Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Geometría y Álgebra Lineal II

PRIMER PARCIAL - 28 DE ABRIL DE 2016.   DURACIÓN: 3:30 HORAS

N° de parcial	Cédula	Apellido y Nombre	Grupo de Teórico (marcar con X)	
			No concurro a teórico	
			Lunes y Mierc. 14hs	
			Martes y Jueves 11hs	

Ejercicio 1. (10pts) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (ax, x + y + z, y + z) \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

a. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales T es diagonalizable. (4pts)

b. Para el mayor valor de a para la cual T no es diagonalizable, hallar la matriz de Jordan y una base de Jordan. (6pts)

Ejercicio 2. (10pts) Sea $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 1, y $\mathcal{C} = \{1, x\}$ su base canónica.

a. Hallar un producto interno $\langle ax + b, a'x + b' \rangle$, para el cual $\{1,\ x + 1\}$ es una base ortonormal (5pts)

b. Hallar la norma de los vectores de la base canónica para este producto interno. (2pts)

c. Para este producto interno, hallar $S = \{x\}^{\perp}$. (3pts)

Ejercicio 3. (8pts) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar la descomposición QR de la matriz A.

Ejercicio 4. (12pts) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal.

a. Probar que si $v_1, v_2 \cdots, v_k \in V$ son vectores propios de T asociados a valores propios distintos, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es linealmente independiente. (9pts)

b. Probar que si $dim(V) = n$ y el polinomio característico de T, χ_T, tiene n raíces distintas en $\mathbb{K}$, entones T es diagonalizable. (3pts)

Esquema de Solución
Ejercicio 1. a) La matriz asociada en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $det(A-\lambda Id) = (a-\lambda)(\lambda)(\lambda-2)$. Por lo tanto si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ se tiene que T es diagonalizable por tener todos los valores propios distintos.
Si $a = 0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, luego el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$
Lo que implica que la $mg(0) = 1 \neq ma(0)$. Por lo tanto No es diagonalizable.
Si $a = 2$ entonces $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, luego el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$
Lo que implica que la $mg(2) = 1 \neq ma(2)$. Por lo tanto No es diagonalizable.
b) Para $a = 2$, como $mg(2) = 1$ y $ma(2) = 2$, entonces

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de Jordan, tiene que cumplir que $T(v_1) = 0v_1$, $T(v_2) = 2v_2 + v_3$ y $T(v_3) = 2v_3$. Por lo tanto, tomamos $v_1 = (0, -1, 1)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$. Sea $v_2 = (x, y, z)$, la ecuación $T(v_2) = 2v_2 + v_3$ tiene como una solución al vector $(2, 1, 0)$. Concluímos que una base de Jordan es $B = \{(0, -1, 1), (2, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Ejercicio 2.

a. El polinomio genérico escrito como c.l. de la base es: $ax + b = (b - a)1 + a(x + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle ax + b, a'x + b' \rangle &= \langle (b - a)1 + a(x + 1), (b' - a')1 + a'(x + 1) \rangle \\ &\overset{(*)}{=} (b - a)(b' - a') + aa' \\ &= 2aa' - ba' - ab' + bb' \end{aligned}$$

En $(*)$ usamos que la base es ortonormal.

b. $\langle 1, 1 \rangle = 1$ y $\langle x, x \rangle = 2$ con lo que $\|x\| = \sqrt{2}$.

c. Buscamos los polinomios $ax + b$ tales que $\langle ax + b, x \rangle = 0$, entonces $2a - b = 0$ y $S = \{ax + 2a, a \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 3. Como $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
entonces consideramos $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 2)\}$.
Luego, $u_1 = v_1$ y $y_1 = u_1/||u_1|| = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$.
$u_2 = v_2 - cu_1$ donde $c = \frac{<v_2,u_1>}{<u_1,u_1>}$. Como $v_2 \perp u_1$ entonces $c = 0$ y por lo tanto $u_2 = v_2$ y entonces $y_2 = u_2/||u_2|| = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$.

$u_3 = v_3 - c_2 u_2 - c_1 u_1$ donde $c_2 = \frac{<v_3,u_2>}{<u_2,u_2>} = 0$ y $c_1 = \frac{<v_3,u_1>}{<u_1,u_1>} = 4/3$, con lo que $y_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$. Con esto obtenemos:

$$QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.
Ver Teórico. Referencia: Teorema 53 y Corolario 54, Pág 44 , Libro Rojo.