PRIMER PARCIAL de GEOMETRÍA y ÁLGEBRA LINEAL 2

sábado 10 de octubre de 2020

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 41 puntos.
- La duración del parcial es de tres horas.
- **Todos los espacios vectoriales considerados en este parcial tienen dimensión finita.**
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.**
- **No se aceptarán hojas adicionales.**

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{M}_{m\times n}(k)$ es el espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo k.
- $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual que n.
- $N(T)$ denota el núcleo de una transformación lineal T.
- $\langle X, Y\rangle$ es el producto escalar entre los vectores X e Y.

(I) Verdadero Falso. Total: 14 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7
F	V	V	F	V	F	V

Ejercicio 1:
Existe $T : V \to V$ un operador diagonalizable no nulo tal que $T^2 = 0$.

Ejercicio 2:
Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tal que $A^3 = 0$ pero $A^2 \neq 0$. Entonces A tiene un único valor propio con multiplicidad geométrica 2.

Ejercicio 3:
Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A. Entonces $mg(\lambda) = n - \mathrm{rg(A-\lambda Id)}$; donde mg denota la multiplicidad geométrica y rg el rango.

Ejercicio 4:
Las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son semejantes.

Ejercicio 5:
La matriz $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ es invertible.

Ejercicio 6:
Considere el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_2$ con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Entonces la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ es una base ortonormal de V.

Ejercicio 7:
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal tal que su matriz asociada en la base canónica es la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces los únicos subespacios invariantes por T son $\mathbb{R}^2$ y $\{(0, 0)\}$.

(II) Múltiple opción. Total: 12 puntos
Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -1 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.
Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2
C	A

Ejercicio 1

Considere B la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal con matriz asociada

$$A =_B (T)_B = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$.
Indique la opción correcta:

A) Para ningún valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P invertible y D diagonal, tales que $A = PDP^{-1}$.

B) Hay exactamente un único valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ para el cual existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P invertible y D diagonal, tales que $A = PDP^{-1}$.

C) Hay exactamente dos valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ para los cuales existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P invertible y D diagonal, tales que $A = PDP^{-1}$.

D) Para todo valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P invertible y D diagonal, tales que $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 2

Sea V un espacio vectorial real de dimensión 6 y $T : V \to V$ una transformación lineal que cumple lo siguiente:

- El polinomio característico $\chi_T(t)$ de T tiene todas sus raíces reales.
- El polinomio $(t-2)^3$ divide al polinomio característico $\chi_T(t)$ de T.
- $N(T - 3Id) \neq \{0_V\}$.
- 4 es valor propio de T con multiplicidad algebraica mayor o igual a 2.

Se denota por A a la matriz asociadad a T en una base cualquiera de V. Indique la opción correcta:

A) La traza de A vale 17.

B) La traza de A vale 9.

C) La traza de A vale 16.

D) No se puede calcular la traza de A con los datos dados.

(III) Desarrollo. Total: 15 puntos

Considere V un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interno $\langle , \rangle$.

a) (**1 punto**) Sean v, w dos vectores en V. Escriba la definición de que v y w sean vectores ortogonales.

Solución: v y w son ortogonales si $\langle v, w\rangle = 0$.

b) (**2 puntos**) Sea $\{v_1, v_2\}$ un conjunto linealmente independiente en V. Definamos $w_1 = v_1$ y $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$. Pruebe que $\{w_1, w_2\}$ es un conjunto ortogonal.

Solución: Calculemos $\langle w_1, w_2\rangle$ y veamos que vale 0.

$$\langle w_1, w_2\rangle = \langle w_1, v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1\rangle = \langle w_1, v_2\rangle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\langle w_1, w_1\rangle = \langle w_1, v_2\rangle - \langle v_2, w_1\rangle = 0$$

c) (**1 punto**) ¿El conjunto $\{w_1, w_2\}$ de la parte anterior es un conjunto ortonormal? Justifique su respuesta.

Solución: w_1 y w_2 no necesariamente tienen norma 1.

d) (**2 puntos**) Sea S un subespacio vectorial de V. Defina el complemento ortogonal $S^\perp$ de S.

Solución: $S^\perp = \{v \in V : \langle v, s\rangle = 0 \ \ \forall s \in S\}$

En lo que sigue vamos a tomar $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = traza(AB^t)$.
Sea $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y consideremos el subespacio S generado por $\mathcal{A}$.

e) (**3 puntos**) Calcular una base ortonormal de S.

Solución: Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt obtenemos la base ortonormal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

f) (**2 puntos**) Calcular $S^\perp$.

Solución:

$$S^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & -b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

g) (**4 puntos**) Sea p_S la proyección ortogonal sobre el subespacio S. Calcule $p_S(v)$ donde v es la matriz

$$v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$p_S(v) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$