Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2022**

Práctico 1 - Números complejos.

1. Determinar los valores de i^k para todo k entero.

2. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica ($a+bi$ con a,b reales) y en notación polar ($re^{i\theta}$ con $r>0$ y θ real).

   $a)$ $(1+i)^2$ $\quad b)$ $\dfrac{1}{i}$ $\quad c)$ $\dfrac{1}{1+i}$ $\quad d)$ $(2+3i)(3-4i)$ $\quad e)$ $(1+i)(1-2i)$ $\quad f)$ i^5+i^{16}

   $g)$ -1 $\quad h)$ $-3i$ $\quad i)$ $1+i+i^2+i^3$ $\quad j)$ $\dfrac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$ $\quad k)$ $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ $\quad l)$ $\dfrac{1}{(1+i)^2}$

3. Expresar en notación binómica:

   $a)$ $e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad b)$ $3e^{\pi i}$ $\quad c)$ $\dfrac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$ $\quad d)$ $(i+1)^{100}$

4. Probar que para todo par de números complejos z_1 y z_2

   $a)$ $|z_1|=|\bar{z}_1|$ $\quad b)$ $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ $\quad c)$ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ $\quad d)$ si $z_1\neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z_1}\right|=\dfrac{1}{|z_1|}$

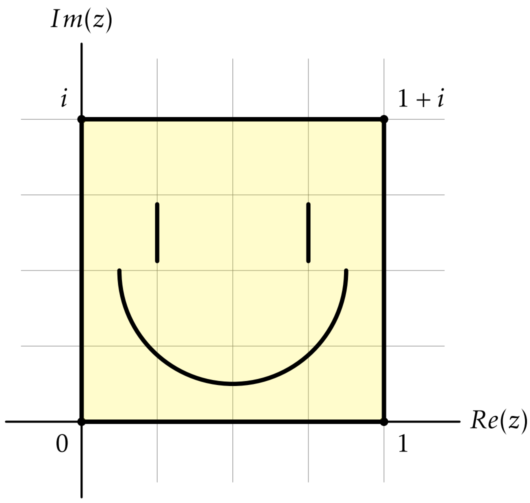
5. Representar geométricamente los complejos:

   a) $(1+i)^n-(1-i)^n$ para algunos valores naturales n.
   b) Las raíces quintas de 1 (es decir, los complejos z tales que $z^5=1$).
   c) Las raíces décimas de 1.
   d) Los complejos z tales que $z^6=8(\sqrt{3}-i)$.

6. Encontrar, en cada caso, el conjunto de los $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones, y representar geométricamente.

   $a)$ $|z|>1$ $\quad b)$ $z-\overline{z}=i$ $\quad c)$ $|z-i|=|z+i|$ $\quad d)$ $Im(z)<2$ $\quad e)$ $|z-\bar{z}|=2Re(z-1)$

7. Bosquejar el resultado de aplicarle a la figura las siguientes funciones:



a) $f(z) = z + (1+i)$.
b) $f(z) = (1+i)z$.
c) $f(z) = z^2$.
d) $f(z) = e^z$.

8. En $\mathbb{C}$, se consideran $\{z_1, \cdots, z_8\}$ las raíces octavas de 2^8, es decir aquellas que cumplen $z_k^8 = 2^8$ para cada $k = 1, \cdots, 8$. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

   a) $z_i = 2$ para todo $i = 1, \cdots, 8$.
   b) Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j = -z_k$.
   c) Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z_l} = z_m$.
   d) Se cumple $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 = 2^8$.

9. Sea $A = \left\{ \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^n \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?

10. Sea $P(z)$ un polinomio *con coeficientes reales*.

    a) Probar que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
    b) Probar que si $z_0 = a + ib$ es raíz de $P(z)$, entonces $\overline{z_0} = a - ib$ también es raíz de $P(z)$.

11. Considere el polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$. Sabiendo que $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.

12. Se considera el polinomio complejo $P(z) = z^3 - 2z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}$, y las siguientes afirmaciones:

    (I) Existen dos raíces tales que su suma es igual a la raíz restante.
    (II) La distancia entre dos raíces distintas siempre es constante.
    (III) El producto de todas las raíces es igual al inverso de la suma de todas sus raíces.

    Entonces:

    A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
    B) Todas las afirmaciones son correctas.
    C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
    D) Ninguna afirmación es correcta.
    E) Solo la afirmación (I) es correcta.

Ejercicios Complementarios

1. Probar que la fórmula de Bhaskara es válida para polinomios complejos.

2. Probar que no existe una relación de orden en los números complejos.

3. Sabemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ $\exists \omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^2 = z$. Discuta sobre posibles definiciones de una función raíz cuadrada, esto es f que cumpla que $f(z)^2 = z$. ¿Cuáles problemas identifica en f?

4. Se define el *seno y coseno complejos* mediante

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

   a) Probar que las funciones seno y coseno complejas extienden a las funciones seno y coseno reales, en el sentido de que coinciden para $z \in \mathbb{R}$.
   b) Probar que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
   c) Probar que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
   d) Hallar los ceros en el plano complejo de las funciones seno y coseno.