Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Geometría y Álgebra Lineal II

Primer parcial - 28 de Abril de 2017. Duración: 3 horas

No. Parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Verdadero-Falso

Determinar en cada caso si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas

a. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A es diagonalizable, entonces todos sus valores propios son reales y distintos dos a dos. $\square$

b. Si $T : V \to V$ es diagonalizable, entonces T^n es diagonalizable para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\square$

c. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es tal que $A^t A = Id$, entonces las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. $\square$

d. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ NO es diagonalizable, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$, valor propio, tal que $m.a.(\lambda) \geq 2$. $\square$

Poner V o F en $\square$. Si contesta bien $1,5$ puntos, si contesta mal $-0,5$ puntos y si no contesta 0 puntos.

Ejercicos M-O

a. Sea $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un producto interno que cumple las siguientes propiedades:

- $\langle (1,0),(1,0) \rangle = 4$,
- $\langle (1,1),(1,1) \rangle = 1$ y
- $\langle (1,0),(3,3) \rangle = 0$.

Indicar la opción correcta:

i) $\{(1,0),(1,1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. $\square$

ii) $\{(\frac{1}{2},0),(0,1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. $\square$

iii) $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1),(-1,1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. $\square$

iv) $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1),\frac{1}{\sqrt{20}}(5,4)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. $\square$

b. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$

con $Q^tQ = I$ y $A = QR$.
Indicar la opción correcta:

i) $q_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $r_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐

ii) $q_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $r_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐

iii) $q_{33} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ y $r_{33} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. ☐

iv) $q_{33} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ y $r_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ☐

Si contesta bien 6 puntos, si contesta mal -1 punto y si no contesta 0 punto.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio 1

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R} \text{ y } a \in [-1, 0).$$

a. Probar que existe un único a, $a \in [-1, 0)$, tal que A no es diagonalizable.

b. Para el valor de a hallado en la parte anterior, hallar la matriz de Jordan y una base de Jordan.

Ejercicio 2

a. Definir transformación lineal diagonalizable.

b. Probar que $T : V \to V$ es diagonalizable si y sólo si existe $\mathcal{B}$ base de V formada por vectores propios.