№ 3.187

Штефан Михаил Борисович, М2
09.04.20

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$$

Убедимся, что A – самосопряж.

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2-2i \\ 2+2i & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A^T}=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\text{ – самосопр.}$$

Чтобы найти D найдем СЗ A

$$|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)-(2+2i)(2-2i)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=5 \end{cases} \Rightarrow D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем СВ

$$\lambda_1=-1: \quad (A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 4 & 2+2i \\ 2-2i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 4 & 2+2i \\ 2-2i & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} -2-2i & 2+2i \\ -2 & 2 \\ \hline -\frac{2+2i}{4} & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} -2-2i & 0 \\ -2 & 0 \\ \hline -\frac{2+2i}{4} & -\frac{2+2i}{4} \\ 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow b_1=\begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot -\frac{2+2i}{4}$$

$$\lambda_2=5$$

$$\left(\begin{array}{cc} -2 & 2+2i \\ 2-2i & -4 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} -2-2i & 2+2i \\ 4 & -4 \\ \hline \frac{2+2i}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} -2-2i & 0 \\ 4 & 0 \\ \hline \frac{2+2i}{2} & \frac{2+2i}{2} \\ 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow b_2=\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{2+2i}{2}$$

Нормируем b_1 и b_2

$$\|b_1\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-1-i}{2}\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right) + 1} = \sqrt{2}$$

$$\|b_2\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}}} = \sqrt{(1+i)(1-i)+1} = \sqrt{3}$$

Т.О.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Лист 2

$$U \cdot D = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+i)\cdot\sqrt{2}}{4} & \frac{5+5i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$U \cdot D \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1+i)\sqrt{2}}{4} & \frac{5+5i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(i-1) & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}(1-i) & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix} = A$$

Лист 3

$12x_1^2+3x_2^2+12x_1x_2-\sqrt{5}x_1-28\sqrt{5}x_2+15=0$ РГР, вар. 21

$$A=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

3)

$$|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}12-\lambda & 6\\ 6 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (12-\lambda)(3-\lambda)-36=0 \Rightarrow \lambda^2-15\lambda=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=15\end{cases}$$

Найдем СВ

$\lambda_1=0$:

$$\left(\begin{array}{cc}12 & 6\\ 6 & 3\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \sim \left(\begin{array}{cc}-6 & 6\\ -3 & 3\\ \hline -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc}-6 & 0\\ -3 & 0\\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{array}\right) \quad \cancel{b_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}} \quad \cancel{\|b_1\|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$$

$$b_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \quad \|b_1\|=\sqrt{5}$$

$\lambda_2=15$:

$$\left(\begin{array}{cc}-3 & 6\\ 6 & -12\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\cdot 2} \sim \left(\begin{array}{cc}-6 & 6\\ 12 & -12\\ \hline 2 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc}-6 & 0\\ 12 & 0\\ \hline 2 & 2\\ 0 & 1\end{array}\right) \quad b_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} \quad \|b_2\|=\sqrt{5}$$

Т.О. матрица перехода $P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$$Б'=\left\{e_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right\}$$

$$A'_{Б'}=P^{-1}\cdot A_Б\cdot P$$

Найдем P^{-1}

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4=-5$$

$$P^{-1} = -\frac{5}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

$$P^{-1}A = \sqrt{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 15 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \cancel{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 15 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{x = \frac{1}{\sqrt{10}}}\, x$$

??? не понял, как дальше?

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'$$