

PRÁCTICO 3: TEOREMA DE GERSCHGORIN.

EJERCICIO 1. Sea A una matriz real $n \times n$ tal que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ ($i \neq j$), donde \mathcal{C}_i son los círculos de Gerschgorin de A ($i = 1, 2, \dots, n$).

Probar que todas las raíces del polinomio característico de A son reales y distintas.

EJERCICIO 2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$.

1. Probar que A es diagonalizable.
2. Determinar el signo de los valores propios de A y deducir que es invertible.

EJERCICIO 3. 1. Investigar si la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

2. Probar, usando el teorema de Gerschgorin, que la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

EJERCICIO 4. 1. Utilice el Teorema de Gerschgorin para acotar los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10^{-5} & 2 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} & 0,5 & -3 \times 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3 \times 10^{-5} & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Hallar los círculos de Gerschgorin de la matriz $S^{-1}AS$

3. Hallar α de modo que el radio r_1 del círculo con centro en $(S^{-1}AS)_{1,1}$ sea tan pequeño como sea posible sin que este círculo se interseque con los otros dos círculos.
4. Localice el valor propio λ_1 de la matriz A en un círculo tan pequeño como sea posible. (Observar que los valores propios de A y $S^{-1}AS$ son los mismos).
5. Utilice matrices análogas a S para obtener mejores aproximaciones de λ_2 y λ_3

EJERCICIO 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 15 + 3i & 1 & 1 \\ 2 & 7 - 4i & 1 \\ 1 & 2 & -5 - 5i \end{pmatrix}$.

Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. A es diagonalizable.
2. A es invertible.
3. A tiene al menos un valor propio real.