Controle Clássico

Prof: Dennis

- Representação no Espaço de Estados

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. São Paulo: LTC 6ª ed. 2012.

Abordagem Clássica: Domínio da Frequência

- A abordagem clássica de sistema de controle é a do domínio da frequência;
- Essa abordagem é baseada na transformada de Laplace e representa os sistemas por funções de transferência;
- Sua principal vantagem é a facilidade na obtenção de informações sobre a estabilidade do sistema, sua resposta transitória e erro em regime permanente;
- Sua grande limitação é que ela pode ser aplicada apenas a sistemas lineares e invariantes no tempo, ou sistemas que assim podem ser aproximados.
- Também, não pode ser utilizada para sistemas com múltiplas entradas e saídas;

Abordagem Moderna: Domínio do tempo

- A abordagem Moderna de sistema de controle trabalha diretamente no domínio do tempo;
- Essa abordagem utiliza a representação no espaço de estados que é baseada em equações diferenciais de 1ª ordem;
- Essa abordagem pode ser usada para modelar, analisar e projetar uma vasta variedade de sistemas.
- Sua grande vantagem é não possuir limitações, podendo ser utilizada para representar:
  - Sistemas não lineares, como os que possuem folgas, saturações, zonas mortas ou mesmo comportamento caótico;
  - Sistemas com condições iniciais não nulas;
  - Sistemas variantes no tempo;
- Além disso, essa abordagem é facilmente utilizada para sistemas com múltiplas entradas e saídas;

Representação no espaço de estados:

- A representação em espaço de estados usa equações diferencias ou não para:
  - O sistema;
  - As saídas;
  - As condições iniciais;
- A representação geral no espaço de estados é:

Equações de estado $\Rightarrow$ $$\frac{d\vec{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \boldsymbol{B}\vec{u}$$

Equações de saída $\Rightarrow$ $$\vec{y} = \boldsymbol{C}\vec{x} + \boldsymbol{D}\vec{u}$$

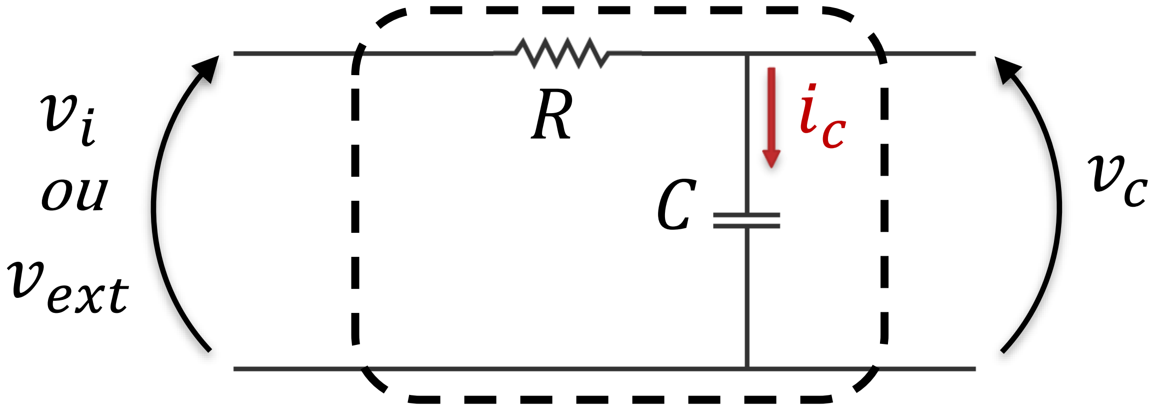
Condições iniciais $\Rightarrow$ $$\overrightarrow{x_0} = \vec{x}(t = 0)$$

Sendo:
$\vec{x}$ o vetor de estados
$\vec{u}$ o vetor de entrada ou controle
$\vec{y}$ o vetor de saída
$\overrightarrow{x_0}$ o vetor de condições iniciais
$\boldsymbol{A}$ a matriz do sistema
$\boldsymbol{B}$ a matriz de entrada
$\boldsymbol{C}$ a matriz de saída
$\boldsymbol{D}$ a matriz de transmissão direta

- Ou seja, precisamos de 4 vetores e 4 matrizes. Mas vamos entender isso com exemplos:

Exemplo 1: Modelos de sistemas elétricos

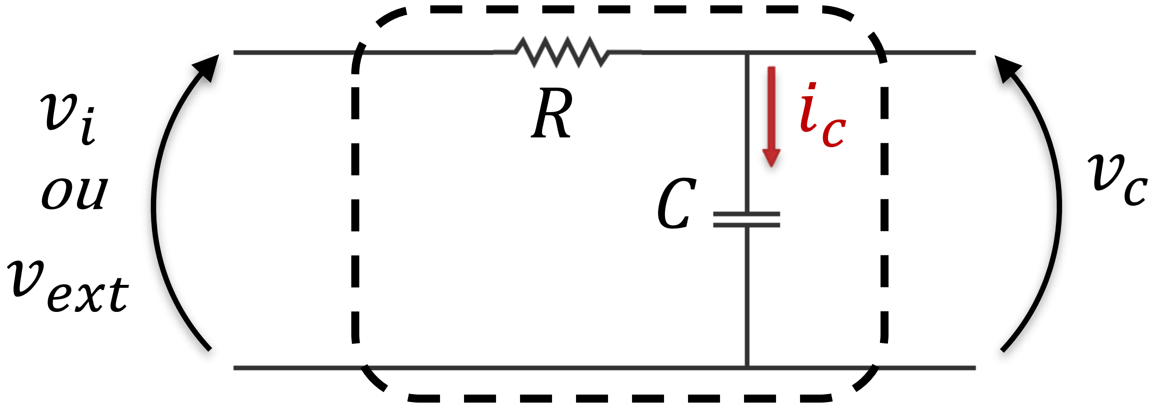
- Dado o circuito RC abaixo e assumindo a condição inicial $v_c(t = 0) = v_{c0}$, construa a representação no espaço de estados para $v_c\ e\ i_c$ como saídas:



- Note que esse é uma "Planta" de 1ª ordem e portanto terá apenas 1 variável de estado: v_c

- Pelo que o exemplo pede, serão duas saídas: $v_c\ e\ i_c$.

Exemplo 1: Modelos de sistemas elétricos



- Vamos começar calculando a equação de estado. Essa equação deve ser da seguinte forma:

> A derivada de cada variável de estado deve depender apenas das variáveis de estado, das entradas e de constantes.

Partimos da equação de malha do circuito:

$$v_C = v_i - v_R$$

Então incluímos as equações constitutivas do capacitor e resistor:

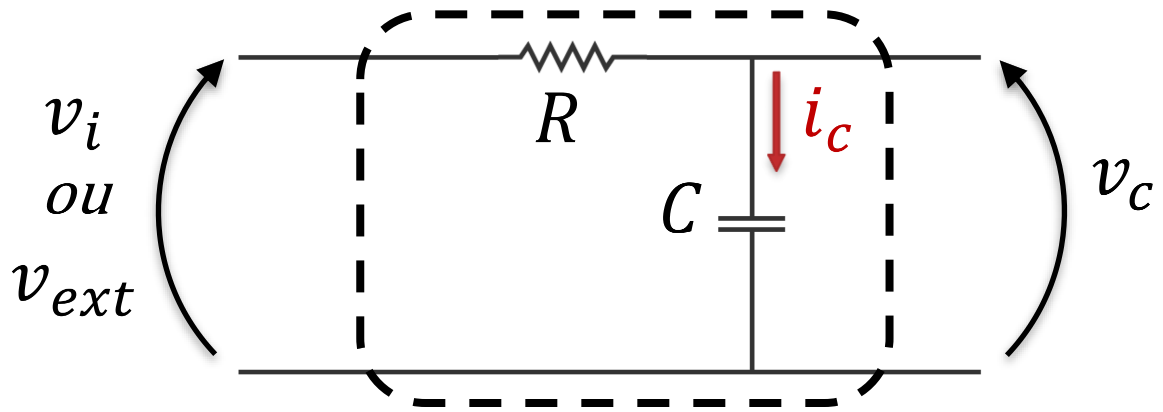
$$\left.\begin{aligned} i_c &= C\frac{dv_C}{dt} \\ v_R &= \mathrm{R}i_c \end{aligned}\right\} \; v_R = RC\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_c = v_i - RC\frac{dv_c}{dt}$$

Chegamos na EDO do circuito, basta isolar $\frac{dv_c}{dt}$ que teremos a equação de estado:

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{RC}v_i \qquad \text{Equação de estado}}$$

Exemplo 1: Modelos de sistemas elétricos



- Agora, vamos escrever as saídas, v_c e i_c :
- Essas equações devem ser da seguinte forma:

Cada variável de saída deve depender apenas das variáveis de estado, das entradas e de constantes.

$$v_c = v_c \qquad i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

Temos que nos livrar desta devida. Para isso vamos usar a própria equação de estado:

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{RC}v_i$$

$$i_c = C\left(-\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{RC}v_i\right) \Rightarrow -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}v_i$$

Com isso temos o sistema de equações da saídas:

$$\begin{cases} v_c = v_c \\ i_c = -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}v_i \end{cases}$$

Equações de saída

Só nos falta a condição inicial, que é dada pelo exemplo:

$$v_c(t=0) = v_{c0}$$

Condição inicial

Exemplo 1: Modelos de sistemas elétricos

- Comparando as nossas equações com a representação geral, podemos identificar as matrizes:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \boldsymbol{B}\vec{u} \\ \vec{y} = \boldsymbol{C}\vec{x} + \boldsymbol{D}\vec{u} \\ \overrightarrow{x_0} = \vec{x}(t=0) \end{cases}$$

Sistema:

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{RC}v_i$$

Saídas:

$$\begin{cases} v_c = v_c \\ i_c = -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}v_i \end{cases}$$

$$\vec{x} = [v_c] \qquad \boldsymbol{A} = \left[-\frac{1}{RC}\right] \qquad \boldsymbol{B} = \left[+\frac{1}{RC}\right]$$

$$\vec{u} = [v_i]$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_c \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_0} = [v_{c0}]$$

Esse conjunto de vetores e matrizes é que dá a representação do sistema em espaço de estados!

Exemplo 1: Modelos de sistemas elétricos

- Confuso com tantas matrizes? Vamos fazer a contra checagem:

$$\vec{x} = [v_c] \quad \boldsymbol{A} = \left[-\frac{1}{RC}\right]$$

$$\vec{u} = [v_i] \quad \boldsymbol{B} = \left[+\frac{1}{RC}\right]$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_0} = [v_{c0}] \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \boldsymbol{B}\vec{u} \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{RC}v_i$$

$$\vec{y} = \boldsymbol{C}\vec{x} + \boldsymbol{D}\vec{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{R} \end{bmatrix} v_c + \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{R} \end{bmatrix} v_i \Rightarrow$$

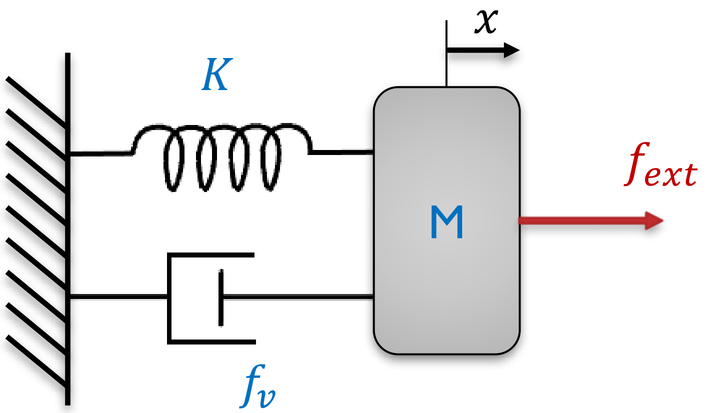
$$\begin{cases} v_c = v_c + 0v_i \\ i_c = -\frac{1}{R}v_c + \frac{1}{R}v_i \end{cases}$$

$$\overrightarrow{x_0} = \vec{x}(t=0) \Rightarrow \quad v_c(t=0) = v_{c0}$$

Voltamos para as equações do sistema! Ou seja, o conjunto de vetores e matrizes é equivalente as equações.

Exemplo 2: Sistema mecânico massa, mola e amortecedor

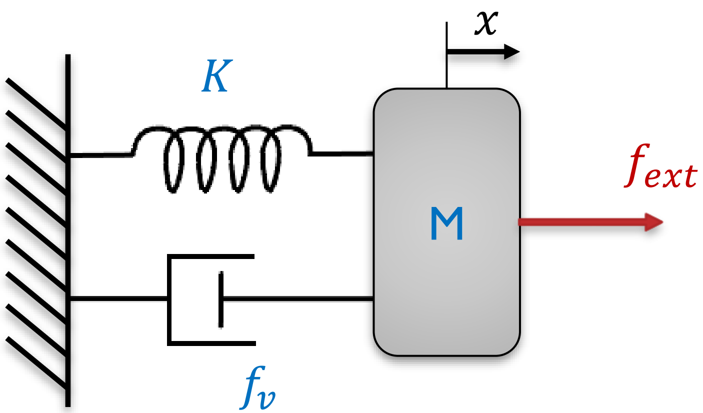
- Dado o sistema mecânico a seguir, construa a representação no espaço de estados para as saídas sendo a posição e o momento linear da massa M. No instante t=0, a posição da massa M é x_0 e sua velocidade é v_0



- Note que esse é uma "Planta" de 2ª ordem e portanto com 2 variáveis de estado: $x\ e\ v$.

- Pelo que o exemplo pede, serão duas saídas: $x\ e\ p = Mv$.

Exemplo 2: Sistema mecânico massa, mola e amortecedor



- Vamos começar calculando a equação de estado.

$$\sum f_i = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\sum f_i = -\mathrm{k}x - f_v\frac{dx}{dt} + f_{ext}$$

$$f_{ext} = M\frac{d^2x}{dt^2} + f_v\frac{dx}{dt} + Kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f_v}{M}\frac{dx}{dt} - \frac{K}{M}x + \frac{1}{M}f_{ext} \Rightarrow$$

Temos que dividir essa EDO de 2ª ordem em duas de 1ª ordem.

$$\text{Sistema:} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{K}{M}x - \dfrac{f_v}{M}v + \dfrac{1}{M}f_{ext} \end{cases}$$

No entanto as saídas são imediatas:

$$\text{Saídas, } x \ \ e \ \ p\text{:} \begin{cases} x = x \\ p = Mv \end{cases}$$

Exemplo 2: Sistema mecânico massa, mola e amortecedor

- Comparando as nossas equações com a representação geral:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \boldsymbol{B}\vec{u} \\ \vec{y} = \boldsymbol{C}\vec{x} + \boldsymbol{D}\vec{u} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{x_0} = \vec{x}(t = 0)$$

Sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 * x + 1 * v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{K}{M}x - \dfrac{f_v}{M}v + \dfrac{1}{M}f_{ext} \end{cases}$$

Saídas:
$$\begin{cases} x = x \\ p = Mv \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = [f_{ext}]$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{f_v}{M} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ +\dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Sistema mecânico massa, mola e amortecedor

- Vamos verificar se a representação está de acordo com o sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} & \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f_v}{M} \end{bmatrix} \\ \vec{u} = [f_{ext}] & \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{M} \end{bmatrix} \\ \vec{y} = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} & \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \boldsymbol{B}\vec{u} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f_v}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{M} \end{bmatrix} f_{ext} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f_v}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{M} \end{bmatrix} f_{ext} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x + 1v \\ -\frac{K}{M}x - \frac{f_v}{M}v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0f_{ext} \\ +\frac{1}{M}f_{ext} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{f_v}{M}v + \frac{1}{M}f_{ext} \end{cases}$$

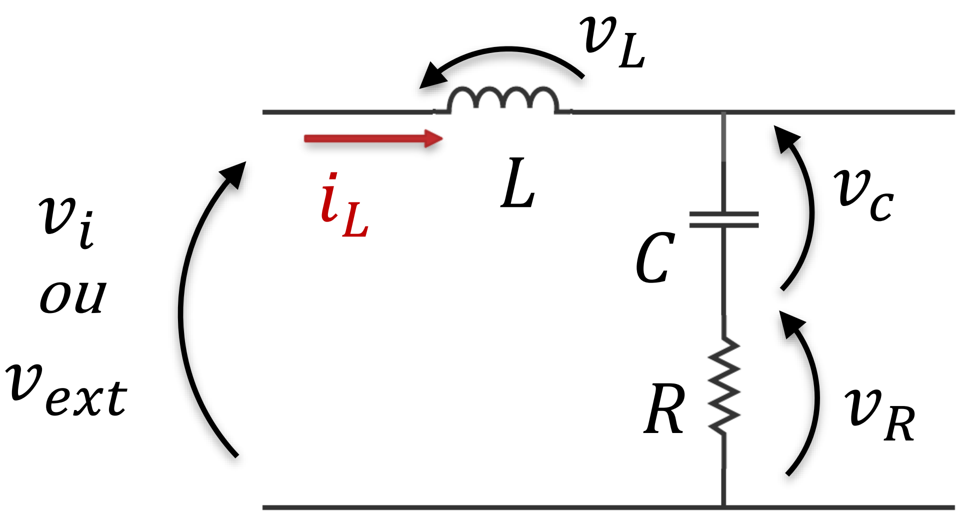
$$\vec{y} = \boldsymbol{C}\vec{x} + \boldsymbol{D}\vec{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_{ext} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ p = Mv \end{cases}$$

Sucesso! Voltamos as equações!

Obs:As condições inicias são de verificação imediata.

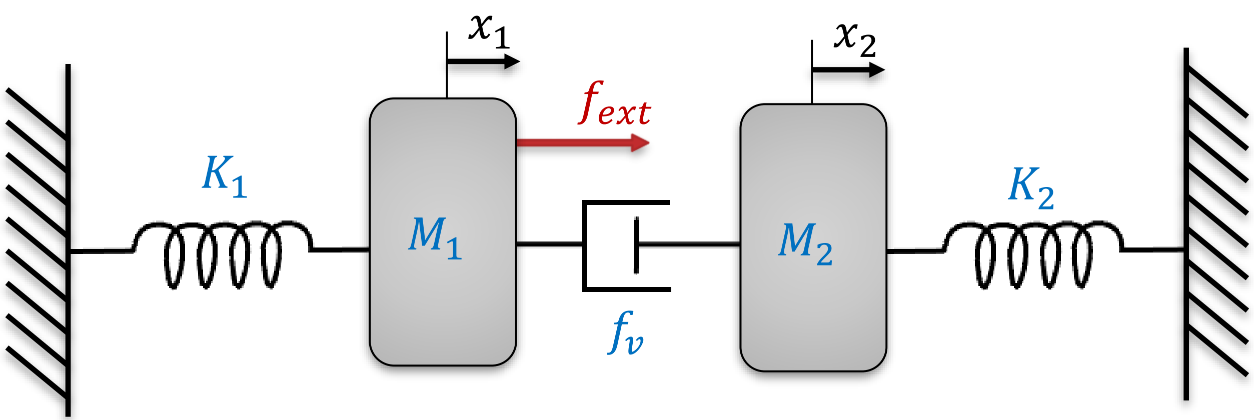
Exercício 1:

- Dado o circuito RLC abaixo e assumindo as condições iniciais $v_c(t=0) = v_{c0}$ e $i_L(t=0) = i_{L0}$,
  - a) Construa a representação no espaço de estados, para v_c e v_R como saídas.
  - b) Tomando $R = 5\Omega, C = 1mF, L = 20\ mH, v_{c0} = 0{,}5V$ e $i_{L0} = 0A$, reescreva essa representação de forma numérica.



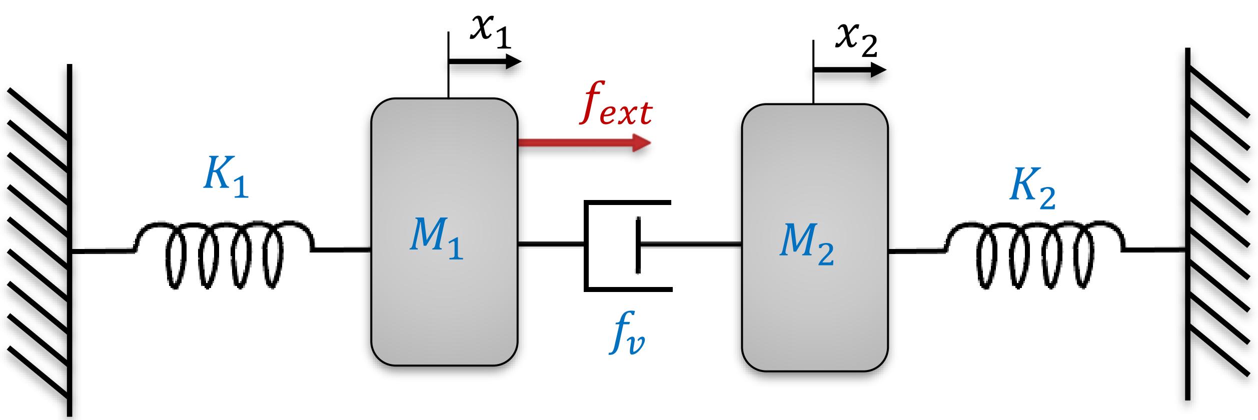
Exercício 2:

Dado o sistema mecânico a seguir, construa a representação no espaço de estados para as saídas sendo as posições x_1 e x_2 das massas M_1 e M_2 respectivamente. No instante t=0, as posições das massas M_1 e M_2 são x_{1_0} e x_{2_0} e suas velocidades são v_{1_0} e v_{2_0}.

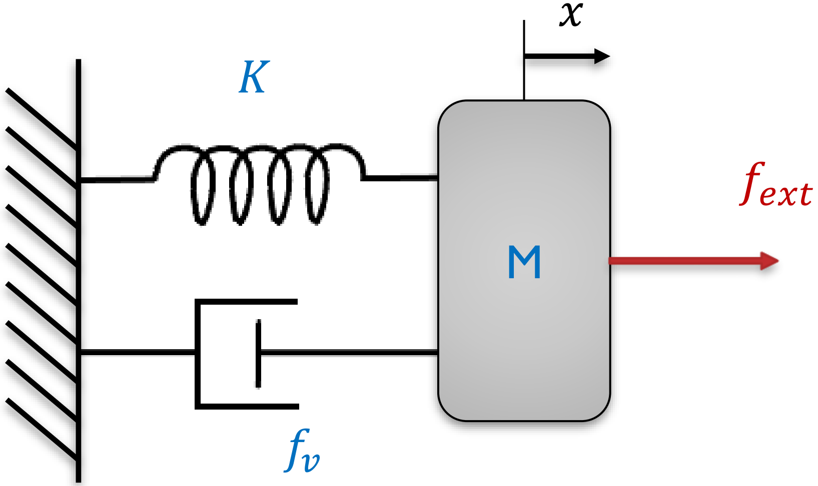


Exercício 3:

Dado o sistema mecânico a seguir, construa a representação no espaço de estados para as saídas sendo a posição e a velocidade x_1 e v_1 da massas M_1. No instante t=0, as posições das massas M_1 e M_2 são x_{1_0} e x_{2_0} e suas velocidades são v_{1_0} e v_{2_0}.

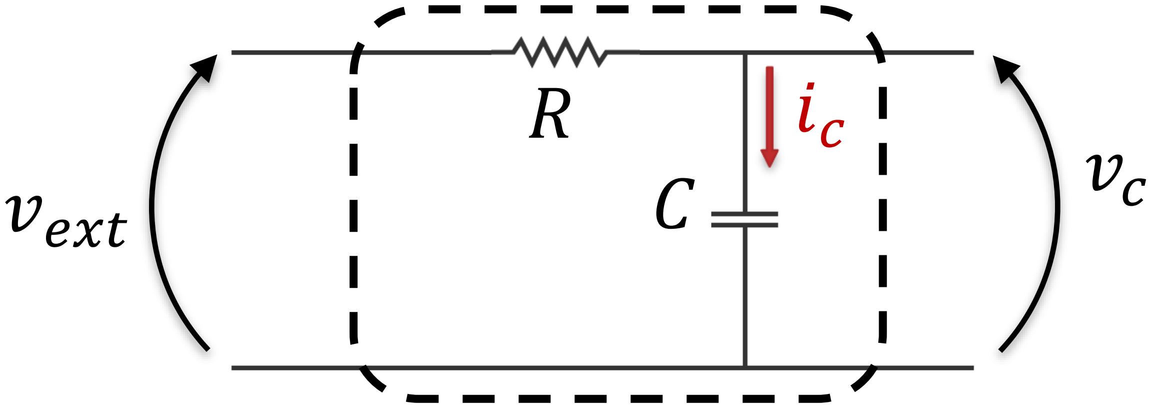


$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{x} + \boldsymbol{B}\vec{u} \\ \vec{y} = \boldsymbol{C}\vec{x} + \boldsymbol{D}\vec{u} \\ \overrightarrow{x_0} = \vec{x}(t=0) \end{cases}$$



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{f_v}{M} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ +\dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



CONTROLE CLÁSSICO:
Representação no Espaço de Estados