

## Práctico 9: Desarrollo de Taylor.

### Ejercicio de repaso

Calcular el límite cuando  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} & \text{(b)} \quad & \frac{x^2 e^{\sin(x)} - \log(1 + x^2)}{\tan x - \arctan x} \\ \text{(c)} \quad & \frac{\sqrt{1 + \cos(1 - \cos x)} - \sqrt{2}}{x^4} \end{aligned}$$

### Taylor en varias variables

- Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $f(x, y) = g(x)h(y)$  donde  $g, h$  son funciones  $C^\infty$ . Calcular el polinomio de Taylor de  $f$  en función de los de  $g$  y  $h$ .
  - Sean  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $C^\infty$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos y  $f(0, 0) = 0 \in V$ . Calcular el polinomio de Taylor de  $g \circ f$  en  $(0, 0)$  en función de los de  $f$  y  $g$ .

- Calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2 + y^2} \\ \text{b)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1 + y + \frac{y^2}{2})}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

- Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en  $(0, 0)$  de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2 + 1}\right) \quad \text{(b)} \quad f(x, y) = e^x \cos y \quad \text{(c)} \quad f(x, y) = \log(xy + 1)$$

- Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función  $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$  en el punto  $(1, 0, 0)$ .
- Desarrollar  $xyz^2$  en potencias de  $x, y - 1$  y  $z + 1$ .
- Calcular el polinomio de Taylor de grado  $n$  de las siguientes funciones:

- $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ , en el origen.
- $f(x, y) = \sin(y)\cos(x)$ , en el origen.
- $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ , en el punto  $(1, 1)$ .
- $f(x, y) = \frac{x}{y}$ , en el punto  $(1, 1)$

- Estimar el error de reemplazar  $\frac{\cos(x)}{\cos(y)}$  por  $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$  para  $|x|, |y| \leq \frac{\pi}{6}$

### Ejercicios opcionales

- Calcular con un error menor que  $3,2 \times 10^{-5}$  el valor de  $\arctan(0, 8)$ .
  - Calcular con un error menor que  $10^{-4}$  el valor de  $\sqrt{5}$ .
- ¿Cuál es el menor número de términos que hay que tomar en el desarrollo de Taylor de  $e^x$  en  $x = 0$ , para obtener un polinomio que aproxime, con un error menor que  $10^{-4}$ , a  $e^x$  en el intervalo  $[-1, 1]$ ?

3. El polinomio de Taylor de grado 3 de  $f(x, y) = \sin(x + y^2) + e^{x^2}$  en un entorno de  $(0, 0)$  es:

- a)  $1 + x + x^2 + y^2 + x^3$ .
- b)  $x + x^2 + y^2 + x^3$ .
- c)  $1 + x + x^2 + y^2 + x^3/3$ .
- d)  $1 + x + x^2 + y^2 - x^3/6$ .
- e)  $x + x^2 + y^2 - x^3/3$ .

4. El polinomio de Taylor de grado 3 de  $f(x, y) = \log(1 + x + 3y)$  en un entorno de  $(0, 0)$  es:

- a)  $x + 3y - (1/2)(x + 3y)^2 + (1/3)(x + 3y)^3$ .
- b)  $x + 3y + (1/2)(x + 3y)^2 + (1/3)(x + 3y)^3$ .
- c)  $x + 3y + (1/2)(x + 3y)^2 + (1/6)(x + 3y)^3$ .
- d)  $x + 3y - (1/2)(x + 3y)^2 + (1/6)(x + 3y)^3$ .
- e)  $1 + x + 3y + (1/2)(x + 3y)^2 + (1/3)(x + 3y)^3$ .