



WYDZIAŁ  
ELEKTROTECHNIKI  
I INFORMATYKI  
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ



Katedra  
Informatyki i Automatyki  
Politechniki Rzeszowskiej

# Metody FEM w robotyce

Sprawozdanie z laboratorium

Wykonujący: Jaromir Stawiarski

Rzeszów, 2021

## Python (implementacja FEM):

### Definicja parametrów sterujących:

Na początku należy zdefiniować parametry sterujące takie jak stała (c) oraz wymuszenie (f). Dla ułatwienia przyjmujemy te parametry jako zera.

```
#Parametry sterujące  
c = 0  
f = lambda x:0
```

### Generowanie automatyczne geometrii:

W następnym kroku musimy wygenerować geometrię dla podanej przez użytkownika ilości węzłów (n), wartości warunku początkowego (x\_a) oraz wartości warunku końcowego (x\_b). Po wykonaniu obliczeń przez procesor program będzie zwracał węzły oraz elementy. Do zautomatyzowanego (wielokrotnego) wykorzystywania kodu utworzymy funkcję, w której to użytkowników będzie decydował wartościach wymienionych wyżej parametrów.

### Kod funkcji generujTabliceGeometrii:

```
import numpy as np  
def generujTabliceGeometrii(x_0, x_p, n):  
    temp = (x_p - x_0) / (n - 1)  
    matrix = np.array([1, 0 * temp + x_0])  
  
    for i in range(1, n, 1):  
        matrix = np.block([  
            [matrix],  
            [i + 1, i * temp + x_0],  
        ])  
  
    matrix2 = np.array([1, 1, 2])  
    for i in range(1, n - 1, 1):  
        matrix2 = np.block([  
            [matrix2],  
            [i + 1, i + 1, i + 2],  
        ])  
  
    return matrix, matrix2
```

Do zaimplementowania kodu potrzebujemy biblioteki **numpy**, która odpowiada za obliczenia na macierzach. Podana funkcja zwraca dwie macierze. Szczególnie ważna jest wbudowana funkcja **block()**, za której pomocą rozszerzane są tablice o kolejne węzły oraz elementy.

### Przykładowe wywołanie funkcji:

```
from funkcje import generujTabliceGeometrii as GenTab

x_a = 1
x_b = 2
n = 5

wez, el = GenTab(x_a, x_b, n)
print('Tablica węzłów:\n',wez)
print('Tablica elementów:\n',el)
```

Do lepszej widoczności kodu funkcje będą znajdować się w oddzielnym pliku o nazwie **funkcje.py**, które będzie można importować poleceniem import, a także nadawać im krótsze aliasy. Po wywołaniu funkcji otrzymamy następujące wartości.

Tablica węzłów:

```
[[1.  1.  ]
 [2.  1.25]
 [3.  1.5  ]
 [4.  1.75]
 [5.  2.  ]]
```

Tablica elementów:

```
[[1 1 2]
 [2 2 3]
 [3 3 4]
 [4 4 5]]
```

W tablicy węzłów pierwsza kolumna oznacza numer węzła, a druga jego wartość. Natomiast w tablicy elementów pierwsza kolumna to numer elementu, a kolejne dwie to numery połączeń węzłów (np. pierwszy element jest pomiędzy węzłem 1, a 2).

## Rysowanie geometrii:

Do lepszej interpretacji wyników będzie potrzebne nam graficzne przedstawienie wygenerowania węzłów i elementów, aby tego dokonać należy utworzyć nową funkcję (**rysuj\_geometrie**). Do rysowania wykresów musimy zaimportować nową bibliotekę o nazwie **matplotlib**, a dokładnie jej część o nazwie **pyplot**.

### Kod funkcji rysuj\_geometrie:

```
import matplotlib.pyplot as plt

def rysuj_geometrie(wez, el, WB):
    fh = plt.figure()

    plt.plot(wez[:,1], np.zeros( (np.shape(wez)[0], 1) ), '-b|' )

    nodeNo = np.shape(wez)[0]

    for ii in np.arange(0,nodeNo):

        ind = wez[ii,0]
        x = wez[ii,1]

        plt.text(x, 0.01, str( int(ind) ), c="b")
        plt.text(x, -0.01, str(x))

    elemNo = np.shape(el)[0]
    for ii in np.arange(0,elemNo):

        wp = el[ii,1]
        wk = el[ii,2]

        x = (wez[wp-1,1] + wez[wk-1,1] ) / 2

        plt.text(x, 0.01, str(ii+1), c="r")

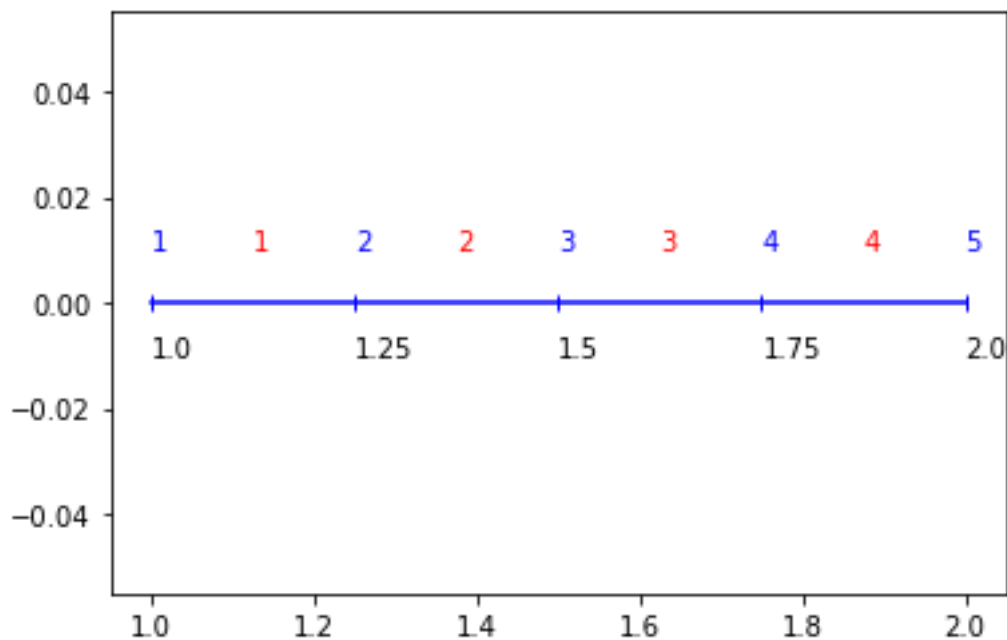
    plt.show()

    return fh
```

## Wywołanie funkcji:

```
from funkcje import rysuj_geometrie as rGeo  
  
WB = [{"ind": 1, "typ": 'D', "wartosc": 1},  
      {"ind": n, "typ": 'D', "wartosc": 2}]  
  
rGeo(wez, el, WB)
```

Jako parametry funkcji komputer przyjmuje wartości policzone wcześniej przez funkcję **generujTabliceGeometrii** (w kodzie GenTab). Dodatkowo przyjmuje listę słowników (WB), w której zdefiniowane są indeksy, typ oraz wartości. Litera D oznacza to, że jako warunki przyjmujemy kryterium Dirichleta. Rezultatem wywołania funkcji jest wykres przedstawiony na rysunku nr 1.



Rys. 1 Graficzna reprezentacja generowania geometrii

Z rysunku możemy zobaczyć, że węzły rozpoczynają się od 1, a kończą na 2, a liczba elementów wynosi w tym wypadku 4.

## Alokacja pamięci na zmienne globalne:

Gdy mamy już zdefiniowane podstawowe funkcje to należy przejść do alokacji pamięci. Pamięć będzie alokowana w postaci dwóch macierzy wypełnionych zerami. W tym wypadku również należy utworzyć funkcję (**alokacja\_pamieci\_na\_zmienne\_globalne**), która będzie korzystała z biblioteki **numpy**. Do utworzenia macierzy wypełnionych zerami należy skorzystać z funkcji **zeros()**, a następnie podać jej rozmiary. Alokacja pamięci będzie potrzebna w przypadku, gdy będą generowane rozwiązania (dane potrzebne do ich generowania). Jako parametr funkcja będzie przyjmowała liczbę węzłów (n).

### Kod funkcji alokacja\_pamieci\_na\_zmienne\_globalne:

```
import numpy as np

def alokacja_pamieci_na_zmienne_globalne(n):

    A = np.zeros((n, n))

    b = np.zeros((n, 1))

    return A, b
```

### Wywołanie funkcji alokacja\_pamieci\_na\_zmienne\_globalne:

```
from funkcje import alokacja_pamieci_na_zmienne_globalne as Alok

A,b = Alok(n)
```

### Definiowanie funkcji bazowych:

W następnym kroku należy zdefiniować funkcje bazowe i ich pochodne, które następnie będą scałkowane. W implementacji należy zdefiniować funkcje zarówno rosnącą jak i malejącą. Dla przykładu zdefiniowano wielomian zerowego stopnia oraz pierwszego, dla wyższych stopni wielomianu nastąpi wywołanie wyjątku. Jako parametr funkcje przyjmują stopień wielomianu, a następnie definiowany jest x.

### Kod funkcji funkcje\_bazowe:

```
def funkcje_bazowe(n):

    if n==0:

        f = lambda x: x*0 + 1

        df = lambda x: x*0

    elif n==1:

        f = (lambda x: -1/2*x+1/2, lambda x: 1/2*x+1/2)

        df = (lambda x: -1/2+x*0, lambda x: 1/2+x*0)

    else:

        raise Exception("Nieobsługiwany wielomian")

    return f,df
```

### Przykładowe wywołanie funkcji:

```
SW = 1 #stopien wielomianu

phi,dphi = FBaz(SW)

xx = np.linspace(-1,1,101)

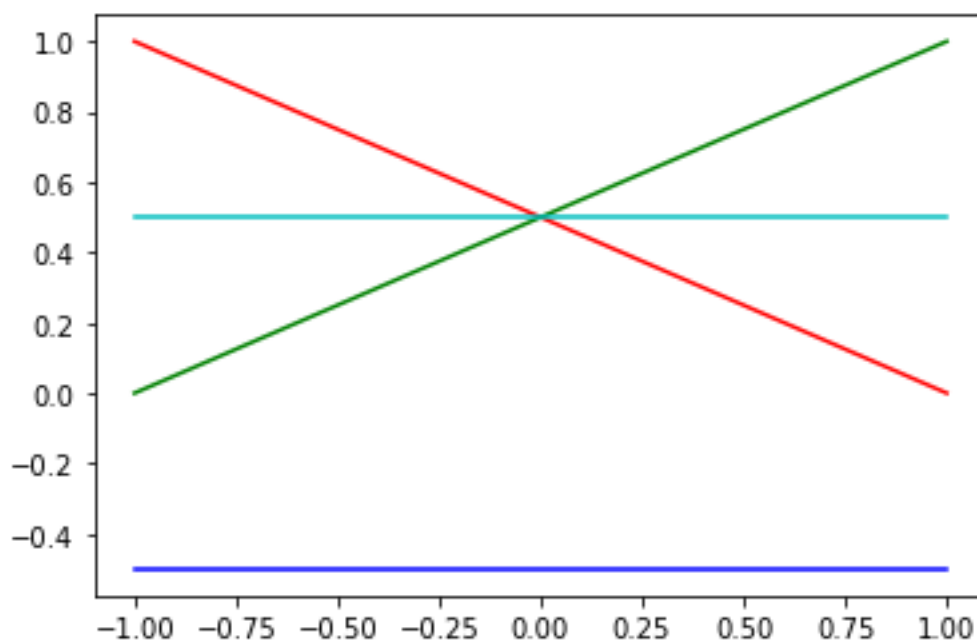
plt.plot(xx,phi[0](xx),'r')

plt.plot(xx,phi[1](xx),'g')

plt.plot(xx,dphi[0](xx),'b')

plt.plot(xx,dphi[1](xx),'c')
```

Po wywołaniu funkcji oraz przedstawienie ich na jednym wykresie otrzymujemy wykres taki jak na rysunku nr 2. Na wykresie kolorem czerwonym i zielonym przedstawiono wielomian 1. stopnia (czerwony malejący, zielony rosnący), a kolorami niebieskim i cyjanowym ich pochodne.



Rys. 2 Wywołanie funkcji bazowych

### Agregacja macierzy:

W kolejnym kroku należy unormować element tak, aby granice całkowania były takie same niezależnie od elementu  $\langle -1, 1 \rangle$ . W celu przekształcenia przedziału do przedziału unormowanego należy zastosować jacobian. Dla uproszczenia złożoności kodu należy utworzyć kolejną funkcję, która będzie obliczała wartości pod całką (nie liczyła jej).

### Kod funkcji elementy\_macierzy:

```
def elementy_macierzy(dphi1,dphi2,c,phi1,phi2):
    Aij = lambda x: -dphi1(x)*dphi2(x)+ c *phi1(x)*phi2(x)
    return Aij
```

Mając już zdefiniowaną funkcję (**elementy\_macierzy**) należy dodać nową bibliotekę o nazwie **scipy.integrate**, aby obliczyć całki. Na początku w kodzie należy zdefiniować indeks elementu równania (EIR), indeks elementu globalnego (EIG) oraz indeksy węzłów początkowego (EW1) i końcowego (EW2). Następnie należy zdefiniować tablicę dla globalnych indeksów węzłów (IGW) oraz wyznaczyć wartości przedziałów ( $x_a$  i  $x_b$ ). W końcowych krokach należy obliczyć jacobian (J) oraz dokonać alokacji pamięci dla macierzy elementów (M1), a następnie wykonać operację kwadratury Gaussa (funkcja quad).

```

import scipy.integrate as spint

from funkcje import elementy_macierzy as ElMat

liczbaElementow = np.shape(el)[0]

for ee in np.arange(0, liczbaElementow ):

    EIR = ee
    EIG = el[ee,0]
    EW1 = el[ee,1]
    EW2 = el[ee,2]
    IGW = np.array([EW1,EW2])

    x_a = wez[EW1-1,1]
    x_b = wez[EW2-1,1]
    J = (x_b-x_a)/2

    M1 = np.zeros([SW+1,SW+1])

    n = 0
    m = 0
    M1[n,m]=J*spint.quad(ElMat(dphi[n],dphi[m],c,phi[n],phi[m]),-1,1)[0]
    n = 0
    m = 1
    M1[n,m]=J*spint.quad(ElMat(dphi[n],dphi[m],c,phi[n],phi[m]),-1,1)[0]
    n = 1
    m = 0
    M1[n,m]=J*spint.quad(ElMat(dphi[n],dphi[m],c,phi[n],phi[m]),-1,1)[0]
    n = 1
    m = 1
    M1[n,m]=J*spint.quad(ElMat(dphi[n],dphi[m],c,phi[n],phi[m]),-1,1)[0]

    A[np.ix_(IGW-1, IGW-1 ) ] = \
        A[np.ix_(IGW-1, IGW-1 ) ] + M1

print(A)

```



Po uruchomieniu skryptu otrzymamy następującą macierz:

```
[[-0.0625  0.0625  0.      0.      0.    ]
 [ 0.0625 -0.125   0.0625  0.      0.    ]
 [ 0.      0.0625 -0.125   0.0625  0.    ]
 [ 0.      0.      0.0625 -0.125   0.0625]
 [ 0.      0.      0.      0.0625 -0.0625]]
```

### Warunki brzegowe:

Po zakończeniu liczenia macierzy należy uwzględnić typ warunków brzegowych (Dirichleta lub Neumanna). Do zniwelowania wpływu innych równań można zastosować trik w postaci przemnożenia przez bardzo dużą liczbę – wzmacniacz (wzm) przez to ułatwia to rozwiązanie układu równań.

### Warunek Dirichleta:

```
if WB[0]['typ'] == 'D':
    indw = WB[0]['ind']
    ww b = WB[0]['wartosc']

    iwp = indw - 1
    wzm = 10**14

    b[iwp] = A[iwp,iwp]*wzm*ww b
    A[iwp, iwp] = A[iwp,iwp]*wzm

if WB[1]['typ'] == 'D':
    indw = WB[1]['ind']
    ww b = WB[1]['wartosc']

    iwp = indw - 1
    wzm = 10**14

    b[iwp] = A[iwp,iwp]*wzm*ww b
    A[iwp, iwp] = A[iwp,iwp]*wzm
```

## Rozwiązanie układu równań:

Po otrzymaniu macierzy A i b zostało tylko etap rozwiązania układu równań i przedstawienia rozwiązania na wykresie. Do narysowania wykresu znowu należy utworzyć nową funkcję o nazwie **rysuj\_rozwiazanie**. W funkcji wykorzystamy poprzednią funkcję rysuj\_geometrie, żeby uwzględniła zapisane wcześniej elementy oraz węzły.

### Kod funkcji rysuj\_rozwiazanie:

```
def rysuj_rozwiazanie(wez, el, WB, u):  
  
    from funkcje import rysuj_geometrie  
  
    rysuj_geometrie(wez, el, WB)  
  
    x = wez[:,1]  
  
    plt.plot(x, u, 'm*')
```

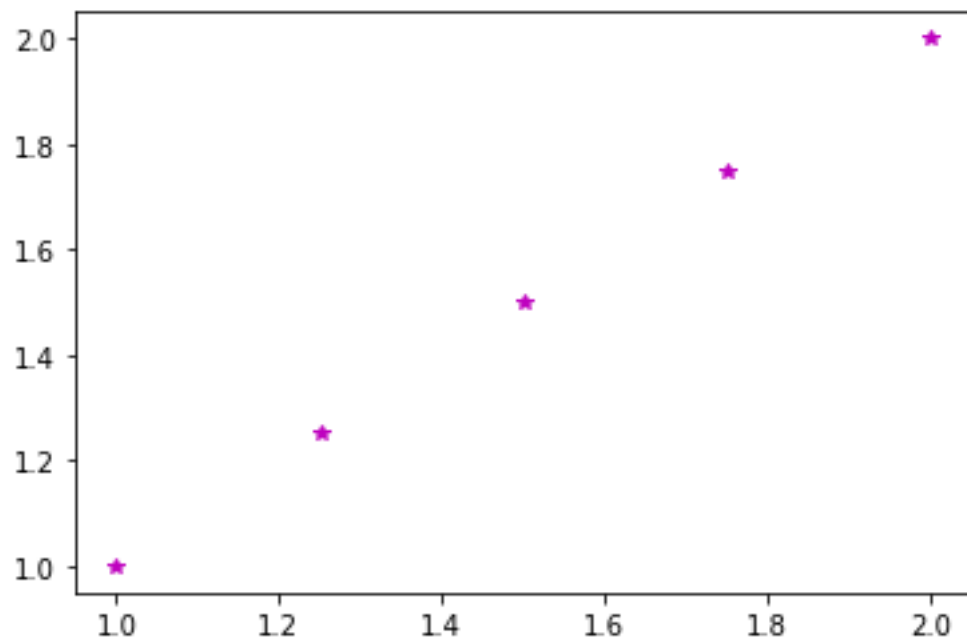
### Kod rozwiązania układu równań oraz przedstawienia rozwiązania:

```
from funkcje import rysuj_rozwiazanie as Result  
u = np.linalg.solve(A,b)  
  
print(u)  
Result(wez, el, WB, u)
```

Do rozwiązania układu równań użyto funkcji wbudowanej w bibliotekę numpy o nazwie `linalg.solve()`, który jako parametry przyjmuje dwie macierze A i b.

Rozwiązaniem naszego układu równań są współrzędne węzłów:

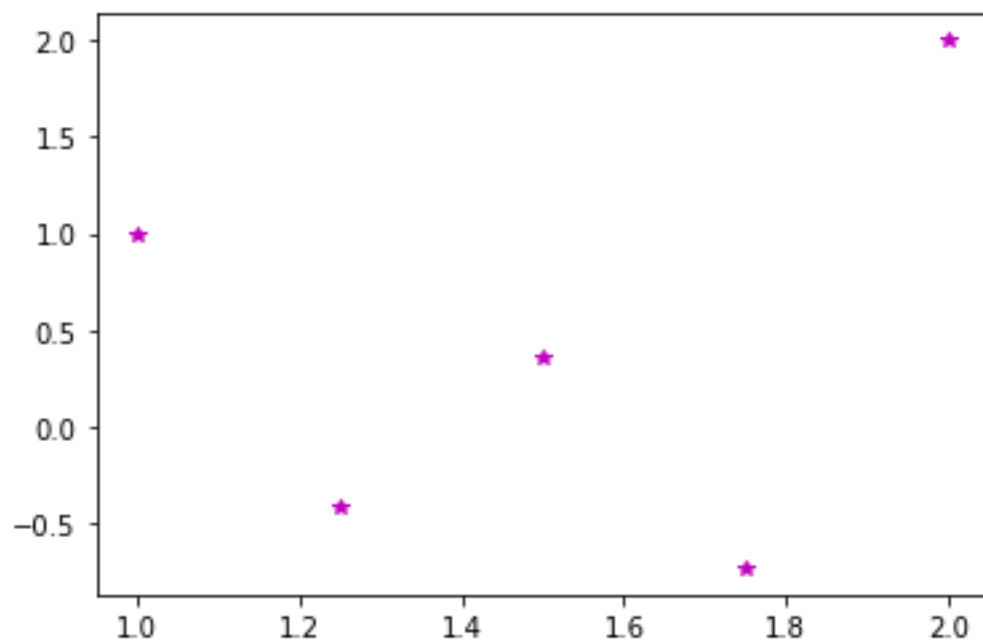
```
[[1.  ]  
 [1.25]  
 [1.5 ]  
 [1.75]  
 [2.  ]]
```



Rys.3 Rozwiązanie dla  $c = 0$

Jeżeli zmienimy stałą  $c$  to nasz wykres zmieni się z funkcji liniowej na funkcję nieliniową. Wartości rozwiązania są następujące.

```
[[ 1.          ]
 [-0.42245788]
 [ 0.35921231]
 [-0.73326869]
 [ 2.          ]]
```



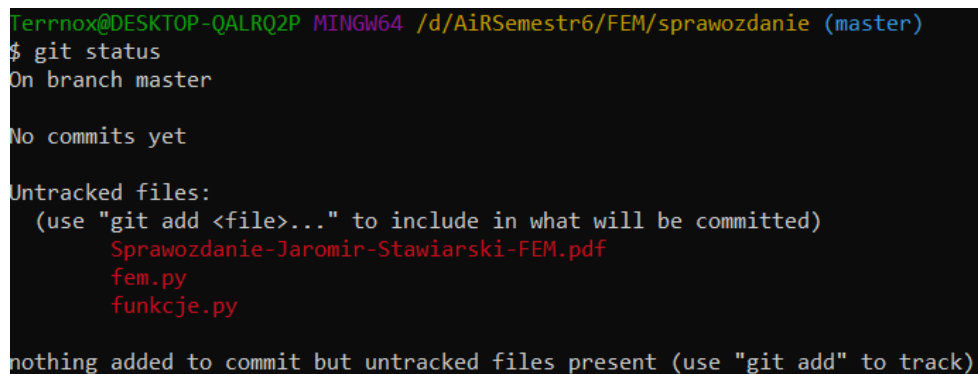
Rys.4 Rozwiązanie dla  $c = 10$

## Git i Github:

Podczas laboratoriów korzystaliśmy z programu git do przekazywania plików prowadzącemu, aby mógł sprawdzić postępy prac podczas laboratoriów.

### Użyte komendy gita:

- `git config --global user.name Terrnox`
- `git config --global user.email stawiarskijaromir@gmail.com`
- `mkdir sprawozdanie` (utworzenie katalogu sprawozdanie)
- `cd sprawozdanie` (przejsięcie do katalogu sprawozdanie)
- `git init` (zainicjowanie gita)
- `git status` (sprawdzenie statusu plików)



```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git status
On branch master

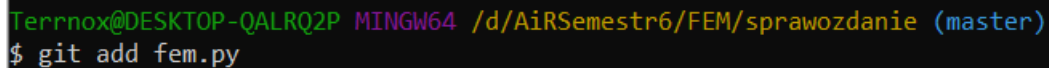
No commits yet

Untracked files:
  (use "git add <file>..." to include in what will be committed)
        Sprawozdanie-Jaromir-Stawiarski-FEM.pdf
        fem.py
        funkcje.py

nothing added to commit but untracked files present (use "git add" to track)
```

*Rys. 5 Rezultat polecenia git status*

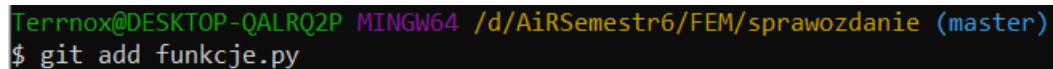
- `git add fem.py` (dodanie pliku fem.py)



```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git add fem.py
```

*Rys. 6 Rezultat polecenia git add fem.py*

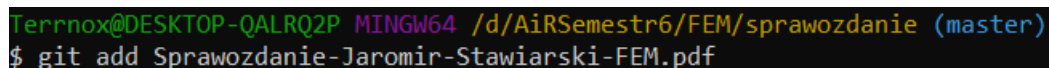
- `git add funkcje.py` (dodanie pliku funkcje.py)



```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git add funkcje.py
```

*Rys. 7 Rezultat polecenia git add funkcje.py*

- `git add Sprawozdanie-Jaromir-Stawiarski-FEM.pdf` (dodanie pliku pdf)



```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git add Sprawozdanie-Jaromir-Stawiarski-FEM.pdf
```

*Rys. 8 Rezultat polecenia git add Sprawozdanie-Jaromir-Stawiarski-FEM-pdf*

- git status

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git status
On branch master

No commits yet

Changes to be committed:
  (use "git rm --cached <file>..." to unstage)
    new file:   Sprawozdanie-Jaromir-Stawiarski-FEM.pdf
    new file:   fem.py
    new file:   funkcje.py
```

*Rys. 9 Rezultat polecenia git status po dodaniu plików*

- git commit

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git commit
[master (root-commit) ec50360] Commit do sprawozdania
3 files changed, 201 insertions(+)
create mode 100644 Sprawozdanie-Jaromir-Stawiarski-FEM.pdf
create mode 100644 fem.py
create mode 100644 funkcje.py
```

*Rys. 10 Rezultat polecenia git commit*

- git log

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git log
commit ec5036059ac798ed4d41d477efbb25f8c1e01bcd (HEAD -> master)
Author: Terrnox <stawiarskijaromir@gmail.com>
Date:   Sun May 30 20:51:34 2021 +0200

    Commit do sprawozdania
```

*Rys. 11 Rezultat polecenia git log*

- git checkout

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git checkout ec50360
Note: switching to 'ec50360'.

You are in 'detached HEAD' state. You can look around, make experimental
changes and commit them, and you can discard any commits you make in this
state without impacting any branches by switching back to a branch.

If you want to create a new branch to retain commits you create, you may
do so (now or later) by using -c with the switch command. Example:

    git switch -c <new-branch-name>

Or undo this operation with:

    git switch -

Turn off this advice by setting config variable advice.detachedHead to false

HEAD is now at ec50360 Commit do sprawozdania
```

*Rys. 12 Rezultat polecenia git checkout*

- git checkout master

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie ((ec50360...))
$ git checkout master
Switched to branch 'master'
```

*Rys. 13 Rezultat polecenia git checkout master*

- git remote add origin (dodanie ścieżki do githuba)

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git remote add origin https://github.com/Terrnox/Sprawozdanie.git
```

*Rys. 14 Rezultat polecenia git remote add origin*

- git branch -M main (wskazanie gałęzi, do której będą dodawane pliki)

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (master)
$ git branch -M main
```

*Rys. 15 Rezultat polecenia git branch -M main*

- git push -u origin main (dodanie plików do Githuba)

```
Terrnox@DESKTOP-QALRQ2P MINGW64 /d/AiRSemestr6/FEM/sprawozdanie (main)
$ git push -u origin main
Enumerating objects: 5, done.
Counting objects: 100% (5/5), done.
Delta compression using up to 12 threads
Compressing objects: 100% (5/5), done.
Writing objects: 100% (5/5), 261.72 KiB | 29.08 MiB/s, done.
Total 5 (delta 0), reused 0 (delta 0), pack-reused 0
To https://github.com/Terrnox/Sprawozdanie.git
 * [new branch]      main -> main
Branch 'main' set up to track remote branch 'main' from 'origin'.
```

*Rys. 16 Rezultat polecenia git push -u origin main*

Zastosowanie powyższych komend umożliwiło dodanie wybranych plików do repozytorium Sprawozdanie, które znajduje się pod linkiem <https://github.com/Terrnox/Sprawozdanie>.