01 - Conjuntos

1. Concepto de conjunto y elemento

- Un *conjunto* es una colección de objetos llamados *elementos*, que comparten alguna característica común. Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos.
- Los elementos se escriben entre llaves y separados por comas:

  Ejemplo:

  - Días de la semana: **{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}**
  - Números pares: **{2,4,6,8,...}**
- Notación: Si a es elemento de **A**, se escribe **a ∈ A**

Gráfico:

Representación de un conjunto finito:

```
A = {1, 2, 3, 4}
```

---

2. Tipos de conjuntos

- ***Conjunto finito***: Tiene un número limitado de elementos.

  Un conjunto finito se representa gráficamente listando todos sus elementos entre llaves, ya que su cantidad es limitada y puede ser enumerada de manera completa.

  ### Ejemplo de representación gráfica de un conjunto finito

  - **Por extensión (listado):**
    - Días de la semana:

      A = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

        - Lanzamiento de un dado:

          B = {1,2,3,4,5,6}

        - Primeras letras del abecedario

          C = {a,b,c}

    - **En diagramas de Venn:**

      El conjunto se representa como un óvalo o círculo, y dentro de él se colocan todos los elementos explícitos del conjunto.

      ```
      +-----------------+
      |  A             |
      | lunes          |
      | martes         |
      | miércoles      |
      | jueves         |
      | viernes        |
      | sábado         |
      | domingo        |
      +-----------------+
      ```

Observaciones importantes

- En un conjunto finito, cada elemento aparece una sola vez y el orden no importa.
- El cardinal (número de elementos) es un número natural: por ejemplo, |A| = 7 para los días de la semana1.
- Si el conjunto no tiene elementos, se llama conjunto vacío y se representa como **ø** ó **{}**

- ***Conjunto infinito***: Tiene infinitos elementos (por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales).

  Un conjunto infinito se representa gráficamente de manera similar a un conjunto finito, pero con una notación que indica que la colección de elementos no termina. Generalmente, esto se hace usando puntos suspensivos (...) o una expresión matemática que describe la regla de formación del conjunto.

Ejemplo gráfico y notación

- **Por extensión (listado):**

        - Números naturales pares:

          {2,4,6,8,10,12,...}

      Aquí, los puntos suspensivos indican que la secuencia continúa indefinidamente1.

    - **Por comprensión (regla):**
        - Números naturales pares:

          $\{2n : n \in N\}$

      Esto **se lee** como "**el conjunto de todos los números de la forma 2n, donde n es un número natural**".

    - **Visualización en diagramas de Venn:**

      En diagramas de Venn, los conjuntos infinitos se representan como cualquier otro conjunto (un óvalo o círculo), pero se entiende que su interior contiene infinitos elementos, normalmente indicados con puntos suspensivos o una notación simbólica.

Ejemplo visual sencillo:

```
A = {2, 4, 6, 8, ...}
+-----------------+
|   A         |
| 2, 4, 6, ...  |
+-----------------+
```

En resumen, la clave para representar un conjunto infinito es usar puntos suspensivos o una expresión matemática general, ya que no es posible listar todos sus elementos.

- ***Conjunto vacío***: No tiene elementos. Se denota $\emptyset$ o **{}**.

  Ejemplo:

    - Conjunto de las vocales: **{a,e,i,o,u}** (finito)
    - Conjunto de números naturales: **N={1,2,3,...}** (infinito)
    - Conjunto vacío: $\emptyset$

---

3. Representación de conjuntos

- Por extensión: Listando todos los elementos.
- Por comprensión: Indicando una propiedad que cumplen los elementos.

  Ejemplo:

  - **{x ∈ N: x es par} = {2,4,6,...}**

---

4. Cardinal de un conjunto

- El *cardinal* es el número de elementos de un conjunto.

  Notación: **| A |** o **#A**
- Si es finito: **| A | = n**
- Si es infinito: **| A | = ∞**

Ejemplo:

- Si **A = {1,2,3**}, entonces **| A | = 3**.

Relaciones entre conjuntos

1. Igualdad de conjuntos

- Dos conjuntos **A** y B son *iguales* (**A=B**) si tienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden ni la repetición.
- Formalmente:

  A = B ⟺ (x ∈ A ⇒ x ∈ B) y (**x ∈ B ⇒ x ∈ A**)

Ejemplo:

- **A = {a,b,c}, B = {b,c,a} ⇒ A = B**

---

2. Inclusión de conjuntos (Subconjuntos)

- **A** está *incluido* en **B (A ⊆ B)** si todo elemento de **A** es también elemento de **B**.
- **A** es *subconjunto* de **B** si $\forall$**x**(**x** ∈ **A**⇒**x** ∈ **B**).
- El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto: **ø ⊆ A**.
- Todo conjunto es subconjunto de sí mismo: **A ⊆ A**.

Ejemplo:

- **A = {1,2}, B = {1,2,3} ⇒ A ⊆ B**
- **B = {1,2,3}, A = {1,2} ⇒ B ⊈ A**

Gráfico:

Diagrama de Venn mostrando **A ⊆ B**:

```
+--------------------+
|      B      |
|  +---------+       |
|  |  A  |    |
|  +---------+       |
+--------------------+
```

---

3. Propiedades de la inclusión y la igualdad

Propiedades de la inclusión

Reflexividad

Todo conjunto es subconjunto de sí mismo:

A ⊆ A

> Esto significa que, si tienes un conjunto **A**, todos sus elementos están en **A** (lo cual es obvio). Por ejemplo, si **A = {1,2,3}**, entonces claramente todos los elementos de **A** están en **A**, así que **A** es subconjunto de sí mismo.

El conjunto vacío

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto:

ø ⊆ A

El conjunto vacío (ø) no tiene ningún elemento. Por definición, no existe ningún elemento en **ø** que no esté en **A**, así que se considera subconjunto de cualquier conjunto, sin importar cuál sea **A**.

Antisimetría

A = B si y solo si A ⊆ B y B ⊆ A

Esto significa que dos conjuntos son iguales si cada uno es subconjunto del otro.

- Si todos los elementos de **A** están en **B** y todos los de B están en **A**, entonces ambos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, por lo tanto, son iguales.

Ejemplo:

A = {a,b,c} y **B = {c,b,a}**

Todos los elementos de **A** están en **B** y viceversa, así que **A = B**.

Transitividad

Si A ⊆ B y B ⊆ C, entonces A ⊆ C

Esto significa que si todos los elementos de **A** están en **B**, y todos los de **B** están en **C**, entonces necesariamente todos los elementos de **A** también están en **C**.

Ejemplo:

- **A = {1}**
- **B = {1,2}**
- **C = {1,2,3}**

  Aquí, **A ⊆ B** y **B ⊆ C**, por lo tanto, **A ⊆ C**.

Resumen gráfico (Diagrama de Venn para transitividad):

```
+----------------------+
|        C             |
|  +----------+        |
|  |    B     |        |
|  |  +---+   |        |
|  |  | A |   |        |
|  |  +---+   |        |
```

```
|  +---------+   |
+---------------------+
```

Aquí, el círculo de **A** está dentro de **B**, y **B** está dentro de **C**, por lo que **A** está dentro de **C**.

Propiedades de la Igualdad

Las **propiedades de la igualdad** entre conjuntos permiten identificar cuándo dos conjuntos son exactamente el mismo, basándose en la relación de inclusión. Según la fuente principal1, estas propiedades son:

Propiedad fundamental de la igualdad de conjuntos

- **Dos conjuntos A y B son iguales (A = B) si y solo si cada uno es subconjunto del otro:**

  $A = B \iff (A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A)$

¿Qué significa esto?

- Si **todos los elementos de A están en B** y **todos los elementos de B están en A**, entonces los conjuntos tienen exactamente los mismos elementos y, por lo tanto, son iguales.
- El orden en que se escriben los elementos o si se repiten en la notación no afecta la igualdad: solo importa la presencia de los elementos.

Ejemplo práctico:

- **$A = \{a,b,c\}$**
- **$B = \{c,b,a\}$**

Ambos conjuntos tienen los mismos elementos, así que **A = B**.

Otra forma de verlo:

- Si existe algún elemento que está en **A** pero no en **B**, o en **B** pero no en **A**, entonces **$A \neq B$**.
- Si no hay ningún elemento que pertenezca a uno y no al otro, entonces son iguales.

Resumen visual

Propiedad	Explicación
A = B	Si y solo si **A ⊆ B** y **B ⊆ A**

4. Ejemplos prácticos

- **A = {1,2,10}, B = {1,2,3,6,10} ⇒ A ⊆ B**
- **A = {a,b,c}, B = {b,c,d}** ⇒ No hay relación de inclusión ni igualdad.

5. Cadenas de inclusión

- Ejemplo clásico en números:

  N ⊆ Z ⊆ Q ⊆ R ⊆ C

  (**Naturales ⊆ Enteros ⊆ Racionales ⊆ Reales ⊆ Complejos**)

Gráfico:

Diagrama de Venn para la cadena de inclusión:

```
+-------------------------------------------------+
|                C (Complejos)                 |
|  +-----------------------------------------+  |
|  |             R (Reales)             |  |
|  |  +-------------------------------+    |  |
|  |  |       Q (Racionales)       |    |  |
|  |  |  +-------------------+    |    |  |
|  |  |  | Z (Enteros)    |    |    |  |
|  |  |  |  +---------+    |    |    |  |
|  |  |  |  | N       |    |    |    |  |
|  |  |  |  +---------+    |    |    |  |
|  |  |  +-------------------+    |    |  |
|  |  +-------------------------------+    |  |
|  +-----------------------------------------+  |
+-------------------------------------------------+
```

Operaciones entre Conjuntos

Intersección de Conjuntos

La intersección es una operación fundamental que nos permite encontrar elementos comunes entre conjuntos. Se define formalmente como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

Definición: La intersección de dos conjuntos **A** y **B**, denotada como **A ∩ B**, es el conjunto:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

> Concepto Clave: Dos conjuntos son disjuntos cuando su intersección es el conjunto vacío (∅), es decir, no tienen elementos en común.

Ejemplos prácticos:

1. **Ejemplo básico:** Sean **A = {-1, 3, 5, 2, 6, 9}** y **B = {-1, 0, 4, 3, 7, 9, 10}**
   - Elementos comunes: -1, 3, y 9
   - Por tanto: **A ∩ B = {-1, 3, 9}**
2. **Conjuntos disjuntos:** Si **A = {a, b, c}** y **B = {d, e, f}**
   - No hay elementos comunes
   - Resultado: **A ∩ B = ∅**

Unión de Conjuntos

La unión combina todos los elementos de dos o más conjuntos, eliminando las repeticiones. Esta operación es inclusiva, ya que incluye elementos que pertenecen a cualquiera de los conjuntos1.

Definición: La unión de dos conjuntos **A** y **B**, denotada como **A ∪ B**, es:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

Ejemplos ilustrativos:

1. **Con elementos comunes: A = {a, b, c, e}** y **B = {c, e, f}**
   - Resultado: **A ∪ B = {a, b, c, e, f}**
   - **Nota importante:** Los elementos c y e no se repiten en el resultado

2. **Conjuntos disjuntos: A = {1, 3, 5}** y **B = {2, 4, 6}**
    - Resultado: **A** ∪ **B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**

Complementario de Conjuntos

El complementario permite identificar qué elementos de un conjunto no pertenecen a otro. Esta operación es especialmente útil para entender las diferencias entre conjuntos1.

Definición: El complementario de **A** respecto a **B**, denotado como **B \ A**, es:

B \ A = {x | x ∈ B ∧ x ∉ A}

> Notación Especial: Cuando trabajamos con un **conjunto universal X**, el complementario de **A** se denota como **A^c = X \ A**

Ejemplos detallados:

1. **Caso general: A = {a, b, c, f}** y **B = {b, c, e, f, g, j}**
    - Elementos de **B** que no están en **A**: e, g, j
    - Resultado: **B \ A = {e, g, j}**
2. **Conjuntos disjuntos: A = {a, b, c}** y **B = {d, e, f}**
    - Como no hay elementos comunes: **B \ A = {d, e, f} = B**
3. **Complementario de números pares:** Si **A = {2, 4, 6, 8, ...}** (números pares) sobre ℕ
    - Resultado: **A^c = {1, 3, 5, 7, 9, ...}** (números impares)

Propiedades Fundamentales de las Operaciones

Las operaciones entre conjuntos siguen propiedades algebraicas importantes que facilitan los cálculos y demostraciones:

Propiedades Distributivas:

- **Unión distributiva respecto a la intersección:**

  Si tienes un conjunto **A** y quieres unirlo con la intersección de **B** y **C**, es lo mismo que unir **A** con **B** y, por separado, unir **A** con **C**, y después tomar lo que ambos tienen en común.

  Ejemplo:

  - **A = {1}**
  - **B = {1, 2}**
  - **C = {1, 3}**

    Primero, la intersección de **B** y **C** es **{1}**.

    Unir A con ese resultado da **{1}**.

    Ahora, unir **A** con **B** es **{1, 2}** y unir **A** con **C** es **{1, 3}**.

    La intersección de esos dos conjuntos es **{1}**.

    El resultado es el mismo por ambos caminos.

- **Intersección distributiva respecto a la unión:**

  Si tienes un conjunto A y quieres intersectarlo con la unión de **B** y **C**, es lo mismo que intersectar **A** con **B** y, por separado, intersectar **A** con **C**, y luego unir esos dos resultados.

  Ejemplo:

  - **A = {1, 2}**
  - **B = {2, 3}**
  - **C = {1, 3}**

    La unión de **B** y **C** es **{1, 2, 3}**.

    Intersectar **A** con ese resultado da **{1, 2}**.

    Ahora, intersectar **A** con **B** es **{2}** y intersectar **A** con **C** es **{1}**.

    Unir esos dos resultados da **{1, 2}**.

    El resultado coincide.

1. **$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$**

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedades Conmutativas:

- **Unión conmutativa:**

  Unir **A** con **B** es lo mismo que unir **B** con **A.**

  Ejemplo:

  - **A = {1, 2}**
  - **B = {2, 3}**

    Unir **A** con **B** da **{1, 2, 3}**.

    Unir **B** con **A** también da {**1, 2, 3}**.

- **Intersección conmutativa:**

  Intersectar **A** con **B** es lo mismo que intersectar **B** con **A**.

  Ejemplo:

  - **A = {1, 2}**
  - **B = {2, 3}**

    Intersectar **A** con **B** da **{2}**.

    Intersectar **B** con A también da **{2}**.

3. $A \cup B = B \cup A$

4. $A \cap B = B \cap A$

Leyes de De Morgan:

- **Complemento de la unión:**

  Los elementos que no están ni en **A** ni en **B** son exactamente los que no están en **A** y tampoco están en **B**.

  Ejemplo:

  - **Universal: {1, 2, 3, 4}**
  - **A = {1, 2}**

- **B = {2, 3}**

    La unión de **A** y **B** es **{1, 2, 3}**.

    Los que no están en la unión son **{4}**.

    Los que no están en **A** son **{3, 4}**, los que no están en **B** son **{1, 4}**.

    Lo que está en ambos conjuntos (**fuera de A y fuera de B**) es **{4}**.

- **Complemento de la intersección:**

  Los elementos que no están en ambos conjuntos a la vez son los que están fuera de A o fuera de B (o fuera de ambos).

  Ejemplo:

  - **Universal: {1, 2, 3, 4}**
  - **A = {1, 2}**
  - **B = {2, 3}**

    La intersección de **A** y **B** es **{2}**.

    Los que no están en la intersección son **{1, 3, 4}**.

    Los que no están en **A** son **{3, 4}**, los que no están en **B** son **{1, 4}**.

    Si unes esos dos resultados, tienes **{1, 3, 4}**.

7. (**A ∪ B)^c = A^c ∩ B^c**
8. **(A ∩ B)^c = A^c ∪ B^c**

Conjunto de las Partes

Definición y Construcción

El conjunto de las partes de un conjunto A, denotado como P(A), es el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A, incluyendo el conjunto vacío y el propio A1.

Definición formal: P(A) = {B | B ⊆ A}

Método de Construcción Sistemática

Para construir **P(A)** de manera organizada, se recomienda clasificar los subconjuntos por su cardinal (número de elementos):

Ejemplo práctico: Sea **A = {1, 2, 3}**

- **Cardinal 0: ⌀**
- **Cardinal 1: {1}, {2}, {3}**
- **Cardinal 2: {1,2}, {1,3}, {2,3}**
- **Cardinal 3: {1,2,3}**

Por tanto: **P(A) = {⌀, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}**

> Teorema Fundamental: **Si |A| = n (A tiene n elementos), entonces |P(A)| = 2^n**

Aplicaciones Prácticas

El conjunto de las partes es fundamental en:

- Teoría de probabilidades (espacios muestrales)
- Lógica matemática (álgebras de Boole)
- Informática (representación de estados)

Relaciones entre Conjuntos

Producto Cartesiano

Antes de definir relaciones, necesitamos comprender el producto cartesiano, que proporciona la base para establecer correspondencias entre elementos de diferentes conjuntos1.

Definición: El producto cartesiano de **A** y **B**, denotado **A × B**, es:

A × B = {(a,b) | a ∈ A ∧ b ∈ B}

Ejemplos fundamentales:

1. **Caso finito: A = {1, 2, 3}** y **B = {c, d}**

   A × B = {(1,c), (1,d), (2,c), (2,d), (3,c), (3,d)}

2. **Caso infinito:** Si **A = ℝ** y **B = ℝ1**

   A × B = ℝ² (el plano real)

> Propiedad del Cardinal:**|A × B| = |A| × |B|**

Concepto de Relación

Una relación entre conjuntos **A** y **B** es esencialmente un subconjunto del producto cartesiano **A × B** que especifica qué elementos de **A** están relacionados con qué elementos de **B**.

Definición: Una relación **R** de **A** en **B** es un subconjunto **R ⊆ A × B**.

Si **(a,b) ∈ R**, decimos que "**a** está relacionado con **b**" y lo escribimos como **aRb**.

Relaciones de Equivalencia

Las relaciones de equivalencia son un tipo especial de relación que generaliza el concepto de igualdad. Una relación R en un conjunto A es de equivalencia si cumple tres propiedades fundamentales:

Propiedades:

1. **Reflexiva: ∀a ∈ A, aRa**
2. **Simétrica: ∀a,b ∈ A, aRb ⇒ bRa**
3. **Transitiva: ∀a,b,c ∈ A, (aRb ∧ bRc) ⇒ aRc**

Ejemplos importantes:

- Congruencia módulo n en los enteros
- Igualdad de conjuntos
- Semejanza de triángulos

Aplicaciones (Funciones)

Definición Fundamental

Una aplicación o función de **A** en **B** es una relación especial que asigna a cada elemento de **A** exactamente un elemento de **B**.

Definición: Una aplicación **f: A → B** es una relación donde:

- Para todo **a ∈ A**, existe un único **b ∈ B** tal que **f(a) = b**
- A se llama dominio, B se llama codominio

Tipos de Aplicaciones

Aplicaciones Inyectivas

Una función es inyectiva (uno a uno) si elementos diferentes del dominio se mapean a elementos diferentes del codominio.

Definición: f: A → B es inyectiva si:

$\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Equivalentemente: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Aplicaciones Sobreyectivas

Una función es sobreyectiva (sobre) si todo elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio.

Definición: f: A → B es sobreyectiva si:

∀b ∈ B, **∃a ∈ A** tal que **f(a) = b**

Aplicaciones Biyectivas

Una función es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva. Las funciones biyectivas establecen una correspondencia uno a uno entre los conjuntos.

Propiedades importantes:

- Solo las funciones biyectivas tienen función inversa

- Establecen que dos conjuntos tienen el mismo cardinal

Composición de Aplicaciones

La composición permite combinar funciones secuencialmente.

Definición: Si **f: A → B** y **g: B → C**, entonces la composición **g ∘ f: A → C** se define como:

(g ∘ f)(a) = g(f(a))

Propiedades:

1. **Asociativa: (h ∘ g) ∘ f = h ∘ (g ∘ f)**
2. **No conmutativa:** En general, **g ∘ f ≠ f ∘ g**

Aplicación Inversa

Una función **f: A → B** tiene inversa **f^{-1}: B → A** si y solo si f es biyectiva.

Propiedades:

- **$f^{-1}(f(a)) = a$ para todo $a \in A$**
- **$f(f^{-1}(b)) = b$ para todo $b \in B$**
- **$(f^{-1})^{-1} = f$**

Numerabilidad

La numerabilidad clasifica conjuntos infinitos según su "tamaño".

Definiciones:

- Un conjunto es **numerable** si existe una biyección con ℕ
- Un conjunto es **no numerable** si es infinito pero no numerable

Ejemplos importantes:

- **ℕ, ℤ, ℚ** son numerables

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ son no numerables

Teorema de Cantor: El conjunto de las partes de $\mathbb{N}$ no es numerable, demostrando que existen infinitos de diferentes "tamaños".

> Aplicación práctica: La numerabilidad es fundamental en teoría de la computación para entender qué problemas son computables y cuáles no.

Apuntes Pedro Lopez Galan