ДОПОЛНЕНИЕ к п. 8.5
Поиск начального (опорного) плана при решении задачи линейного программирования симплекс-методом

Симплексный метод – один из общих методов решения задачи линейного программирования при любом положительном $\boldsymbol{n-m}$, является методом, в котором используется идея последовательного улучшения плана.

В методе последовательного улучшения плана надо разрешить следующие вопросы:

– как найти первоначальный (опорный) план;

– как проверить, не является ли он оптимальным;

– если нет, то, как найти улучшенный план.

Далее для улучшенного плана надо повторить то же, что и для первоначального.

Рассмотрим вопрос **о нахождении первоначального (опорного) плана**.

Пусть система линейных ограничений ЗЛП задана в виде

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,; \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8.5.*.1)$$

При этом все $x_j \geq 0$.

Выберем $\boldsymbol{m}$ величин x_i, например, x_1, x_2,…x_m, и попытаемся разрешить систему $\boldsymbol{m}$ уравнений (8.5.*.1) относительно этих величин.

Такая возможность выразить каждое из неизвестных x_1, x_2 ,…, x_m через остальные x_{m+1}, x_{m+2},…,x_n существует, если определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

Если это условие выполнено, то избранные величины x_1, x_2, …, x_m линейно независимы.

Совокупность таких $\boldsymbol{m}$ линейно независимых величин называют базисом, каждую из величин, входящих в базис, – базисной, а каждую из остальных $\boldsymbol{n-m}$ величин – небазисной (свободной).

Решение системы линейных ограничений относительно базисных величин с целью получения начального (опорного) плана может быть осуществлено **способом полного исключения**. Для использования этого способа нужно расположить уравнения заданной системы линейных уравнений в таком порядке, чтобы в уравнении за порядковым номером $\boldsymbol{i}$ коэффициент при $\boldsymbol{x_i}$ не был равен нулю, что всегда оказывается возможным для линейно независимых величин.

Первый шаг способа полного исключения состоит в приведении коэффициента при $\boldsymbol{x_1}$ в первом уравнении к единице и исключении $\boldsymbol{x_1}$ из других уравнений. После первого шага система (8.5.*.1) приобретает вид

$$\left.\begin{array}{c}
x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots \\
\ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}; \\
\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right) x_2 + \left(a_{23} - \dfrac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\right) x_3 + \ldots \\
\ldots + \left(a_{2n} - \dfrac{a_{1n}a_{21}}{a_{11}}\right) x_n = b_2 - \dfrac{b_1 a_{21}}{a_{11}}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(a_{m2} - \dfrac{a_{12}a_{m1}}{a_{11}}\right) x_2 + \left(a_{m3} - \dfrac{a_{13}a_{m1}}{a_{11}}\right) x_3 + \ldots \\
\ldots + \left(a_{mn} - \dfrac{a_{1n}a_{m1}}{a_{11}}\right) x_n = b_m - \dfrac{b_1 a_{m1}}{a_{11}}.
\end{array}\right\} \qquad (8.5.*.2)$$

Во втором шаге приводится к единице коэффициент при $\boldsymbol{x_2}$ во втором уравнении (делением на $(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}})$) и исключается $\boldsymbol{x_2}$ из остальных уравнений. Проделав это $\boldsymbol{m}$ раз последовательными шагами для x_1, x_2, …, x_m, получим систему линейных ограничений, преобразованных к виду

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 + \qquad\qquad \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \alpha_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1; \\
\quad x_2 + \qquad\quad \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \alpha_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2; \\
\qquad x_3 + \qquad \alpha_{3,m+1}x_{m+1} + \alpha_{3,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{3,n}x_n = \beta_3; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \alpha_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m.
\end{array}\right\} \qquad (8.5.*.3)$$

Указанные преобразования могут быть произведены над коэффициентами системы уравнений, записанными в виде матрицы, как это показано на следующем примере.

Пример. Систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 13;} \\ &\mathbf{5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 4;} \\ &\mathbf{2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad\quad + 5x_5 = 19.} \end{aligned}\right\}$$

Разрешить относительно $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_3}$.

Определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{10},$$

т.е. $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_3}$ линейно независимы и система может быть разрешена относительно этих величин.

Меняем второе и третье уравнения местами, чтобы коэффициент при $\boldsymbol{x_3}$ в третьем уравнении не был равен нулю. Исходная матрица коэффициентов (расширенная матрица) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{13} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{19} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Осуществляя первый шаг, делим первую строку на **3**, от второй и третьей строк отнимаем первою строку, умноженную на $\mathbf{\frac{2}{3}}$ и $\mathbf{\frac{5}{3}}$ соответственно, что дает:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{-\frac{2}{3}} & \mathbf{-1} & \mathbf{\frac{13}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{7}{3}} & \mathbf{-\frac{4}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} & \mathbf{7} & \mathbf{\frac{31}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-\frac{11}{3}} & \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{13}{3}} & \mathbf{7} & \mathbf{-\frac{53}{3}} \end{bmatrix}.$$

После второго шага получим:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{6}{7}} & \mathbf{-\frac{6}{7}} & \mathbf{-2} & \mathbf{\frac{20}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-\frac{4}{7}} & \mathbf{\frac{4}{7}} & \mathbf{3} & \mathbf{\frac{31}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{10}{7}} & \mathbf{-\frac{45}{7}} & \mathbf{18} & \mathbf{-\frac{10}{7}} \end{bmatrix}$$

и, наконец, после третьего шага:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{8{,}8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4{,}2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-4{,}5} & \mathbf{-12{,}6} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в нашем примере:

$$a_{14} = 3; \quad a_{15} = 8{,}8; \quad \beta_1 = 2;$$

$$a_{24} = -2; \quad a_{25} = -4{,}2; \quad \beta_2 = 5;$$

$$a_{34} = -4{,}5; \quad a_{15} = -12{,}6; \quad \beta_3 = 1.$$

Возвращаясь к общей системе (8.5.*.3), заметим, что в таком преобразованном виде система позволяет непосредственно найти один из планов, удовлетворяющий всем ограничениям, который и может быть принят за первоначальный (опорный). Именно, если величины, не входящие в базис, положить равными нулю, то базисные величины окажутся равными соответствующим значениям β_i. Итак, мы получим в качестве первоначального плана:

$$x_1 = \beta_1;\ x_2 = \beta_2;\ \ldots;\ x_m = \beta_m;\ x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0. \qquad (8.5.*.4)$$

Так как $x_i \geq 0$, то из (8.5.*.4) следует, что ***в качестве базисных** надо выбирать такие линейно независимые величины, при которых β_i были бы **неотрицательны***. Точнее говоря, в невырожденном случае все β_i должны быть положительны, а в вырожденном случае некоторые из β_i положительны, а остальные равны нулю.

В полученном первоначальном плане линейная форма $Q(X)$ приобретает значение:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i. \qquad (8.5.*.5)$$

Все дальнейшие рассуждения будем вести для невырожденного случая, когда все базисные величины положительны. Для невырожденного случая плану (8.5.*.4) соответствует одна из вершин области допустимых планов.

Получаемый при этом алгоритм симплексного метода практически применяется и для вырожденного случая.

Некоторую особенность составляет лишь возможность так называемого зацикливания, когда к оптимальному плану не удается прийти ни за какое конечное число шагов. Однако зацикливание встречается на практике чрезвычайно редко, мы здесь на нём не останавливаемся.

Далее решаем задачу линейного программирования симплекс-методом как указано в конспекте лекций (проверяем полученный план на оптимальность, и, если он не оптимален, то осуществляем переход к новому плану с другим набором базисных переменных и т.д.).