Algunos ejercicios resueltos
PRÁCTICO 7

Geometría y Álgebra Lineal II

Segundo semestre 2020

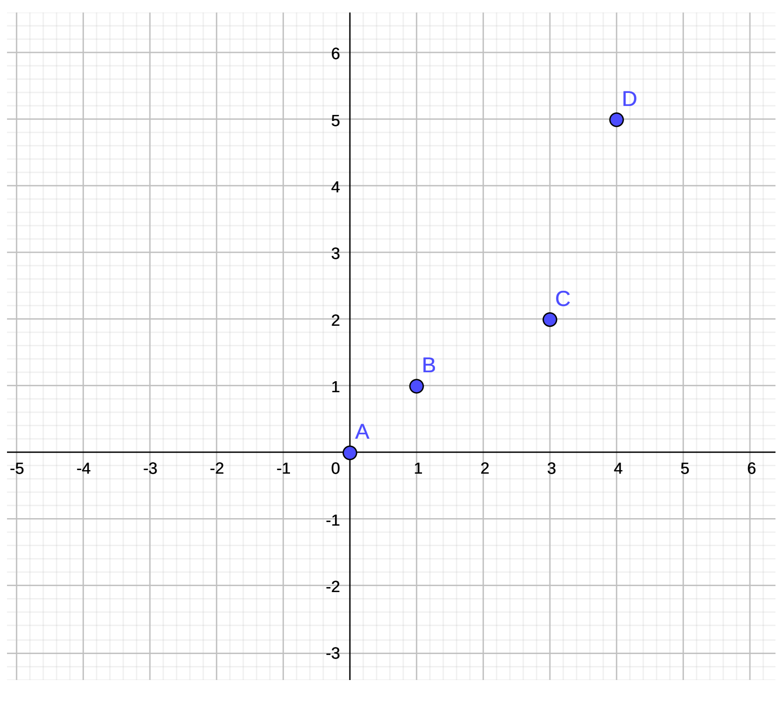
EJERCICIO 5
En un experimento se midió según el tiempo una cierta magnitud y, obteniéndose los siguientes valores

t	y
0	0
1	1
3	2
4	5

1. Graficar y contra t .
2. Aplicando el método de mínimos cuadrados hallar la "mejor" **recta** que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t + \beta$). Graficar la solución.
3. Aplicando el método de mínimos cuadrados hallar la "mejor" **parábola** que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$). Graficar la solución.

Resolución

1. Graficando los puntos dados obtenemos

8 1.pdf 8 1.pdf 

2. Debemos encontrar las entradas del vector $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tal que $(A^t A)\, X = A^t Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t A\right) X = \begin{pmatrix} 26\alpha & 8\beta \\ 8\alpha & 4\beta \end{pmatrix} \text{ y } A^t Y = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

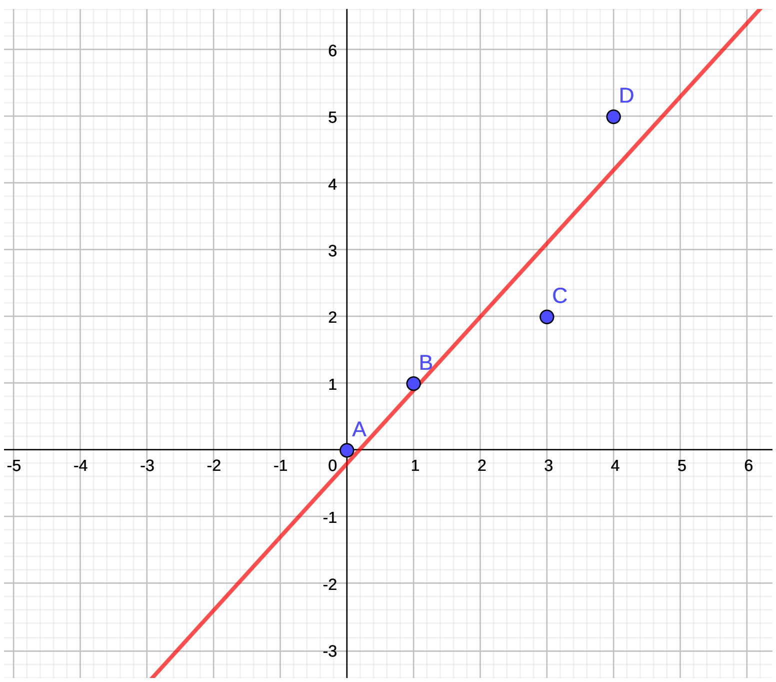
Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 26\alpha + 8\beta = 27 \\ 8\alpha + 4\beta = 8 \end{cases}$$

llegamos a $\alpha = \dfrac{11}{10}$ y $\beta = -\dfrac{1}{5}$

Obtenemos así la siguiente gráfica:

8 2.pdf 8 2.pdf



3. Debemos encontrar las entradas del vector $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tal que $(A^t A)\, X = A^t Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

.

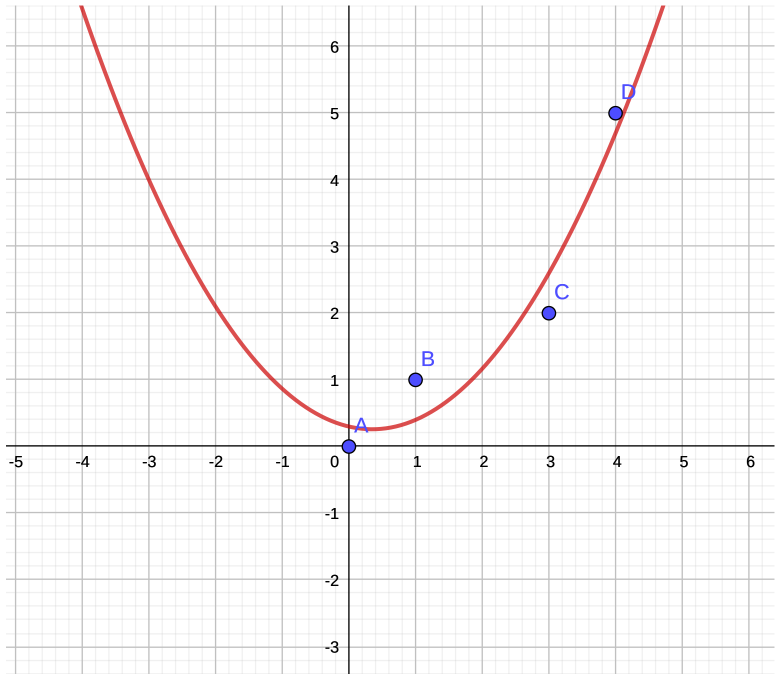
$$A^t A = \begin{pmatrix} 338 & 92 & 26 \\ 92 & 26 & 8 \\ 26 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t A\right) X = \begin{pmatrix} 338\alpha & 92\beta & 26\gamma \\ 92\alpha & 26\beta & 8\gamma \\ 26\alpha & 8\beta & 4\gamma \end{pmatrix} \text{ y } A^t Y = \begin{pmatrix} 99 \\ 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 338\alpha + 92\beta + 26\gamma = 99 \\ 92\alpha + 26\beta + 8\gamma = 27 \\ 26\alpha + 8\beta + 4\gamma = 8 \end{cases}$$

llegamos a $\alpha = \dfrac{1}{3}, \beta = -\dfrac{7}{30}$ y $\gamma = \dfrac{3}{10}$

Obtenemos así la siguiente gráfica:

8 3.pdf 8 3.pdf 

EJERCICIO 7

La tabla de valores que se muestra a continuación corresponde a medidas con error de una ley $y = f(t) = A \sin\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) + B \cos\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)$. Aplicando el método de mínimos cuadrados, calcular los parámetros A y B que mejor ajustan $f(t)$ a los datos:

t	y
0	0
2	1
4	2

Resolución

Debemos encontrar las entradas del vector $X = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ tal que $(Z^t Z)\, X = Z^t Y$ con

$$Z = \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\pi.0}{4}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi.0}{4}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi.2}{4}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi.2}{4}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi.4}{4}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi.4}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

$$Z^t Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (Z^t Z)\, X = \begin{pmatrix} A \\ 2B \end{pmatrix} \text{ y } Z^t Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Llegamos así a que $A = 1$ y $B = -1$