02 - Introducción a la Combinatoria

2.1 Principios de Cardinalidad

2.1.1 Principio de Adicción

Sirve para contar de cuántas maneras diferentes se puede realizar una acción cuando existen varias opciones, pero solo puedes elegir una de ellas en cada ocasión.

¿Cuándo se usa?

Se utiliza cuando tienes dos o más eventos o tareas que son *mutuamente excluyentes*, es decir, que no pueden ocurrir al mismo tiempo. Por ejemplo, si tienes que elegir entre hacer una cosa o la otra, pero no ambas a la vez.

¿Cómo funciona?

Si el evento A se puede realizar de mm maneras diferentes y el evento B se puede realizar de n maneras diferentes, y solo puedes hacer uno de los dos, entonces tienes en total m+n maneras de realizar la acción (hacer A o hacer B).

En otras palabras: **el "o" en los enunciados indica suma**.

> **Ejemplo sencillo:**
>
> Supón que quieres leer un libro o ver una película:
>
> - Tienes 3 libros para elegir.
> - Tienes 4 películas para elegir.
>
> Como solo puedes hacer una de las dos cosas (leer un libro o ver una película), el número total de opciones es:
>
> 3+4=7
>
> 3+4=7
>
> O sea, tienes 7 maneras diferentes de pasar tu tiempo.

Otro ejemplo:

Imagina que puedes cruzar un río usando 3 botes o 4 barcos. Solo puedes usar uno de ellos cada vez. El número de formas de cruzar el río es:

3+4=7

3+4=7

Así que tienes 7 formas distintas de cruzar el río

Puntos clave:

- El principio de adición se usa cuando los eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo (mutuamente excluyentes).
- Se suman las posibilidades de cada evento.
- Es la base para resolver muchos problemas de conteo en combinatoria y probabilidad.

En resumen:

Cuando la pregunta es "¿de cuántas formas puedo hacer esto *o* aquello?", suma las posibilidades de cada opción por separado para obtener el total

---

2.1.2 Principio de Inclusión - Exclusión

¿Para qué sirve?

Para calcular el número de elementos (*cardinal*) de la unión de varios conjuntos, especialmente cuando esos conjuntos pueden tener elementos en común.

¿Por qué no basta con sumar?

Si simplemente sumas el número de elementos de cada conjunto, los elementos que están en más de un conjunto se cuentan varias veces. El principio de inclusión-exclusión corrige esto restando las intersecciones.

Fórmulas Básicas:

- **Para dos conjuntos A y B:**

  | A∪B | = | A | + | B | – | A∩B |

  - | A | : número de elementos en A
  - | B | : número de elementos en B
  - | A∩B | : número de elementos que están en ambos conjuntos

- **Para tres conjuntos A, B y C:**

  $| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C |$

  - Sumas los elementos de cada conjunto
  - Restas las intersecciones de dos en dos (para corregir los elementos contados dos veces)
  - Sumas la intersección de los tres (porque al restar antes, los elementos que están en los tres conjuntos se eliminaron más de la cuenta)

Ejemplo:

Supón que en una clase:

- 10 estudiantes hablan inglés (A)
- 8 hablan francés (B)
- 5 hablan ambos idiomas (A∩B)

¿Cuántos estudiantes hablan al menos uno de los dos idiomas?

$$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B | = 10 + 8 - 5 = 13$$

Así, 13 estudiantes hablan al menos uno de los dos idiomas.

2.1.3 Principio de Dirichlet

El principio de Dirichlet, también conocido como principio del palomar o principio de las cajas.

Qué dice el principio de Dirichlet?

El principio de Dirichlet, también conocido como principio del palomar o de las cajas, afirma que si tienes más objetos que cajas donde colocarlos, al menos una caja tendrá más de un objeto. Matemáticamente, si tienes n objetos y m cajas, y $n>m$, entonces al menos una caja contiene dos o más objetos.

Ejemplo básico:

Si tienes 10 calcetines y solo 9 cajones, al menos un cajón tendrá dos calcetines.

Si hay 13 personas y solo 12 meses en el año, al menos dos personas cumplen años el mismo mes.

Aplicaciones en informática

Aunque parece un principio muy simple, tiene aplicaciones muy importantes en informática y ciencias de la computación:

- **Hashing:**

  Cuando usas una función hash para asignar valores (por ejemplo, claves de datos) a un número limitado de posiciones (índices de una tabla), si tienes más valores posibles que posiciones, necesariamente habrá colisiones: dos valores diferentes tendrán el mismo índice. Esto demuestra que no existe un algoritmo de hashing perfecto que evite todas las colisiones cuando hay más valores posibles que índices disponibles.

- **Compresión de datos sin pérdida:**

  Si un algoritmo de compresión logra que todos los archivos sean más pequeños que el original, por el principio de Dirichlet, habría dos archivos diferentes que, al comprimirse, darían el mismo resultado comprimido. Esto es imposible si queremos descomprimir y recuperar siempre el archivo original. Por tanto, siempre existirá algún archivo que, al comprimirlo, termine ocupando igual o más espacio que el original.

2.1.4 Principio de la Multiplicación

Nos ayuda a contar de cuántas maneras se pueden realizar dos o más acciones consecutivas o combinadas.

¿Qué dice el principio?

Si una acción A se puede realizar de n formas diferentes, y una acción B se puede realizar de m*m* formas diferentes, y ambas acciones son independientes (es decir, hacer A no afecta las formas de hacer B), entonces la acción "hacer A **y** luego B" se puede realizar de **n×m** formas diferentes.

¿Cómo entenderlo?

- El "y" en el enunciado indica multiplicación.
- Se multiplica el número de opciones de cada acción porque para cada forma de hacer A, puedes combinarla con todas las formas de hacer B.

Ejemplo:

Supón que tienes:

- 3 pantalones diferentes
- 3 camisas diferentes

Para vestirte, eliges primero un pantalón y luego una camisa. El número total de combinaciones posibles es:

$3 \times 3 = 9$

Por lo tanto, tienes 9 maneras distintas de vestirte.

Otro ejemplo:

En un restaurante:

- Puedes elegir entre 3 bebidas
- Y 4 platos principales

El total de combinaciones posibles de una comida (bebida + plato) es:

3×4=12

Extensión a más de dos acciones

Si hay más de dos acciones independientes, por ejemplo r acciones con:

- $N1$ formas de hacer la primera
- $N2$ formas de hacer la segunda
- ...
- Nr formas de hacer la r-ésima

Entonces, el total de formas de hacer todas las acciones seguidas es:

$$N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r$$

En resumen:

El principio de multiplicación nos dice que para contar el número total de maneras de hacer varias acciones seguidas, multiplicamos las formas en que se puede hacer cada acción. Esto es clave para resolver muchos problemas básicos de combinatoria y conteo.

2.2 Permutaciones, combinaciones y variaciones

Permutaciones

- **¿Qué son?**

  Son formas de ordenar todos los elementos de un conjunto.

  Importa el orden y **se usan todos los elementos**.

Permutaciones sin repetición

- Todos los elementos son diferentes.
- Ejemplo: ¿De cuántas formas puedes ordenar los libros A, B y C?

  Respuesta: $3! = 6\ formas(ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA).$
- **Fórmula:**

  $Pn = n!$

Permutaciones con repetición

- Hay elementos repetidos.
- **Fórmula:**

  $P(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!}$

- **Ejemplo:** ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de "MAMÁ"?

  Respuesta:

  $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ (porque hay dos M y dos A).

- **Ejemplo:**

  Antonio, Luis y Sonia corren una carrera. Si solo compiten ellos 3, ¿De cuantas formas posibles puede quedar el podio de 1º y 2º?

  Permutaciones: $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

  Si importa el orden.

  Por lo tanto, la permutación de los 3 elementos tomados de dos en dos seria:

  $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$

1º	2º	3º
Antonio	Luis	Sonia
Luis	Antonio	Sonia
Antonio	Sonia	Luis

Sonia	Antonio	Luis
Luis	Sonia	Antonio
Sonia	Luis	Antonio

Combinaciones

- **¿Qué son?**

  Son formas de seleccionar una parte de los elementos del conjunto, **sin importar el orden**.

  ## Combinaciones sin repetición

  - No se repiten elementos.
  - Ejemplo: ¿Cuántos grupos de 2 personas puedes formar con Ana, Beto y Carla?

    Respuesta: 3 (Ana-Beto, Ana-Carla, Beto-Carla).
  - **Fórmula:**

    $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

  ## Combinaciones con repetición

  - Se pueden repetir elementos.
  - Ejemplo: ¿Cuántas formas hay de elegir 2 bolas (con reemplazo) de una caja con bolas rojas, verdes y azules?

    Respuesta: 6 (roja-roja, roja-verde, roja-azul, verde-verde, verde-azul, azul-azul)16.
  - **Fórmula:**

    $C_{n,rep}^p = \binom{n+p-1}{p}$

  Ejemplo:

  ¿De cuantas maneras podemos mezclar una paleta de colores compuesta por rojo, amarillo, blanco, verde, y azul, si solo podemos mezclar los colores de 2 en 2?

Combinaciones: $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

No importa el orden.

Por lo tanto, la combinación de 5 elementos tomados de dos en dos seria:

$$C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{120}{12} = 10$$

Rojo - Azul	Amarillo – Blanco	Blanco – Verde	Verde - Azul
Rojo - Blanco	Amarillo – Verde	Blanco - Azul	
Rojo - Verde	Amarillo - Azul		
Rojo - Amarillo			

Variaciones

- **¿Qué son?**

  Son formas de ordenar solo una parte de los elementos del conjunto.

  Importa el orden y **no se usan todos los elementos necesariamente**.

Variaciones sin repetición

- No se repiten elementos.
- Ejemplo: ¿Cuántos números de 2 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3?

  Respuesta: 3×2=63×2=6 (12, 13, 21, 23, 31, 32).
- **Fórmula:**

  $V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Variaciones con repetición

- Se pueden repetir elementos.
- Ejemplo: ¿Cuántos números de 2 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 (permitiendo repetir)?

Respuesta: 3×3=93×3=9 (11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33).

- **Fórmula:**

  $V_{n,rep}^{p} = n^{p}$

Ejemplos:

Con los números 1,2,3,4,5,6,7, ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar?

Variaciones con repetición: $VR_k^n = n^k$

Comprobamos si importa el orden. En este caso sí importa el orden.

Comprobamos si se puede repetir. Si se pueden repetir.

Por lo tanto, la variación de 7 elementos tomados de tres en tres seria:

$$VR_3^7 = 7^3 = 343$$

En unas elecciones se presentan 4 partidos. ¿De cuantas maneras posibles puede quedar conformado gobierno y oposición?

Variaciones sin repetición: $V_k^n = \frac{n!}{k!}$

Comprobamos si importa el orden: En este caso si importa el orden.

Comprobamos si se puede repetir. No se puede repetir

$$V_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{24}{2} = 12$$

IDEAS CLAVE

- El principio de Dirichlet, también conocido como principio del palomar o principio de las cajas se trata de un caso particular del principio de adición e indica que, si tenemos n conjuntos conteniendo cada uno de ellos como mucho un elemento, entonces el total de elementos, m, cumple $m \leq n$; o lo que es lo mismo, hay menos elementos que cajas.

- Una permutación con repetición es aquella consistente en una reordenación de estos n elementos.

- Una combinación sin repetición consiste en tomar k elementos dentro de un conjunto de n elementos diferentes y contar todas las posibles elecciones, teniendo en cuenta que no se pueden repetir elementos, es decir, no se pueden elegir elementos ya escogidos previamente, y donde además el orden no importa.

- Una variación con repetición consiste en considerar todas las posibles elecciones, donde es posible elegir un mismo elemento varias veces y el orden importa.

Apuntes de Pedro Lopez Galán