Práctico 7: Funciones de varias variables: representaciones gráficas, límites y continuidad

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, se define el conjunto de nivel a como:

$$C_a = \{p \in U : f(p) = a\}$$

1. Dibuje el dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } x^2+y^2 \quad \text{(b) } x^2-y^2 \quad \text{(c) } x^2 \quad \text{(d) } y/x \quad \text{(e) } xy \quad \text{(f) } \max\{x^2,y^3\} \quad \text{(g) } \max\{x^2,x+y\}$$

2. Hallar el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } \frac{x}{x-y-z} \quad \text{(b) } \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2) \quad \text{(c) } \frac{x+y+z}{1-x^2-y^2-z^2} \quad \text{(d) } \frac{x+y}{\min\{x,y\}}$$

3. Dibuje el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(b) } \log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad \text{(c) } \cosh\left(x^2-y^2\right) \quad \text{(d) } \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\text{(e) } \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \quad \text{(f) } \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{(g) } x^{(y^2)}$$

4. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en una bola reducida $U = B_R^*((0,0))$ de centro $(0,0)$ y radio R. Mediante el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, se obtiene $g\colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, donde $V = (0,R)\times[0,2\pi)$.

   (a) Probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ sii $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $|g(r,\theta)-L| < \varepsilon\ \forall\, r \in (0,\delta), \theta \in [0,2\pi)$.

   (b) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ entonces $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta) = L\ \forall\, \theta \in [0,2\pi)$.

   (c) Se consideran las funciones f siguientes

$$\text{(i) } f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(ii) } f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{(iii) } f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Calcular, cuando existan, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta)$, éste último en función de $\theta \in [0,2\pi)$.

   (d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

   (e) En el caso particular en el que g tiene la forma $g(r,\theta) = h(r)k(\theta)$, con h y k funciones $h\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ y $k\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}$, probar que si k es una función acotada y $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

   (f) Calcular:

$$\text{(i) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{(ii) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

5. Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$\text{(a) } f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{(b) } f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{(c) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

6. (a) Probar que si $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

(b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x,y) \to (0,0)$:

$$\text{(a) } x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{(b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{(c) } \frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

7. Decidir si los límites siguientes existen y en caso afirmativo calcularlos.

$$\text{(a) } \lim_{(x,y,z)\to(2,5,3)} \frac{x-y}{x^2+y-z} \quad \text{(b) } \lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan(\frac{1}{\cos(xyz)})} \quad \text{(c) } \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$$

8. Calcular:

$$\text{(a) } \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \quad \text{(b) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,y\log|y| \quad \text{(c) } \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\text{(d) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{(e) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \quad \text{(f) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

9. Se considera la función

$$f(x,y) = \frac{ax+y+by^2}{\operatorname{sen} y + \log(1+x)} \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

a) Determinar a y b para que todos los límites direccionales de f en $(0,0)$ sean iguales.

b) Para los a y b determinados en la parte anterior, probar que f carece de límite.

10. Discutir según $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ la existencia del límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+xy+y^2}$$

11. Determinar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ son continuas y discontinuas.

$$\text{(a) } f(x,y) = \begin{cases} (4x^2y^3)/(4x^2+y^6) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$\text{(c) } f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x+y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

12. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden extender en forma continua a todo el plano?

$$\text{(a) } \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{(b) } x^2\log(x^2+y^2) \quad \text{(c) } \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$$

13. Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua.

$$f(x,y) = \begin{cases} (\varphi(y)-\varphi(x))/(y-x) & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Determinar en qué puntos f es continua.

14. Sea $f:(0,+\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ definida por $f(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$

a) Verificar que es continua y probar que es biyectiva.

b) Calcular las imágenes de las rectas $\rho = cte$ y $\theta = cte$

c) Calcular la función inversa $f^{-1}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to (0,+\infty)\times[0,2\pi)$.¿ Es continua f^{-1}?

15. *a*) Probar que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

b) Probar que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $\forall\, C \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

c) Demostrar que el conjunto de puntos (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ que verifican

$$\begin{cases} x^2+y^3 < 4 \\ y^2+z^3 > 2 \end{cases}$$

es un conjunto abierto.

Ejercicios opcionales

1. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $f\colon C \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Demostrar que el gráfico de f,

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in C\},$$

es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$.

2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, se define el *diámetro* de A como $\operatorname{diam}(A) = \sup(\{d(x,y) : x, y \in A\})$.

   a) Probar que si $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto entonces existen $x, y \in C$ tal que $\operatorname{diam}(C) = d(x,y)$.

   b) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon C \to C$ una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| > \|x - y\| \quad \forall\, x \neq y \in C.$$

   Probar que C no puede ser compacto. Dar un ejemplo de una función en estas hipótesis

3. Se considera la función determinante $det\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $det(a,b,c,d) = ad - bc$

   a) Probar que det es una función continua en $\mathbb{R}^4$.

   b) Sean $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : det(A) = 0\}$.
   Investigar si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son abiertos, cerrados o ninguna de las dos cosas. Aquí el espacio de matrices se considera como $\mathbb{R}^4$.

4. Sea $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to 0$, pero $\varepsilon(0) = 1$. Se considera la función

$$f(x,y) = \frac{3x^2\varepsilon(y) - y^2\varepsilon(x)}{\log(x^2 + y^2 + 1)}$$

   a) Analizar si f tiene límite en $(0,0)$ según el conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$.

   b) Analizar si f tiene límite en $(0,0)$.

5. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Probar que si toda función continua $f\colon C \to \mathbb{R}$ es acotada entonces C es compacto.

6. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se llama *camino* (o *arco*) continuo en C a toda función continua $\alpha\colon [0,1] \to C$. Si $a, b \in C$ y α es un camino en C tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$, se dice que α conecta a con b. Se dice que C es *conexo por caminos* (o *arcoconexo*) sii $\forall\, a, b \in C\ \exists\, \alpha$ camino en C que conecta a con b.

   a) Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo por caminos y $f\colon C \to \mathbb{R}$ continua. Probar que si $a, b \in C$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son tales que $f(a) \leq \mu \leq f(b)$ entonces existe $c \in C$ tal que $f(c) = \mu$. Sugerencia: considerar $f \circ \alpha$ con α un camino de a a b.

   b) Probar que si C es arcoconexo y $f\colon C \to \mathbb{R}^m$ es continua entonces $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ es arcoconexo.

   c) Sean $S^1 = \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\| = 1\}$ y $a_0 \in S^1$. Probar que S^1 y $S^1 \setminus \{a_0\}$ son arcoconexos.

   d) Probar que no existe $f\colon S^1 \to [0,1]$ continua y biyectiva. Sugerencia: suponer por absurdo que existe una tal f, sacar un punto de $a_0 \in S^1$ conveniente y considerar la restricción de f a este nuevo conjunto.

   e) Sean P y Q dos puntos de $\mathbb{R}^2$ y m la mediatriz del segmento PQ. Demostrar que cualquier camino α que una P con Q debe intersectar a m. Sugerencia: demostrar que la función $f(t) = d(Q, \alpha(t)) - d(P, \alpha(t))$ tiene una raíz $t_0 \in [0,1]$.

7. **Un teorema de punto fijo.**
   Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $f\colon C \to C$ una *contracción*, esto es, existe $k \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in C.$$

   a) Sea a un punto cualquiera de C. Se define la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de la siguiente forma: $x_0 = a$ y $x_n = f(x_{n-1})$, si $n \geq 1$. Probar que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad \forall\, n \geq 0.$$

   b) Deducir que (x_n) es una sucesión de Cauchy y que existe $p \in C$ tal que $\lim_n x_n = p$.

c) Demostrar que existe un único punto $p \in C$ tal que $f(p) = p$. Sugerencia: observar que f es continua y tomar p como en la parte anterior.

d) Analizar si el resultado anterior es válido si C no fuese cerrado.

8. *a*) Sean V y W espacios vectoriales normados y $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    1) T es continua en V.
    2) T es continua en el vector nulo de V.
    3) Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, $\forall\, x \in V$.
    4) Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in V$.
    5) $T(A)$ es acotado $\forall\, A \subseteq V$ acotado.

   b) Probar que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es uniformemente continua. Deducir que los subespacios propios de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados con interior vacío.