Práctico 10: Integrales iteradas, integrales múltiples.

1. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de f sobre ciertos dominios. Dibujar esos dominios y expresar las integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\,dx dy \qquad \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy dx \qquad \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx dy$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy dx \qquad \int_1^e \int_0^{log(x)} f(x,y)\,dy dx$$

2. Calcular las siguientes integrales iteradas en el orden dado y en el orden inverso

   a) $\int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-y^2}} yx^2 dx) dy$

   b) $\int_1^2 (\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} xy dx) dy$

3. Calcular $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = 2x - y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 3\}$.

   b) $f(x,y) = 4x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

   c) $f(x,y) = xy^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq y+1\}$.

   d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$.

   e) $f(x,y) = xy$ y $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$; $D_2 = D_1 \cap \{y \geq 0\}$.

   f) $f(x,y) = x^2y^2$ y D la región del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

   g) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ y $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$

   h) $f(x,y) = \dfrac{e^{\frac{tx}{y}}}{y^3}$ y $D = [0,t] \times [1,t]$

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal.
   Calcular el área de $T(D)$, para D

   a) $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1\}$

   b) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

5. Calcular $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos haciendo cambios de variable convenientes.

   a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

   b) $f(x,y) = x + y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

   d) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ y D el triángulo de lados $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$. Se sugiere pasar a polares.

   e) $f(x,y) = (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ y D el cuadrado de vértices $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$ y $(\pi,2\pi)$.

6. Calcular en cada caso el área del conjunto D.

   a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{x^2}{a^2} \leq 1\}$.

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2} \leq y \leq 1\}$.

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ x^2 \geq |r|\}$, con $r > 1$.

d) D comprendido entre $x = y^2$ y $x = 4 - y^2$.

7. Calcular en cada caso el volumen del conjunto D.

   a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

   b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$.

   c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 \geq |rx|\}$.

   d) D comprendido entre $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

   e) D es la intersección de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con el cinlindro $2x^2 + y^2 - 2x \leq 0$

8. Calcular $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y,\ 0 \leq x,\ 0 \leq z,\ x+y+z \leq 1\}$.

   b) $f(x,y,z) = x$ y D la región limitada por $z = 0$, $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$ y $x + y + z = 6$.

   c) $f(x,y,z) = xyz$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y,\ 0 \leq x,\ 0 \leq z,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

   d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ y D la región limitada por $z = 0$, $z = 1$ y $z^2 = x^2 + y^2$.

   e) $f(x,y,z) = z$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq a \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b\}$.

   f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ y D la región limitada por $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ y $z = 2$.

9. Sea S el sólido determinado por las condiciones $z \leq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$. Pasando a coordenadas cilíndricas calcular $\iiint_S z\,dx\,dy\,dz$.

10. Dado $r > 0$ sean $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-u^2}du$ y $R = [-r,r] \times [-r,r]$

    a) Demostrar que $I(r)^2 = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

    b) Sean C_1 y C_2 los círculos inscrito y circunscrito a R respectivamente. Demostrar que

    $$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

    c) Haciendo un cambio a coordenadas polares calcular

    $$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \text{ y } \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

    d) Tomando límite $r \to \infty$ probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$

Ejercicios opcionales

1. a) Sea A un conjunto medible Jordan con interior no vacío. Probar que su medida de Jordan es positiva.

   b) Demostrar que si $Int(A) = \emptyset$ entonces $\mu(A) = 0$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado, denotamos mediante $\mu^+(A)$ el área por exceso de A.

   a) Demostrar que si $\mu^+(A) = 0$ entonces A es medible Jordan y $\mu(A) = 0$

   b) Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ continua. Demostrar que el gráfico de f

   $$Graf(f) = \{(x,y) : x \in [a,b]; y = f(x)\}$$

   es un conjunto medible Jordan en $\mathbb{R}^2$ de medida nula.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado. Demostrar que A es medible Jordan sii $\mu(Fr(A)) = 0$. Dar un ejemplo de un conjunto acotado en el plano que no sea medible Jordan.

4. Sea $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ definido por $\Delta_n = \{(x_1,...,x_n) \ : \ x_i \geq 0, \ \forall i \text{ y } \ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$.
   Calcular el volumen de Δ_n

5. Sean $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ y $h\colon U \to h(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por $h(u,v) = (u+v, v-u^2)$.
   a) Probar que h es un cambio de coordenadas y hallar explícitamente h^{-1}.
   b) Hallar Jh y $\det(Jh)$ en un punto genérico. Hallar $\det(J(h^{-1}))$ en $(2,0) = h(1,1)$.
   c) Sea T el triángulo de lados $u = 0$, $v = 0$ y $u + v = 2$. Calcular el área de $S = h(T)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 , pruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

   utilizando el Teorema de Fubini. Sugerencia: Defina la función $g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e integre sobre un rectángulo arbitrario $R \subset \mathbb{R}^2$. Luego justifique el hecho de que una función continua es nula si y solamente si su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula.

7. Sean m y n números naturales positivos. Se define

$$S(m,n) = \frac{1}{m^3 n^3} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} n^2(m+2i)^2 + m^2 j^2$$

   Demostrar que existen, son iguales entre sí, y calcular los siguientes límites:

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} S(m,n) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} S(m,n)$$

   Sugerencia: Calcular $\int_1^3 dx \int_0^1 (x^2+y^2)\, dy$. Después escribir la integral doble anterior como límite de sumas de Riemann en particiones formadas por mn rectangulitos $R_{i,j}$ todos iguales, de ancho $2/m$ y alto $1/n$, evaluando la función integrando para cada $R_{i,j}$ en el punto de $R_{i,j}$ con mayor abscisa y mayor ordenada.

8. (Examen Febrero 2016) Sean S_r una esfera de radio r con centro en el origen y C_r un cilindro de base circular de radio r/2 de altura infinita y recto (o sea la base está incluida en un plano perpendicular al eje del cilindro) tal que su eje pasa por el centro de la esfera. Calcular los dos volúmenes delimitados por S_r y C_r.

9. Sea S un solido en el espacio que tiene densidad (masa por unidad de volumen) conocida que llamamos $f(x,y,z)$ para cada $(x,y,z) \in S$. Esto determina una función densidad $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Definimos la masa de S como $m(S) = \iiint_S f(x,y,z)dxdydz$. Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ definidos por

$$\bar{x} = \frac{1}{m(S)} \iiint_S x f(x,y,z) dxdydz, \ \ \bar{y} = \frac{1}{m(S)} \iiint_S y f(x,y,z) dxdydz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(S)} \iiint_S z f(x,y,z)$$

   El punto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es el centro de gravedad de S. Si consideramos el caso de $f \equiv 1$ entonces $m(S) = Vol(S)$ y a $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se le llama centroide de S (que es un concepto geometrico)

   a) Probar que si f es constante entonces el centro de gravedad coincide con el centroide
   b) Hallar la masa del solido comprendido entre dos esferas de radio de a y b contradas en $(0,0,0)$, suponiendo que la densidad es $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
   c) Sea S un cono solido circular recto de altura h y radio de la base R. Demostrar que la distancia del centroide a la base es $\frac{1}{4}h$
   d) Determinar el centro de gravedad del cono de la parte anterior, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia a la base