# PRÁCTICO 4: SUBESPACIOS INVARIANTES. FORMA CANÓNICA DE JORDAN.

## 1. Subespacios invariantes

EJERCICIO 1. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal y $S \subset V$ es un subespacio de $V$, decimos que $S$ es un *subespacio invariante bajo* $T$ (o $T$-invariante) si $T(s) \in S$ para todo vector $s \in S$.
Probar que $V, \{0_V\}$, $N(T)$ e $Im(T)$ son subespacios invariantes bajo $T$.

EJERCICIO 2. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Si $W_1$ y $W_2$ son subespacios de $V$ invariantes bajo $T$, probar que $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son dos subespacios invariantes bajo $T$.
2. Probar que si $\lambda$ es valor propio de $T$, entonces el subespacio propio $S_\lambda$ es un subespacio invariante bajo $T$.
3. Probar que si $\lambda$ es valor propio de $T$ y $W = [v_1, v_2]$, con $v_1 \in S_\lambda$ y $T(v_2) = v_1$, entonces $W$ es un subespacio invariante bajo $T$.
4. Si $W$ es un subespacio de $V$ invariante bajo $T$ y $dim(W) = 1$.
   *a*) Probar que los vectores no nulos de $W$ son vectores propios de $T$.
   *b*) ¿$W$ es un subespacio propio $T$? Justifique la respuesta.
5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que los subespacios $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ y $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z = 0\}$ son invariantes bajo $T$.
   *a*) Probar que $T$ es diagonalizable.
   *b*) Sabiendo que $2T - T^2 = Id$ en $\mathrm{W}_1$ y $T = 2Id$ en $\mathrm{W}_2 \cap \mathrm{W}_3$, hallar los valores propios de $T$.

EJERCICIO 3. Dada la matriz asociada a $T$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar los subespacios invariantes de $T$ así como sus valores propios y discutir según $\theta$ cuando $T$ es diagonalizable.

## 2. Forma canónica de Jordan

EJERCICIO 4. Hallar la forma y una base de Jordan para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 5. Hallar la forma y una base de Jordan de los siguientes operadores::

1. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que: $T(x,y,z)=(-y-2z,\ x+3y+z,x+3z)$.
2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que: $T(x,y,z)=(3x+2y-2z,4y-z,y+2z)$.

EJERCICIO 6. Probar que para todo $n\in I\!N$, $\begin{pmatrix} a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0\\ na^{n-1} & a^n\end{pmatrix}$ y calcular $\begin{pmatrix} 3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{10}$.

EJERCICIO 7. Escribir todos los tipos posibles de forma de Jordan de matrices de orden menor o igual a 4.

EJERCICIO 8. Sea $M$ una matriz con entradas reales $4\times 4$, cuyo polinomio característico tiene raíces 3 y 5 con $ma(3)=ma(5)=2$.
¿Cuáles de las siguientes matrices pueden ser $M$?

$$(I)\begin{pmatrix} 3&0&0&0\\ 0&5&0&0\\ 0&1&5&0\\ 0&0&1&5\end{pmatrix},\quad (II)\begin{pmatrix} 3&1&2&0\\ 0&3&4&0\\ 0&0&5&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix},\quad (III)\begin{pmatrix} 20&1&0&1\\ 1&5&3&1\\ 1&2&5&2\\ -1&1&0&3\end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 9. ¿ La matriz $\begin{pmatrix} 1&1&3&1\\ 0&2&a&b\\ 0&0&2&c\\ 0&0&0&2\end{pmatrix}$ es diagonalizable? Discutir según $a$, $b$ y $c$.
En caso de ser diagonalizable indicar su forma diagonal $D$ y una matriz $P$ para la cual $A=P^{-1}DP$. En caso de no ser diagonalizable, hallar su forma canónica de Jordan.

EJERCICIO 10. Sea $A=\begin{pmatrix} 2&-2&0\\ 1&a&1\\ 0&a&2\end{pmatrix}$ matriz **real** ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) con $a\in\mathbb{R}$.

1. Discutir según $a$ si $A$ es diagonalizable. Justificar con cuidado.
2. Para los casos en que $A$ no es diagonalizable y $|a|\geq 2$ hallar su forma canónica de Jordan. Justificar.

EJERCICIO 11. ¿Las matrices $A=\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 0&0&-1&-1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0&-1&-1&0\\ 1&2&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&2\end{pmatrix}$ son semejantes?

EJERCICIO 12. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión 6 y $T:V\to V$ una transformación lineal que cumple lo siguiente:

- El polinomio característico de $T$ tiene todas sus raíces en el cuerpo,
- El polinomio $(t-2)^3$ divide al polinomio característico de $T$,
- $N(T-3Id)\neq\{\mathbf{o}\}$,;
- La multiplicidad algebraica de 4 es mayor que 1.

Calcular la traza de $T$.

EJERCICIO 13. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,0)=T(-1,0,1)=(2,-2,0)$ y $T(0,-1,1)=(-6,2,-4)$.

1. Indicar si $T$ es diagonalizable y hallar una posible base de Jordan.
2. Indicar todos los subespacios invariantes bajo $T$ de dimensión 1.

3. ¿Existen subespacios invariantes bajo $T$ de dimensión 2? En caso de existir indicar al menos uno de ellos.

EJERCICIO 14. Hallar una base de Jordan para el operador $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por:

$$S(x, y, z, t) = (2y, -2x + 4y, z + t, z + t).$$