

PRÁCTICO 5: PRODUCTO INTERNO Y NORMA INDUCIDA.
ORTOGONALIDAD.

1. Producto interno y norma inducida

EJERCICIO 1. En cada caso, probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno en V .

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$.

2. $V = M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$.

¿Cómo ajustaría este producto interno para que funcione para las matrices complejas?

3. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, entonces $\langle X, Y \rangle = X^t A \bar{Y}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ (observe que X^t es un vector fila e \bar{Y} es el vector columna conjugado de Y).

EJERCICIO 2. En cada caso, probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ **no** es un producto interno en V .

1. $V = \mathcal{P}_3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x, y), (x', y') \rangle = x|x'| + y|y'|$.

3. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$.

4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A + B)$.

5. $V = C[0, 1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle f, g \rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)dt$.

EJERCICIO 3. Indicar si las siguientes afirmaciones sobre un espacio vectorial con producto interno son verdaderas o falsas.

1. Un producto interno es lineal en ambas componentes.

2. $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

3. Si $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V$, entonces $v = \mathbf{0}$.

EJERCICIO 4. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interno cualquiera.

Probar que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle &= a_{11}x_1y_1 + \cdots + a_{1n}x_1y_n \\ &\quad + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{2n}x_2y_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}x_ny_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n, \end{aligned}$$

siendo $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$.

Concluir que $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \vec{X}^t A \vec{Y}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

¿Cuál producto interno se define si se considera que A es la matriz identidad?

EJERCICIO 5. Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ la norma inducida por él.

1. Probar que

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall v, w \in V. \quad (\text{Regla del paralelogramo}).$$

2. Probar que

$$4\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \quad \forall v, w \in V. \quad (\text{Polarización}).$$

3. Analice cuál de las dos propiedades anteriores sigue valiendo en un espacio vectorial complejo.

EJERCICIO 6. 1. Sea $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual. Se consideran los vectores $v = (2, 1+i, i)$ y $w = (2-i, 2, 1+2i)$. Calcular $\langle v, w \rangle$, $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ y $\|v + w\|^2$. Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para estos vectores.

2. Sea $V = C[0, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Se consideran $f(t) = t$ y $g(t) = e^t$. Calcular $\langle f, g \rangle$, $\|f\|^2$, $\|g\|^2$ y $\|f + g\|^2$. Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para estos vectores.

2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

EJERCICIO 7. En un espacio vectorial real con producto interno y considerando su norma inducida, probar que si $v + w$ y $v - w$ son ortogonales entonces v y w tienen la misma norma.

EJERCICIO 8. Sea V un espacio vectorial real con producto interno. Probar que si u y v son ortogonales, entonces $\|u + \lambda v\| \geq \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 9. 1. Se considera \mathbb{R}^4 con el producto interno habitual.

Hallar una base ortonormal del subespacio $S = [(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 2, 1)]$.

2. Se considera \mathbb{C}^3 con el producto interno habitual.

Hallar una base ortonormal del subespacio $S = [(1, i, 0), (1, 1, 1)]$.

EJERCICIO 10. Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Probar que si las columnas de A forman un conjunto ortonormal de vectores de \mathbb{R}^m con el producto interno habitual, entonces $A^t A = I_n$.

EJERCICIO 11. Hallar un producto interno en V para el cual la base \mathcal{B} resulta ser ortonormal:

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, -1)\}$.
2. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, i), (-1, i)\}$.
3. $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$.

EJERCICIO 12. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , espacio vectorial real con producto interno.

Si se cumple que $\langle w, w \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \forall w = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$, probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V .

EJERCICIO 13. En un espacio vectorial con producto interno y considerando su norma inducida, probar que si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortogonal, entonces

1. $v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n$.
2. $\langle v, w \rangle = \frac{\langle v, u_1 \rangle \langle u_1, w \rangle}{\|u_1\|^2} + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle \langle u_n, w \rangle}{\|u_n\|^2}$.

EJERCICIO 14. Considere $V = \mathcal{P}_2$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

A partir de la base $B = \{1, t, t^2\}$ construya una base ortonormal de V usando el método de Gram-Schmidt.