Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Мегафакультет компьютерных технологий и управления

Факультет программной инженерии и компьютерной техник

Образовательная программа: «Компьютерные технологии в дизайне»

#### Отчет

«Численное решение нелинейных уравнений и систем».

Вариант 15

Студенты: Савельева Елизавета, Фурзикова Александра

Группа КТвД

Практик: Машина Екатерина Алексеевна

# Содержание

## 1. Вычислительная реализация задачи

1 часть. Решение нелинейного уравнения

2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

### 2 Программная реализация задачи:

Для нелинейных уравнений

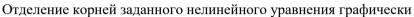
Для систем нелинейных уравнений:

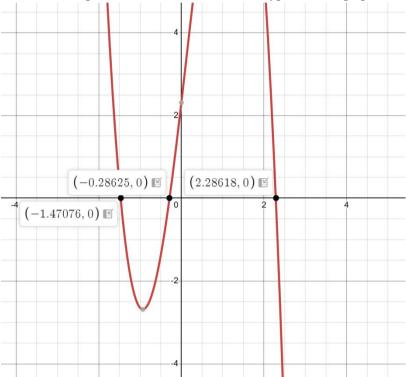
## Цель лабораторной работы

Изучить и научиться решать нелинейные уравнения и системы уравнений численными методами: метод половинного деления, метод Ньютона, метод хорд, метод простой итерации. Реализовать алгоритмы решения уравнений на языке Python.

## 1. Вычислительная реализация задачи

1 часть. Решение нелинейного уравнения





Определение интервалов изоляции корней:

x	f(x)
-3	52.65
-2.5	26.172
-2	9.330
-1.5	0.322
-1	-2.65
-0.5	-1.388
0	2.31
0.5	6.642
1	9.81

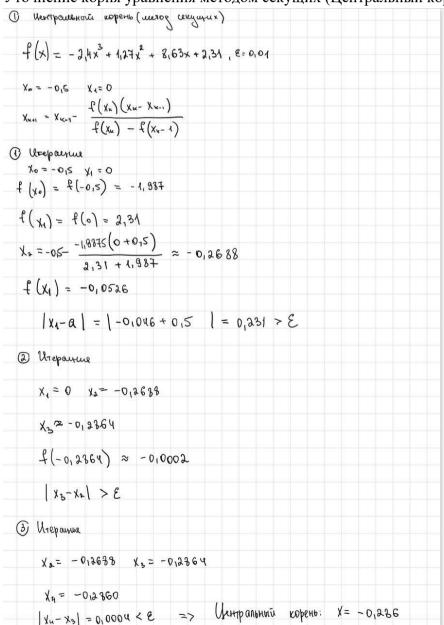
1.5	10.013
2	5.45
2.5	-5.677
3	-25.17
3.5	-54.827
4	-96.45

Левый корень: интервал изоляции: [-1.5, -1]

Центральный корень: интервал изоляции: [-0.5, 0]

Правый корень: интервал изоляции: [2, 2.5]

Уточнение корня уравнения методом секущих (Центральный корень)



Центральный корень: -0.286

№ итерации	<b>X</b> <sub>k-1</sub>	X <sub>k</sub>	X <sub>k+1</sub>	f(x <sub>k+1</sub> )	X <sub>k+1</sub> - X <sub>k</sub>
1	-0.5	0	-0.269	-0.053	0.231
2	0	-0.269	-0.2864	-0.0001	0.018
3	-0.269	-0.2864	-0.2860	0.0002	0.0004

Уточнение корня уравнения методом хорд (Крайний правый корень)

№ итерации	а	b	х	f(a)	f(b)	f(x)	x(k+1)-x(k)
1	2	2.5	2.245	5.45	-5.677	0.929	0.245
2	2.245	2.5	2.281	0.929	-5.677	0.119	0.036
3	2.281	2.5	2.285	0.119	-5.677	0.027	0.004

Крайний правый корень: 2.285

```
2) Правый сорые инод простой итерации
2)-f(x)=-2,40° + 1,27x° + 8,63x + 231 [2,25]
 -\Gamma'(x) = -7.2x^{2} + 2.54x + 8.63
   Haraus noe nperocumence: Xo=2
    Xxxx = Xxx Af(Xx)
    Проверия сходимости.
    f'(2) = -7,2.4 + 2,54.2 + 8,63 = -15,09
    f(2,5) = -30,02
    A = -\frac{1}{\max(11'[a]), |f'(b)|} = \frac{1}{30,02} = -0,0333
    4(x) = x + 7f(x) = x x - 0,9333(-2,4x + 1,27x2 + 8,63x + 2,31)
    4'(x) = 1+2f'(x) = 1-0,833(-7,2x2+2,54x+8,63)
    \phi'(++2)=1,498>1 , we executes \kappa kopus, becauseyewer \phi'(2,5)=1,991>1 .
    ellever xopy f(a)(6-a)

\chi_{eff} = a - f(6) - f(a)
                                   инчерван [2;2,5]
    B a=2 6=2,5
        f(a) = f(2) = -2,48 + 1,27 \cdot 4 + 8,63 \cdot 2 + 2,31 = 5,45
        f(6) = f(2,5) = -5,677
\chi_1 = 2 - \frac{5,45 \cdot 0,5}{-5,677 - 5,45} \approx 2,245
                                           f(x_1) = 0,929
        1 Xx+1 - Xx1 = 1x1 - a1 = 12,245 - 21 = 0,245 > E
    (2) a = 2,245 B = 2,5
        f(a) = f(2,245) = 0,929
                                                       f(x_a) = 0, 119
         f(B) = -5,677
         \chi_{a} = 2,245 - \frac{0,929 \cdot 0,255}{-5,677 - 0,929} \approx 2,281
   Корень: 2,285
       | Xx+1 /2 - Xx/ = | Xx - X1 | = |2,225 - 2,281 | = |0,004 | < 8
```

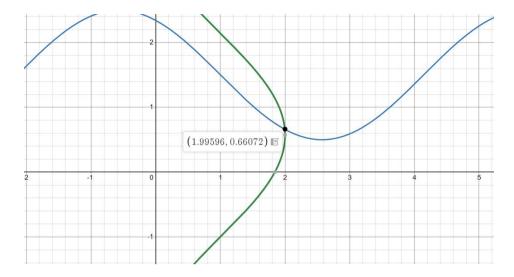
Уточнение корня уравнения методом половинного деления (Крайний левый корень)

toni kokom nochmenoro genera	u
66 - 2,4 x 3 + 1,27 x 2 + 8,63 x + 2,81 [-	451-17
1,9x + 1,27x + 8,65x + 4,51	(1) a=-1,476 B=-1,468, X=-4,472
a = -15 6 = -1	f(a) = 0.056 + f(b) = -0.03 + f(x) = 0.00
$X = \frac{-1.5 - 1}{2} = -1.25$	a-6 =  -1476+1,468  = 0,008< E
f(a) = 0,322	10-61=1-1940
f(b) = -2,65	Коринь: -1,472
f(x) = -1, 806	
10-81 = 0,5	
a = -1.5 $b = -1.25$ , $x = -1.375$	
f(a) = 0,322	
$f(\theta) = -1,806$	
f(x) = -47008 - 0,916	
1a-81 = 0,25	
3) $a = -1.5$ $b = -1.375$ $x = -1.937$	
f(a) = 0,322	
+(b) = -4,000 0,916	
f(x) = -0.347	
4(x)  = -0,377  a-6  =  -1,5+ ,437  = 0,63 > E	
11/205	
$ \begin{cases}     a = -1.5 & 6 = -1.431 & x = -1.4003 \\     f(a) = 0.322 & f(b) = -0.347 \end{cases} $	
f(x) = -0.03	2002 L 2002 F 100
1a-6/= 1-1,5+1,275 = 0,03 > E	
(5) $\alpha = -1.5$ $\beta = -1.468$ $x = -1.484$	
f(a) = -1.5, $f(b) = -0.03$ , $f(x) =$	0.143
10-61 = 0,02 -1,484 - 1,468 - 1,476	
(a) = 0,143 + (b) = -0,03 + (x) = -	0.050

№ итерации	а	b	х	f(a)	f(b)	f(x)	a-b
1	-1.5	-1	-1.25	0.322	-2.65	-1.806	0.5
2	-1.5	-1.25	-1.375	0.322	-1.806	-0.916	0.25
3	-1.5	-1.375	-1.437	0.322	0.916	-0.347	0.1
4	-1.5	-1.437	-1.468	0.322	-0.347	-0.03	0.06
5	-1.5	-1.468	-1.484	0.322	-0.03	0.143	0.03
6	-1.484	-1.468	-1.476	0.143	-0.03	0.056	0.02
7	-1.476	-1.468	-1.472	0.056	-0.03	0.07	0.008

### 2 часть. Решение системы нелинейных уравнений

Отделение корней заданной системы нелинейных уравнений графически



Решение системы методом простой итерации:

```
\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(x-t)}{x-\sin(y+t)} = 1
  Приверен к эквиванситичну виду
   \int y = 1.5 - \sin(x-1)
   2 x=1+ sin(y+1)
   Выберен начаные прибиничние
    x = (xo, yo) = (1;0,5)
   Mar 1
    X_1 = 1 + \sin(4.5) = 1,997
    y, = 1,5 - sino = 1,5
    Проверши тогность
       1x1-x01 = 11,997-11 = 0,997 > E
      /y,-yo/=/1,5-0,5/= 1>E
  Mar 2
    x_2 = 1 + \sin(y_1 + 1) - 1 + \sin(2,5) = 1,598
    y_2 = 1.5 - \sin(x_1 - 1) = 1.5 - \sin(1.997 - 1) = 0.66
   Проверши тогность
    |X2-X1| = |1,598-1,997 | = 0,399 > E
    /y2-y,1=/0,66-1,5/-0,84 > E
  Man 3
     43 = 1,5 - sin (x2 -1) = 0,937
     X3 = 1+ Sin (42+1) = 1,996
    |X_3 - Y_2| = |1,996 - 1,598| = 0,398 > \varepsilon
    /y3-y2/= /0,937-0,66/=0,277 > E
 Ulan 4
    y_4 = 1.5 - \sin(y_3 - l) = 0.661
  \chi_4 = 1 + \sin(y_3 + 1) = 1.934
 /4-X3/=/1,934-1,996/=0,062>E
 144-431 = 10,661-0,937/= 0,276 > E
```

```
45 = 1,5 - sin(4,-1) = 1,5 - sin(1,934-1) = 0,698
  X5 = 1+ Sin(94+1) = 1+ sin(0,661+1) = 1,996
  1x5-14/=/1,996-1,934/=0,062>E
   145-44/=10,696-0,861/=0,035>E
Mar 6
  46 = 1,5 - sin (x5-1) = 0,661
   X6 = 1+ sin (y5 +1) = 1+ sin (0,696+1) = 1,992
   1x6-x5/= 11,992-1,996/= $0,004 < E
   140-45/= 10,661-0,696/= 0,03 > E
Mar I
 47 = 1,5-sin(x6-1) =0,663
  X7 = 1+ sin (46+1) = 1,996
  Проверши тогность
   1x7-x6/=/1,996-1,992/=0,004<E
   14x-46/= 10,063-0,661/=0,002<E
  Жаким образом решение системой
```

# 2 Программная реализация задачи:

#### Main

```
# variant number: 15

# 3 - Метод Ньютона

# 5 - Метод простой итерации

# 6 - Метод Ньютона

from math import sqrt

import numpy as np

from solvers import horde_method, newton_method, simple_iteration_method, system_newton_method

from graph import show_2d

A, B, C, D = -2.40, 1.27, 8.63, 2.31
```

```
df = lambda x: 3 * A * x ** 2 + 2 * B * x + C
ddf = lambda x: 6 * A * x + 2 * B
def dphi(x):
    return abs(sqrt(abs(1/A)) / 3 * (B * x**2 + C * x + D) ** (-2/3) *
(2*B*x + C))
def phi(x):
def non linear(output file):
   if f(a) * ddf(a) > 0:
   if f(a1) * ddf(a1) > 0:
   print(f'dpfi B a1 = {dphi(a1)}')
   print(f'dpfi B b1 = {dphi(b1)}')
   epsilon = float(input('Погрешность (0.01): '))
   left x = horde method(f, left=left, right=right, epsilon=epsilon)
   center x = newton method(f, df, c x0, epsilon=epsilon)
```

```
if output file != None:
def function 1(x, y):
def jacobian 1(x, y):
def function 2(x, y, \overline{z}):
        (-1)*((x**2)+(y**2)+(z**2)-5),
        (-1) * ((np.exp(x)) + (x*y) - (x*z) - 1)
def jacobian_2(x, y, z):
FUNCTIONS = [
        'func': function 1,
def non linear_system(output_file):
        print(group['disp'])
     = FUNCTIONS[n - 1]['func']
```

```
hint = FUNCTIONS[n-1]['init']
jacob = FUNCTIONS[n - 1]['jacob']

x0 = list(map(float, input(f'Начальные приближения ({" ".join(str(num) num in hint)}): ').split()))
eps = float(input('Погрешность (0.001): '))

res = system_newton_method(f, jacob, x0, eps)

print(res)
if output_file != None:
    with open(output_file, 'a') as fl:
        fl.write(f'Pemenue системы нелинейных уравнений:')
        fl.write(str(res))

def main():
    read_from_file = input('Нужно ли записать результат в файл (y/n): ')
    output_file = None
    if(read_from_file == 'y'):
        output_file = input('Введите название файла (out.txt): ')

print('Pemenue нелейного уравнения: ')
    non_linear(output_file)
    print('Pemenue системы нелинейных уравнений: ')
    non_linear_system(output_file)

if __name__ == '__main__':
    main()
```

```
Solvers
from typing import Callable, Optional, List
import numpy as np
from attr import dataclass, field
from prettytable import PrettyTable

MAX_ITER_COUNT = 100

@dataclass
class Result:
    root: Optional[float] = None
    error: Optional[float] = None
    header: list = field(factory=list)
    data: list = field(factory=list)
    znach_f: float = field(default=0)
    iter_count: int = field(default=0)

    def __str__(self):
        tt = PrettyTable(self.header)
        data = [(n, *map(lambda x: f'{x:.3f}', floats)) for n, *floats in

self.data]
    tt.add_rows(data)
    return str(tt)

@dataclass
class SystemResult:
    iteration: int = field(default=0)
    solved: bool = field(default=False)
    roots: list = field(factory=list)
```

```
if self.solved:
def horde method(f: Callable, left: float, right: float, fix=-1,
epsilon=10e-3):
        res.data.append([i, left, right, x1, f(left), f(right), f(x1),
abs(left - right)])
           left = x1
   res.znach f = f(res.root)
def newton method(y: Callable, df: Callable, x0: float, epsilon=10e-3):
        res.iter count = i
        x1 = x0 - y(x0) / df(x0)
        res.data.append([i, x0, y(x0), df(x0), x1, abs(x1 - x0)])
       if abs(x1 - x0) \le epsilon or abs(y(x1) / df(x1)) \le epsilon or
abs(y(x1)) \le epsilon:
def simple iteration method(f: Callable, phi: Callable, x0=1, epsilon=10e-
```

```
res.data.append([i, x0, f(x0), x1, phi(x0), abs(x1 - x0)])
       if abs(x1 - x0) \le epsilon:
def newton method(f, jack, x init):
   x delta = np.linalg.solve(jacobian, vector b f output)
def system newton method(f, jack, x init, epsilon):
   result = SystemResult()
   while diff > epsilon or result.iteration == MAX ITER COUNT:
       diff = np.linalg.norm(x old-x new)
   convergent val = x new
    if result.iteration != MAX ITER COUNT:
       result.solved = True
    result.roots = convergent val
```

```
Graph
from typing import Callable, List, Tuple
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def show_2d(y: Callable, points: List[Tuple]):
    width = max(abs(points[0][0]), abs(points[len(points) - 1][0])) + 1
    height = abs(y(width))

    vf = np.vectorize(y)
    x = np.linspace(-width, width, 100)

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)

    plt.grid(True)
    plt.xlim((-width, width))
    plt.ylim((-height, height))

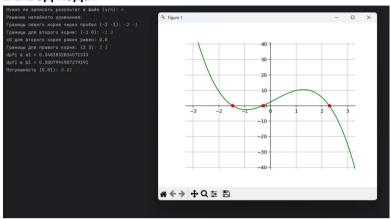
    ax.spines['left'].set_position('center')
    ax.spines['bottom'].set_position('center')
```

```
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')

ax.plot(x, vf(x), 'g', label='y=f(x)')
ax.plot(*list(zip(*points)), 'ro')

plt.show()
```

#### Вывод кода:



```
Левый корень x_0=-1.4676889, знач-е: -0.0326803, n: 6
Центральный корень x_1=-0.2861018, знач-е: 0.0011011, n: 2
Правый корень x_2=2.2916407, знач-е: -0.1271546, n: 5
Таблица для метода хорд:
| 1 | -2.000 | -1.000 | -1.221 | 9.330 | -2.650 | -1.964 | 1.000 |
| 3 | -2.000 | -1.357 | -1.423 | 9.330 | -1.068 | -0.486 | 0.643 |
| 4 | -2.000 | -1.423 | -1.451 | 9.330 | -0.486 | -0.203 | 0.577 |
| 5 | -2.000 | -1.451 | -1.463 | 9.330 | -0.203 | -0.082 | 0.549 |
| 6 | -2.000 | -1.463 | -1.468 | 9.330 | -0.082 | -0.033 | 0.537 |
Таблица для метода Ньютана:
| 1 | 0.000 | 2.310 | 8.630 | -0.268 | 0.268
                                             0.018
Таблица для метода простой итерации:
| N^0 | x_k | f(x_k) | x_{k+1} | phi(x_k) | |x_k-x_{k+1}| |
| 1 | 3.000 | -25.170 | 2.546 | 2.546 |
                                              0.061
| 4 | 2.323 | -0.886 | 2.300 | 2.300
                                               0.023
Решение системы нелинейных уравнений:
```

```
Выберите систему нелинейных уравнений: Система №1 f1(x1, x2) = x + 2*y - 2 f2(x1, x2) = x^2 + 4*y^2 - 4)

Система №2 f1(x1, x2, x3) = x + y + z - 3 f2(x1, x2, x3) = x^2 + y^2 + z^2 - 5 f3(x1, x2, x3) = exp(x) + x*y - x*z -1
```

**Вывод:** В ходе работы были рассмотрены численные методы решения нелинейных уравнений и систем: метод половинного деления, секущих, хорд и простой итерации. Каждый из методов позволяет находить корни с заданной точностью, используя разные подходы: деление интервала, касательные, секущие. Очень важным является выбор начального приближения или интервалов изоляции корней: чем выбор точнее, тем быстрее найдётся решение задачи. Методы обладают разной скоростью сходимости и требованиями к выбору начальных данных, что влияет на точность и эффективность решения.