Primer Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 22 de septiembre de 2018.

No. Parcial

______________________________ Nombre y apellido

______________________________ Cédula de Identidad

Ejercicios de multiple opción

(Respuesta correcta 5 puntos, incorrecta -1, sin responder 0)

Respuestas.				
1	2	3	4	5

Ejercicio 1. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

.

Indicar la opción correcta:

(A) La forma canónica de Jordan de la matriz A es la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(B) 2 es valor propio de la matriz con multiplicidad geométrica igual a 2.

(C) $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisface $P^{-1}AP = J$ siendo J la forma canónica de A.

(D) La forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución El polinomio característico de la matriz A es $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$, de donde $\lambda = 2$ y $\lambda = -4$ son los valores propios.

El núcleo $N(A-2I)$ es el núcleo de

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Al hacer el cálculo nos queda que $N(A-2I) = [(1,-1,1)]$, de donde $mg(2) = 1$ y la forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La opción correcta es la D.

Ejercicio 2. Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tal que sus discos de Gerschgorin son:

$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 3\}$,
$\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+6| \leq 2\}$ y
$\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-9| \leq 1\}$.

Indicar la opción correcta:

(A) No es posible determinar si A es diagonalizable.

(B) A es diagonalizable y la suma de sus valores propios es 4.

(C) A es diagonalizable y la suma de sus valores propios es 6.

(D) A no es diagonalizable y $tr(A) = 4$.

Solución Los tres discos de Gerschgorin tienen intersección vacía. Por el teorema de Gerschgorin, se puede afirmar que existen tres valores propios distintos y por lo tanto la matriz es diagonalizable. Los centros de los discos de Gershgorin son los elementos de la diagonal de la matriz A, por lo tanto la traza de A vale 4. Como A es diagonalizable, A es semejante a la matriz diagonal D de valores propios. La traza de D es igual a la traza de A por ser semejantes, así la suma de los valores propios es 4.

La opción correcta es la B.

Ejercicio 3. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz'.$$

Sea $S = \{(0,0,n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,-1/3),(0,1,1)\}$.

Indicar la opción correcta:

(A) $S^{\perp} = \{(x,y,z) : y = 0, z = 0\}$.

(B) $S^{\perp} = \{(x, y, z) : x + 2y = 0, z = 0\}$.

(C) $S^{\perp} = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0, x + y = 0\}$.

(D) $S^{\perp} = \{(x, y, z) : x - 2y = 0, y + z = 0\}$.

Solución Dado que los vectores $(0, 0, n)$ y $(0, 0, -1/3)$ son colineales, ser ortogonal a todos ellos equivale a serlo al vector $(0, 0, 1)$, luego

$$S^{\perp} = \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = 0, \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0\}$$

De acuerdo al producto interno indicado,

$S^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0, z = 0\}$
La opción correcta es la B.

Ejercicio 4. Sea $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 5x + y - z + 3t = 0\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$. Considerando el producto interno usual, la proyección ortogonal del vector $(6, 3, 3, 2)$ sobre S es:

(A) $(2, 2, 1, -3)$

(B) $(1, -3, 2, 0)$

(C) $(5, 1, -1, 3)$

(D) $(1, 2, 4, -1)$

Solución Como $z = 5x + y + 3t$, entonces $S = [(1, 0, 5, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 3, 1)]$ como estos generadores son L.I, la dimensión de S es 3. Como S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, por la proposición 129 (libro rojo), $\mathbb{R}^4 = S \oplus S^{\perp}$ de donde $\dim(S^{\perp}) = 1$. Calculemos la proyección ortogonal de $(6, 3, 3, 2)$ sobre $S^{\perp}$.

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(a, b, c, d) : \langle (a, b, c, d), (1, 0, 5, 0) \rangle = 0, \langle (a, b, c, d), (0, 1, 1, 0) \rangle = 0, \langle (a, b, c, d), (0, 0, 3, 1) \rangle = 0\} \\ &= [(5, 1, -1, 3)] \end{aligned}$$

Dado que $\|(5, 1, -1, 3)\| = 6$, tenemos que $\{\frac{1}{6}(5, 1, -1, 3)\}$ es BON de $S^{\perp}$.

$P_{S^{\perp}}(6, 3, 3, 2) = \langle (6, 3, 3, 2), \frac{1}{6}(5, 1, -1, 3) \rangle \frac{1}{6}(5, 1, -1, 3) = (5, 1, -1, 3)$.

$P_S(6, 3, 3, 2) = (6, 3, 3, 2) - P_{S^{\perp}}(6, 3, 3, 2) = (1, 2, 4, -1)$.
La opción correcta es la D.

Ejercicio 5. De un experimento se obtienen los siguientes datos:

x	y
0	0
1	1
2	5

Indicar la recta que mejor aproxima (en el sentido de mínimos cuadrados) los datos obtenidos.

(A) $4y = 10x - 1$

(B) $2y = 5x$

(C) $2y = 5x - 1$

(D) $y = 4x - 3$

Solución Consideremos una recta dada por la ecuación $y = mx + n$ que satisfaga los datos de la tabla. Luego, $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ debe verificar el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

que resulta incompatible, luego, si queremos encontrar la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

que resulta

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

cuya solución es $m = \frac{5}{2}$ y $n = \frac{-1}{2}$, la recta resulta $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$, es decir, $2y = 5x - 1$.
La opción correcta es la C.

Ejercicio de desarrollo

Justifique detalladamente todas sus respuestas

1. Definir transformación lineal diagonalizable. (2 puntos) Ver teórico.

2. Probar que una transformación lineal es diagonalizable si, y sólo si, existe una base de vectores propios. (6 puntos) Ver teórico.

3. Probar que la siguiente matriz es diagonalizable y determinar una base de vectores propios. (7 puntos)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1+\lambda)^2$, tenemos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$ son los valores propios de A.

A su vez, $S_{\lambda_1} = Ker(A) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ y $S_{\lambda_2} = Ker(A+I) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$,

luego, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ conforman una base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios por lo cual A resulta diagonalizable.