application numérique :* Quel est le nombre de graphes non-orientés sur l'ensemble de sommets S_3 ?

G_1  G_2  G_3  G_4 

On remarque que :

G_1	1 boucle,	0 arêtes
G_2	2 boucles,	1 arête
G_3	3 boucles,	3 arêtes
G_4	4 boucles,	6 arêtes

Attention : dans cet exercice on appelle arête tout segment connectant deux noeuds distincts

On remarque que la somme des nombres dans G_{n-1} correspond au nombre d'arêtes de G_n et que G_n a aussi n boucles. Donc l'on peut écrire :

$$\begin{cases} G_n = G_{n-1} + n \\ G_1 = 1 \end{cases}$$

Il suffit de résoudre le problème de Cauchy pour avoir G_n en fonction de n seulement.

Solution alternative :

on s'aperçoit que dans G_n chaque noeud est connecté à tous les autres noeuds et donc on a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes (on a divisé par 2 car chaque arête a été comptée 2 fois) à ce nombre il faut encore ajouter les n boucles : $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$G_n = \frac{n(n+1)}{2}$ represente le nombre max d'arêtes que l'on peut avoir dans un graphe à n sommets

Donc pour fabriquer un graphe à n sommets l'on peut dessiner le n sommets et ensuite se demander pour chaque paire de sommet x,y si l'on met ou pas l'arête (x,y). Donc l'on peut forme $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ graphes distincts car pour chaque arête on a 2 choix (la dessiner ou pas).

Exercice 9 - Ouvrir un coffre

Mme Joublietout a un coffre-fort qui s'ouvre en rentrant une clef à 4 chiffres. Bien évidemment elle a oublié la combinaison mais elle se rappelle des deux détails suivants :

— la somme des quatre chiffres est 10 ;
— aucune des quatre chiffres est 0.

Sauriez-vous dire à Mme Joublietout combien de combinaisons il faut qu'elle essaye au total (en admettant qu'elle ne fasse pas d'erreurs en rentrant plusieurs fois une même combinaison, bien sûr !).

Combien seraient le nombre d'essais si l'on admet que les chiffres peuvent être 0 ?

- 4 chiffres
- somme des 4 chiffres = 10
- pas de chiffre égale à zero

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10 \\ X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_3 > 0,\ X_4 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

TSVP →

Trouver le nombre de solutions (entières) de (*).

Méthode 'Stars & Bars' vue cours!

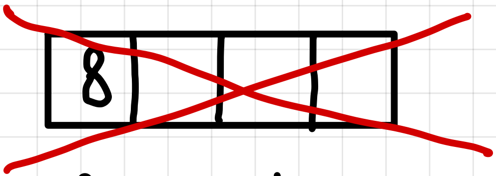
Donc le nombre de solutions de (*) est

$\binom{n-1}{k-1}$ où n = somme des chiffres
k = nombre de chiffres

donc pour nous $n=10$ et $k=4$ cad.

$$\binom{9}{3} = \frac{\cancel{9!}}{\cancel{6!}\,\cancel{3!}} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$$

Supposons de ne pas se rappeler de la méthode 'S&B'... on pourrait réflechir en 'manière combinatoire':



pas possible

Il faut que les chiffres soyent comprises entre 1 et 7

Donc on va faire un étude exhaustif des cas:

TSVP

7	1	1	1

4 possibilités

si on met un 7, les autres sont forcés à 1

6	2	1	1

$4 \cdot 3 = 12$ possibilités

si on met un 6, les autres sont forcés à 2, 1, 1

5	2	2	1

$4 \cdot 3 = 12$ possibilités

4 pos de mettre le 5
3 " " " " 1 sur les cases restantes

5	3	1	1

$4 \cdot 3 = 12$ possibilités

4	4	1	1

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ possibilités

4	3	2	1

$4! = 24$ possibilités

4	2	2	2

4 possibilités

3	3	3	1

4 possibilités

3	3	2	2

$\binom{4}{2} = 6$ possibilités

84 possibilités