Universidad de la República — **Geometría y Álgebra Lineal 2**

Facultad de Ingeniería - IMERL — **Segundo semestre 2022**

PRÁCTICO 1: EJERCICIOS DE REPASO

1. Teorema de las dimensiones

EJERCICIO 1.
1. ¿Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? ¿Existe una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?
2. Sea $X_1 = (1,0,1,0), X_2 = (1,1,1,0)$ y $X_3 = (1,1,1,1)$. ¿Existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{X_1, X_2, X_3\} \subset Im(T)$?
3. Sean $S = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\big\}$ y $U = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = 0, z+t = 0\big\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.
   a) ¿Existe algún isomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(S) = U$?
   b) ¿Es posible determinar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Ker(T) = S$ e $Im(T) = U$?

2. Matriz asociada

EJERCICIO 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$.
Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:
1. $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.
2. $\mathcal{B} = \big\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big\}$ y $\mathcal{A}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{B} = \big\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big\}$ y $\mathcal{A} = \big\{(1,3),(2,5)\big\}$.

EJERCICIO 3. Sea $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $T(p) = (2a+3b-8c, a+b+c, 4a-5c, 6b)$ con $p : p(t) = a+bt+ct^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:
1. $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son las bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.
2. $\mathcal{B} = \big\{1, t-1, (t-1)^2\big\}$ y $\mathcal{A}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

EJERCICIO 4. Dado $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo, con $||\vec{u}_0|| = 1$, se define $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = \langle v, \vec{u}_0\rangle \vec{u}_0$, donde $\langle\, , \,\rangle$ representa el producto escalar.
1. Hallar la matriz asociada a T (${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$) en una base ortonormal que incluya al vector $\vec{u}_0$.
2. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 5. Sean $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,1,1),(1,0,0)\} \text{ y } \mathcal{A} = \{(1,2,0),(2,1,0),(1,1,1)\}.$$

1. ¿ Queda T únicamente determinada por $A = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$?. Justifique su respuesta.
2. En caso afirmativo, hallar $T(x,y,z)$.

EJERCICIO 6. Sean $\mathcal{A} = \big\{1, t+1, (t+1)^2\big\}$ y $\mathcal{B} = \big\{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\big\}$ bases de $\mathcal{P}_2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Consideramos $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal tal que

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado $q_0 : q_0(t) = t^2 + t - 1, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$, hallar $T(q_0)$.

EJERCICIO 7. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A$

1. ¿Existen bases en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?
2. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EJERCICIO 8. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$ y $\mathcal{A} = \{(1,2),(2,-1)\}$.
Probar que T es invertible y hallar una matriz asociada a T^{-1} indicando las bases correspondientes.

3. Cambio de base

EJERCICIO 9. Dadas las bases $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Hallar: $\ coord_{\mathcal{A}}(v) \ $ y $\ coord_{\mathcal{B}}(v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^3$.
2. Dada $Id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$.
3. Verificar que:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = {}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}.coord_{\mathcal{B}}(v), \ \text{ y } \ coord_{\mathcal{B}}(v) = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}.coord_{\mathcal{A}}(v).$$

EJERCICIO 10. Dadas las bases de $\mathcal{P}_2$: $\mathcal{A} = \{p_0, p_1, p_2\}$ donde $p_i(t) = t^i, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ (i = 0,1,2)$ y $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, q_2\}$ donde $q_0(t) = t^2 - 1, \ \ q_1(t) = t - 1, \ \ q_2(t) = 1, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

1. Hallar: $\ coord_{\mathcal{A}}(p) \ $ y $\ coord_{\mathcal{B}}(p) \qquad \forall\, p \in \mathcal{P}_2$.
2. Sea $Id : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$.
3. Verificar que:

$$coord_{\mathcal{A}}(p) = {}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}.coord_{\mathcal{B}}(p) \quad \text{y} \quad coord_{\mathcal{B}}(p) = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}.coord_{\mathcal{A}}(p).$$

EJERCICIO 11. Se considera V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos bases de V. Sea $T : V \longrightarrow V$, lineal, $T \neq Id$.
Indicar, justificando, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
2. Si ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
3. Si ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Ejercicio 12. 1. Se consideran las bases $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

a) Sea $Id : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$.

b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

2. Se consideran las bases $\mathcal{A} = \{(1,2),(0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

a) Sean $Id_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $Id_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las transformaciones identidad y $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2}$ y ${}_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$.

b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 13. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la simetría axial con respecto de la recta representada por el subespacio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 3x\}$. Hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 14. Dadas $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de V y $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ la base de V formada por los vectores $w_1 = 2v_1 + 3v_2$ y $w_2 = -v_1 - 2v_2$. Sea $T : V \to V$ lineal. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ sabiendo que

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+y-z, 2x-3y+2z, 3x-2y+z)$.

1. Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si A es la matriz asociada de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ hallar matrices E y F tales que $EAF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 16. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineal tal que ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Hallar $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$.
2. Hallar bases de $Ker(T)$ y de $Im(T)$.
3. Describir el conjunto $T^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

4. Operaciones con transformaciones.

Ejercicio 17. Se consideran las siguientes transformaciones lineales:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(3,5) = (8,1) \quad T(-2,1) = (-1,-5)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad S(1,0) = (1,1) \quad S(0,1) = (0,1)$$

y las bases $\mathcal{A} = \{(1,2),(1,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

1. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T+S)_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(3T)_{\mathcal{A}}$.
2. Hallar ${}_{\mathcal{B}}((S+T)^2)_{\mathcal{A}}$.
   Nota: $S^2 = S \circ S$.

Ejercicio 18. Se consideran las siguientes transformaciones lineales:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(3,5) = (8,1) \quad T(-2,1) = (-1,-5)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad S(1,0) = (1,-1,1) \quad S(0,1) = (0,0,1)$$

y las bases $\mathcal{A} = \{(1,-1),(0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

1. Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}}$.
2. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$.
3. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(S \circ T)_{\mathcal{A}}$.
4. Verificar la parte anterior hallando $T(x,y)$, $S(a,b)$, $S \circ T(x,y)$ y luego la matriz asociada de $S \circ T$ directamente.

Ejercicio 19. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una rotación de centro $\vec{0}$ y ángulo α

1. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
2. Hallar la matriz asociada a T^2 en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
3. Deducir fórmulas para $cos(2\alpha)$ y $sen(2\alpha)$.

5. Matrices semejantes.

Ejercicio 20. Probar que la relación de matrices semejantes es una relación de equivalencia.

Recordar que una relación, es una relación de equivalencia si verifica las propiedades:

- idéntica (toda matriz es semejante a sí misma),
- simétrica (si A es semejante a B, entonces B es semejante a A) y
- transitiva (si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C).

Ejercicio 21. Dadas A y B matrices $n \times n$ semejantes, probar que:

1. A^p y B^p son semejantes, $\forall p \in \mathbb{N}$.
2. A^t y B^t son semejantes.
3. A es invertible $\Leftrightarrow$ B es invertible. Además, A^{-1} y B^{-1} son semejantes.

Ejercicio 22. Probar que las siguientes matrices son dos a dos semejantes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 23. Dadas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, lineal y $\mathcal{B}_1$ una base de $\mathbb{R}^3$, donde

$${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

¿Existe una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$_{\mathcal{B}_2}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -10 & 11 \end{pmatrix}?$$

Justifique su respuesta.