Práctico 2: Ecuaciones diferenciales.

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   a) $y' = y^2 - 1$
   b) $(1+y^2)yy' + (1+y^2) = 0$
   c) $xe^{2y}y' - (1+e^{2y}) = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = y(x)/x$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

   a) $x^2y' + y(y-x) = 0$
   b) $(x+y)y' = x - y$

3. *a*) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:
   1) $y' + y\cos x = 0$
   2) $x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$
   3) $y' - (2/x)y = 0$

   b) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:
   1) $y' + y\cos x = \cos x \; sen x$
   2) $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$
   3) $y' - (2/x)y = x^4$

4. *a*) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:
   1) $y'' - 5y' + 6y = 0$
   2) $y'' + y' = 0$
   3) $y'' + 4y' + 5y = 0$

   b) Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:
   a) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2.$
   b) $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11.$
   c) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   d) $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$

5. Hallar todos los valores reales de la constante a para que las ecuaciones $y'' + ay' - 2y = 0$ e $y'' - 2y' + ay = 0$ tengan soluciones en común además de $y(x) \equiv 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea una solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' - 2y = 0$. Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

7. Hallar las constantes a y b reales para que $y(x) = e^{2x}\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

8. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

   a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   c) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   d) $y'' + y = 3x^2 - 5x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   e) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   f) $y'' + y = (1+x)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Aplicaciones y Problemas Complemetarios

1. Se considera la ecuación $mv' = mg - kv$ que representa la velocidad $v(t)$ de caída de un cuerpo de masa m, donde g es la gravedad y $k < mg$ una constante de resistencia al aire.

   a) Hallar $v(t)$ suponiendo conocida la velocidad inicial v_0.

   b) Hallar el límite de $v(t)$ cuando t tiende a $+\infty$, que se llamará v_∞.

   c) Calcule cuanto tiempo demora el cuerpo en alcanzar la velocidad $(v_\infty + v_0)/2$.

   d) Suponga $v_0 = 0$ y calcule cual es la distancia recorrida por el cuerpo cuando su velocidad es $v_\infty/2$.

2. Se considera la ecuación diferencial $x' = \alpha x(A - x)$ que representa la evolución de una población.

   a) Demostrar que ninguna solución tiene extremos relativos.

   b) Averiguar el límite cuando t tiende a $+\infty$ de la solución de la ecuación con condición inicial $x(0) = A/2$.

   c) Determinar cuanto tiempo hay que esperar para que una población de $A/2$ pobladores se incremente en un cincuenta por ciento.

3. La ecuación $u' = -2\lambda t u^2$ representa la cantidad $u(t)$ de agua en una represa, donde λ es una constante positiva a determinar con la apertura de los diques.

   a) Hallar la solución de condición inicial $u(0) = u_0$, suponiendo $u_0 > 0$.

   b) Hallar el límite de esa solución cuando t tiende a $+\infty$.

   c) Sea $u_1 < u_0$. Determinar (en función de u_0 y u_1) cuanto tiene que valer λ para que la cantidad de agua en la represa en el instante T sea igual a u_1, es decir $u(T) = u_1$.

   d) Concretamos las magnitudes: el tiempo se mide en días, u se mide en millones de hectolitros. Hallar λ de la parte anterior suponiendo que $u_0 = 2$ millones de hectolitros, $u_1 = 1{,}5$ y que $T = 5$ días. Respuesta: 1/150

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(I)\ y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (II)\ y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad ;\ (III)\ 2y'' + 2y' + y = 0$$

   a) Encontrar las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ para las que se cumple los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

   y demostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes en el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

   b) Dadas las constantes a y b reales, hallar la solución $y(x)$ tal que $\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ y probar que se cumple $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) Deducir que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forman una base del espacio vectorial de todas las soluciones de la ecuación diferencial, y concluir que ese espacio tiene dimensión dos.