# Práctico 1: Sistemas de Numeración, Divisibilidad, MCD y MCM.

Matías Iglesias

Noviembre 2018

**Ejercicio 1.** *Sistemas de numeración.*

**a**. Escribir en las bases 2, 4, 8 y 16 los números decimales 137, 6243 y 12354.
Escribir en la base 28 el número decimal 16912.

**b**. Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales $A7$, $4C2$, $1C2B$ y $A2DFE$.

**c**. Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.

**d**. Pasar los siguientes números dados en las bases indicadas a los números decimales correspondientes: $BACK_{(21)}$ y $OJO_{(25)}$ (apoyarse enla tabla del ejercicio siguiente).

## 1 Ejercicio 1.

a. $137 = 2^7 + 2^3 + 2^0 = (100010001)_2$
$137 = 2 \times 4^3 + 2 \times 4^1 + 4^0 = (2021)_4$
$137 = 2 \times 8^2 + 8^1 + 8^0 = (211)_8$
$137 = 8 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = (89)_{16}$

$6243 = 2^{12} + 2^{11} + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = (1100001100011)_2$
$6243 = 4^6 + 2 \times 4^5 + 4^3 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^0 = (1201203)_4$
$6243 = 8^4 + 4 \times 8^3 + 8^2 + 4 \times 8 + 3 \times 8^0 = (14143)_8$
$6243 = 16^3 + 8 \times 16^2 + 6 \times 16^1 + 3 \times 16^0 = (1863)_{16}$

$12354 = 2^{13} + 2^{12} + 2^6 + 2^1 = (11000001000010)_2$
$12354 = 2 \times 4^6 + 3 \times 4^5 + 4 \times 4^4 + 4^3 + 2 \times 4^0 = (2341001)_4$
$12354 = 3 \times 8^4 + 8^2 + 2 \times 8^0 = (30102)_8$
$12354 = 3 \times 16^3 + 4 \times 16^1 + 2 \times 16^0 = (3042)_{16}$

b. $A7_{16} = 16^1 \times A + 16^0 \times 7 = (167)_{10}$
$A7_{16} = (167)_{10} = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (10100111)_2$

$4C2_{16} = 4 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 2 \times 16^0 = (1218)_{10}$
$4C2_{16} = 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^1 = (10011000010)_2$

$1C2B_{16} = 16^3 + 12 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 11 = (7211)_{10}$

$1C2B_{16} = 2^{12} + 2^{11} + 2^{10} + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = (1110000101011)_{10}$

$A2DFE_{16} = 10 \times 16^{14} + 2 \times 16^3 + 13 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = (667134)_{10}$
$A2DFE_{16} = 2^{19} + 2^{17} + 2^{13} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = (10100010110111111110)_2$

c. $(11001110)_2 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = (206)_10 = 12 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = (CE)_{16}$

$(00110001)_2 = 2^5 + 2^4 + 2^0 = (49)_{10} = 3^1 + 16^0 = (31)_{16}$

$(01010111)_2 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (87)_{10} = 5 \times 16^1 + 7 \times 16^0 = (57)_{16}$

d. Se deja como un muy buen ejercicio para el lector.

**Ejercicio 2.**

En este ejercicio vamos a utilizar la siguiente numeración de los **28** símbolos:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | Ñ | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | ␣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |

El objetivo de este ejercicio es asociar una secuencia de números enteros a una secuencia de palabras (por ejemplo una frase) de la siguiente manera. Primero separamos el texto en bloques de a tres caracteres (incluyendo el espacio en blanco); por ejemplo si el texto es "MUY BIEN" nos quedan tres bloques: $\boxed{M|U|Y}$ $\boxed{\_|B|I}$ $\boxed{E|N|\_}$. A cada bloque de tres letras le hacemos corresponder un entero entre $0$ y $28^3 - 1$ con el siguente criterio. Si tenemos un bloque de letras $\boxed{X|Y|Z}$, le asociamos el bloque de enteros según la tabla de arriba $\boxed{x|y|z}$, y a este bloque le asociamos el entero $x28^2 + y28^1 + z(28)^0$. Por ejemplo, al bloque $\boxed{M|U|Y}$, letra a letra le corresponde el bloque $\boxed{12|21|25}$ al cual le hacemos corresponder el entero $12(28)^2 + 21(28)^1 + 25(28)^0$.

Asocie la secuencia de enteros que se obtienen de la frase: "Me encanta el carnaval".
Halle la frase correspondiente a la secuencia de enteros: $768$, $7048$, $337$, $6397$.

## 2 Ejercicio 2.

Operando con el criterio dado resulta que para la frase "Me encanta el carnaval", la secuencia de enteros se construye de la siguiente forma:

$$
\begin{gathered}
ME\_ = 12 \times 28^2 + 4 \times 28^1 + 27 \times 28^0 = 9547 \\
A\_E\_ = 4 \times 28^2 + 13 \times 28^1 + 2 \times 28^0 = 3502 \\
AVA = 0 \times 28^2 + 12 \times 28^1 + 20 \times 28^0 = 896 \\
ENC = 0 \times 28^2 + 27 \times 28^1 + 4 \times 28^0 = 760 \\
L\_C = 11 \times 28^2 + 27 \times 28^1 + 2 \times 28^0 = 9382 \\
L\_\_ = 0 \times 28^2 + 18 \times 28^1 + 13 \times 28^0 = 517 \\
ANT = 0 \times 28^2 + 22 \times 28^1 + 0 \times 28^0 = 616 \\
ARN = 11 \times 28^2 + 27 \times 28^1 + 27 \times 28^0 = 9407
\end{gathered}
$$

La frase correspondiente a la secuencia de enteros "768,7048,337,6937" se construye como sigue:

$$768 = 0 \times 28^2 + 27 \times 28^1 + 12 \times 28^0$$
$$7048 = 8 \times 28^2 + 27 \times 28^1 + 20 \times 28^0$$
$$337 = 0 \times 28^2 + 12 \times 28^1 + 1 \times 28^0$$
$$6397 = 8 \times 28^2 + 4 \times 28^1 + 13 \times 28^0$$

Entonces, los bloques quedan: "0 27 12", "8 27 20", "0 12 1", "8 4 13" y decodificando resulta la frase: "A mí también".

**Ejercicio 3.** En un libro de mil hojas numeradas del 1 al 1000 se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las páginas 7, 12, 93, 100 pero no la 248).

**a**. ¿Qué página ocupará la posición 100 luego de que le fueran arrancadas dichas hojas?

**b**. ¿Qué posición ocupará la página que aparece con el número 888?

## 3 Ejercicio 3.

a. Podemos pensar que las páginas del libro son números en base 5 con sus dígitos multiplicados por 2. Entonces, el problema se resume a hallar la representación de 100 en base 5 y luego multiplicar por 2: $(100)_{10} = 4 \times 5^2 = 2 \times (400)_5 = 800_5$. Por lo tanto, la página buscada sería la 800.

b. A la inversa, $(888)_5/2 = (444)_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 124$. Por lo tanto, la posición que ocupará la página 888 será la 124.

**Ejercicio 4.** El *Juego del Polinomio* consiste en que alguien piensa un polinomio de coeficientes enteros no negativos y de grado cualquiera, y nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para averiguar el polinomio se nos permite preguntar a la otra persona cuánto vale su polinomio evaluado en los valores que nos parezcan oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio en la menor cantidad de evaluaciones.

Probar que siempre es posible averiguar el polinomio incógnita con dos evaluaciones.

[Sugerencia: elegir el segundo punto de evaluación luego de conocer el resultado del primero.]

## 4 Ejercicio 4.

Sea $p(x)$ un polinomio de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_o$ donde $a_i \in \mathbb{Z}$. Evaluando $p(x)$ en $x = 1$ resulta $p(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 = N$ con $N \in \mathbb{Z}$. . Ahora evaluamos el polinomio en $p(N) = m$ con $m \in \mathbb{Z}$. Escribimos $m$ en base $N$ y así podremos determinar los coeficientes $a_i$.

**Ejercicio 5.** Sabiendo que el resto de la división de un entero $a$ por 18 es 5, calcular el resto de

**a**. la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18,

**b**. la división de $a^2 + 7$ por 36,

**c**. la división de $4a + 1$ por 9,

**d**. la división de $7a^2 + 12$ por 28.

## 5 Ejercicio 5.

Para todas las partes del ejercicio sabemos que: $a = 18q + 5$ por el Teorema de División Entera, con $q \in \mathbb{Z}$

a. Queremos hallar el resto de la división entera de $a^2 - 3a + 11$ por 18. Sustituyendo $a$ por $a = 18q + 5$ resulta que: $a^2 - 3a + 11 = 18(18q^2 + 7q + 1) + 3 = 18q' + 3$ con $q' \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el resto buscado es 3.

Resolver este tipo de problemas es mucho más fácil sabiendo el tema de Congruencias (que se verá con mayor detalle en el práctico 4). De todas formas exhibimos la solución para ver la facilidad: $a \equiv 5 \pmod{18}$. Por lo tanto: $a^2 - 3a + 11 \equiv 5^2 - 3 \times 5 + 11 \pmod{18} \equiv 25 - 15 + 11 \pmod{18} = 21 \pmod{18} \equiv 3 \pmod{18}$.

b. $a^2 + 7 = (18q + 5)^2 + 7 = 36(9q + 5) + 32$. Por lo tanto el resultado es 32.

c. $4a + 1 = 9(8q + 2) + 3$. Por lo tanto, el resultado es 3.

d. $7(18q + 5)^2 + 12 = 28q' + 19$ con $q' \in \mathbb{Z}$ . Entonces el resto es 19.

**Ejercicio 6.** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar dando un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

**a.** Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

**b.** Si $a|b$ entonces $ac|bc$.

**c.** Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.

**d.** Si $ac|bc$ entonces $a|b$.

**e.** Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.

**f.** Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

**g.** Si $4|a^2$ entonces $2|a$.

**h.** Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.

**i.** Si $a + c|b + c$ entonces $a|b$.

## 6 Ejercicio 6.

a. Como $a|b$ y $c|d$ podemos expresar que: $b = a.q_1$ y $d = c.q_2$ con $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $b.d = a.c.q_1.q_2$ y por lo tanto $ac|bd$.

b. Si $a|b$ entonces $b = a.q_1$ con $q_1 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $bc = a.q_1.c$ y esto prueba que $ac|bc$.

c. Probemos el contrarecíporco. Este implica que si $a \mid b$ o $a \mid c$ entonces $a \mid bc$. Y probar esto último es inmediato de la forma en la que venimos trabajando.

d. También es inmediato de la forma en la que venimos razonando.

e. Esto es falso en general. Basta por ejemplo tomar $a = 6, b = 8, c = 3$. Claramente $6 \mid 24$ pero $6 \nmid 8$ y $6 \nmid 3$.

f. Esto es falso en general. Basta tomar $a = 2, b = 4, c = 12$. Claramente: $2|12$ y $4|12$ pero $8 \nmid 12$.

g. Notemos que $2|4|a^2$. Por lo tanto, $2|a^2 = a.a$. Ahora, por el Corolario 1.2.11 de las Notas del Curso resulta que al ser 2 primo, necesariamente $2|a$.

h. Esto es falso en general. Considere: $a = 9, b = 20, c = 7$.

i. Esto es falso en general, basta ver que $a = 3, b = 8, c = 2$ no cumplen lo pedido.

**Ejercicio 7.**

**a**. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de $6$.

**b**. Probar que $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre $6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

# 7 Ejercicio 7.

a. Realizaremos la prueba por inducción completa. Consideramos nuestro paso base $1 \times 2 \times 3 = \dot{6}$. Ahora continuamos con nuestro paso inductivo que tiene como hipótesis inductiva que: $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n = \dot{6}$ y como tésis inductiva que: $(n+1)(n+2)(n+3) = \dot{6}$. Notemos lo siguiente: $(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+2)(n+3) = n^3+3n^2+2n+3n^2+9n+6 = \dot{6} + 3n^2 + 3n = \dot{6} + 3n(n+1)$. Sólo resta probar que $3n(n+1) = \dot{6}$. Ahora bien, notemos lo siguiente: si $n$ es par entonces se escribe de la forma $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto: $3n(n+1) = 6k(2k+1) = \dot{6}$. Si $n$ es impar se escribe como $n = 2k+1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto: $n = (6k+3)(2k+2) = 6(2k+1)(k+1) = \dot{6}$. Esto termina la de probar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

b. Al igual que en la parte anterior, realizaremos la prueba por inducción completa. Notemos que tomando $n = 0$ se tiene que 0 es divisible entre 6. Al igual que antes, asumimos por hipótesis inductiva que $n(2n+1)(7n+1) = 14n^3 + 9n^2 + n = \dot{6}$ y probemos que $(n+1)(2n+3)(7n+8) = \dot{6}$. Observemos que $(2n^2+4n+3)(7n+8) = 14n^3+51n^2+61n+24 = (14n^3 + 9n^2 + n) + 42n^2 + 60n + 24 = \dot{6} + 6(7n^2 + 10n + 4) = \dot{6}$.

**Ejercicio 8.** Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos propios. Por ejemplo, $6$ es perfecto pues $6 = 1 + 2 + 3$.

**a**. Verificar que $28$ y $496$ son perfectos.

**b**. Probar que si $2^m - 1$ es primo entonces $2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

# 8 Ejercicio 8.

a. Notemos que $28 = 2^2 \times 7$. Por lo tanto, $Div_+(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ y $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. De forma similar notemos que $496 = 2^4 \times 31$. Por lo tanto, $Div_+(496) = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496\}$ y $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 31 + 62 + 124 + 248$.

Para ir transitando el camino que nos conducirá a la prueba de la parte siguiente notemos que: $28 = 2^2(2^3 - 1)$ y $Div_+(28) = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^0.7, 2^1.7, 2^2.7\}$. Un razonamiento similar vale para 496.

b. Recordemos que

$$\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$$

con $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, con las ideas vistas en la parte anterior resulta que $Div_+(2^m(2^m - 1)) = \{2^0, 2^1, ..., 2^m - 1, 2^0.(2^m - 1), 2^1.(2^m - 1), ..., 2^{m-1}(2^m - 1)\}$. Y por definición de "perfecto"

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^i + (2^m - 1) \sum_{i=0}^{m-2} 2^i = 2^{m-1} + (2^m - 1)(2^{m-1} - 1) = (2^m - 1).2^{m-1}$$

**Ejercicio 9.** Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

**a**. $99 | 10^{2n} + 197$

**b**. $9 | 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$

**c**. $56 | 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

**d**. $256 | 7^{2n} + 208n - 1$

## 9 Ejercicio 9.

Todas las pruebas las realizaremos por inducción completa.

a. Notemos que nuestro paso base para $n = 0$ se cumple pues $99|198$. Supongamos que la hipótesis inductiva es válida, es decir, $10^{2n} + 197 = 99k$ con algún $k \in \mathbb{N}$. Debemos probar la tésis inductiva, o sea, $10^{2n+2} + 197 = 99k'$ con algún $k' \in \mathbb{N}$. Pero notemos que: $10^{2n+2} + 197 = 10^{2n}10^2 + 99k - 10^{2n} = 10^{2n}(100 - 1) + 99k = 99(10^{2n} + k) = 99k'$ como queríamos probar.

b. Nuestro paso base para $n = 0$ es válido pues $9|7+2$. Asumimos que el resultado es válido para $n$ y lo probaremos para $n+1$. Ahora bien, notemos que: $7.5^{2n+2}+2^{4n+5} = 7.5^{2n}25+2^{4n+1}2^4 = 7.25.5^{2n} + 16.2^{4n} = 7(16+9).5^{2n} + 16.2^{4n+1} = 16(7.5^{2n} + 2^{4n+1}) + 9.7.5^2 = 16.9k + 9.7.5^{2n} = 9(16k + 7.5^{2n}) = 9k'$.

c. Siguiendo las ideas anteriores se deja como buen ejercicio para el lector.

d. Siguiendo las ideas anteriores se deja como buen ejercicio para el lector.

**Ejercicio 10.** Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

**a**. $2|n$ si y solo si $2|a_0$.

**b**. $4|n$ si y solo si $4|a_1 a_0$.

**c**. $8|n$ si y solo si $8|a_2 a_1 a_0$.

**d**. Establecer el resultado general sugerido por los casos anteriores.

**e**. Investigar si 32 divide a 1.273.460.

## 10 Ejercicio 10.

Por hipótesis tenemos que $n = a_k.10^k + a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + ... + a_4.10^4 + a_3.10^3 + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$

a. Como $2|n$ resulta que $n/2 = a_k.5^k.2^{k-1} + a_{k-1}.5^{k-1}.2^{k-2} + ... + a_2.5^2.2 + a_1.5 + ao/2$ pero la única forma de que $n/2 \in \mathbb{N}$ si y sólo si $a_0/2 \in \mathbb{N}$.

b. Idem a.

c. Idem b.

d. $2^k|n$ si y sólo si $2^k|a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0$.

e. $32 = 2^5$ por lo tanto $2^5$ debe dividir a 73460. Pero esto no se cumple.

**Ejercicio 11.** Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Probar las siguentes afirmaciones

**a**. $\mathrm{mcd}(ca, cb) = c\,\mathrm{mcd}(a, b)$.

**b**. Si $c|a$ y $c|b$ entonces
$$\mathrm{mcd}(a/c, b/c) = \mathrm{mcd}(a, b)/c.$$

**c**. $\mathrm{mcd}(b, a + bc) = \mathrm{mcd}(a, b)$.

**d**. Si $a$ es par y $b$ impar entonces
$$\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(a/2, b).$$

**e**. $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(a - b, b)$

**f**. Si $a, b$ son primos entre sí entonces
$$\mathrm{mcd}(a - b, a + b) = 1 \text{ o } 2.$$

# 11 Ejercicio 11.

a. Utilicemos la descomposición factorial de $a$ y $b$ en factores primos. Entonces $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ y $b = p_1^{\alpha'_1} p_2^{\alpha'_2} ... p_n^{\alpha'_n}$. Por lo tanto, $mcd(a, b) = a = p_1^{mn(\alpha_1,\alpha'_1)} p_2^{mn(\alpha_2,\alpha'_2)} ... p_n^{mn(\alpha_n,\alpha'_n)}$. Luego $mcd(ca, cb) = cp_1^{mn(\alpha_1,\alpha'_1)} p_2^{mn(\alpha_2,\alpha'_2)} ... p_n^{mn(\alpha_n,\alpha'_n)}$. Con esto se tiene la tésis.

b. Utilizando la propiedad de la parte anterior podemos tomar $c = c^{-1}$ y la tésis es inmediata y $c^{-1}$ existe pues $c$ divide $a$ y $b$.

c. Este resultado es inmediato si se considera la Proposición 1.2.6 de las notas del curso, tomando $x = -c$.

d. Si $a$ es par entonces $a = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, definimos $d = mcd(2k, b)$ y $d' = mcd(k, b)$. Tenemos que $d|2k$ y $d|b$ pero además $d'|(2).k + 1.b$, por lo tanto $d'|2k$ y $d'|b$. Por lo tanto, $d' \leq max$ Div$(2k) \cap$ Div$(b)$=$d$. Análogamente $d|k + b$. Por lo tanto, $d|k$ y $d|b$ entonces $d \leq max$ Div$(k) \cap$ Div$(b)$=$d'$. Por ende $d = d'$.

e. Por la proposición 1.2.6 tenemos que $mcd(a, b) = mcd(b, a - bx)$ con $x \in \mathbb{Z}$. En particular tomando $x = 1$ resulta que $mcd(a, b) = mcd(b, a - b) = mcd(a - b, b)$.

f. Sea $d = mcd(a - b, a + b)$. Por definición $d|a - b$ y $d|a + b$. Pero usando la propiedad 10 de Propiedades 1.1.5 resulta que $d|a - b + a + b = 2a$ y $d|a + b - (a - b) = 2b$. Por lo tanto $d|2a$ y $d|2b$ y entonces $d|mcd(2a, 2b) = 2mcd(a, b) = 2$. Pero los divisores de 2 son 1 y 2. Por lo tanto, $mcd(a - b, a + b) = 2$ o $mcd(a - b, a + b) = 1$.

**Ejercicio 12.** Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que $a$ y $b$ son primos entre sí. Probar o dar contraejemplos que

**a**. Si $a|(bc)$ entonces $a|c$.

**b**. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

**c**. ¿Valen las partes anteriores si $\mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$?

# 12 Ejercicio 12.

a. Ver Lema 1.2.10 de las notas del curso.

b. Tenemos por hipótesis que $c = aq$ y $c = aq'$ con $q, q' \in \mathbb{Z}$. Luego, usando la Igualdad de Bézout (Teorema 1.2.8 de las Notas del Curso), resulta que $1 = ax + by$ con $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$. Luego, multiplicando por $c$ la igualdad de Bézout tenemos que $c = cax + cby$ y utilizando la hipótesis $c = baqx + abq'y = ab(qx + qy)$ por lo tanto $c \mid ab$.

c. No: a) $6|4.3$ pero $6 \nmid 4$ y $6 \nmid 3$ y b) $6|12$ y $4|12$ pero $24 \nmid 12$.

**Ejercicio 13.** Demostrar las siguientes afirmaciones:

**a**. Se define la *sucesión de Fibonacci* como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Demostrar que dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci son coprimos.

**b**. Demostrar que $\text{mcd}(7k + 3, 12k + 5) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

**c**. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $(ad - bc)|a$ y $(ad - bc)|c$. Probar que $\text{mcd}(an + b, cn + d) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

## 13 Ejercicio 13.

a. Debemos probar que $mcd(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$ pero notemos que: $mcd(F_{n+2}, F_{n+1}) = mcd(F_{n+1} + F_n, F_{n+1})$ y utilizando la propiedad $e.$ del ejercicio 11 resulta que: $mcd(F_{n+2}, F_{n+1}) = mcd(F_{n+1} + F_n - F_{n+1}, F_{n+1}) = mcd(F_n, F_{n+1}) = mcd(F_{n+1}, F_n) = ... = mcd(0, 1) = 1$.

b. Aplicamos la segunda afirmación de la Proposición 1.2.6 de las Notas del Curso: $mcd(7k + 3, 12k + 5) = mcd(7k + 3, 5k + 2) = mcd(5k + 2, 2k + 1) = mcd(2k + 1, k) = mcd(k, 1) = 1$.

c. liquidar

**Ejercicio 14.** En cada caso, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ que verifiquen las condiciones dadas.

**a**. $a + b = 122$ y $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = 1802$.

**b**. $ab = 22275$ y $\text{mcd}(a, b) = 15$.

**c**. $a + b = 1271$ y $\text{mcm}(a, b) = 330 \cdot \text{mcd}(a, b)$.

**d**. $ab = 1008$ y $\text{mcm}(a, b) = 168$.

## 14 Ejercicio 14.

a. Utilizando la Proposición 1.2.15 de las notas del curso tenemos que $mcm(a, b).mcd(a, b) = a.b$. Por lo tanto el sistema a resolver queda: $a + b = 122$ y $mcd(a, b)^2 + a.b = 1802.mcd(a, b)$. Por comodidad definimos $d = mcd(a, b)$ y entonces: $d^2 + ab = 1802d$. Notemos que por definición $d|a$ y $d|b$ por ende $d|a + b$ y como $a + b = 1 \times 2 \times 61$ resulta que $d = 1$, $d = 2$ y $d = 61$ son candidatas a soluciones. Sustituyendo por $d = 2$ y operando con las dos ecuaciones resulta que $a = 50$, $b = 72$ y $a = 72$, $b = 50$ son soluciones. Pero en cambio, para los otros dos valores de $d$ no dan soluciones de $a$ y $b$ enteras.

b. Recordemos que $a*$ y $b*$ son los cofactores de $a$ y $b$ respectivamente y se pueden expresar como $a = a * mcd(a, b)$ y $b = b * mcd(a, b)$, con $a*$ y $b*$ coprimos entre sí, es decir $mcd(a*, b*) = 1$. Por lo tanto, utilizando esto y las ecuaciones del ejercicio resulta que: $a * .b* = 3^2.11$. Entonces, debemos hallar los divisores de 99: $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$. Construyamos la siguiente tabla de candidatos a solución:

| $a*$ | $b*$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 99 | 15 | 1485 |
| 3 | 33 | 45 | 495 |
| 9 | 11 | 135 | 165 |
| 11 | 9 | 165 | 135 |
| 33 | 3 | 495 | 45 |
| 99 | 1 | 1485 | 15 |

Observando la tabla anterior vemos que las únicas soluciones posibles son:

$$S = \{(15, 1485), (135, 165), (165, 135), (1485, 15)\}.$$

c. Como es habitual, definimos $d = mcd(a, b)$. Por definición $d|a$ y $d|b$, lo que implica que $d|a + b = 1271 = 1 \times 31 \times 41$. Por lo tanto, los valores posibles de $d$ son: 1, 31, 41 y $31 \times 41$. Resolviendo el sistema de ecuaciones no lineal resulta que $d = 31$ es el único valor que da soluciones enteras para $a$ y $b$. Por lo tanto: $d = 31$. Despejando se obtiene:

$$S = \{(341, 930), (930, 341)\}.$$

d. De las dos ecuaciones se concluye rápidamente que $d = mcd(a, b) = 6$. Ahora bien, como $a.b = 2^4 \times 3^2 \times 7$ y utilizando la descomposición factorial en factores primos de $a$ y $b$ tenemos que $a = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 7^{\alpha_3}$ y $b = 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 7^{\beta_3}$, con $\alpha_1 + \beta_1 = 4$, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_3 + \beta_3 = 1$. Viendo todas las posibilidades de $\alpha$ y $\beta$ se puede concluir que los valores de $a$ y $b$ buscados son:

$$S = \{(6, 168), (42, 24), (24, 42), (168, 6)\}.$$

**Ejercicio 15.** Hallar $\mathrm{mcd}(a, b)$ sabiendo que $\mathrm{mcd}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b) = 48$ y $a^2 = b^2 + 28$.

## 15 Ejercicio 15.

Haciendo cuentas se llega a que: $a.b = 48$ y $a^2 = b^2 + 28$. Resolviendo el sistema no lineal se tiene que:

$$S = \{(8, 6), (-8, -6))\}.$$

Por lo tando $mcd(a, b) = 2$.

**Ejercicio 16.** Probar que si de los números del $1$ al $200$ se eligen $101$ números cualesquiera, entonces hay al menos entre los elegidos dos números $a$ y $b$ tales que $a$ divide a $b$.

## 16 Ejercicio 16.

Basta aplicar el Principio del Palomar con el conjunto $\{(1, 199), (2, 198), (3, 197), ..., (97, 103), (98, 102), (99, 101), 100\}$. Entonces hay 100 palomares y 101 palomas.