Práctico 3 - Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

$$a)\quad a_n = 1+\frac{1}{n} \qquad b)\quad a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n} \qquad c)\quad a_n = n+\frac{1}{n} \qquad d)\quad a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \qquad e)\quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

2. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$.

   a) Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = A+B$

   b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

   c) Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = AB$

   d) Sea e_n una sucesión acotada y suponga que $A = 0$, probar que $\lim_{n\to+\infty} e_n a_n = 0$

3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$a)\quad a_n = \frac{\cos(n)}{n} \qquad b)\quad a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad c)\quad a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} \qquad d)\quad a_n = \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$$

$$e)\quad a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n) \qquad f)\quad a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}\ ,\ \alpha\in\mathbb{R} \qquad g)\quad a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

$$a)\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad b)\quad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad c)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad d)\quad a_n = \frac{1}{n!} \qquad e)\quad a_n = \frac{2n}{n^3+1}$$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

$$a)\quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad b)\quad a_n = (-1)^n n \qquad c)\quad a_n = 3^{\cos(n\pi)} \qquad d)\quad a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$e)\quad a_n = n^2\ (1+(-1)^n) \qquad f)\quad a_n = n^{(-1)^n} \qquad g)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$$

6. Un punto se llama *de aglomeración* de una sucesión si existe una subsucesión que converge a este punto.

   a) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean $1,2,3$ y 4.

   b) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean todos los naturales.

   c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean *exactamente* los del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

7. Sea a_n una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n}, a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que a_n es convergente.

8. Sea A un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y solo si:

   a) $L \geq x$, $\forall\, x \in A$.

   b) Existe $\{x_m\}$ una sucesión de A tal que $\lim_{m\to+\infty} x_m = L$

9. Sea la sucesión definida por $a_1 = 3$ y la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}.$$

   a) Demostrar que $a_n \geq 0$ y que $a_n \leq 3, \forall n \geq 1$
   b) Demostrar que $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$.
   c) Deducir que a_n tiene límite, y calcularlo.

10. Considere la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$.

   a) Exprese la sucesión como una sucesión definida por recurrencia.
   b) Estudie las propiedades de monotonía y acotación, y calcule el límite de la sucesión.

Ejercicios Complementarios

1. Algunos de los mitos sobre el origen del Ajedrez introducen el problema de la progresión aritmética.

   Cuando el creador del juego del ajedrez (Sissa, según algunos mitos) le mostró su invento al rey de un lejano país de medio oriente, éste quedó tan deslumbrado por el mismo que otorgó al mismo Sissa la decisión sobre la recompensa por tal creación.

   Sissa decidió que su recompensa debía ser la siguiente: recibiría un grano de trigo por la primer casilla del tablero, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente, duplicando la cantidad cada vez. El Rey aceptó el pedido, incluso ofendiéndose por lo escaso del mismo.

   Calcule aproximadamente la cantidad de trigo que le correspondería a Sissa.

   Estimando que en un kilo de trigo hay 1200 granos, y la producción en el mundo en 2014-2015 fue aproximadamente de 697 035 000 toneladas, compare esta cantidad con la recompensa pedida.

2. Determinar si las siguientes sucesiones convergen, y en caso de convergencia calcular su límite.

   a) $a_n = \frac{\alpha(n)}{n}$ donde $\alpha(n)$ es la cantidad de números primos que dividen a n
   b) $b_N = \frac{\#\{n \in \mathbb{N} : n \leq N \text{ y } n \text{ es un cuadrado perfecto }\}}{N}$

3. *a*) Escribir la negación de acotación de una función.
   b) Demostrar que si una función f no está acotada, se puede encontrar una sucesión a_n en el dominio de f tal que $f(a_n) \to \infty$.
   c) Si ahora el dominio de la función es $[a, b]$, ¿qué se puede decir sobre la sucesión a_n construida en el item anterior?
   d) Si ahora además la función es continua, estudiar qué sucede con las imágenes de alguna subsucesión conveniente, y concluir que la función no puede ser no acotada.