Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo Semestre 2019**

Sábado 21 de septiembre de 2019

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 40 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{M}_{m\times n}$ es el espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$.
- $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual que n.
- $N(T)$ e $Im(T)$ denotan respectivamente el núcleo y la imagen de una transformación lineal T.

(I) Verdadero Falso. Total: 10 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**

Ejercicio 1:
Las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

Ejercicio 2:
Considere un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con valores propios λ y μ ($\lambda \neq \mu$). Si $ma(\lambda) = 2$ entonces $mg(\mu) = 1$.

Ejercicio 3:
Sea $V = \mathcal{P}_2$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Considere la función $\langle\, ,\rangle : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Entonces $\langle\, ,\rangle$ es un producto interno.

Ejercicio 4:
Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $W \subset V$ es un subespacio invariante bajo T y $dim(W) = 2$ entonces W es un subespacio propio de T (esto es, existe λ valor propio de T tal que $W = S_\lambda$).

Ejercicio 5:
Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ es una matriz con valores propios -1, 0 y 1, entonces A^2 es diagonalizable y sus valores propios son 0 y 1.

Ejercicio 6:
Considere una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean C_1, C_2 y C_3 los círculos de Gershgorin. Si $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ entonces A es diagonalizable.

Ejercicio 7:
Sea V un espacio vectorial con producto interno y $S \subset V$. Entonces S es un conjunto ortonormal si y sólo si S es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 8:
Sea V un espacio vectorial con producto interno, $dim(V) = n$, y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que 0 es valor propio de T. Si $S = N(T)$ entonces $dim(S^{\perp}) = n - 1$.

Ejercicio 9:
Sea V un espacio vectorial con producto interno. Considere un subespacio $S \subset V$, $S \neq \{0\}$, y sea P_S la proyección ortogonal sobre S. Entonces existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $P_S(v) = v$.

Ejercicio 10:
Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y λ un valor propio de T. Entonces $dim(N(T - \lambda I)) = ma(\lambda)$.

(II) Múltiple opción. Total: 30 puntos
Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	**A**	**A**	**D**	**B**

Ejercicio 1

Considere el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x, 2x + 3y + \alpha z, \beta x + 3z)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta:

A) T es diagonalizable para todos los valores de α y β.
B) T es diagonalizable para un único valor de α y para todo valor de β.
C) T es diagonalizable para un único valor de β y para todo valor de α.
D) T es diagonalizable si y sólo si $\alpha \neq \beta$.

Ejercicio 2

Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual y el subespacio $S = [(1, 1, 1), (0, 1, 1)]$. Una base ortonormal de S es:

A) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$.
B) $\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.
C) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right\}$.
D) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.

Ejercicio 3

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ -1/8 & -4+i & 1/8 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -(4+i) & 1/8 \\ 0 & 1/7 & 6/7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Indique la opción correcta:

A) A es invertible y diagonalizable.
B) A es invertible pero no diagonalizable.
C) A no es invertible pero sí es diagonalizable.
D) A no es invertible ni diagonalizable.

Ejercicio 4

Considere $V = \mathcal{P}_2$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, con el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$. Sea $S = [t^2, t]$.
Indique la opción correcta:

A) Una base de $S^\perp$ es $\{5t^2 - 3\}$ y la proyección ortogonal del polinomio $q(t) = t + 1$ sobre el subespacio $S^\perp$ es el polinomio $r(t) = -\frac{8}{3}(5t^2 - 3)$.
B) Una base de $S^\perp$ es $\{1\}$ y la proyección ortogonal del polinomio $q(t) = t + 1$ sobre el subespacio $S^\perp$ es el polinomio $r(t) = 2$.
C) Una base de $S^\perp$ es $\{t^2 + t + 1\}$ y la proyección ortogonal del polinomio $q(t) = t + 1$ sobre el subespacio $S^\perp$ es el polinomio $r(t) = t^2 + t + 1$.
D) Una base de $S^\perp$ es $\{5t^2 - 3\}$ y la proyección ortogonal del polinomio $q(t) = t + 1$ sobre el subespacio $S^\perp$ es el polinomio $r(t) = -\frac{5}{3}t^2 + 1$.

Ejercicio 5

Considere un espacio vectorial real con $dim(V) = 5$. Sea $T : V \to V$ un operador lineal que cumple las siguientes condiciones:

- T no es invertible.
- $dim(N(T + 4I)) = 2$.
- $dim(Im(T - I)) = 3$.

Se denota A a la matriz asociada a T en una base cualquiera de V. Indique la opción correcta:

A) A es diagonalizable y $traza(A) = -3$.
B) A es diagonalizable y $traza(A) = -6$.
C) A es diagonalizable y $traza(A) = -5$.
D) A no es diagonalizable y $traza(A) = 0$.