Université Nice Sophia Antipolis
Formenti

Année 2017/18
L2 M/MI
OFI

Examen

Justifiez précisément vos réponses.

Seule une feuille A4 manuscrite recto-verso est autorisée.

Exercice 1 - Une question de mots...

Considérez le langage F des mots définies inductivement comme suit :
base $\varepsilon \in F$;
Etape Soit u un mot de F alors
Clôture $ua \in F$ et $ubb \in F$.
Répondre aux questions suivantes :

1. Ecrire tous les mots de longueur inférieure ou égale à 4 ;
2. Montrer que tout mot de F a un nombre pair de b ;
3. Montrer qu'un mot w appartient au langage F si et seulement si toute suite maximale de b consécutifs est de longueur paire ;
4. On note F_n le nombre de mots de F de longueur n. Calculer F_i pour $i = 0, 1, 2, 3$;
5. Montrer que F_n est la suite de Fibonacci (et donc les mots de F sont dites mots de Fibonacci).

(Valeur 6 Points)

Exercice 2 - Un peu de logique

Démontrez ou invalidez les suivantes :

1. $\{a \to (b \vee c), b \to (a \vee c)a \vee c, (a \wedge b) \vee c\} \overset{?}{\models} a \vee b$;
2. $\{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c\} \overset{?}{\models} b$;

(Valeur 4 Points)

Exercice 3 - Entre parenthèses

Considérons l'ensemble D des mots de Dyck sur l'alphabet $\{(,)\}$ ainsi défini :
(B) : $\varepsilon \in D$
(I) : si $u, v \in D$ alors

$(u) \in D$

$uv \in D$

1. Dénotons D_n le sous-ensemble de D des mots de longueur n. Pour vous chauffer, décrivez de manière explicite les ensembles : D_0, D_1, D_2, D_3.

Distribué le 21 juin 2018.

A présent on voudrais pouvoir générer toutes les mots de D d'une longueur donnée sans peur d'en oublier ou d'en mettre en trop. On va donc utiliser une représentation graphique qui va nous aider à mieux visualiser les choses. On associera à chaque mot w sur l'alphabet $\{(,)\}$, un chemin à coordonnées entières dans le premier cadrant. Plus formellement, un chemin est un séquence $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $p_1 = (0,0)$ et $p_n = (n,n)$.

On va maintenant définir l'encodage d'un mot de Dyck $w \equiv w_1, w_2, \ldots, w_n \in D$ sur un chemin de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ comme suit :

a) $p_1 = (0,0)$ et $p_n = (n,n)$

b) si $p_i = (x,y)$ et $w_{i+1} = ($ alors $p_{i+1} = (x+1,y)$

c) si $p_i = (x,y)$ et $w_{i+1} =)$ alors $p_{i+1} = (x,y+1)$

En gros, on part de $(0,0)$ et à chaque fois qu'on rencontre un (dans le mot on fait un pas d'une unité vers la droite, un pas d'une unité vers le haut si l'on rencontre un). Un chemin $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est monotone si pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $p_{i+1} \ominus p_i = (x,y)$ avec $x > 0$ ou $y > 0$. (RAPPEL : $(x,y) \ominus (s,t) = (x-s, y-t)$).

2. Montrez par induction sur n qu'un mot de D_n correspond à un chemin monotone de longueur $2n$ qui ne dépasse pas la droite passant par $(0,0)$ et (n,n).
3. Prouvez que le nombre D_n de mots de longueur $2n$ dans D est donné par la récurrence suivante :

$$D_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} D_i \cdot D_{n-i} \qquad \text{pour } n > 0$$

   avec D_0 égal à la valeur que vous avez trouvé au point 1.
4. Si vous arrivez à trouver le terme général de la récurrence précédente alors vous avez terminez l'exercice et vous empochez tous les points ! Sinon, continuez avec la suite.

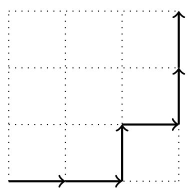

Figure 1 – Représentation graphique du mot de Dyck $(()())$.

5. Comme nous l'avons dit plus haut, pas tous les chemins monotones correspondent à des mots de Dyck. En effet, les mots de Dyck ont la propriété qu'ils ont autant de parenthèses ouvrantes que de fermantes mais, comme on verra plus bas, D_n ne coïncide pas avec l'ensemble E_n, l'ensembles de mots de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{(,)\}$ qui ont autant de symboles (que de symboles). C'est combien déjà la cardinalité E_n en fonction de n ?

On appelle bosse d'un chemin $p_1, p_2, \ldots, p_n$ un sous-chemin $p_i, \ldots, p_j$ tel que $p_i = (i,i)$, $p_j = (j,j)$ et $p_k = (x_k, y_k)$ avec $y_k > k$ pour $i < k < j$ (voir figure 2). L'excès d'une bosse $p_i, \ldots, p_j$ le numéro $\lceil \frac{j-i-2}{2} \rceil$.

On appelle excès d'un chemin $p_1, p_2, \ldots, p_n$ la somme des excès de toutes ses bosses. Par exemple, le chemin de la figure 2 a excès 1. Les mots de Dyck sont donc les chemins monotones avec excès 0. Nous supposons donnés deux algorithmes sur les chemins : l'un, MonterExces, prend en entrée un chemin monotone avec excès x et va rendre un chemin monotone avec excès $x+1$, l'autre, DiminuerExces, fait l'opération inverse, prend en entré un chemin avec excès $x+1$ et renvoie un chemin avec excès x. Ce qui est important à retenir sur ces algorithmes c'est aussi que ils sont vraiment l'un l'inverse de l'autre dans le sens que

$$\text{MonterExces(DiminuerExces(}p_1, \ldots, p_n)\text{=}p_1, \ldots, p_n$$

et

$$\text{DiminuerExces(MonterExces(}p_1, \ldots, p_n)\text{=}p_1, \ldots, p_n$$

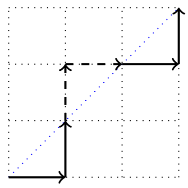

Figure 2 – Représentation graphique du mot ())(() qui a une bosse $(1,1),(1,2),(2,2)$ d'excès 1. Etant la seule bosse, l'excès du chemin est aussi 1.

pour tout chemin d'excès plus grand que ou égal à 1 et inférieur ou égal à $n-1$. Remarquez de plus, que par symétrie (par rapport à la bissectrice du premier cadrant), il y a autant de chemins avec excès n que de chemins d'excès 0.

6. Du coup définissons la relation R sur les chemins telle que $p_1,\ldots,p_n \, R \, p'_1,\ldots,p'_n$ ssi ils ont le même excès. Pour une longueur de chemin $2n$ fixée, combien de classes d'équivalence R a-t-il ? Que peut-on conclure donc sur la cardinalité d'une classe d'équivalence de R ? Et pour les mots de Dyck ?

(Valeur 10 Points)