Primer Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 27 de abril de 2019.

No. Parcial

____________________________ Nombre y apellido

____________________________ Cédula de Identidad

Ejercicios de multiple opción

(Respuesta correcta 5 puntos, incorrecta -1, sin responder 0)

Respuestas.				
1	2	3	4	5

Ejercicio 1. Sea $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ el operador lineal sobre $\mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Se hacen las siguientes afirmaciones sobre T:

(I) Si $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$, entonces T es diagonalizable.

(II) Si $a = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces 0 es un valor propio de T con m.g.$(0) = 2$.

(III) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces 0 es un valor propio de T con m.g.$(0) = 1$.

Indicar la opción correcta:

(A) Solamente (I) es verdadera.

(B) Solamente (III) es verdadera.

(C) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(D) Solamente (I) y (III) son verdaderas.

Ejercicio 2. Considere la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Se hacen las siguientes afirmaciones sobre M:

(I) M es invertible.

(II) M es diagonalizable.

(III) Las raíces del polinomio característico de M son todas reales.

Indicar la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(B) Solamente (II) es verdadera.

(C) Solamente (III) es verdadera.

(D) Solamente (I) es falsa.

Ejercicio 3. En un experimento se recogieron los siguientes datos (x_i, y_i):

$$(-2,0),\ (-1,1),\ \left(-\frac{1}{2},0\right),\ (0,1),\ (1,-1).$$

Halle la ecuación de la recta que mejor aproxime dichos puntos.

Indique la opción correcta:

(A) $y = -2x + \frac{1}{3}$.

(B) $y = -x + \frac{1}{5}$.

(C) $y = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}$.

(D) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

Ejercicio 4. Se considera en $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno usual) la base dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1),(3,0,-1),(1,2,0)\},$$

y llamemos $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, y_3\}$ la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtenida luego de aplicar a $\mathcal{B}$ el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Entonces, el vector y_3 es igual a:

(A) $(0,2,0)$.

(B) $(0,1,0)$.

(C) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(D) $(0,1,1)$.

Ejercicio 5. Considere las siguientes matrices en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Indique la opción correcta:

(A) A es diagonalizable y B no.

(B) B es diagonalizable y A no.

(C) A y B son semejantes.

(D) Tanto A como B son diagonalizables.

Ejercicio de desarrollo

(Justifique detalladamente todas sus respuestas)

1. (Parte teórica)

(A) Dé la definición del complemento ortogonal de un conjunto de vectores. **(2 puntos)**

(B) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y S un subespacio de V.

- Demuestre que $S^\perp$ es un subespacio vectorial de V. **(4 puntos)**
- Sea $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, \ldots, s_h\}$ una base de S. Demuestre que $v \in S^\perp$ si, y sólo si, $v \perp s_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, h$. **(4 puntos)**

2. (Parte práctica)

Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^* \cdot A)$ (traza de la matriz $B^* \cdot A$), donde B^* es la traspuesta de la matriz conjugada de B, es decir

$$B^* := \overline{B}^t = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \text{ si } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathfrak{A}$ el subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ formado por las matrices antisimétricas. Calcule el complemento ortogonal $\mathfrak{A}^\perp$ y encuentre una base del mismo. **(5 puntos)**

Primer Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 27 de abril de 2019.

No. Parcial

Nombre y apellido

Cédula de Identidad

Ejercicios de multiple opción

(Respuesta correcta 5 puntos, incorrecta -1, sin responder 0)

Respuestas.				
1	2	3	4	5

Ejercicio 1. Se considera en $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno usual) la base dada por

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1),(3,0,-1),(1,2,0)\},$$

y llamemos $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, y_3\}$ la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtenida luego de aplicar a $\mathcal{B}$ el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Entonces, el vector y_3 es igual a:

(A) $(0,2,0)$.

(B) $(0,1,1)$.

(C) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(D) $(0,1,0)$.

Ejercicio 2. Considere la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Se hacen las siguientes afirmaciones sobre M:

(I) M es invertible.

(II) M es diagonalizable.

(III) Las raíces del polinomio característico de M son todas reales.

Indicar la opción correcta:

(A) Solamente (I) es falsa.

(B) Solamente (III) es verdadera.

(C) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(D) Solamente (II) es verdadera.

Ejercicio 3. Sea $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ el operador lineal sobre $\mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Se hacen las siguientes afirmaciones sobre T:

(I) Si $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$, entonces T es diagonalizable.

(II) Si $a = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces 0 es un valor propio de T con m.g.$(0) = 2$.

(III) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces 0 es un valor propio de T con m.g.$(0) = 1$.

Indicar la opción correcta:

(A) Solamente (I) es verdadera.

(B) Solamente (I) y (III) son verdaderas.

(C) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(D) Solamente (III) es verdadera.

Ejercicio 4. Considere las siguientes matrices en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Indique la opción correcta:

(A) B es diagonalizable y A no.

(B) Tanto A como B son diagonalizables.

(C) A es diagonalizable y B no.

(D) A y B son semejantes.

Ejercicio 5. En un experimento se recogieron los siguientes datos (x_i, y_i):

$$(-2,0),\ (-1,1),\ \Big(-\frac{1}{2},0\Big),\ (0,1),\ (1,-1).$$

Halle la ecuación de la recta que mejor aproxime dichos puntos.

Indique la opción correcta:

(A) $y = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}$.

(B) $y = -x + \frac{1}{5}$.

(C) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

(D) $y = -2x + \frac{1}{3}$.

Ejercicio de desarrollo

(Justifique detalladamente todas sus respuestas)

1. (Parte teórica)

(A) Dé la definición del complemento ortogonal de un conjunto de vectores. **(2 puntos)**

(B) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y S un subespacio de V.

- Demuestre que $S^\perp$ es un subespacio vectorial de V. **(4 puntos)**
- Sea $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, \ldots, s_h\}$ una base de S. Demuestre que $v \in S^\perp$ si, y sólo si, $v \perp s_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, h$. **(4 puntos)**

2. (Parte práctica)

Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^* \cdot A)$ (traza de la matriz $B^* \cdot A$), donde B^* es la traspuesta de la matriz conjugada de B, es decir

$$B^* := \overline{B}^t = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \text{ si } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathfrak{A}$ el subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ formado por las matrices antisimétricas. Calcule el complemento ortogonal $\mathfrak{A}^\perp$ y encuentre una base del mismo. **(5 puntos)**

PRIMER PARCIAL - ABRIL DE 2019

SOLUCIONES

Preguntas de Múltiple Opción

Ejercicio 1 (versión A) / Ejercicio 3 (versión B)

Estudiemos primero la afirmación (I). Si $a = b = c = 0$, entonces A es la matriz $\mathbf{0}$, por lo cual en este caso A es claramente diagonalizable. Así, **la afirmación (I) es verdadera**.

Antes de estudiar las afirmaciones restantes, notamos que el polinomio característico de T viene dado por:

$$\chi_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 \qquad \text{(por tratarse de una matriz triangular inferior)}$$

Notamos entonces que $\lambda = 0$ es el único valor propio de T. Para decidir sobre la veracidad de (II) y (III), debemos calcular la multiplicidad geométrica de 0 para los parámetros indicados en cada caso.

Para la afirmación (II), suponemos ahora que $a = b = 0$ y $c \neq 0$. Entonces A queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos ahora S_0, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos una sola ecuación de la forma $cz = 0$. Como $c \neq 0$, obtenemos $z = 0$. Entonces,

$$S_0 = \{(x, y, 0, t) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Así, $\mathrm{m.g.}(0) = 3$. Por lo tanto, **la afirmación (II) es falsa**.

Finalmente, calculemos $\mathrm{m.g.}(0)$ para el caso $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones para hallar S_0:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, tenemos tres ecuaciones: $ax = 0$, $by = 0$ y $cz = 0$. Como $a, b, c \neq 0$, tenemos que $x = y = z = 0$. Entonces:

$$S_0 = \{(0, 0, 0, t) \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Así, $\mathrm{m.g.}(0) = 1$. Por lo tanto, **la afirmación (III) es verdadera**.

Respuesta correcta: **(D)** en la versión A, y **(B)** en la versión B.

Ejercicio 2 (versión A) / Ejercicio 2 (versión B)

No hace falta calcular explícitamente los valores propios de la matriz M para decidir sobre la validez de las afirmaciones dadas. Es suficiente con aplicar el Teorema de Gershgorin (ya sea por filas o por columnas).

Usemos la versión del Teorema de Gershgorin por filas. Tenemos los siguientes discos de Gershgorin para la matriz M:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 19| \leq 2\} && \text{(disco de centro 19 y radio 2)}, \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| \leq 4\} && \text{(disco de centro 5 y radio 4)}, \\ D_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 5| \leq 3\} && \text{(disco de centro -5 y radio 3)}, \\ D_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 13| \leq 2\} && \text{(disco de centro 13 y radio 2)}. \end{aligned}$$

Si graficamos estos discos, podemos notar que son todos disjuntos. Por el Teorema de Gershgorin, cada disco contiene exactamente un valor propio. Entonces, tenemos 4 valores propios diferentes, por lo que **la matriz M es diagonalizable**.

Además, como M tiene entradas reales únicamente, **dichos valores propios deben ser reales**. Si hubiera algún valor propio complejo $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ en alguno de los D_i, entonces D_i debería contener también a $\overline{z}$, y $\overline{z}$ también es un valor propio de M porque χ_M tiene coeficientes reales. Obtendríamos así una contradicción.

Finalmente, como ninguno de los discos contiene al punto $0 \in \mathbb{C}$, tenemos que 0 no es un valor propio de M, y esto a su vez implica que **M es invertible**.

Por lo tanto, **las afirmaciones (I), (II) y (III) son todas verdaderas**.

Respuesta correcta: **(A)** en la versión A, y **(C)** en la versión B.

Ejercicio 3 (versión A) / Ejercicio 5 (versión B)

Aplicamos el método de aproximación por mínimos cuadrados. Como se nos pide aproximar los cinco puntos dados por una recta $y = \alpha x + \beta$, debemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A \cdot \vec{X} = \vec{Y},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Este sistema no tiene solución porque no hay una recta que contenga a los cinco puntos registrados. Para poder hallar los parámetros α y β que mejor aproximan los puntos registrados, debemos multiplicar el sistema anterior por A^t, para obtener un sistema nuevo

$$(A^t \cdot A) \cdot \vec{X} = A^t \cdot \vec{Y}$$

que sí va a tener solución (única). En nuestro caso, tenemos los siguientes cálculos:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/4 & -5/2 \\ -5/2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^t \cdot \vec{Y} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Debemos entonces resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 25/4 & -5/2 \\ -5/2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos por ejemplo considerar la matriz aumentada del sistema y redurcirla, o calcular la inversa de $A^t \cdot A$ y multiplicar el sistema por $(A^t \cdot A)^{-1}$ y así obtener α y β. Optamos por la primera opción:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 25/4 & -5/2 & -2 \\ -5/2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 25/4 & -5/2 & -2 \\ 10 & 0 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 25/4 & -5/2 & -2 \\ 1 & 0 & -3/10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -5/2 & -1/8 \\ 1 & 0 & -3/10 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1/20 \\ 1 & 0 & -3/10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/10 \\ 0 & 1 & 1/20 \end{array}\right).$$

Entonces,

$$\alpha = -\frac{3}{10} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{20}.$$

Respuesta correcta: **(C)** en la versión A, y **(A)** en la versión B.

Ejercicio 4 (versión A) / Ejercicio 1 (versión B)

Como la base $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, y_3\}$ es ortonormal, la respuesta debe tener norma 1. Entonces, descartamos las opciones $(0,2,0)$ y $(0,1,1)$.

Por otro lado, el Teorema de ortonormalización de Gram-Schmidt establece que

$$y_3 \in [y_1, y_2]^\perp = [(1,0,1),(3,0,-1)]^\perp,$$

por lo que y_3 debe ser ortogonal a $(1,0,1)$ y a $(3,0,-1)$. Notamos que:

$$\begin{gathered}\left\langle (1,0,1), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,\\ \langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle = 0,\\ \langle (3,0,-1),(0,1,0)\rangle = 0.\end{gathered}$$

Por lo tanto, $y_3 = (0,1,0)$. (También se puede llegar a la misma respuesta al ortonormalizar la base $\mathcal{B}$).

Respuesta correcta: **(B)** en la versión A, **(D)** en la versión B.

Ejercicio 5 (versión A) / Ejercicio 1 (versión B)

Sabemos por un resultado del teórico que dos matrices A y B son semejantes si, y solamente si, sus formas de Jordan son iguales (salvo el orden en el que coloquemos los bloques). Tratemos de aplicar estos a las matrices A y B dadas.

Hallemos primero la forma de Jordan de A.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\\ &= (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\\ &= -(\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 4 & -\lambda \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(4(1-\lambda)+\lambda^2)\\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2\end{aligned}$$

Tenemos entonces que 1 y 2 son los únicos valores propios de A, con $\mathrm{m.a.}(1) = 1$ y $\mathrm{m.a.}(2) = 2$. Calculemos ahora $\mathrm{m.g.}(2)$, resolviendo el sistema de ecuaciones asociado a la matriz $A - 2I$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reducimos la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos así que $x = z/2$, $y = z/2$ y $z \in \mathbb{R}$. Luego, $\mathrm{m.g.}(2) = 1$. Entonces, tenemos solamente un sub-bloque de Jordan asociado al valor propio 2. Por lo tanto, la forma de Jordan de A es:

$$J_A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ahora calculemos la forma de Jordan de B:

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 3/2-\lambda & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 3/2-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 3/2-\lambda & 1/2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 3/2-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3/2-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-2)\det\begin{pmatrix} 3/2-\lambda & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)\left(\lambda - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que 1 y 2 también son valores propios de B con $\mathrm{m.a.}(1) = \mathrm{m.g.}(1) = 1$ y $\mathrm{m.a.}(2) = 2$. La multiplicidad geométrica de 2 se calcula resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reducimos la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $x = 0$ y $z = y$. Luego, $\mathrm{m.g.}(2) = 1$. Entonces la forma de Jordan de B es:

$$J_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Como $J_A = J_B$, se tiene que A y B son semejantes.

<u>Respuesta correcta</u>: **(C)** en la versión A, y **(D)** en la versión B.

Pregunta de Desarrollo

Parte teórica

Ver teórico.

Parte práctica

Sea $\mathfrak{A}$ el subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ formado por las matrices antisimétricas. Sabemos que tales matrices son aquéllas de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, es claro que $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathfrak{A}$.

Ahora, veamos cómo son los elementos de $\mathfrak{A}^{\perp}$ para poder calcular $\mathfrak{A}^{\perp}$ y hallar una base de $\mathfrak{A}^{\perp}$. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^{\perp}$. Entonces, por la parte teórica del ejercicio, tenemos que

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Es decir,

$$0 = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{*} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \right) = c - b.$$

Tenemos así que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^{\perp}$ si, y sólo si, $c = b$.

Por lo tanto, $M \in \mathfrak{A}^{\perp}$ si, y sólo si, $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ es una matriz simétrica. En otras palabras,

$$\mathfrak{A}^{\perp} = \text{subespacio vectorial de } M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \text{ formado por las matrices simétricas.}$$

Así, una base de $\mathfrak{A}^{\perp}$ es el siguiente conjunto:

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{A}^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$