Предположим мы хотим понять как выглядит трехмерная сфера. Но вот незадача - это объект из четырехмерного пространства, явно увидеть такую сферу не получится. А может есть какой-то обходной путь, чтобы понять устройство такого объекта? Ответ: да, но для начала некоторые предварительные соображения.

1 Предварительные соображения

1.1 Расслоение шара

Предположим у вас есть плоский друг, который может видеть только плоские объекты. Как объяснить ему что такое шар? Ответ: показывать сечения сферы. Мы можем разбить всю сферу на множество непересекающихся окружностей и показывать поочередно эти окружности. А в каком порядке лучше их показывать? Пусть для определенности мы хотим объяснить что такое единичная сфера с центром в точке (0, 0, 0). Будем показывать сечения плоскостью $z = const$. Определим функцию $z(t) = -1 + 2t$. В любой момент времени $t \in [0, 1]$ функция $z(t)$ будет определять плоскость, которая сечет нашу сферу. Будем показывать сечения с увеличением времени. Так как мы не можем показать все возможные сечения, из-за несчетности отрезка [0, 1], будем показывать их с каким-то шагом dt.

Проанализировав сечения, можно получить зависимость между временем t и радиусом окружности в сечении. Для этого необходимо в уравнение сферы подставить $z(t)$ и выбрать $y = 0$ (фиксировать y не обязательно, но если приравнять его к нулю, то искомый радиус будет совпадать с значением $|x|$, полученным при такой подстановке).

$$x^2 + 0^2 + z(t)^2 = 1 \iff x^2 + (-1 + 2t)^2 = 1 \iff r = |x| = 2\sqrt{t - t^2} \tag{1}$$

При $t = 0$ и $t = 1$ радиус окружности равен 0, то есть это точка. При $t = 0.25$ или $t = 0.75$ - окружность радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$. При $t = 0.5$ получится самая большая окружность - единичная.

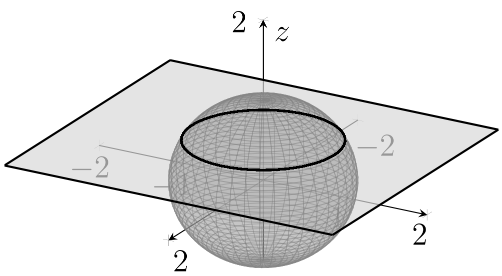


Рис. 1: Пример построения расслоения двумерной сферы

Мы представили шар, как множество окружностей, получающихся в сечении плоскостью, положение которой определялось временем t из отрезка $[0, 1]$. Формально, мы задали функцию $f : [0,1] \to S^1$, которая каждой точке из отрезка сопоставляет окружность радиуса $r(t) = 2\sqrt{t - t^2}$, причем, если взять два близких момента времени t_1 и t_2, то радиусы у окружностей будут мало отличаться, более строго:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, t_1, t_2,\ \text{т.ч. } |t_1 - t_2| < \delta : |r_1 - r_2| < \varepsilon$$

То есть функция f непрерывна.

Из полученных попарно непересекающихся окружностей получается сфера. Такой способ представления называется ***расслоением***. В нашем примере отрезок - **база**, каждой точке отрезка сопоставляется окружность - **слой**, из всех слоев состоит шар - **тотальное пространство**. Функция f, которая сопоставляет точке из базы слой называют **сечением** (в нашем примере сечение непрерывно), обратную функцию - **проекцией** (она всегда непрерывна, проверьте).

1.2 Расслоение ленты Мёбиуса

Предположим, что теперь вы хотите объяснить плоскому другу что такое лента Мёбиуса.

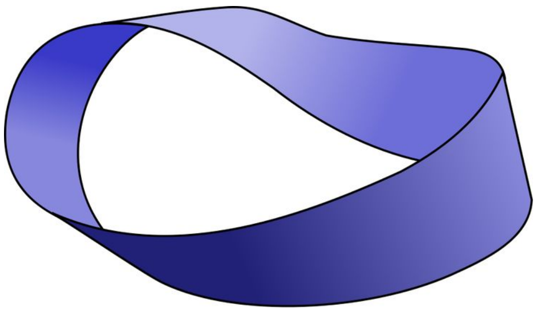


Рис. 2: Лента Мёбиуса

Заметим, что локально лента похожа на окружность. Действительно, если провести линию вдоль ленты Мебиуса, то вы получите кривую, которая легко деформируется в окружность.

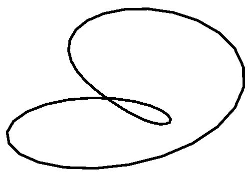


Рис. 3: Кривая, эквивалентная окружности на ленте Мёбиуса

Край ленты Мёбиуса один - это замкнутая кривая, топологически эквивалентная окружности.

Попробуем представить ленту Мёбиуса в виде совокупности таких окружностей. Проведем кривую по середине. Это будет начальная окружность в момент времени $t = 0$. Последняя кривая (при $t = 1$) - край ленты.

Почему мы выбрали именно такой порядок и гарантирует ли он то, что вся лента Мёбиуса распадется на такие окружности?

Для ответа на вопрос построим ленту Мёбиуса из прямоугольника. Пусть прямоугольник состоит из пяти полос: синей, зеленой, желтой, оранжевой и красной (см. рисунок ниже). Далее склеим ленту. Теперь начнем разрезать ее на окружности. Если выбрать разрез по середине, то полученная окружность будет исключительно желтого цвета. Если же мы возьмем окружность, которая является краем ленты Мёбиуса, то она будет двуцветная - красная и синяя. Это хорошо видно на месте склейки краев прямоугольника на рисунке. Также заметим, что любые две окружности не пересекаются.

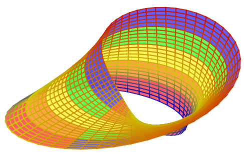


Рис. 4: расслоение ленты Мёбиуса на окружности

Сформулируем наблюдения более строгим языком, при желании следующие выкладки можно пропустить, они являются повторением рассуждений выше.

Рассмотрим прямоугольник $[0,\, 2\pi]\times[-1,\, 1]$ и отождествим точки вида $(0, v) \sim (2\pi, -v)$. Тогда лента Мёбиуса это

$$M = [0,\, 2\pi] \times [-1,\, 1]/(0, v) \sim (2\pi, -v) \tag{2}$$

Теперь рассмотрим отображение π, заданное следующим образом:

$$\pi :\ M \to [-1, 1]/(v, -v) \tag{3}$$

Заметим, что $[-1, 1]/(v, -v)$ - это окружность. Таким образом, отображение π - проекция ленты Мёбиуса на окружность.

Зафиксируем $v_0 \in (0,\, 1]$. Тогда слой имеет вид

$$\pi^{-1}([v_0]) = \{(u, v_0) \,|\, u \in [0,\, 2\pi]\} \cup \{(u, -v_0) \,|\, u \in [0,\, 2\pi]\} \tag{4}$$

С учетом склейки $(0,\, v_0) \sim (2\pi,\, -v_0)$ получаем объект, гомеоморфный окружности.

Аналитически задать слои можно следующим образом:

$$\gamma_{v_0}(t) = \begin{cases} (t,\, v_0), & t \in [0,\, \pi] \\ (t - \pi,\, -v_0), & t \in [\pi,\, 2\pi] \end{cases} \tag{5}$$

Это одна гладкая замкнутая кривая в фактор-пространстве. Также заметим, что при $v_0 \neq v_1$ кривые не пересекаются.

Сделаем важное замечание: если рассмотреть два слоя ленты Мёбиуса (две окружности), то они всегда будут сцеплены. То есть если вы от ленты Мёбиуса отрежете две бесконечно тонкие полосы, то их не получится разъединить без разрыва полос.

2 Расслоение Хопфа

В предыдущем разделе мы научились представлять шар и ленту Мебиуса в виде набора окружностей, причем эти окружности лежат плотно на исследуемом объекте (то есть нет дырок между двумя окружностями) и попарно окружности не пересекаются.

Предположим теперь вы хотите понять как устроена трехмерная сфера S^3. Увидеть ее нельзя, так как она вложена в четырехмерное пространство. Уравнение единичной сферы S^3 имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \tag{6}$$

Заметим, что S^3 можно задать как сумму квадратов модулей некоторых двух комплексных чисел:

$$z_1 = x + iy \;\;\Rightarrow\;\; |z_1|^2 = x^2 + y^2$$
$$z_2 = z + iw \;\;\Rightarrow\;\; |z_2|^2 = z^2 + w^2$$

То есть уравнение сферы примет вид

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \tag{7}$$

Такое представление трехмерной сферы позволяет увидеть в её структуре скрытую симметрию.

Рассмотрим комплексное число λ, лежащее на единичной окружности комплексной плоскости. Его можно записать в виде $\lambda = e^{i\phi}$. Модуль такого числа всегда равен единице ($|\lambda| = 1$).

Если мы возьмем любую точку (z_1, z_2) на нашей сфере S^3 и одновременно умножим обе координаты на λ, мы получим новую точку:

$$(z_1, z_2) \to (\lambda z_1, \lambda z_2)$$

Поскольку $|\lambda| = 1$, новая точка тоже будет удовлетворять уравнению сферы:

$$|\lambda z_1|^2 + |\lambda z_2|^2 = |\lambda|^2|z_1|^2 + |\lambda|^2|z_2|^2 = 1 \cdot (|z_1|^2 + |z_2|^2) = 1$$

Давайте попробуем понять геометрическую трактовку последнего шага: когда параметр λ «пробегает» всю окружность (угол ϕ меняется от 0 до 2π), точка $(\lambda z_1, \lambda z_2)$ описывает в четырехмерном пространстве замкнутую окружность (в силу периодичности экспоненты). Таким образом, вся сфера S^3 естественным образом распадается на такие непересекающиеся окружности. Каждая точка сферы принадлежит ровно одной такой окружности.

Чтобы понять, как эти окружности расположены друг относительно друга, введем отображение h (называемое отображением Хопфа). Оно сопоставляет каждой паре комплексных чисел (z_1, z_2) их отношение (формально перешли к проективной плоскости $\mathbb{C}P^1$):

$$h(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2} = w \tag{8}$$

Здесь w — это число в расширенной комплексной плоскости (которое может быть и бесконечностью, если $z_2 = 0$).

Из школьной алгебры мы знаем, что если умножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же число λ, значение дроби не изменится:

$$\frac{\lambda z_1}{\lambda z_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Это значит, что всей окружности в S^3 (всем точкам вида $(\lambda z_1, \lambda z_2)$) соответствует одна-единственная точка w на комплексной плоскости.

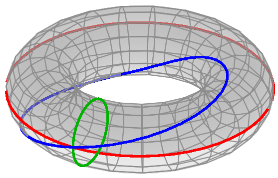
А теперь вспомним, что комплексную плоскость, дополненную точкой на бесконечности, можно представить как обычную двухмерную сферу S^2 (это называется сферой Римана).

Это и есть расслоение Хопфа. Оно показывает, что трехмерная сфера — это не просто «поверхность шара», а сложное переплетение окружностей, организованное над обычной сферой».

Каждой окружности Хопфа будет соответствовать точка на двумерной сфере. А чему соответствует тор в S^3? Оказывается ему сопоставляется линия на сфере S^2. Причем:

1. Центральная ось: Одна из окружностей Хопфа превращается в бесконечную прямую вертикальную линию. Это «окружность», проходящая через полюса.
2. Экваториальная окружность: Вторая «главная» окружность будет лежать в горизонтальной плоскости, опоясывая центральную ось.
3. Все прочие окружности Хопфа выглядят как обычные кольца, которые хитрым образом зацеплены друг за друга. Никакие две окружности не пересекаются, но каждая продета сквозь каждую.

Теперь поймем как устроены проекции «всех прочих окружностей Хопфа». Для этого сначала поработаем с тором (бубликом). Тор можно покрыть окружностями, но тремя разными способами: меридианами (зеленый), параллелями (красный) и окружностями Вилларсо (синий).



Расслоение Хопфа — это способ разрезать 3D-пространство на бесконечное количество торов, вложенных друг в друга, каждый из которых, в свою очередь, состоит из непересекающихся окружностей Вилларсо.

Откуда вообще беруться окружности Вилларсо?

Вспомните нашу формулу с $\lambda = e^{i\phi}$. Когда мы умножаем (z_1, z_2) на λ, мы заставляем обе комплексные координаты меняться с одинаковой скоростью. Если бы мы меняли только фазу z_1, мы бы получили меридиан. Если бы только фазу z_2 — параллель. Но когда они меняются одновременно и синхронно, точка движется по диагонали — и вдоль, и поперек тора. Именно это «диагональное» движение и рисует на поверхности тора окружность Вилларсо.

Почему именно окружности Вилларсо - «окружности Хопфа», а например, не меридианы или параллели?

Обычные параллели или меридианы на торе не зацеплены друг с другом (или зацеплены только с центральной осью). А окружности Вилларсо обладают уникальным свойством: любые две такие окружности на торе зацеплены ровно один раз. Это в точности совпадает с топологическим свойством расслоения Хопфа, где любые две окружности в S^3 должны быть зацеплены. Никакие другие линии на торе не обладают такой симметрией зацепления.

Сделаем финальное замечание: окружности Хопфа «ходят парами», это хорошо показано на анимации в википедии (ссылочка). Поэтому у расслоения есть два типа закручивания, они показаны ниже:

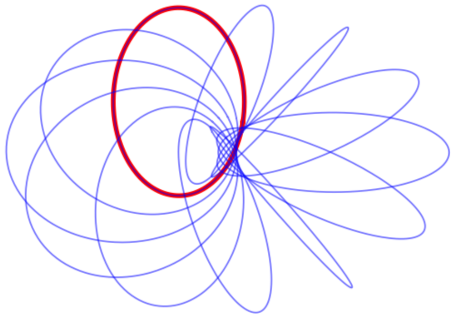


Рис. 5: Левое расслоение Хопфа. Окружности Вилларсо закручиваются против часовой стрелки относительно центральной оси. Математически это соответствует отображению $h(z_1, z_2) = z_1/z_2$.

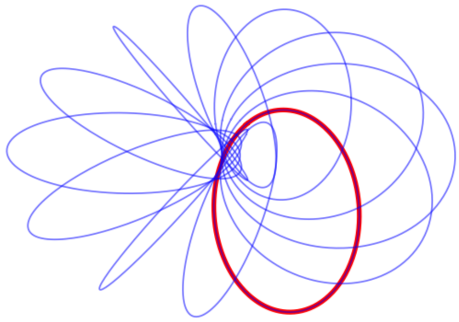


Рис. 6: Правое расслоение Хопфа. Окружности имеют противоположную ориентацию (зеркальное отражение). Такую структуру можно получить, если использовать в формуле комплексно-сопряженное число: $h(z_1, z_2) = z_1/\bar{z}_2$.