01 - Conjuntos

1.1. CONJUNTO

Colección de objetos que se encuentran en una misma categoría, en calidad de elementos de éste, como entes pertenecientes a dicho conjunto.

Ejemplos:

- Días de la semana: {**lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}**
- Posibles valores obtenidos al lanzar un dado de parchís: **{1, 2, 3, 4, 5, 6}**
- Las tres primeras letras del abecedario en minúsculas: **{*a, b, c*}**
- Números naturales pares: **{2, 4, 6, 8, 10, 12, ... }**
- Números primos menores que 20: {**2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}**

NOTAS:

- **Cada uno de los elementos** de un conjunto sólo **debe aparecer una única vez**.
- **El conjunto vacío**, formado por cero elementos, y que se denota como **ø**.
- **Cardinal de un conjunto:** Número de elementos que tiene y se denota por **! .**
    - Si el conjunto es **finito** y tiene **elementos** decimos que **| *A* | = *n* .**
    - Si, por el contrario, tiene **infinitos elementos**, se escribe **| *A* | = ∞ .**

1.1.1 Relaciones entre conjuntos

Dos conjuntos pueden compararse entre sí con el fin de establecer una posible relación de igualdad o inclusión entre éstos.

- **Igualdad entre conjuntos**

  Dos conjuntos A, B son iguales (A = B) si se cumple que todo elemento de A pertenece también a B y viceversa.

  $$\forall x, (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)$$

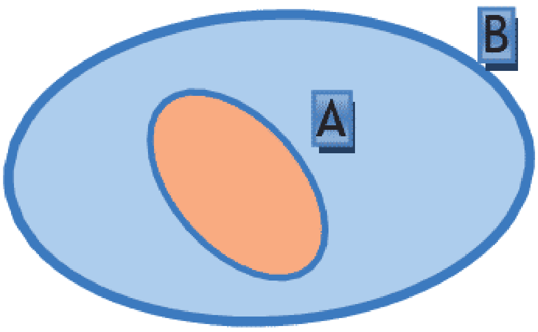
  "Para todo x, si x pertenece a A entonces x pertenece a B, y si x pertenece a B entonces x pertenece a A."

- **Posibles relaciones de inclusión**

  Se dice que *A* está incluido en *B* (y se denota por $A \subseteq B$ o bien $B \supseteq A$) si todo elemento de *A* verifica estar en *B.*

  $$\forall x, x \in A \to x \in B$$

  "Para todo x, si x pertenece a A entonces x pertenece a B"



Conjunto A está incluido en otro conjunto B.

NOTA: En caso de que $A \neq B$, se puede escribir $A \subset B$ o bien $B \supset A$.

Propiedades

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

1. **$A = B$ si y sólo si $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.**
2. **$A \subseteq B \subseteq C \to A \subseteq C$.**

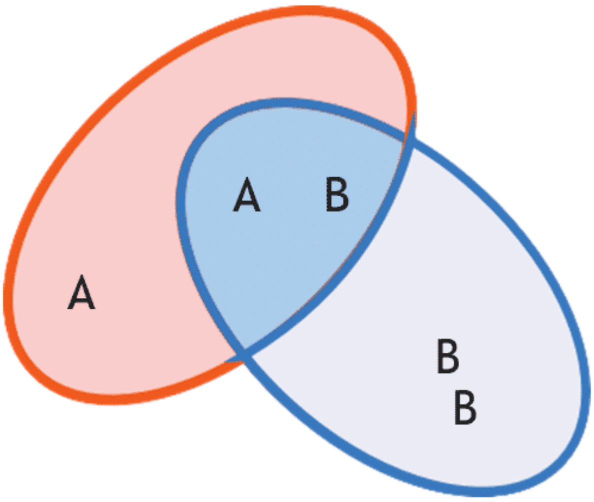
NOTA:

- El conjunto vacío siempre es un subconjunto de cualquier conjunto, $\forall A, \emptyset \subseteq A$.
- Asimismo, todo conjunto es subconjunto de sí mismo, $\forall A,\ A \subseteq A$.

1.1.2 Operaciones entre conjuntos

Operaciones más básicas entre conjuntos.

- **Intersección de dos conjuntos A ,B**



Intersección entre dos conjuntos.

Conjunto formado por todos los elementos comunes a ambos conjuntos y se denota por $A \cap B$, es decir, los elementos que pertenecen simultáneamente a A y B.

$\boldsymbol{A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}}$

"La intersección de A y B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a A y x pertenece a B"

Ejemplo:

Si tienes:

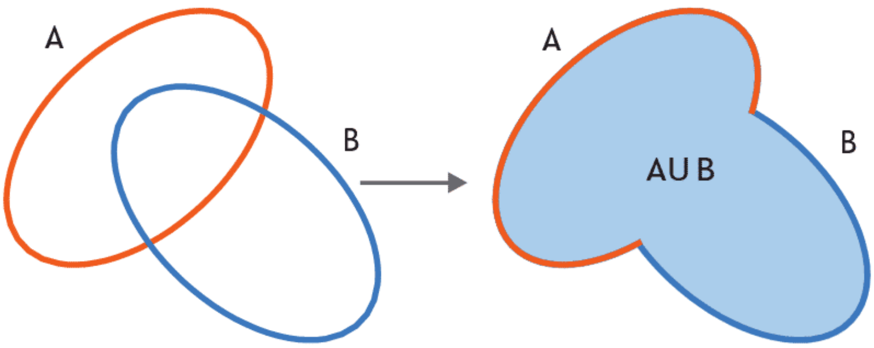
- $A=\{1,2,3\}$
- $B=\{2,3,4\}$

Entonces:

- $A \cap B=\{2,3\}$

Porque 2 y 3 son los únicos elementos que están en **ambos** conjuntos.

- **Unión entre dos conjuntos A, B**



Unión entre dos conjuntos.

Conjunto formado tanto por los elementos de A como por los elementos de B y se denota por A ∪ B, es decir, los elementos que pertenecen a A o bien a B.

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

"A unión B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a A o x pertenece a B"

Ejemplo

Si tienes:

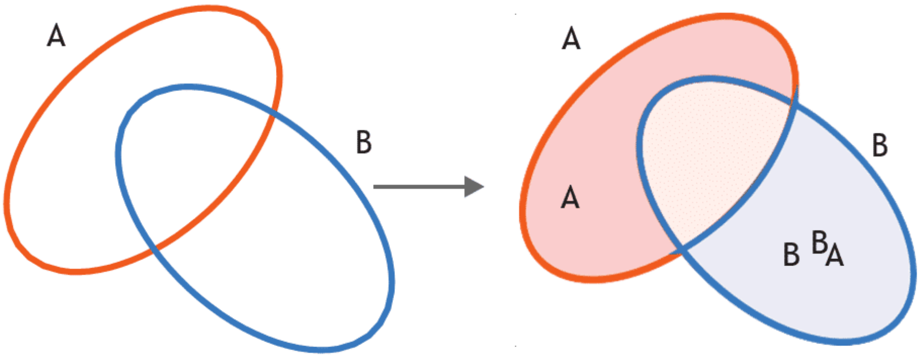
- A={1,2,3}A={1,2,3}
- B={3,4,5}B={3,4,5}

Entonces:

- A∪B={1,2,3,4,5}$A∪B$={1,2,3,4,5}

No importa si un elemento está en los dos conjuntos, en la unión solo aparece una vez.

- **El complementario de un conjunto A sobre otro conjunto B**



Complementario.

Conjunto formado por todos los elementos de B que no pertenecen a A y se denota por B \ A.

B \ A = {x / x ∈ B ∧ x ∉ A}

"La diferencia de B menos A es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a B y x no pertenece a A"

Ejemplo

Si tienes:

- B={1,2,3,4}B={1,2,3,4}
- A={2,4}A={2,4}

Entonces:

- B\A={1,3}$B \backslash A$={1,3}

Porque 1 y 3 están en B pero no en A.

NOTA: En el caso en que se trabaje con un conjunto **X** que se toma como el total (**Conjunto Universal**), es decir, que contiene todos los elementos posibles con los que se trabaja, podemos hablar del c**omplementario de *A*** (sin especificar sobre qué conjunto), entendiendo que se realiza sobre el **conjunto X (Universal).** En este caso, se denota ***Ac = X | A.***

Propiedades

Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Se cumplen las siguientes relaciones:

1. **(*A* ∪ *B*) ∪ *C* = *A* ∪ (*B* ∪ *C*).**

   "La unión de A y B, unida con C, es igual a A unido con la unión de B y C."

   - Si unes primero A y B, y luego el resultado lo unes con C, es lo mismo que si unes primero B y C, y luego el resultado lo unes con A.
   - **La unión de conjuntos es asociativa**: no importa cómo agrupes, el resultado será igual.

   Ejemplo

   Supón que tienes:

   - **A = {1, 2}**
   - **B = {2, 3}**
   - **C = {3, 4}**

   Ahora calculamos ambos lados:

   Lado izquierdo: (A ∪ B) ∪ C

1. **A ∪ B = {1, 2} ∪ {2, 3} = {1, 2, 3}**
2. **(A ∪ B) ∪ C = {1, 2, 3} ∪ {3, 4} = {1, 2, 3, 4}**

Lado derecho: A ∪ (B ∪ C)

1. **B ∪ C = {2, 3} ∪ {3, 4} = {2, 3, 4}**
2. **A ∪ (B ∪ C) = {1, 2} ∪ {2, 3, 4} = {1, 2, 3, 4}**

¡El resultado es el mismo!

---

2. ***(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C).***

   "La intersección de A y B, intersectada con C, es igual a A intersectado con la intersección de B y C."

   - Si primero intersectas A y B, y luego ese resultado lo intersectas con C, es lo mismo que si primero intersectas B y C, y luego ese resultado lo intersectas con A.
   - **La intersección de conjuntos es asociativa**: no importa cómo agrupes las intersecciones, el resultado será igual.

   Ejemplo

   Supón que tienes:

   - **A = {1, 2, 3}**
   - **B = {2, 3, 4}**
   - **C = {3, 4, 5}**

   Ahora calculamos ambos lados:

   Lado izquierdo: (A ∩ B) ∩ C

   1. **A ∩ B = {1, 2, 3} ∩ {2, 3, 4} = {2, 3}**
   2. **(A ∩ B) ∩ C = {2, 3} ∩ {3, 4, 5} = {3}**

   Lado derecho: A ∩ (B ∩ C)

   1. **B ∩ C = {2, 3, 4} ∩ {3, 4, 5} = {3, 4}**
   2. **A ∩ (B ∩ C) = {1, 2, 3} ∩ {3, 4} = {3}**

   ¡El resultado es el mismo!

3. ***A* ∪ *B* = *B* ∪ *A*.**

   "La unión de A y B es igual a la unión de B y A."

   - Si unes A con B, es lo mismo que unir B con A.
   - El orden en que unes los conjuntos no afecta el resultado.

   Ejemplo

   Supón que tienes:

   - **A = {1, 2}**
   - **B = {2, 3}**

   Ahora calculamos ambos lados:

   - **A ∪ B = {1, 2} ∪ {2, 3} = {1, 2, 3}**
   - **B ∪ A = {2, 3} ∪ {1, 2} = {1, 2, 3}**

   ¡El resultado es el mismo!

4. ***A* ∩ *B* = *B* ∩ *A*.**

   "La intersección de A y B es igual a la intersección de B y A."

   - El orden en que intersectas los conjuntos no cambia el resultado.
   - Si buscas los elementos que están tanto en A como en B, es lo mismo que buscar los que están tanto en B como en A.

   Ejemplo

   Supón que tienes:

   - **A = {1, 2, 3}**
   - **B = {2, 3, 4}**

Calculamos ambos lados:

- **A ∩ B = {1, 2, 3} ∩ {2, 3, 4} = {2, 3}**
- **B ∩ A = {2, 3, 4} ∩ {1, 2, 3} = {2, 3}**

¡El resultado es el mismo!

---

5. ***A* ∩ (*B* ∪ *C*) = (*A* ∩ *B*) ∪ (*A* ∩ *C*).**

   “La intersección de A con la unión de B y C es igual a la unión de la intersección de A y B con la intersección de A y C.”

   - Si tomas los elementos que están en A y además en B o en C, es lo mismo que unir los elementos que están en A y en B con los que están en A y en C.
   - Puedes "repartir" la intersección sobre cada conjunto dentro de la unión y luego unir los resultados

   Ejemplo

   Supón que:

   - A={1,2,3}
   - B={2,4}
   - C={3,4}

   Calculamos ambos lados:

   Lado izquierdo:

   B∪C={2,3,4}

   A∩(B∪C)={1,2,3}∩{2,3,4}={2,3}

   Lado derecho:

   A∩B={1,2,3}∩{2,4}={2}

   A∩C={1,2,3}∩{3,4}={3}

   (A∩B)∪(A∩C)={2}∪{3}={2,3}

   Ambos lados dan el mismo resultado.

---

6. ***A* ∪ (*B* ∩ *C*) = (*A* ∪ *B*) ∩ (*A* ∪ *C*).**

"La unión de A con la intersección de B y C es igual a la intersección de la unión de A y B con la unión de A y C"

- Si unes el conjunto A con la intersección de B y C , obtienes el mismo resultado que si intersectas la unión de A con B y la unión de A con C.

Ejemplo

Supón que:

- $A=\{1,2\}$
- $B=\{2,3\}$
- $C=\{2,4\}$

Calculamos ambos lados:

- **Lado izquierdo:**

  $B \cap C=\{2\}$

  $A \cup (B \cap C)=\{1,2\} \cup \{2\}=\{1,2\}$

- **Lado derecho:**

  $A \cup B=\{1,2,3\}$

  $A \cup C=\{1,2,4\}$

  $(A \cup B) \cap (A \cup C)=\{1,2,3\} \cap \{1,2,4\}=\{1,2\}$

Ambos lados dan el mismo resultado.

---

7. **$(A \cup B)c = Ac \cap Bc$.**

   "El complemento de la unión de A y B es igual a la intersección del complemento de A con el complemento de B."

   - Si tomas todos los elementos que **no** están en A o en B (es decir, el complemento de la unión), obtienes exactamente los elementos que **no están en A** y **no están en B** al mismo tiempo.
   - Una de las **leyes de De Morgan** para conjuntos.

Ejemplo

Supón que el conjunto universal es U={1,2,3,4}:

- A={1,2}
- B={2,3}

Calculamos ambos lados:

- A∪B={1,2,3}
- (A∪B)c=U\{1,2,3}={4}

Ahora los complementos:

- Ac=U\A={3,4}
- Bc=U\B={1,4}
- Ac∩Bc={3,4}∩{1,4}={4}

Ambos lados dan el mismo resultado.

---

8. ***(A* ∩ *B*)c = *Ac* ∪ *Bc*.**

   "El complemento de la intersección de A y B es igual a la unión del complemento de A con el complemento de B."

- Los elementos que **no están en ambos conjuntos a la vez** son los que **no están en A** o **no están en B** (o en ambos casos).
- El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.
- **Segunda ley de De Morgan.**

Ejemplo sencillo

Supón que el conjunto universal es U={1,2,3,4}:

- A={1,2}
- B={2,3}

Calculamos ambos lados:

Lado izquierdo:

- $A \cap B = \{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
- $(A \cap B)c = U \setminus \{2\} = \{1,3,4\}$

Lado derecho:

- $Ac = U \setminus A = \{3,4\}$
- $Bc = U \setminus B = \{1,4\}$
- $Ac \cup Bc = \{3,4\} \cup \{1,4\} = \{1,3,4\}$

Ambos lados dan el mismo resultado.

1.1.3 Partes de un conjunto

Podemos considerar conjuntos cuyos elementos sean a su vez conjuntos que contengan uno o varios elementos y así sucesivamente, creando una relación de jerarquía.

- Sea A un conjunto. El conjunto de las partes de *A*, denotado por $\mathscr{P}(A)$, consiste en el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de *A*; es decir, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de *A*:

  $\mathscr{P}(A) = \{B \,/\, B \subseteq A\}$

  "El conjunto potencia de A es el conjunto de todos los subconjuntos B tales que B es subconjunto de A."

  Teorema:

  Sea A un conjunto finito.

  Si $|A|$ = n, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2n$.

  "Si el número de elementos de A es n, entonces el número de elementos del conjunto potencia de A es dos elevado a n."

¿Por qué?

Cada elemento puede estar o no estar en un subconjunto.

Por cada elemento hay 2 opciones (incluirlo o no), y como hay n elementos, hay $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ opciones.

Ejemplo

Si $A = \{a, b, c\}$, entonces $n = 3$.

- El número de subconjuntos es $2^3 = 8$.
- Los subconjuntos son:

  $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

1.2. RELACIONES

- **Par ordenado:** Se refiere a una pareja de objetos en la que el orden de los elementos es importante. Se denota como (a,b), donde a es el primer elemento y b es el segundo elemento. Es fundamental notar que (a,b) y (b,a) son pares ordenados diferentes, salvo que a=b.
- **Producto cartesiano:** El **producto cartesiano** de dos conjuntos es una operación matemática que genera un nuevo conjunto formado por **todos los pares ordenados posibles** donde el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento pertenece al segundo conjunto.

  A × B = {(a, b) | a ∈ A ∧ b ∈ B}

  "El producto cartesiano de A por B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que a pertenece a A y b pertenece a B."

- **Concepto de relación:** Dados **dos conjuntos A y B,** podemos relacionar diferentes elementos de A con diferentes elementos de B mediante una regla específica.

Esto al final puede identificarse como un **conjunto concreto de pares de elementos (a, b), con a ∈ A y b ∈ B que cumplen la relación, es decir, que verifiquen que a esté relacionado con b.**

Ejemplo:

Si **A={1,2}** y **B={a,b}**, una posible relación es **R={(1,a),(2,b)}**, que vincula el 1 con la a y el 2 con la b.

1.2.1 Relaciones entre conjuntos

Relaciones de equivalencia:

Una **relación de equivalencia** es un tipo especial de relación entre los elementos de un conjunto que sirve para agrupar elementos que "se parecen" de alguna manera, generalizando la idea de igualdad.

Para que una relación sea de equivalencia, debe cumplir tres propiedades fundamentales.

- **Reflexiva**: $\forall a \in A,\ a \mathfrak{R} a$.

  "Para todo a perteneciente a A, a está relacionado con a mediante la relación R."

  Todo elemento está relacionado consigo mismo.

  Ejemplo: Para cualquier número, "es igual a sí mismo"

- **Simétrica:** $\forall a, b \in A,\ a \mathfrak{R} b \rightarrow b \mathfrak{R} a$.

  "Para todo a y b pertenecientes a A, si a está relacionado con b mediante la relación R, entonces b está relacionado con a mediante la relación R."

  Si un elemento está relacionado con otro, entonces el otro también está relacionado con el primero.

  Ejemplo: Si "a tiene el mismo cumpleaños que b", entonces "b tiene el mismo cumpleaños que a".

- **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A, a\mathfrak{R}b \land b\mathfrak{R}c \rightarrow a\mathfrak{R}c$

  "Para todo a, b y c pertenecientes a A, si a está relacionado con b y b está relacionado con c mediante la relación R, entonces a está relacionado con c mediante la relación R."

  Si un elemento está relacionado con un segundo, y ese segundo con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.

  Ejemplo: Si "a tiene el mismo cumpleaños que b" y "b tiene el mismo cumpleaños que c", entonces "a tiene el mismo cumpleaños que c".

Ejemplo:

La relación "tener el mismo color de ojos" entre personas es de equivalencia, porque cada persona tiene el mismo color que ella misma (reflexiva), si una persona tiene el mismo color que otra, la otra también lo tiene (simétrica), y si A tiene el mismo color que B y B el mismo que C, entonces A y C tienen el mismo color (transitiva)

Clase de equivalencia

La división está bien estructurada cuando se trata de relaciones de equivalencia, en el sentido que los grupos de elementos relacionados entre sí está bien determinado y separado de los demás. Dichos grupos reciben el nombre de **clase de equivalencia**, que se define como sigue.

Sea A un conjunto cualquiera, $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia sobre A y a $\in$ A. Se define la clase de equivalencia del elemento a $\in$ A asociada a la relación R como sigue:

$$[a]_{\mathfrak{R}} = \{b \in A \,/\, a\mathfrak{R}b\}$$

"La clase de equivalencia de a respecto de la relación R es el conjunto de todos los elementos b en A tales que a está relacionado con b por la relación R."

Teorema

Sea $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y a, b ∈ A. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. a$\mathfrak{R}$b. → *"a está relacionado con b mediante la relación R".*

2. [a]$\mathfrak{R}$ = [b]$\mathfrak{R}$. → *"La clase de equivalencia de a respecto a la relación R es igual a la clase de equivalencia de b respecto a la relación R."*

3. [a]$\mathfrak{R}$ ∩ [b]$\mathfrak{R}$ ≠ ∅. → *"La intersección de la clase de equivalencia de a con la clase de equivalencia de b respecto a la relación R no es el conjunto vacío."*

NOTA: **∀a ∈ A, [a]$\mathfrak{R}$ ≠ ∅**, ya que es evidente que por ejemplo **a ∈ [a]$\mathfrak{R}$**, puesto que **a$\mathfrak{R}$a**. El elemento que aparece entre los corchetes, en este caso a, suele llamarse el **representante de la clase.**

Sólo puede haber **dos posibilidades** cuando se toman las **clases equivalencias** de dos elementos cualesquiera:

- Ambos **elementos** estén **relacionados**, en cuyo caso es equivalente a que sus clases de equivalencia sean los mismos conjuntos.

- **Elementos sin relación,** lo cual implica que no sólo sus clases son diferentes como conjuntos, sino que como tal no tienen nada que ver, ya que son disjuntos, es decir, no tienen ningún elemento en común.

1.3 Aplicaciones

Sean A, B conjuntos y f una relación de A en B. Diremos que f es una aplicación o función si se cumple que **∀a ∈ A, ∃! b ∈ B / afb** , es decir, que para cada uno de los elementos de A existe un único elemento de b que está relacionado con A. En este caso, la aplicación suele denotarse por **f : A → B** y se escribe **f (a) = b cuando afb .**

El conjunto A recibe el nombre de dominio de f y se denota por **Dom(f) y el conjunto f (A)** definido por **f (A) = { f (a) / a ∈ A}** recibe el nombre de **codominio,** recorrido o imagen, denotado por **Im(f)**.

En resumen:

Una función es una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B. El dominio es A, la imagen es el conjunto de resultados que realmente salen, y el codominio es B (el conjunto de llegada)

- **Imagina que tienes dos cajas: la caja A y la caja B.**
  - **Una función (o aplicación) es como una regla que te dice:**
    - **Para cada elemento de la caja A, hay un solo elemento de la caja B que le corresponde.**

      Es decir, no pueden quedar elementos de A sin pareja ni puede haber un elemento de A que tenga dos o más parejas en B.
    - **Esto se escribe así:**

      $f:A\to B$

      $f(a)=b$

      (el elemento a de A se relaciona con el elemento b de B).

- **¿Qué es el dominio?**
  - **Dominio (Dom(f)):** Es la caja A, o sea, el conjunto de todos los elementos de A que tienen una imagen en B.
  - **En una función, el dominio es todo A.**

- **¿Qué es la imagen, recorrido o codominio?**
  - **Imagen o recorrido (Im(f)):** Es el conjunto de todos los elementos de B que están relacionados con algún elemento de A.
    - **Matemáticamente:**

      $Im(f)=\{f(a) \mid a\in A\}$
    - **Imagen es lo mismo que recorrido o rango**.
  - **Codominio:** Es la caja B, el conjunto de llegada de la función.

- **La imagen siempre es un subconjunto del codominio:**

  Im(f)⊆B

- **No siempre la imagen es igual al codominio:** Puede haber elementos en B que no estén relacionados con ningún elemento de A

1.3.1. Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

- **Inyectiva**
  - **Definición:** Es una función en la que **cada elemento del conjunto de llegada (codominio) corresponde como máximo a un solo elemento del conjunto de salida.**

    $f(a) = f(b)$; $a = b$

    ∀a, b ∈ A, f (a) = f (b) → a = b

    - **Ejemplo 1 con:** $f(x) = 4x + 1$

      Sustituimos para que se vea mas claro x por a y b:

      f(a)=4a+1

      f(b)=4b+1

      ¿Es inyectiva?

      Para comprobar si es inyectiva, debemos ver que si f(a)=f(b), entonces a=b

      1. **Igualamos las imágenes:**

         f(a)=f(b)

         4a+1=4b+1

      2. **Restamos 1 en ambos lados:**

         4a=4b

      3. **Dividimos entre 4:**

         a=b Vemos que es inyectiva

- **Ejemplo 2 con:** $f(x) = 3x^2 - 1$
  1. **Definimos la función para dos valores distintos**

     f(a)=3a2−1

     f(b)=3b2−1
  2. **Igualamos las imágenes**

     f(a)=f(b)

     3a2−1=3b2−1
  3. **Simplificamos**
     - Sumamos 1 a ambos lados:

       3a2=3b2
     - Dividimos entre 3:

       a2=b2
     - Tomamos raíz cuadrada:

       ∣a∣=∣b∣

  Esto significa que a=b **o** a=−b.

  No es inyectiva porque existen valores distintos (a y -a) que tienen la misma imagen.

- **Sobreyectivas o suprayectivas**
  - **Definición**: Es una función en la que **cada elemento del conjunto de llegada (B) tiene al menos un elemento del conjunto de partida (A) que lo "alcanza" mediante la función**.

    En otras palabras, **no hay ningún elemento en B que se quede sin ser imagen de algún elemento de A.**

    ∀b ∈ B ∃a ∈ A / f (a)= b
  - **Propiedad:**

Sea f : A → B una aplicación sobreyectiva, con A, B conjuntos finitos. Entonces |A| ≥ |B|.

Explicación

- **Aplicación sobreyectiva:** Cada elemento de B es imagen de al menos un elemento de A3.
- **Conjuntos finitos:** Ambos conjuntos tienen un número finito de elementos.
- **Implicación:** Como cada elemento de B debe "recibir" al menos un elemento de A, no puede haber más elementos en B que en A. Es decir, **A debe tener suficientes elementos para cubrir a todos los de B**.

- **Ejemplo**: $f(x) = x^2 - 1$ y teniendo en cuanta que su codominio (valores de salida posibles) son todos lo números reales. **B = ℝ**.

  $f(x) = x2 - 1$

  $y = x2 - 1$

  $x2 = y + 1$

  $x = \pm\sqrt{y+1}$

  $y + 1 \geq 0$

  $4 \geq -1$

  Rango: $[1, \infty]$ → **No es Sobreyectivas**

- **Biyectiva**
  - **Definición:** : Una **función biyectiva** es aquella que cumple dos condiciones a la vez: es **inyectiva** y **sobreyectiva**.
    - **Inyectiva:** Cada elemento del conjunto de llegada (B) tiene **como máximo** un elemento del conjunto de partida (A) que lo origina. Es decir, si dos elementos de A son enviados al mismo elemento de B, entonces deben ser el mismo elemento de A.

      $f(a) = f(b); a = b$

- **Sobreyectiva:** Cada elemento del conjunto de llegada (B) tiene **al menos** un elemento del conjunto de partida (A) que lo origina.

  Codominio = Rango

$\forall b \in B \exists ! a \in A / f(a) = b.$

"Para todo elemento b perteneciente al conjunto B, existe un único elemento a perteneciente al conjunto A tal que f(a) es igual a b."

Nótese que esta definición es muy similar a la de aplicación sobreyectiva, con la salvedad de que esta vez se exige la existencia de un único elemento de A que sea enviado a b ∈ B por la acción de f, lo cual corresponde a la noción de inyectividad. En esencia, lo que viene a representar la noción de biyección es que hay una correspondencia 1 a 1 entre los elementos de A y los elementos de B, es decir, a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B y viceversa.

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 2$

$a^3 - 2 = b^3 - 2$

$a^3 = b^3$

$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$

$a = b$

Es inyectiva

$y = x^3 - 2$

$x3 = y + 2$

$x = \sqrt[3]{a^3}$

Rango: R $(-\infty, \infty)$

Codominio: $(-\infty, \infty)$

Es Sobreyectiva

Por tanto es **Biyectiva**

1.3.2. Composición de aplicaciones

La **composición de aplicaciones** (o funciones) es una operación que consiste en aplicar una función después de otra, de manera que la salida de la primera función se convierte en la entrada de la segunda función

Sean A, B, C conjuntos cualesquiera, **$f : A \to B$ y $g : B \to C$**. Entonces puede considerarse la composición de g con **f, $g \circ f : A \to C$**, que viene dada por, dado $a \in$ **A, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \in C$.**

Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera, **$f : A \to B$ y $f : B \to C$**. Entonces:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
3. De las dos propiedades anteriores se deduce que si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

1.3.3 Aplicación inversa

- **La aplicación identidad**

  Es la función más sencilla posible: devuelve cada elemento a sí mismo. Es fundamental en matemáticas, especialmente en el estudio de funciones biyectivas, composición de funciones y la definición de la función inversa.

  La existencia de la aplicación inversa está garantizada para funciones biyectivas, y la composición de una función con su inversa es siempre la aplicación identidad.

  Teorema:

  Sean A, B dos conjuntos cualesquiera. Entonces $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si $\exists!\ g : B \to A$ tal que $g \circ f = f \circ g = IdA$.

  El teorema dice que **una función es biyectiva si y sólo si existe una única función inversa que, al componerse con la función original en ambos**

sentidos, da la función identidad en el conjunto correspondiente. Esto caracteriza la biyectividad y la existencia de la inversa de manera precisa.

- **Aplicación inversa**

  La (única) aplicación g encontrada en el resultado anterior se denomina aplicación inversa de f y se denota por **$g = f^{-1}$.**

1.3.4 Numerabilidad

La existencia de una biyección entre dos conjuntos implica que tienen el mismo cardinal, es decir, el mismo “tamaño” en cuanto a número de elementos. Esto es válido tanto para conjuntos finitos como infinitos. La numerabilidad es la propiedad de poder contar los elementos de un conjunto, lo que para conjuntos infinitos significa poder establecer una biyección con los números naturales.

Ahora bien, ¿qué ocurre con los conjuntos infinitos? ¿Son todos los conjuntos infinitos igual de “grandes”? Veremos más adelante que la respuesta es **negativa utilizando biyecciones.** Antes de ello, conviene establecer un conjunto infinito de referencia, que en este caso tomaremos como los números naturales, **$\mathbb{N}$.**

Sea A un conjunto infinito. Diremos que **A** es un conjunto infinito numerable si

$\exists\ f : \mathbb{N} \to A$ biyectiva.

La definición anterior viene a decir, con menos rigor, que un conjunto es numerable cuando **todos y cada uno de sus elementos se pueden indexar,** sin repetirse y sin dejarse ninguno de ellos por listar, mediante índices que varían a lo largo de todos los números naturales.

IDEAS CLAVE

- Los conceptos de conjunto y elemento (de un conjunto) no disponen de una definición formal desde el punto de vista matemático, si bien la intuición permite hacerse una idea de su significado como entes abstractos.
- Cada uno de los elementos de un conjunto sólo debe aparecer una única vez; es decir, no pueden repetirse elementos.
- El producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$, consta del conjunto formado por todos los pares ordenados que pueden formarse con elementos de A en primer lugar y elementos de B en segundo lugar
- Las relaciones de equivalencia determinan una serie de elementos que están relacionadas entre sí y los dividen en grupos según la naturaleza de la relación en cuestión.
- Sea A un conjunto cualquiera. La aplicación identidad, $IdA : A \to A$, es aquella que viene dada por $IdA(a) = a \ \forall a \in A$.

Apuntes de Pedro Lopez Galán