

Capítulo 1

Conceptos elementales del lenguaje algebraico

1.1. Conjuntos, elementos y pertenencia

En matemática se utilizan diferentes lenguajes para comunicarse, existen tres grandes categorías:

El lenguaje coloquial, el lenguaje simbólico y el lenguaje gráfico. El lenguaje coloquial se utiliza para expresar ideas y conceptos en forma escrita u oral usando el lenguaje ordinario. El lenguaje simbólico se utiliza para expresar con símbolos en forma precisa los conceptos dados en lenguaje coloquial. El lenguaje gráfico se utiliza para aclarar conceptos y situaciones. Al usar el lenguaje simbólico, usualmente utilizamos letras mayúsculas (A, B, C, \dots) para designar los conjuntos y letras minúsculas (a, b, c, \dots) para designar los elementos. Se considera un símbolo que relaciona un elemento con un conjunto (\in). Se escribe

$$a \in A$$

y se lee, *a pertenece al conjunto A*. Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto se escribe

$$a \notin A$$

Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denotan determinados conjuntos numéricos. \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales, \mathbb{Z} el conjunto de los números enteros, \mathbb{Q} el conjunto de los números racionales, \mathbb{R} el conjunto de los números reales.

No ahondaremos aquí en la construcción de estos conjuntos numéricos y los supondremos conocidos.

Una de las primeras interrogantes que aparecen al trabajar con conjuntos es la forma de determinarlos. Se debe indicar de una forma precisa y sin ambigüedades, cuáles son sus elementos. Se pueden distinguir varias formas, una de estas es determinar al conjunto por *extensión*, esto es, listar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que 10 y menores que 20, entonces

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Podemos observar que cada elemento esta separado por una coma, y los mismos se encuentran entre llaves.

Otra forma de describir un conjunto es por *comprensión*, la misma consiste en indicar una propiedad que deben cumplir sus elementos y sólo estos (para no generar ambigüedades). Consideremos B como el conjunto de los números naturales que son pares y menores que nueve, entonces

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n < 9 \text{ y } n = 2\}$$

Como última observación recordemos que el conjunto que no tiene elementos se denomina *conjunto vacío*, se lo denota usualmente $\{ \}$ o \emptyset .

Ejemplo 1.1.1

Determinar los siguientes conjuntos por extensión y por comprensión:

1. A es el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.
2. B es el conjunto formado por las raíces cuadradas de los primeros cincuenta naturales y que además sean naturales.
3. C es el conjunto formado por los naturales múltiplos de tres que además son menores que diecisiete o múltiplos de cinco menores que treinta.

Solución:

1. Si deseamos determinar A por extensión, debemos elevar al cuadrado cada uno de los diez primeros números naturales y el elemento obtenido pertenecerá al conjunto. Realicemos los cálculos:
 $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64,$
 $9^2 = 81, 10^2 = 100$. Obtenemos entonces que $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$.
 Ahora bien, para determinar por comprensión A , debemos indicar que propiedad cumplen sus elementos. $A = \{x : x = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$

2. Para determinar por extensión este conjunto podríamos probar aplicar raíz cuadrada a cada número entre 0 y 50 y ver si el resultado es un número natural. Luego de algunos cálculos obtenemos que $B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$.

Para expresar B por comprensión indicamos las propiedades que se deben cumplir:

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 50\}.$$

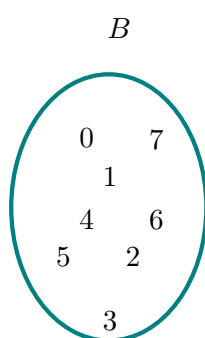
3. Al determinar C debemos tener en cuenta las dos condiciones, la primera es ser *múltiplo de tres menor que diecisiete*, la segunda es ser *múltiplo de cinco y menor que treinta*. Entonces $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 5, 10, 20, 25\}$. Determinemos C por comprensión:

$$C = \{x : x = 3n, n \leq 5, n \in \mathbb{N} \text{ o } x = 5m, m \leq 5, m \in \mathbb{N}\}$$

Mas adelante veremos una forma mas sencilla de determinar este conjunto teniendo en cuenta las *operaciones entre conjuntos*.

Observación: Al determinar un conjunto por extensión, el orden en el cual aparecen los elementos no tiene importancia y si los elementos son repetidos, se cuentan una vez sola. A modo de ejemplo si escribimos $T = \{1, 2, 3, 2, 3\}$, en realidad se considera $T = \{1, 2, 3\}$. Veamos ahora una representación en modo gráfico de los conjuntos, es claro que en ciertos casos manejar diferentes registros ayuda a la comprensión de la situación.

Los conjuntos pueden representarse gráficamente utilizando diagramas de Venn, la idea es bastante simple y conocida,



denota el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Veamos algunas relaciones básicas.

Definición 1.1.1

Sean A y B dos conjuntos, se dice que A está incluido en B o que A es un subconjunto de B y se denota $A \subset B$ si todo elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B .

En lenguaje simbólico:

$$A \subset B \text{ si } \forall x / x \in A \Rightarrow x \in B$$

La concatenación de símbolos $(\forall x / x \in A)$ se leen como “para todo elemento x perteneciente al conjunto A ”

Decir que dos conjuntos son iguales ($A = B$), es decir que tienen los mismos elementos, por tanto todo elemento de A debe pertenecer a B y asimismo, todo elemento de B debe pertenecer a A . En resumidas cuentas, $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.

En el caso que $A \subset B$ pero $A \neq B$ se dice que A está incluido estrictamente en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota $A \subsetneq B$. En este caso todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B , pero existe al menos un elemento b que pertenece al conjunto B tal que este no pertenece al conjunto A . En símbolos

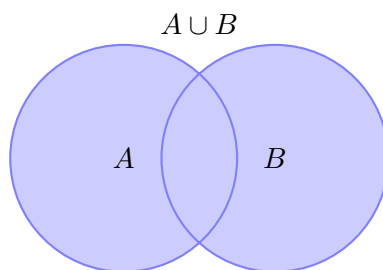
$$A \subsetneq B \text{ si } \forall a \in A \Rightarrow a \in B \text{ y } \exists b \in B / b \notin A$$

1.1.1. Operaciones con Conjuntos**Unión de Conjuntos**

Sean A y B dos conjuntos, la unión de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B . En símbolos matemáticos este concepto se expresa de la siguiente manera

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Y su representación con diagramas de Venn es

**Ejemplo 1.1.2**

Sean $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$.

Entonces $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 14, 20, 22, 30, 31, 33\}$.

Ejemplo 1.1.3

Consideremos los siguientes conjuntos, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $A \cup A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = B \cup A$. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A \cup B$.

-

Proposición 1 (Propiedades de la Unión de Conjuntos)

Sean A y B dos conjuntos. Entonces:

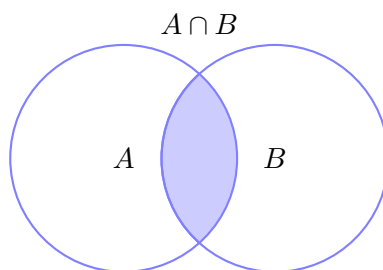
1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \subset A \cup B$
5. $B \subset A \Leftrightarrow B \cup A = A$.

Intersección de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos, la intersección de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B . En símbolos matemáticos

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Y su representación usual con diagramas de Venn es

**Ejemplo 1.1.4**

Sean $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$.

Entonces $A \cap B = \{5, 7, 22\}$.

Ejemplo 1.1.5

Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. $A \cap A = A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} = A$. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 9\} = \{2, 3, 4\} = B \cap A$. $A \cap B = \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

Proposición 2 (Propiedades de la intersección de conjuntos)

Sean A y B conjuntos. Entonces:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B \subset A$
5. $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$.

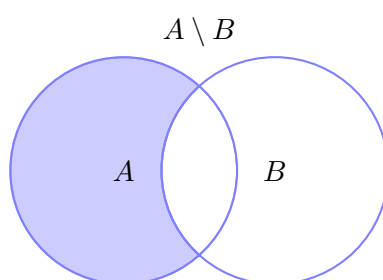
Diferencia de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos, se llama diferencia de A y B al conjunto que tiene como elementos los que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B .

Simbólicamente se denota

$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Es usual escribir también $A - B$ para notar $A \setminus B$.

**Ejercicio 1**

Determinar si es cierto que si A y B son dos conjuntos, se cumple que $A \setminus B = B \setminus A$.

Observación: Para determinar si una cierta propiedad es falsa, basta encontrar un caso en

que no sea cierta. Esto se conoce como “contraejemplo” y es muy utilizado en matemática. Tener en cuenta esto para el ejercicio anterior.

Proposición 3 (Propiedades de la Diferencia de Conjuntos)

Sean A , B y C conjuntos. Entonces:

1. $A \setminus A = \emptyset$
2. $A \setminus \emptyset = A$
3. $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Complemento

Si $A \subset B$ se define el complemento de A respecto de B como el conjunto cuyos elementos pertenecen a B y no pertenecen a A . Simbólicamente se anota $A_B^c = \{x : x \in B \text{ y } x \notin A\}$. Observar que el subíndice indica el conjunto respecto del cual se complementa.

Observación: Si no se indica el conjunto respecto al cual se complementa entonces $B^c = \{x : x \notin B\}$ quedando implícito el conjunto universal al cual pertenecen los elementos.

Ejercicio 2

1. De tres conjuntos se sabe que $A \cup C = \{n \in \mathbb{N} / n < 9 \text{ y } n \neq 6\}$, $B \cup C = \{2, 5, 7, 8, 9\}$
 $B \cap C = \{5, 7\}$, $A \cap C = \{2\}$ y $C \setminus (B \cup A) = \{8\}$.
Hallar A , B y C .
2. Dados $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.
Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.
3. Considerar los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando la respuesta

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $A = B$ | f) $B \subset C$ |
| b) $A \subset B$ | g) $B \subset D$ |
| c) $A \subset C$ | h) $B \in D$ |
| d) $A \in C$ | i) $A \in D$ |
| e) $A \subset D$ | |

4. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 4\}$.

Hallar los conjuntos C tales que $A \subset C \subset B$.

5. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 6\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 4\}$.

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------|
| a) $3 \notin C$ | e) $C \subset D$ |
| b) Si $x \in A \Rightarrow x \leq 5$ | f) $D \subset A$ |
| c) Si $x \leq 8 \Rightarrow x \in B$ | g) $A \cap B = C$ |
| d) Si $x \in B \Rightarrow x \geq 2$ | h) $B \cap C = B$ |

6. Se le realizó a un grupo de 43 estudiantes un cuestionario que contenía las siguientes preguntas:

¿repite?, ¿tiene previas?, ¿posee todos los textos recomendados? Se obtuvieron los siguientes datos:

- | | |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| a) 12 estudiantes repiten | e) 1 estudiante respondió afirmativamente a las tres preguntas |
| b) 15 estudiantes poseen todos los textos | |
| c) 6 estudiantes repiten y tienen los textos | f) 10 respondieron afirmativamente a solo dos preguntas |
| d) 17 respondieron negativamente a las tres preguntas | g) 15 estudiantes respondieron afirmativamente solo a una pregunta |

(i) De los estudiantes que no repiten ni tienen todos los textos, ¿cuántos tienen previas?

(ii) De todo el grupo, ¿cuántos tienen previas?

Propiedad de las Operaciones con los números reales

A continuación presentaremos algunas propiedades de las operaciones de los números reales.

Propiedad Conmutativa

Suma: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Producto: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedad Asociativa

Suma: $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Existencia de Opuesto

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tal que $x + x' = 0$. Usualmente se lo denota $x' = -x$. El número cero es el elemento neutro de la suma.

Existencia de Inverso

$\forall x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0 \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Este se dice inverso y al 1 se le llama elemento neutro del producto.

Propiedades Distributivas

- a) Del producto respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
- b) De la potencia respecto al producto: $(a \cdot b)^n = a^n b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- c) De la potencia respecto al cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- d) Radicación respecto al producto:
 - 1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que n es impar.
 - 2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, si $n \in \mathbb{N}$ tal que n es par.
- e) Radicación respecto al cociente:
 - 1) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$ con n impar.
 - 2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N}$ con n par.
- f) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \forall a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Propiedad del producto y cociente de potencias

- a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.
- b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Propiedad de potencia de potencia

$$a) (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Recordar además que:

- $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}.$
- $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- $1^a = 1, \forall a \in \mathbb{R}.$
- $0^a = 0, \forall a \in \mathbb{R}^+.$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.

Otras propiedades

Diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Esto significa que la diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos términos.

Cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{y} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La primer expresión se lee como, el cuadrado de una suma de dos números es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.

1.2. Expresiones algebraicas

1.2.1. Introducción

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, intentemos realizar las siguientes actividades:

Expresar las siguientes situaciones en lenguaje simbólico y reducirlas en caso de ser posible:

1. Un tercio de quince veces veinte.
2. La raíz cuadrada de ocho mas la mitad de treinta.
3. La raíz cuadrada de la suma del cuadrado de ocho y el cuadrado de seis.
4. La tercera parte de diez, mas la raíz cuadrada de ciento cuarenta y cuatro.
5. El cubo de la suma de un medio y dos.
6. La raíz cuadrada del doble de cuatro a la cuarta.
7. La suma de ocho y su consecutivo por la diferencia entre ellos.
8. La raíz cuadrada de cien por la raíz cuadrada de diez mil.
9. El producto de dos a la quinta por el cociente entre dos y tres.

Siendo x e y números cualesquiera, escribir en símbolos:

1. Un tercio de x .
2. El triple de x .
3. x a la cuarta.
4. El cuadrado de x , más el producto del doble de x e y , más el cuadrado de y .
5. El producto de la diferencia entre x e y y la suma de x e y .
6. Un quinto de la raíz cuadrada de x .
7. La raíz cuadrada de un quinto de x .
8. El cociente entre x y la raíz cuadrada de 5.

1.2.2. Operatoria con expresiones algebraicas

Tomemos por ejemplo la siguiente expresión algebraica

$$-2m - 3p + 5mp$$

Cada una está formada por una parte literal y por un coeficiente, por ejemplo $-2m$ tiene coeficiente -2 y parte literal m .

Términos semejantes: Son aquellos que tienen la misma parte literal. Por ejemplo, identifiquemos términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas.

1. $-6x^2$ y $3x^2$ son semejantes dado que tienen igual parte literal x^2 .
2. $\frac{1}{2}x$ y $3x^3$ no son semejantes.
3. $9z$ y $8z$ son semejantes y $-6z^2$ no es semejante a ninguno de los anteriores.
4. $7xz$ es semejante a $\frac{3}{2}xz$.

Ejercicio 3

Indicar cuáles de los siguientes términos son semejantes:

1. a^2 , ax , $2a^2$, a^2x , $\frac{7}{2}ax$

Sumas algebraicas: para sumar o restar dos expresiones algebraicas, se suman sus términos semejantes.

En el ciclo de educación media se trabaja en la reducción de expresiones algebraicas, para ello es necesario poder operar con los términos que aparecen en la expresión. Varios de estos procedimientos que han sido trabajados se justifican con propiedades matemáticas conocidas.

Ejemplo 1.2.1

Se considera la siguiente expresión:

$$8xy + 6xy - 13xy$$

Observamos que estos términos son todos semejantes dado que tienen xy como parte literal. Se puede pensar también que xy es un factor común en los términos de la expresión y luego, utilizando la propiedad distributiva es posible factorizarla, es decir, puede escribirse de la forma

$$(8 + 6 - 13)xy = xy.$$

Si se tiene ahora una expresión cuyos términos no son todos semejantes, es necesario identificar que términos si los son para poder reducirlos,

$$\begin{aligned}8m^2 - 2mp - 3m^2 + mp &= (8 - 3)m^2 + (-2 + 1)mp \\ &= 5m^2 - mp\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Reducir si es posible las siguientes expresiones algebraicas:

1. $\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}ab + 2ab - a$
2. $-6x^5 + 10x^2 + \frac{3}{2}x^2 + x^5 + 10$
3. $-2x + x^3 - pq$
4. $\frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{3}b - \frac{3}{10}a^2 + \frac{5}{6}b$
5. $3xy + 2y^2 - 5xy + x - 7y^2$
6. $-2z + 0, 2z^2y + 3y - 0, 6yz^2 + \frac{1}{2}z - 0, 9y$

Multiplicación de términos

A la hora de multiplicar expresiones algebraicas se tiene que $(-3a) \cdot (6m) = -18 \cdot a \cdot m$,
 $(7x^2 + m) \cdot (2x) = 14x^3 + 2mx$

Propiedad distributiva en expresiones algebraicas

La propiedad distributiva es una herramienta muy importante en el trabajo con expresiones algebraicas. Si k, a, b representan tres números reales, entonces

$$k(a + b) = ka + kb.$$

Consideremos por ejemplo $5x(3x + 2a)$, observemos que estos términos dentro del paréntesis no son semejantes por lo que no es posible sumarlos, utilizando la propiedad distributiva y desarrollando el producto obtenemos

$$\begin{aligned}5x(3x + 2a) &= 5x3x + 5x2a \\ &= 15x^2 + 10xa\end{aligned}$$

Con lo que se obtiene una expresión algebraica que es suma de dos monomios.

Ejemplo 1.2.2

Desarrollar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3m^2(6m - 7a) =$

2. $(\frac{1}{3}x^2 + 17x)6x^2 =$

3. $(7x + 6y) \cdot (-7x^2 + 2) =$

En este último caso tenemos el producto de dos binomios. Para desarrollar este producto también utilizamos la propiedad distributiva.

1.2.3. Ecuaciones con expresiones algebraicas**Definición 1.2.1**

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

En el caso de trabajar con expresiones en una indeterminada y llamando $A(x)$ y $B(x)$ a dichas expresiones, una ecuación queda expresada como $A(x) = B(x)$.

Expresiones equivalentes

La idea intuitiva de trabajar con expresiones equivalentes consiste en transformar expresiones en otras que sean mas simples.

Esta idea se trabaja bastante al considerar fracciones equivalentes. Por ejemplo, son equivalentes las fracciones

$$\frac{36}{120} = \frac{18}{60} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

En este caso obtenemos como última expresión una fracción que es irreducible.

Al trabajar con ecuaciones, se dice que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución. Por tanto la ecuación $A(x) = B(x)$ es equivalente a la ecuación $A(x) - B(x) = 0$.

Veamos entonces los principios básicos de las equivalencias entre ecuaciones.

Proposición 4 (Transformaciones equivalentes)

1. **Principio de adición:** Si a ambos miembros de una ecuación se le suma o resta un número real o una expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$$A(x) = B(x) \text{ es equivalente a } A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$$

2. **Homogeneidad:** Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un número real $\lambda \neq 0$ se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$$A(x) = B(x) \text{ es equivalente con } \lambda \cdot A(x) = \lambda \cdot B(x)$$

Al trabajar con ecuaciones que involucren expresiones algebraicas, debemos tener en consideración el conjunto de números reales para el cual se pueden realizar las operaciones con las que se está trabajando. Por ejemplo, al trabajar con cocientes, debemos tener en cuenta que no podemos dividir entre cero, y por tanto si existe algún número el cual si se sustituye por las incógnitas, da como resultado cero, para este número no se puede realizar la operación.

Ejemplo 1.2.3

Se considera la expresión

$$\frac{6}{x-1}$$

Si deseamos sustituir x por un número real, debemos tener en cuenta que el denominador no puede ser cero, por tanto $x \neq 1$ y el conjunto donde la expresión está definida es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Al subconjunto de \mathbb{R} para el cual tiene sentido la expresión se le suele llamar “conjunto de existencia”

Veamos entonces como trabajar con expresiones algebraicas equivalentes que son cocientes de polinomios, y el conjunto donde tiene sentido dicha equivalencia.

Ejemplo 1.2.4

Determinar la expresión irreducible de

$$\frac{4x^2 - 4}{2x + 2}$$

En primera instancia debemos hallar el subconjunto de los números reales donde dicha expresión tiene sentido. Tenemos que ver cuando el denominador es diferente de cero, es decir

$2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq -1$. Por tanto el conjunto donde esta definida la expresión es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ahora bien, busquemos expresiones equivalentes a

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 - 4}{2x + 2} &= \frac{4(x^2 - 1)}{2(x + 1)} \\ &= \frac{4(x - 1) \cdot (x + 1)}{2(x + 1)} \\ &= 2(x - 1)\end{aligned}$$

En la última igualdad podemos simplificar los factores del numerador y del denominador dado que en el conjunto donde estamos considerando dicha expresión, el denominador es diferente de cero.

Por tanto la expresión $\frac{4x^2 - 4}{2x + 2}$ es equivalente a la expresión $2(x - 1)$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Retomaremos estas ideas mas adelante.

Ecuaciones e inecuaciones con expresiones polinómicas

Al considerar ecuaciones algebraicas debemos tener en cuenta varias cosas; primero, resolver una ecuación algebraica implica determinar un conjunto solución, es este caso un subconjunto de los números reales tal que cada elemento verifica la ecuación. Además, que un elemento verifique o satisfaga una ecuación significa que al sustituir ese elemento por la incógnita, se cumple la igualdad.

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1.2.5

Resolver en \mathbb{R} la siguiente ecuación:

$$2x + 7 = 2$$

Las transformaciones de ecuaciones a ecuaciones equivalentes se da por medio de operaciones efectuadas a la ecuación, como mencionamos en la Proposición 4

Solución:

$$\begin{aligned}2x + 7 &= 2 && \Leftrightarrow \\2x + 7 - 7 &= 2 - 7 && \Leftrightarrow \\2x &= -5 && \Leftrightarrow \\\frac{2x}{2} &= \frac{-5}{2} && \Leftrightarrow \\x &= \frac{-5}{2}\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación $2x + 7 = 2$ y la ecuación $x = \frac{-5}{2}$ son equivalentes y tienen el mismo conjunto solución, además el conjunto solución de $x = \frac{-5}{2}$ se encuentra inmediatamente: $S = \{\frac{-5}{2}\}$.

Ejemplo 1.2.6

Resolver en \mathbb{R} la siguiente ecuación:

$$-5x + 2 = 3x + 10$$

Solución:

$$\begin{aligned}-5x + 2 &= 3x + 10 && \Leftrightarrow -5x + 2 - 2 = 3x + 10 - 2 \Leftrightarrow \\-5x &= 3x + 8 && \Leftrightarrow -5x - 3x = 3x - 3x + 8 \Leftrightarrow \\-8x &= 8 && \Leftrightarrow \frac{-8x}{-8} = \frac{8}{-8} \Leftrightarrow \\x &= -1\end{aligned}$$

Entonces el conjunto solución es $\{-1\}$.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Recordemos ahora como resolver ecuaciones de segundo grado. Pretendemos llegar a resolver una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Veamos primero algunos casos sencillos:

Ejemplo 1.2.7

Consideremos en \mathbb{R} la ecuación $x^2 - 1 = 0$, es decir, estamos buscando los números tales que al elevarlos al cuadrado y luego restarles 1 nos de 0. Pensemos en una ecuación equivalente

de la forma $x^2 = 1$, de esta manera aplicando raíz cuadrada a ambos miembros obtenemos que $|x| = \sqrt{1}$ (no es una transformación elemental) o equivalentemente $x = \pm\sqrt{1}$ y por tanto $S = \{-1, 1\}$

Veamos un caso en el que no hay solución:

Ejemplo 1.2.8

Tratemos de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, es decir buscamos los números reales tales que su cuadrado mas 1 de cero. Podemos observar que $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto sumando 1 a ambos miembros de la desigualdad, $x^2 + 1 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con lo que no existe un número real que verifique esta ecuación.

Veamos una forma de intentar resolver la ecuación mediante ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\x^2 &= -1 \Leftrightarrow \\x &= \pm\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Obtenemos entonces la ecuación equivalente $x = \pm\sqrt{-1}$ y esta no tiene solución en \mathbb{R} dado que no existe la raíz cuadrada de un número negativo, con lo que $S = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.9

Consideremos la ecuación $ax^2 + c = 0$ donde $a, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Tratemos de resolverla:

$$\begin{aligned}ax^2 + c &= 0 \Leftrightarrow \\ax^2 &= -c \Leftrightarrow \\x^2 &= \frac{-c}{a} \Leftrightarrow \quad \text{si } -\frac{c}{a} \geq 0 \\x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}\end{aligned}$$

por tanto la solución es el conjunto $S = \{-\sqrt{\frac{-c}{a}}, \sqrt{\frac{-c}{a}}\}$.

Ejemplo 1.2.10

Nos ocuparemos ahora del caso

$$ax^2 + bx = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

En este caso no tenemos término independiente y por tanto podemos extraer un factor común x :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \Leftrightarrow \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces un producto de expresiones igualado a cero, que en \mathbb{R} implica que para que esto se cumpla, alguno de los factores debe ser cero. Entonces $x = 0$ o $ax + b = 0$ y la solución que se obtiene es $\{0, \frac{-b}{a}\}$.

Por último veamos el caso general, que consiste en resolver una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Ejemplo 1.2.11

Resolver en \mathbb{R} la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Solución: El método presentado a continuación es bien ingenioso y reside en la idea de completar el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^2 + bx &= -c && \times(4a) \\ 4a^2x^2 + 4abx &= 4a(-c) && \Leftrightarrow \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac && + (b^2) \\ \underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+b)^2} &= b^2 - 4ac \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\ 2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

EL conjunto solución hallado depende de $b^2 - 4ac$ al que nombraremos Δ :

1. Si $\Delta > 0$ entonces se obtienen dos soluciones distintas $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. Si $\Delta = 0$ se obtiene una sola solución $\gamma = \frac{-b}{2a}$

3. Si $\Delta < 0$ no existe solución en \mathbb{R} .

Ejercicio: Justificar la discusión anterior.

Ejemplo 1.2.12

Veamos a continuación varios ejemplos de lo anteriormente mencionado:

1. Resolver en \mathbb{R}

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

Aquí identificamos entonces $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ y aplicamos la fórmula anterior, con lo que se obtiene

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-1)2}}{2(-1)}$$

Operando obtenemos $\alpha = \frac{-1+3}{-2} = -1$ y $\beta = \frac{-1-3}{-2} = 2$.

Por tanto $\{-1, 2\}$ es el conjunto solución.

2. Resolver en \mathbb{R}

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

Tenemos $a = 2$, $b = -12$, $c = 18 \Rightarrow$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(2)(18)}}{2(2)}$$

Observar que en este caso $\Delta = 0$ con lo que $\alpha = \frac{-(-12)}{4} = 3$ es solución de la ecuación y su conjunto solución es $\{3\}$.

3. Resolver en \mathbb{R}

$$6x^2 - 3x + 2 = 0$$

Tenemos $a = 6$, $b = -3$, $c = 2 \Rightarrow$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(6)(2)}}{2(6)}$$

Observar que en este caso $\Delta < 0$ y por tanto no existe solución en \mathbb{R} ($S = \emptyset$).

Observación: Si tenemos una ecuación de la forma $a'x^2 + b'x + c' = dx^2 + ex + f$ se puede transformar en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. ¿Cómo haríamos esto? Los detalles quedan como ejercicio.

Ejercicio 5

Resolver en \mathbb{R} las siguientes ecuaciones y expresarlas de forma factorizada si es posible:

1. $x^2 - 9 = 0$

7. $2x^2 - 2x - 4 = 0$

2. $2x^2 - 50 = 0$

8. $-x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 0$

3. $x^2 - 7x = 0$

9. $3x^2 + 6x = 2x - 8$

4. $6x^2 + 36x = 0$

10. $-x^2 + 2x - 1 = -2x^2 + x - 3$

5. $-9x^2 = -20$

11. $x^2 + 6x - 1 = (x - 1)(x + 7)$

6. $-2x^2 = 8x$

12. $x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 10x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

Capítulo 2

Conceptos elementales de funciones

Si A y B son dos conjuntos, una función de A en B , escrita $f : A \rightarrow B$ asocia a cada elemento $x \in A$ un único elemento, denotado $f(x) \in B$. El elemento $f(x)$ se llama imagen de x por f y x se llama preimagen de $f(x)$.

Si $f : A \rightarrow B$, entonces A se dice que es el dominio de f , B se dice que es el codominio de f y el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ cuyos elementos son las imágenes por f de todos los elementos de A se llama conjunto imagen; usualmente denotado $\text{Im}(f)$. Es también usual que la forma de asociar elementos del dominio con elementos del codominio se haga mediante fórmulas. La misma recibe el nombre de regla de asignación.

Observar que para que dos funciones sean iguales no basta con que las reglas de asignación sean iguales, sino que tanto el dominio como el codominio deben serlo. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : A' \rightarrow B'$ son tal que $f = g$, entonces $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

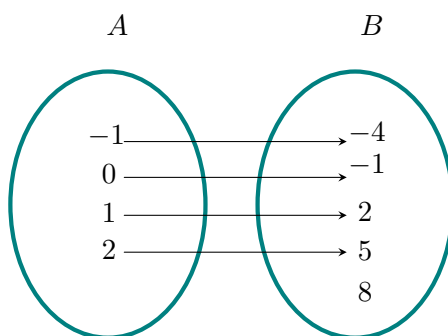
Recíprocamente, si $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$, entonces $f = g$.

Ejemplo 2.0.13

Sea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$ dos conjuntos, en donde los elementos de A están relacionados con los elementos de B , mediante la fórmula $y = 3x - 1$, con $x \in A$ e $y \in B$. Una representación gráfica se muestra en la Figura 2.0.13.

Ejemplo 2.0.14

Tomemos $A = [-10, 10]$ y $B = \mathbb{R}$. Sea $f : A \rightarrow B$ la función que asigna a cada elemento $x \in A$ el elemento $x^2 + 1 \in B$, esto es tal que su regla de asignación es $f(x) = x^2 + 1$.



Halleemos $\text{Im}(f)$:

Observar que como $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular esto se cumple en $A = [-10, 10]$. Entonces $x^2 + 1 \geq 1$ y si tomamos $x = 0$ se tiene $f(0) = 1$. Por otro lado, el valor máximo que puede tomar $f(x)$ es $f(10) = f(-10) = 101$.

Hasta ahora tenemos que $\text{Im}(f) \subset [1, 101]$, se nos plantea el problema de determinar si la inclusión es estricta o se cumple la igualdad. Si la igualdad fuera estricta, existe al menos un elemento del intervalo $[1, 101]$ que no tiene preimagen. Veamos que sucede:

Sea $y \in [1, 101]$, $y \in \text{Im}(f)$ si $\exists x \in [-10, 10]$ tal que $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$, ahora bien, $1 \leq y \leq 101 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y-1} \leq 10$. Por tanto y tiene al menos una preimagen, el número $\sqrt{y-1} \in [-10, 10]$ concluyendo que $\text{Im}(f) = [1, 101]$.

Queda como ejercicio determinar $f(S)$ y $f^{-1}(R)$ siendo $S = [2, 5]$ y $R = [82, 101]$

Ejemplo 2.0.15

Consideremos las funciones:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{(2x)^2}{4}$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} / h(x) = x^2$

Aquí es claro que las funciones f y g son iguales, mientras que las funciones f y h no lo son

ya que su codominio no es el mismo (este punto será más fácil de entender cuando repasemos la inyectividad y sobreyectividad de funciones).

2.1. Inyectividad y Sobreyectividad.

Pasamos ahora a estudiar algunas características de las funciones,

Definición 2.1.1 (Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva)

Sea $f : A \rightarrow B$

- Decimos que f es *inyectiva* si

$$\forall x, y \in A; \text{ si } f(x) = f(y) \text{ implica que } x = y.$$

- Decimos que f es *sobreyectiva* si

$$\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y.$$

- Decimos que una función es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Observación: Es condición necesaria y suficiente para que una función $f : A \rightarrow B$ sea inyectiva, que se cumpla el contra recíproco de la definición anterior. Es decir, $f : A \rightarrow B$ es inyectiva, si y sólo si

$$\forall x, y \in A, \text{ con } x \neq y, \text{ se cumple que } f(x) \neq f(y).$$

Ejemplo 2.1.1

Consideremos las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $i(x) = x^2$.

Se puede ver de inmediato que se trata de cuatro funciones distintas.

La función f no es ni inyectiva ni sobreyectiva ya que $f(-1) = f(1) = 1$ y de aquí que no es inyectiva, además $f(x) = x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, de aquí que no existe ningún elemento en el dominio de f tal que su correspondiente sea, por ejemplo, -2 . Así la función f tampoco es sobreyectiva.

La función g no es inyectiva por el mismo motivo que f no lo es. Sin embargo, g es sobreyectiva ya que si $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces existe su raíz cuadrada, tomando $x = \sqrt{y}$ tenemos que $g(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

La función h es inyectiva, verifiquemos esto:

Si $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces tenemos que $f(x) = f(y)$ implica que $x^2 = y^2$, tomando raíz cuadrada tenemos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, es decir, $|x| = |y|$, pero como $x, y \geq 0$ tenemos que $|x| = x$ e $|y| = y$, de donde concluimos que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Por el mismo motivo que f , h no es sobreyectiva.

Utilizando las mismas herramientas que utilizamos con las funciones f , g y h es inmediato verificar que i es una función inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva.

Observación: Queda totalmente aclarado, que si dos funciones tienen distinto codominio, no pueden ser iguales. Por ejemplo, las funciones f y g anteriores sólo difieren en su codominio, pero g es sobreyectiva y f no. De igual modo, si dos funciones tienen distinto dominio, no son iguales.

2.2. Imagen y Preimagen

Retomemos las ideas sobre la imagen y preimagen del principio de la sección.

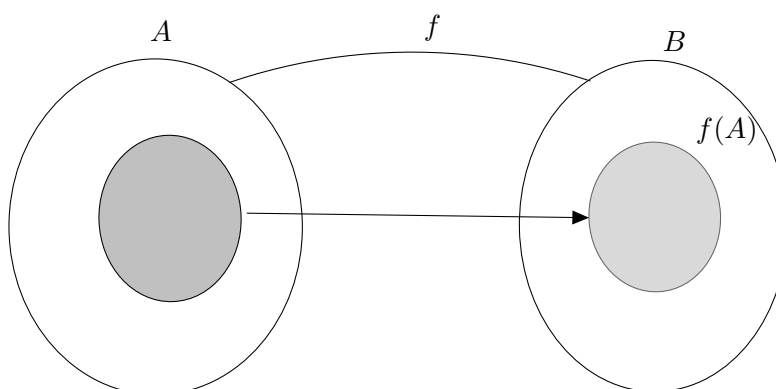
Definición 2.2.1 (Conjunto Imagen)

Dada una función $f : A \rightarrow B$ y un conjunto X ; $X \subset A$, llamamos **imagen** de X por f al

conjunto

$$f(X) = \{f(x) / x \in X\} = \{y \in B / y = f(x), x \in X\}.$$

Aprovechemos la definición anterior, para definir el **recorrido de una función**, éste lo definimos como la imagen del dominio, es decir, si $f : A \rightarrow B$ entonces el **recorrido** de f es $f(A)$.



Definición 2.2.2 (Conjunto preimagen)

Consideremos una función $f : A \rightarrow B$ y un conjunto Y ; $Y \subset B$, llamamos *preimagen* de Y por f al conjunto

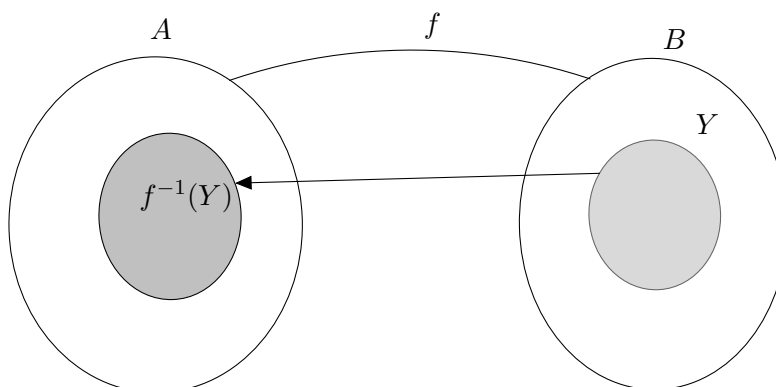
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A / f(x) \in Y\}.$$

Nuevamente aquí puede surgir una duda que más vale no tenerla. Al anotar al conjunto preimagen de Y con $f^{-1}(Y)$, para nada estamos hablando de la función inversa de f , es más, hasta el momento no sabemos que significa “función inversa”. Al anotar $f^{-1}(Y)$ hay que remitirse a la definición, o sea: $f^{-1}(Y) = \{x \in A / f(x) \in Y\}$. Ver Figura

Demos algún ejemplo de conjunto preimagen.

Ejemplo 2.2.1

Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \text{sen}(x)$. Hallemos el conjunto preimagen del conjunto \mathbb{Z} por f y el conjunto preimagen del conjunto \mathbb{R}^+ por g . $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}$ ya que $f(x) = 1 \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R}$. Mientras que $g^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{x \in [0, 2\pi] / \text{sen}(x) \in \mathbb{R}^+\} = (0, \pi)$ ya que $\text{sen}(0) = \text{sen}(\pi) = \text{sen}(2\pi) = 0$ y



$$\text{sen}(x) < 0 \text{ si } x \in (\pi, 2\pi).$$

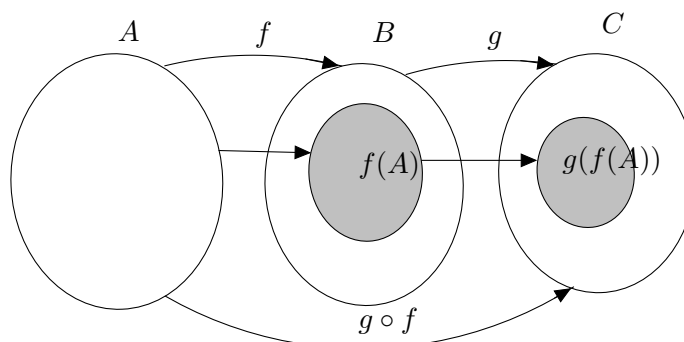
2.3. Composición

Definición 2.3.1 (Función compuesta)

Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, tal que $f(A) \subset C$, definimos la función compuesta de f con g , a la que anotamos $g \circ f$, mediante:

$$g \circ f : A \rightarrow C \text{ tal que } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A.$$

Es bueno notar, que si bien, al hacer la composición de f con g , no son necesariamente utilizados todos los elementos del conjunto B , la función $g \circ f$ está bien definida, ya que para todo $x \in A$ existe un elemento $y \in C$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.



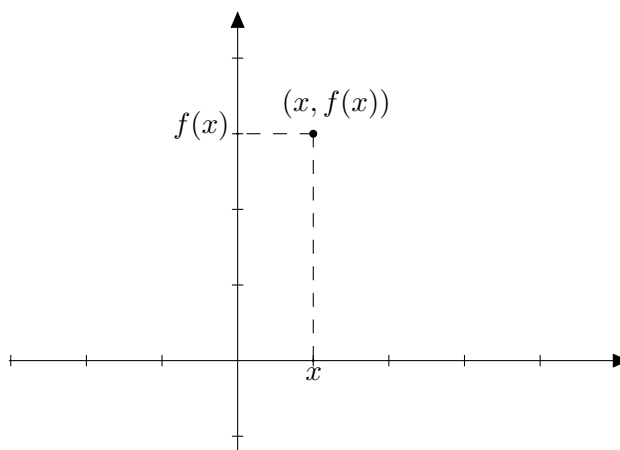
2.4. Gráfico de una función

Adelantándonos un poco al capítulo siguiente consideraremos un subconjunto de reales, $X \subset \mathbb{R}$ y una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con una determinada regla de asignación $f(x) = y$, además tomaremos un sistema de ejes cartesianos. Para cada $x \in X$, existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ y por tanto podemos considerar el par ordenado $(x, f(x)) \in X \times \mathbb{R}$. Como $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que el par $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (Notación: Usualmente se denota $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como \mathbb{R}^2 .) Por tanto el par $(x, f(x))$ puede ser asociado con un único punto del plano \mathbb{R}^2 cuyas coordenadas son las anteriormente mencionadas. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores tenemos la siguiente

Definición 2.4.1

Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se llama gráfico de f y se denota $G(f)$ al conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 tal que sus coordenadas son de la forma $(x, f(x))$.

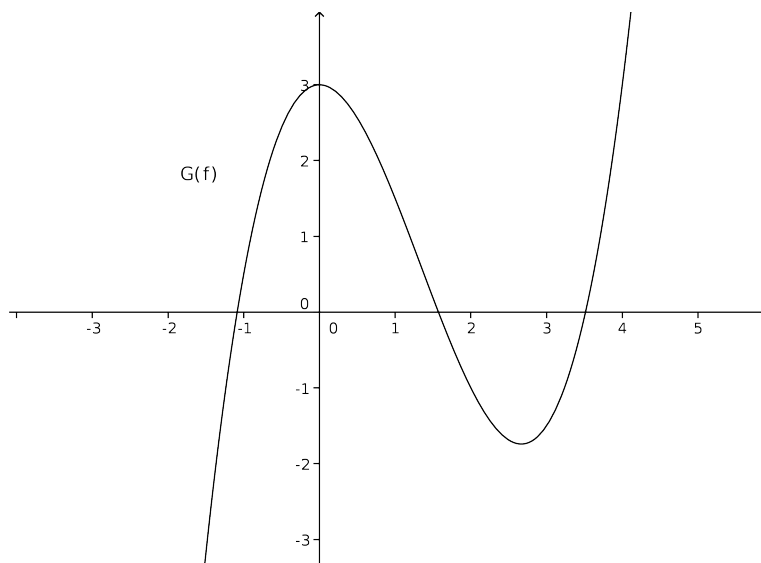
$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x \in X, y = f(x)\}$$



Ejemplo 2.4.1

Consideremos por ejemplo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 3$. Podemos realizar una tabla de valores para calcular algunas imágenes y obtener puntos del gráfico de f .

x	$f(x)$
0	3
-1	1/2
3	-3/2
1	3/2



Ejercicio 6

- Se considera $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ como dominio de f y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ tal que $f(-3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f(0) = \pi$, $f(2) = 8$, $f(4) = 3$, $f(7) = 1$. Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.
- Se considera $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$, calcular $h(0)$, $h(-1)$, $h(\pi)$, $h(\sqrt{2})$, $h(3)$.
- Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, calcular $g(1)$, $g(-1)$, $g(3)$, $g(-\sqrt{3})$, $g(-\pi)$, $g(1/3)$, $g(x+1)$, $g(x-1)$.
- Sea $j : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \frac{x^2+x}{x+3}$ y $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \frac{1}{x}$. Determinar si son posibles las siguientes composiciones, en caso contrario determinar una función de dominio más amplio posible cuya regla de asignación sea la que se obtendría mediante la composición.

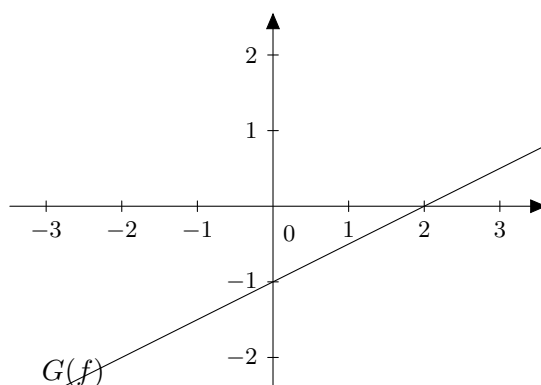
a) $j \circ k$

c) $j(cx)$, $c \in \mathbb{R}$

b) $k \circ j$

d) $k(cx)$, $c \in \mathbb{R}$

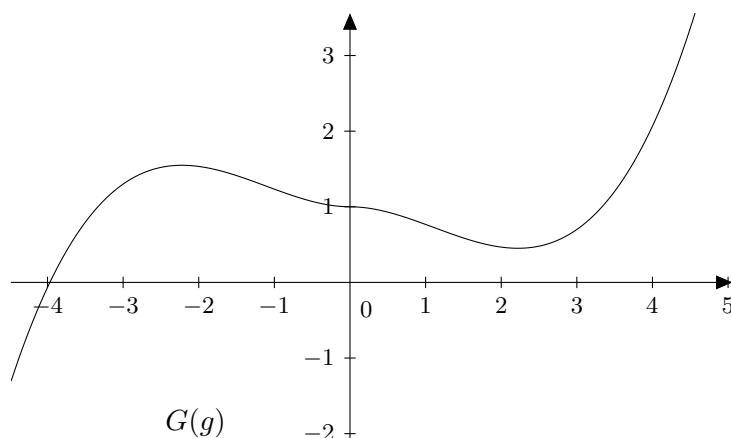
5. Se considera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura: Sin



encontrar la expresión de f , hallar el gráfico de las siguientes funciones:

- | | |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| a) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + 1$. | e) $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m(x) = f(-x)$. |
| b) $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $i(x) = f(x) - 2$. | f) $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -f(x)$. |
| c) $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x + 1)$. | g) $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -f(-x)$. |
| d) $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $l(x) = f(x - 1)$. | h) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2f(x)$. |

6. Se considera $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación, hallar los gráficos de las



funciones de forma análogas a lo hecho en la parte anterior.

7. Deducir una regla general a partir de lo observado en las partes 5 y 6.

8. Graficar las siguientes funciones:

- | | |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. | c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -2x$. |
| b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$. | d) $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $i(x) = x $. |

- e) $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $j(x) = |x| - 1$.
 f) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(x) = |x| + x$.
 g) $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $l(x) = x^2$.
 h) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^2 - 1$.
- i) $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^2 + x$.
 j) $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -x^2 + 1$.
 k) $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

9. Graficar las siguientes funciones:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 d) $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $i(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$
 e) $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
 f) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x = 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$
 g) $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $l(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

2.5. Entornos e intervalos

En esta sección se pretende introducir la idea de entorno de un punto en el conjunto de los números reales, para ello utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos e intentaremos obtener una representación gráfica del mismo.

Sean a y b dos números reales, si $a < b$ entonces la distancia entre ellos es $b - a$. Si de lo contrario $a > b$, entonces la distancia entre ellos es $a - b$. Observar que en cualquier caso este número es mayor que cero. Para generalizar la idea anterior y evitar discutir los casos $a < b$ o $a > b$ se introduce la siguiente

Definición 2.5.1

Sean a y $b \in \mathbb{R}$, la distancia entre a y b es

$$d(a, b) = |b - a|$$

En \mathbb{R} con la definición anterior se cumple:

- i) $d(a, b) \geq 0$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$;
- ii) $d(a, b) = d(b, a)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- iii) $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Utilizando la idea de distancia entre dos puntos introduzcamos la siguiente

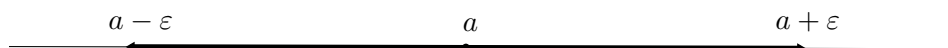
Definición 2.5.2 (Entorno abierto)

Dado $a \in \mathbb{R}$ y un número real $\varepsilon > 0$, llamamos entorno abierto de centro a y radio ε , el cual anotamos $E(a, \varepsilon)$ o $E_\varepsilon(a)$ al conjunto de los números reales cuya distancia al punto a es menor que ε . En símbolos se tiene

$$E_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}$$

Utilizando la definición de distancia se tiene que el $E_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x - a| < \varepsilon\}$ y recordando las propiedades del valor absoluto se tiene equivalentemente $E_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.

Con esta equivalencia anterior es mas claro obtener una representación gráfica del entorno de centro a y radio ε .



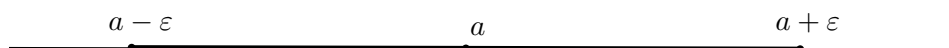
Además de la definición anterior se tiene la siguiente

Definición 2.5.3 (Entorno cerrado)

Dado $a \in \mathbb{R}$ y un número real $\varepsilon > 0$, llamamos entorno cerrado de centro a y radio ε , el cual anotamos $\overline{E}(a, \varepsilon)$ o $\overline{E}_\varepsilon(a)$ al conjunto de los números reales cuya distancia al punto a es menor o igual que ε . En símbolos se tiene

$$\overline{E}_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } d(a, x) \leq \varepsilon\}.$$

Análogamente a la observación luego de la definición anterior a esta, $\overline{E}_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x - a| \leq \varepsilon\}$ o $\overline{E}_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\}$. Su representación gráfica puede verse en la siguiente figura: Introduciremos a continuación la noción de entorno

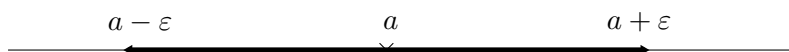


reducido dado que es una idea fundamental al introducir el importante concepto de límite.

Definición 2.5.4 (Entorno reducido)

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, llamamos entorno reducido de centro a y radio ε , anotándolo $E_\varepsilon^*(a)$ al conjunto $E_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Su representación gráfica puede verse en la siguiente figura:



Utilizando las equivalencias vistas anteriormente se tiene además que $E_\varepsilon^*(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ o $E_\varepsilon^*(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, \text{ con } x \neq a\}$.

Ejercicio 7

Sean $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \varepsilon' > 0, \varepsilon < \varepsilon'$. Expresar por comprensión los siguientes conjuntos:

- | | |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1. $E_\varepsilon(a) \cap E_{\varepsilon'}(a)$ | 4. $E_\varepsilon^*(a) \cap E_{\varepsilon'}^*(a)$ |
| 2. $E_\varepsilon(a) \cup E_{\varepsilon'}(a)$ | 5. $E_\varepsilon(a) \cap E_{\varepsilon'}^*(a)$ |
| 3. $\overline{E}_\varepsilon(a) \cap \overline{E}_{\varepsilon'}(a)$ | 6. $E_\varepsilon(a) \cup E_{\varepsilon'}^*(a)$ |

Sean a y $b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$,

i) llamamos *intervalo abierto* de extremos a, b al conjunto de números reales tales que $a < x < b$, en notación matemática

$$(a, b) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a < x < b\}$$

ii) Llamamos *intervalo cerrado* de extremos a, b al conjunto de números reales tales que $a \leq x \leq b$, en notación matemática

$$[a, b] = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \leq x \leq b\}$$

Observación: Estas definiciones y las de entorno se pueden vincular de la siguiente manera:

$$E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ y } E_\varepsilon^*(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

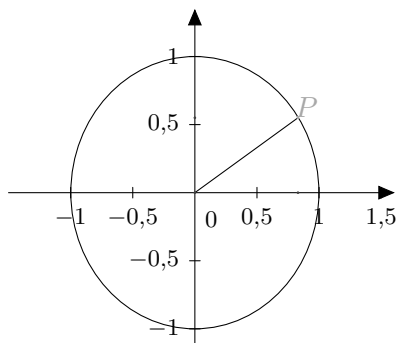
Estos intervalos anteriormente mencionados se dicen acotados, mas generalmente, un conjunto X de números reales se dice acotado si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < k, \forall x \in X$. A modo de ejemplo si consideramos el intervalo (a, b) , basta tomar algún $k \geq \max\{|a|, |b|\}$ entonces se cumple que $|x| < k, \forall x \in X$.

2.6. Trigonometría

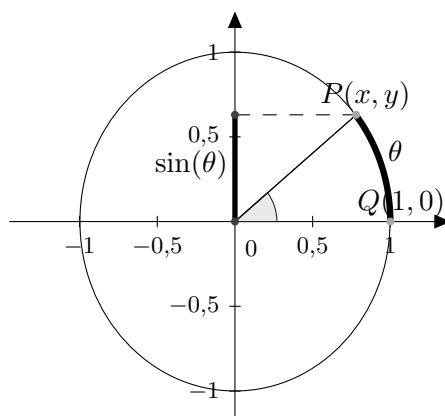
Consideremos un sistema de ejes cartesianos ortogonales y una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio 1. Recordemos que en este caso la circunferencia tiene perímetro 2π .

Si tomamos el punto Q de coordenadas $(1, 0)$ y cualquier otro punto P perteneciente a la circunferencia, queda determinado un arco¹ \widehat{QP} cuya longitud es un número real $\theta \in [0, 2\pi)$.

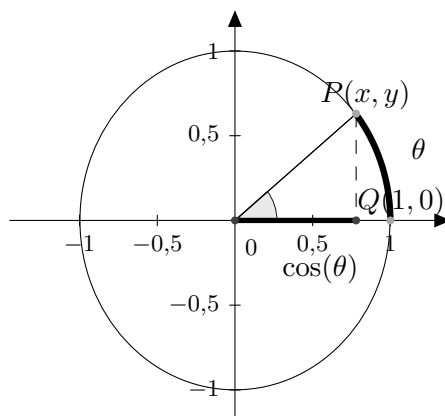
¹El arco se toma en sentido anti-horario desde Q .



Si consideramos la ordenada del punto P obtenemos un número $y \in [-1, 1]$ el cual depende del arco de longitud θ . Al mismo lo llamaremos seno de θ , $y = \sin(\theta)$.

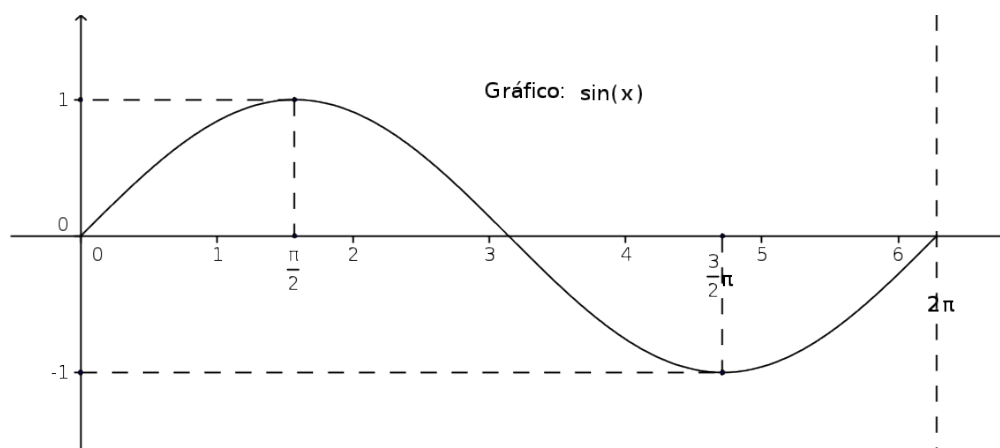


Por otro lado si tomamos la abscisa del punto P obtenemos también un número $x \in [-1, 1]$ el cual también depende del arco θ . Al mismo lo llamaremos coseno de θ , $x = \cos(\theta)$



Por tanto podemos considerar el seno como una función $s : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \sin(x)$ y su gráfico queda como en la siguiente figura.

Mas aún, podemos considerar la función seno con dominio \mathbb{R} extendiendola de la siguiente

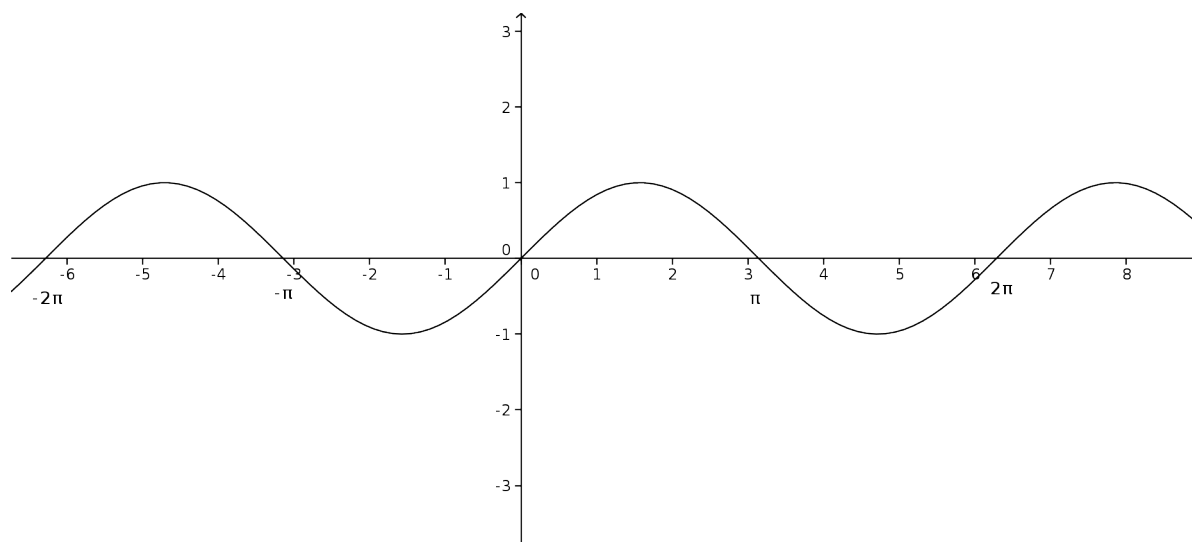


manera:

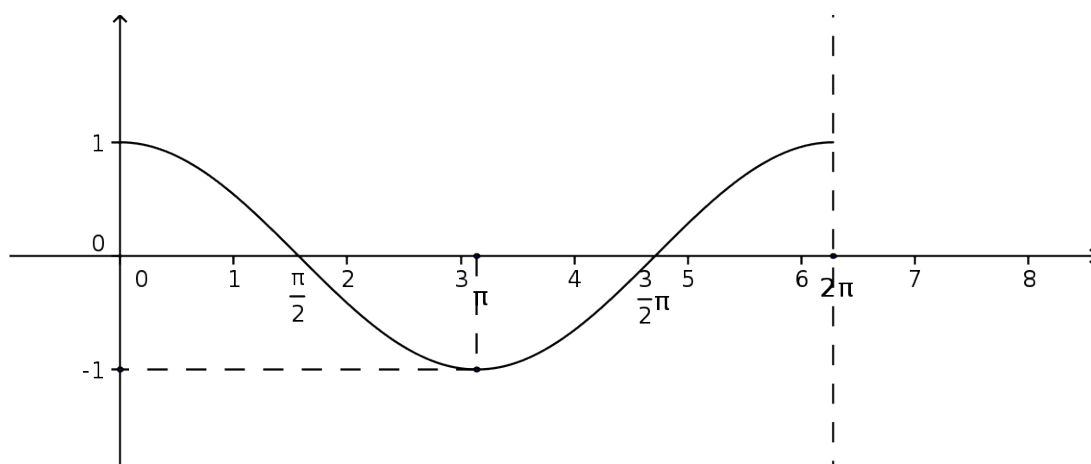
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [0, 2\pi)$$

La idea fundamental de estas consideraciones es que dado $y \in \mathbb{R}$ existen únicos $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [0, 2\pi)$ tales que $y = \sin(x)$.

Entonces la función seno queda $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \sin(x)$.



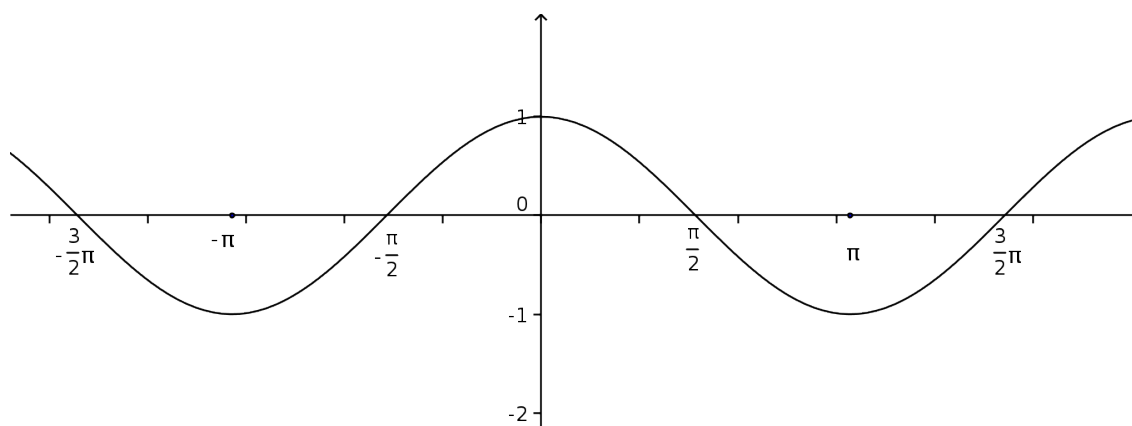
Análogamente podemos considerar al coseno como una función $c : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $c(x) = \cos(x)$ y su gráfico queda como en la siguiente figura.



Como se hizo con $\sin(x)$ podemos extender la función coseno a todos los reales como

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [0, 2\pi)$$

Entonces la función coseno queda $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $c(x) = \cos(x)$.



Por tanto s y c son funciones de dominio \mathbb{R} y periódicas de período 2π y acotadas entre -1 y 1 .

Definición 2.6.1

Dado $x \in \mathbb{R}$

1. Si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, se define la tangente de x como $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
2. Si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, se define la secante de x como $\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}$
3. Si $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, se define cosecante de x como $\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$

4. Si $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se define cotangente de x como $\cot := \tan(x)^{-1}$

Veamos algunas relaciones fundamentales, quedando como ejercicio su justificación:

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
3. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
4. $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
7. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
8. $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
9. $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
10. $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
11. $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.