# НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО Факультет "Компьютерных технологий в дизайне"

Лабораторная работа № 5 по дисциплине "Вычислительная математика" вариант №21

Выполнили: Савельева Елизавета Юрьевна Фурзикова Александра Евгеньевна Группа: Р3266

Преподаватель: Машина Екатерина Алексеевна **Цель:** решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек. Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной.

# Порядок выполнения работы:

- 1. Выбор исходных данных
- 2. Определение шага h (узлы равноотстоящие h=0,05).
- 3. Построение таблицы конечных разностей
- 4. Вычисление у(Х1) с использованием первой формулы Ньютона
- 5. Вычисление у(Х2) с использованием первой формулы Гаусса
- 6. Запись результатов и анализ точности

## Рабочие формулы методов:

Формула Ньютона «вперед»:

$$\begin{split} N(x) &= y_0 + t \Delta y_0 \, + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \, + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 \\ &+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \end{split}$$

Вторая формула Гаусса:

$$P(x) = y_0 + p\Delta y_{-1/2} + \frac{p(p+1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{p(p+1)(p-1)}{3!} \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{p(p+1)(p-1)(p+2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots$$

#### Вычислительная часть:

### 1. Построение таблицы конечных разностей

| xi   | ¥Ů.    | Δyί    | ∆^2yí  | Δ^3 <i>yi</i> | ∆^4yi   | Δ^5 <i>y</i> ί | Δ^6 <i>yi</i> |
|------|--------|--------|--------|---------------|---------|----------------|---------------|
| 0.25 | 1,2557 | 0,9207 | 0,0247 | -0,0437       | 1,0756  | -4,1277        | 10,1917       |
| 0.30 | 2,1764 | 0,9454 | -0,019 | 1,0319        | -3,0521 | 6,064          |               |
| 0.35 | 3,1218 | 0,9264 | 1,0129 | -2,0202       | 3,0119  |                |               |

| 0.40 | 4,0482 | 1,9393 | -1,0073 | 0,9917 | - |  |
|------|--------|--------|---------|--------|---|--|
| 0.45 | 5,9875 | 0,932  | -0,0156 |        |   |  |
| 0.50 | 6,9195 | 0,9164 |         | i i    |   |  |
| 0.55 | 7,8359 |        |         |        |   |  |

 Вычисление значения функции при X1 = 0,251 с использованием интерполяционной формулы Ньютона

Шаг 
$$h = x_i + 1 - xi = 0.05$$

Базовый узел х0 = 0.25

Нормированная координата t = (X1 - x0)/h = (0,251 - 0.25)/0.05 = 0.02

Поскольку  $|t| \leq 1$  и точка лежит рядом с левым краем таблицы, применяем формулу Ньютона «вперед».

Формула Ньютона «вперед»:

$$N_4(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

Пошаговое вычисление:

$$\begin{array}{l} y_0 \ = \ 1,2557 \\ t\Delta y_0 \ = \ 0,02 \cdot 0,9207 \ = \ 0,018414 \\ \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \ = \ \left(0,02 \cdot (0,02-1)\right) / 2 \cdot 0,0247 \ = \ -0,00024206 \\ \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 \\ \ = \ \left(0,02 \cdot (0,02-1)(0,02-2)\right) / 6 \cdot (-0,0437) \\ \ = \ -0,000282652 \\ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 \\ \ = \ \left(0,02 \cdot (0,02-1)(0,02-2)(0,02-3)\right) / 24 \\ \cdot (1,0756) \ = \ -0,00518295 \\ \\ \text{MTOTO } N_4(X1) \ = \ 1,2557 + 0,018414 \ -0,00024206 \ - \end{array}$$

 $0.000282652 - 0.00518295 \approx 1.26841$ 

 Вычисление значения функции при X2=<u>0,445 с</u> использованием интерполяционной формулы Гаусса

Ближайший узел-«центр» xm = 0,40

Нормированное смещение p = (X2-xm)/h = (0,445-0,45)/0,05 = -0,1p<0 — следовательно необходимо использовать вторую формулу Гаусса.

Вторая формула Гаусса:

$$\begin{split} P_4(x) &= y_0 + p\Delta y_{-1/2} + \frac{p(p+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} \\ &+ \frac{p(p+1)(p-1)}{3!}\Delta^3 y_{-3/2} \\ &+ \frac{p(p+1)(p-1)(p+2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} \end{split}$$

Где

$$y_0 = y_4 = 4,0482$$

$$\Delta y_{-1/2} = \frac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{2} = 1,0049$$

$$\Delta^2 y_{-1} = \Delta^2 y_2 = -0,0014$$

$$\Delta^3 y_{-3/2} = \frac{\Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2}{2} = 0,00035$$

$$\Delta^4 y_{-2} = \Delta^4 y_1 = 0,0047$$

Пошаговое вычисление:

$$\begin{split} p\Delta y_{-1/2} &= -0.10 \cdot 1,0049 = -0.10049 \\ \frac{p(p+1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} &= (-0.10 \cdot 0.90)/2 \cdot (-0.0014) = 0.000063 \\ \frac{p(p+1)(p-1)}{3!} \Delta^3 y_{-3/2} &= (-0.10 \cdot 0.90 \cdot (-1.10))/6 \cdot (0.00035) \\ &= 0.0000058 \end{split}$$

# Листинг программы:

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def read input data():
  while True:
    print("1. Ручной ввод")
    print("2. Загрузка из файла")
    print("3. Генерация по математической функции")
    while True:
      try:
         choice = int(input("Выберите вариант (1-3): "))
         if 1 <= choice <= 3:
           break
         print("Ошибка: Введите число от 1 до 3")
       except ValueError:
         print("Ошибка: Введите целое число")
    if choice == 1:
       return input from keyboard()
    elif choice == 2:
      return input from file with retry()
      return generate data from function with retry()
def input from keyboard():
  while True:
    try:
      point count = int(input("Введите количество точек: "))
      if point count > 0:
         break
       print("Ошибка: Количество точек должно быть положительным")
    except ValueError:
      print("Ошибка: Введите целое число")
  x values = []
  y_values = []
  print(f"Введите {point count} точек в формате х у:")
  for i in range(point count):
    while True:
      try:
         data = input(f"Точка \{i + 1\}: ").strip()
         if not data:
           print("Ошибка: Пустой ввод")
           continue
         x, y = map(float, data.split())
         x values.append(x)
         y values.append(y)
         break
       except ValueError:
         print("Ошибка: Точка должна состоять из двух чисел. Попробуйте снова")
       except Exception:
```

```
print("Ошибка ввода. Попробуйте снова")
  while len(set(x values)) != len(x values):
    print("Ошибка: Узлы интерполяции не должны совпадать. Введите точки заново")
    x values.clear()
    y values.clear()
    for i in range(point count):
      while True:
         try:
           data = input(f"Точка \{i + 1\}: ").strip()
           if not data:
             print("Ошибка: Пустой ввод")
             continue
           x, y = map(float, data.split())
           x values.append(x)
           y values.append(y)
           break
         except ValueError:
           print("Ошибка: Точка должна состоять из двух чисел. Попробуйте снова")
         except Exception:
          print("Ошибка ввода. Попробуйте снова")
 return x values, y values
def input from file with retry():
  """Чтение данных из файла с обработкой ошибок"""
  while True:
    filename = input("Введите имя файла: ")
      x data, y data = read data from file(filename)
      if len(set(x data)) != len(x data):
         print("Ошибка: Узлы интерполяции не должны совпадать")
        continue
      return x data, y data
    except FileNotFoundError:
      print("Ошибка: Файл не найден. Проверьте имя файла и попробуйте снова")
    except ValueError as e:
      print(f"Ошибка в файле: {e}. Попробуйте другой файл")
    except Exception as e:
     print(f"Ошибка: {e}. Попробуйте другой файл")
def read data from file(filename):
 x data = []
 y_data = []
  with open(filename, 'r') as file:
    for line number, content in enumerate(file, 1):
      content = content.strip()
      if not content:
       continue
         x val, y val = map(float, content.split())
         x data.append(x val)
         y data.append(y val)
      except ValueError:
        raise ValueError(f''Hекорректные данные в строке {line number}: '{content}''')
```

```
if not x data:
   raise ValueError("Файл пуст или содержит только пустые строки")
return x data, y data
def generate data from function with retry():
    function name = input("Введите имя функции (sin/cos/exp/log): ").lower()
    if function_name in ["sin", "cos", "exp", "log"]:
      break
    print("Ошибка: Несуществующая функция. Доступные: sin, cos, exp, log")
    try:
      start point = float(input("Введите начало отрезка: "))
      break
    except ValueError:
      print("Ошибка: Начало должно быть числом")
  while True:
    try:
      end point = float(input("Введите конец отрезка: "))
      if end point > start point:
      print("Ошибка: Конец должен быть больше начала")
    except ValueError:
      print("Ошибка: Конец должен быть числом")
  while True:
    try:
      point_count = int(input("Введите количество точек: "))
      if point count > 1:
         break
      print("Ошибка: Количество точек должно быть больше 1")
    except ValueError:
      print("Ошибка: Введите целое число")
  while True:
    try:
      x vals, y vals = generate data from function(function name, start point, end point, point count)
      return x_vals, y_vals
    except ValueError as e:
      print(f"Ошибка: {e}")
      if function name == "log":
         print("Для функции log все х должны быть > 0")
         while True:
           try:
             start_point = float(input("Введите новое начало отрезка (>0): "))
             if start point > 0:
                break
             print("Ошибка: Начало должно быть > 0")
           except ValueError:
             print("Ошибка: Начало должно быть числом")
         while True:
           try:
             end_point = float(input("Введите новый конец отрезка (> начала): "))
             if end point > start point:
                break
             print("Ошибка: Конец должен быть больше начала")
           except ValueError:
```

```
def generate data from function(func name, start val, end val, point count):
  function map = {
    'sin': math.sin,
    'cos': math.cos,
    'exp': math.exp,
    'log': lambda x: math.log(x) if x > 0 else None,
  x \text{ vals} = []
  y vals = []
  step size = (end val - start val) / (point count - 1) if point count > 1 else 0
  for i in range(point count):
    x = start_val + i * step_size
    y = function_map[func_name](x)
    if y is None:
      raise ValueError(f'Hедопустимое значение x={x} для функции {func name}")
    x vals.append(x)
    y vals.append(y)
 return x vals, y vals
def main():
  print("Программа интерполяции функций")
 print("----
  while True:
    try:
       x data, y data = read input data()
      interpolator = InterpolationSolver(x data, y data)
       while True:
         try:
           target x = float(input("\nBведите аргумент для интерполяции: "))
           break
         except ValueError:
           print("Ошибка: Аргумент должен быть числом")
       print("\nТаблица конечных разностей:")
       diff table = interpolator.compute finite differences()
       for row in diff table:
        print(" ".join(map(lambda val: f"{val:.4f}", row)))
       print("\nPезультаты интерполяции:")
       methods = [
         ("Лагранж", interpolator.interpolate_lagrange(target_x)),
         ("Ньютон (разделённые разности)", interpolator.interpolate_newton_divided(target_x)),
         ("Ньютон (конечные разности)", interpolator.interpolate_newton_finite(target_x)),
         ("Стирлинг", interpolator.interpolate stirling(target x)),
         ("Бессель", interpolator.interpolate bessel(target x)
       for method name, result value in methods:
         if result value is not None:
           print(f"{method name}: {result value:.6f}")
         else:
           print(f"{method name}: не применимо для данных узлов")
```

```
interpolator.plot interpolation(target x=target x)
       while True:
         choice = input("\nX)отите выполнить еще одну интерполяцию? (y/n): ").lower()
         if choice in ['y', 'n']:
           break
         print("Ошибка: Введите 'у' или 'n'")
      if choice == 'n':
         print("Завершение программы.")
         break
    except KeyboardInterrupt:
       print("\nПрограмма прервана пользователем")
       break
    except Exception as e:
       print(f"\nПроизошла ошибка: {e}")
       raise e
       print("Попробуйте снова.\n")
class InterpolationSolver:
  def init (self, x_nodes, y_values):
    self.x nodes = x nodes
   self.y values = y values
  def interpolate lagrange(self, x target):
    result = 0.0
    n = len(self.x nodes)
    for i in range(n):
       term = self.y_values[i]
       for j in range(n):
         if j != i:
           term *= (x target - self.x nodes[j]) / (self.x nodes[i] - self.x nodes[j])
      result += term
 return result
  def interpolate newton divided(self, x target):
     """Интерполяция методом Ньютона с разделенными разностями"""
    n = len(self.x nodes)
    div diff table = self.compute divided differences()
    result = div diff table [0][n-1]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
      result = result * (x target - self.x nodes[i]) + div diff table[0][i]
 return result
  def interpolate_newton_finite(self, x_target):
     """Интерполяция методом Ньютона с конечными разностями"""
    n = len(self.x nodes)
    if n < 2:
      return None
   step = abs(self.x nodes[1] - self.x nodes[0])
    for i in range(1, n - 1):
       if abs((self.x nodes[i + 1] - self.x nodes[i]) - step) > 1e-10:
        return None
```

```
diff table = self.compute finite differences()
  result = self.y values[0]
  for i in range(1, n):
     coefficient = diff_table[0][i] / math.factorial(i)
     t_{param} = (x_{target} - self.x_{target} - self.x_{target}) / step
     term = 1
     for k in range(i):
       term *= (t param - k)
     result += coefficient * term
return result
def compute divided differences(self):
  n = len(self.x nodes)
  div diff = [[0.0] * n for in range(n)]
  for i in range(n):
    \operatorname{div} \operatorname{diff[i][0]} = \operatorname{self.y} \operatorname{values[i]}
  for j in range(1, n):
     for i in range(n - j):
       div \ diff[i][j] = (div \ diff[i+1][j-1] - div \ diff[i][j-1]) / (self.x\_nodes[i+j] - self.x\_nodes[i])
return div diff
def compute finite differences(self):
   """Вычисление таблицы конечных разностей"""
  n = len(self.y values)
  fin diff = [[0.0] * n \text{ for } in \text{ range}(n)]
  for i in range(n):
     fin diff[i][0] = self.y values[i]
  for j in range(1, n):
     for i in range(n - j):
        fin diff[i][j] = fin diff[i + 1][j - 1] - fin diff[i][j - 1]
return fin diff
def interpolate stirling(self, x target):
   """Интерполяция по формуле Стирлинга"""
  n = len(self.x_nodes)
  if n % 2 == 0: # Требуется нечетное количество точек
   return None
  # Проверка равномерности шага
  step = abs(self.x_nodes[1] - self.x_nodes[0])
  for i in range(1, n - 1):
     if abs((self.x_nodes[i+1] - self.x_nodes[i]) - step) > 1e-10:
       return None
  center idx = n // 2 # Центральный узел
  t param = (x target - self.x nodes[center idx]) / step
  diff table = self.compute finite differences()
 result = self.y values[center idx]
  # Первый член: t * (\Deltay0 + \Deltay_{-1})/2
  if center_idx >= 1 and center_idx < n - 1:</pre>
     if center_idx < len(diff_table) and len(diff_table[center_idx]) > 1 and \
          center idx - 1 < \text{len(diff table)} and \text{len(diff table[center idx - 1])} > 1:
```

```
result += t param * (diff table[center idx][1] + diff table[center idx - 1][1]) / 2
  # Основной цикл по і
  for i in range (1, center idx + 1):
     # Проверка доступности индексов для нечетных разностей
     row1 = center idx - i
     row2 = center idx - i - 1
    order = 2 * i - 1
     if row1 < 0 or row1 >= len(diff_table) or order >= len(diff_table[row1]) or \
         row2 < 0 or row2 >= len(diff_table) or order >= len(diff_table[row2]):
       break
     delta_val = (diff_table[row1][order] + diff_table[row2][order]) / 2
    term = delta val
     # Вычисление произведения (t^2 - k^2)
     for k in range(1, i):
      term *= (t param ** 2 - k ** 2)
     term *= t_param # Дополнительный множитель t
     term /= math.factorial(2 * i - 1)
    result += term
     # Проверка доступности индексов для четных разностей
     row even = center idx - i - 1
    order even = 2 * i
     if i < center idx: # Для четных разностей (кроме последней итерации)
       if row even < 0 or row even >= len(diff table) or order even >= len(diff table[row even]):
       term even = diff table[row even][order even]
       for k in range(1, i + 1):
        term even *= (t param ** 2 - k ** 2)
       term even /= math.factorial(2 * i)
       result += term even
     else:
       break
return result
def find central node index(self, x target):
  """Поиск центрального узла для интерполяции"""
  n = len(self.x nodes)
  mid idx = n // 2
  if x target < self.x nodes[mid idx]:</pre>
     while mid idx > 0 and x target < self.x nodes[mid idx - 1]:
       mid idx = 1
     while mid idx < n - 1 and x target > self.x nodes[mid idx + 1]:
       mid idx += 1
  return mid idx
def interpolate bessel(self, x target):
  """Интерполяция по формуле Бесселя""
 n = len(self.x nodes)
  # Метод Бесселя требует чётное количество узлов
  if n % 2 != 0:
   return None
```

```
# Проверка, что шаг равномерный
  step = self.x_nodes[1] - self.x_nodes[0]
  for i in range(1, n - 1):
     if abs((self.x nodes[i + 1] - self.x nodes[i]) - step) > 1e-10:
      return None
  # Найдём центральный индекс (левая из двух центральных точек)
  center idx = self.find central interval index(x target)
  center idx = max(1, min(center idx, n - 3))
  # Центральная точка х
  center x = (self.x nodes[center idx] + self.x nodes[center idx + 1]) / 2
  t param = (x \text{ target - center } x) / \text{step}
  # Таблица конечных разностей
  diff table = self.compute finite differences()
  # Начальное приближение: среднее значение в центре
  result = (self.y values[center idx] + self.y values[center idx + 1]) / 2
  # Добавляем первую разность первого порядка (нечётная)
  result += t param * diff table[center idx][1]
 max order = len(diff table[0]) - 1 # Максимальный порядок разности
  for i in range(1, n // 2):
     even order = 2 * i
    odd \overline{\text{order}} = 2 * i + 1
     # Проверка на выход за границы таблицы разностей
     if center_idx - i < 0 or center_idx - i + 1 >= n:
       break
     if even order >= max order:
     break
     # Чётные разности: центральные
     delta_even = diff_table[center_idx - i][even_order]
    product_even = 1 for k in range(1, i + 1):
       product_even *= (t_param_** 2 - (k - 0.5) ** 2)
     term even = delta even * product even / math.factorial(even order)
    result += term even
     # Проверка наличия нечётной разности
     if odd order >= max order:
      break
     # Нечётные разности: смещены на +1
     delta_odd = diff_table[center_idx - i + 1][odd_order]
     product odd = t param
     for k in range(1, i + 1):
       product_odd *= (t_param ** 2 - k ** 2)
     term odd = delta odd * product odd / math.factorial(odd order)
    result += term odd
return result
def find central interval index(self, x target):
  for i in range(len(self.x nodes) - 1):
    if self.x nodes[i] <= x target <= self.x nodes[i + 1]:</pre>
     return i
```

```
return len(self.x nodes) // 2 - 1
def plot interpolation(self, method='all', target x=None):
  plt.figure(figsize=(12, 8)) # Создание холста 12х8 дюймов
  x plot = np.linspace(min(self.x nodes), max(self.x nodes), 500) # 500 точек для плавного графика
plt.scatter(self.x nodes, self.y values, color='black', s=100, label='Узлы интерполяции', zorder=5)
  if method in ['all', 'lagrange']:
    y lagrange = [self.interpolate lagrange(x) for x in x plot]
    plt.plot(x plot, y lagrange, color='#FF4500', label='Метод Лагранжа', linewidth=2) # Оранжево-красный
  if method in ['all', 'newtone div']:
    y_newton_div = [self.interpolate newton divided(x) for x in x plot]
    plt.plot(x plot, y newton div, '--', color='#1E90FF', label='Ньютон (раздел. разности)',
          linewidth=2) # Ярко-синий
  if method in ['all', 'newton_fin'] and len(self.x_nodes) > 1:
    step = abs(self.x nodes[1] - self.x nodes[0])
    if all(abs((self.x nodes[i + 1] - self.x nodes[i]) - step) < 1e-10 for i in range(len(self.x nodes) - 1)):
       y newton fin = [
         self.interpolate newton finite(x) if self.interpolate newton finite(x) is not None else np.nan for x
         in x plot]
       plt.plot(x plot, y newton fin, ':', color='#32CD32', label='Ньютон (кон. разности)',
            linewidth=2) # Лаймовый
  if method in ['all', 'stirling'] and len(self.x nodes) > 1:
    step = abs(self.x nodes[1] - self.x nodes[0])
    if all(abs((self.x nodes[i+1] - self.x nodes[i]) - step) < 1e-10 for i in
         range(len(self.x_nodes) - 1)) and len(self.x_nodes) % 2 != 0:# Для Стирлинга (нечетное)
       y_stirling = [self.interpolate_stirling(x) if self.interpolate_stirling(x) is not None else np.nan for x
                in x plot]
       plt.plot(x plot, y stirling, '-.', color='#9370DB', label='Стирлинг', linewidth=2) # Фиолетовый
  if method in ['all', 'bessel'] and len(self.x nodes) > 1:
    step = abs(self.x nodes[1] - self.x nodes[0])
    if all(abs((self.x_nodes[i+1] - self.x_nodes[i]) - step) < 1e-10 for i in
         range(len(self.x nodes) - 1)) and len(self.x nodes) % 2 == 0: # Для Бесселя (четное)
       y bessel = [self.interpolate bessel(x)] if self.interpolate bessel(x) is not None else np.nan for x in
       plt.plot(x plot, y bessel, ':', color='#FF69B4', label='Бессель', linewidth=2) # Розовый
  if target x is not None:
    plt.axvline(x=target x, color='red', linestyle=':', alpha=0.5, label=f'x = {target x}')
    methods = [
       ('lagrange', self.interpolate lagrange(target x), '#FF4500'), # Оранжево-красный
       ('newtone div', self.interpolate newton divided(target x), '#1E90FF'), # Ярко-синий
       ('newton fin', self.interpolate newton finite(target x), '#32CD32'), # Лаймовый
       ('stirling', self.interpolate stirling(target x), '#9370DB'), # Фиолетовый
       ('bessel', self.interpolate bessel(target x), '#FF69B4') # Розовый
     for method name, value, color in methods:
       if method in ['all', method name] and value is not None:
         plt.scatter([target x], [value], color=color, s=100, zorder=5, edgecolors='black') # Отображение точек
  plt.title('Сравнение методов интерполяции')
  plt.xlabel('x')
  plt.ylabel('y')
```

plt.legend()

```
plt.grid(True)
plt.show()
```

if \_\_name \_\_ == "\_\_main\_\_": main()