1.【和式】

【推导结论】

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2.【下降幂、上升幂】

【基本性质、定理】

- $x^{\underline{n}} = (x-1)^{\underline{n-1}}x = \frac{(x)!}{(x-n)!} = \prod_{i=x-n+1}^{x} i \ (x^{\underline{0}} = 1)$
- $x^{\overline{n}} = (x+1)^{\overline{n-1}}x = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!} = \prod_{i=x}^{x+n-1} i \ (x^{\overline{0}} = 1)$

【推导结论】

- $x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$
- $x^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$
- $x^{\underline{n}} = A_x^n$
- $x^{\overline{n}} = A_{x+n-1}^n$

3.【三角函数】

【基本性质、定理】

(1).【函数基本关系】

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin\alpha\csc\alpha = 1$
- $\cos\alpha\sec\alpha = 1$
- $\tan\alpha\cot\alpha = 1$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$
- $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

(2).【秀导公式】

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
- $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$
- $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$
- $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$
- $\sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \sin\alpha$
- $\tan(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \cot\alpha$
- $\cot(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \tan\alpha$

(3).【和角公式】

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(4).【积化和差】

（同 cos 异 sin，sin sin 负负）

- $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

(5).【和差化积】

- $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

(6).【倍角公式】

- $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(7).【半角公式】

- $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
- $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

(8).【万能公式】

- $\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(9).【正弦定理、余弦定理】

- $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 为 ΔABC 外接圆半径）
- $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
- $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(10).【常见反三角函数】

- $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$

(11).【辅助角公式】

- $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha + \arctan\frac{b}{a})\ (a>0)$

4.【单位根】

【基本性质、定理】

- $\omega_n^k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + \sin(\frac{2\pi k}{n})i$
- $\omega_n^k = g^{\frac{k(P-1)}{n}} \bmod P\ (P = k2^t+1, P \in \{Prime\})$

【推导结论】

- $\omega_n^k = (\omega_n^1)^k$
- $\omega_n^j\omega_n^k = \omega_n^{j+k}$
- $\omega_{2n}^{2k} = \omega_n^k$
- $\omega_n^{(k+n/2)} = -\omega_n^k\ (n$ 为偶数 $)$
- $\sum_{i=1}^{n-1}\omega_n^i = 0$

一：【基本数论、数学知识】

1.【斐波那契数列（Fibonacci）】

【基本性质、定理】

- $fib_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ fib_{n-1} + fib_{n-2} & n > 1 \end{cases}$ 【模板】

【推导结论】

- $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$
- $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_i f_{i+1}$
- $f_{n+m} = f_{n-1} f_{m-1} + f_n f_m$
- $(f_n)^2 = (-1)^{(n-1)} + f_{n-1} f_{n+1}$
- $f_{2n-1} = (f_n)^2 - (f_{n-2})^2$
- $f_n = \frac{f_{n+2} + f_{n-2}}{3}$
- $\frac{f_i}{f_{i-1}} \approx \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$
- $f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ 【证明】

2.【最大公约数（GCD）和最小公倍数（LCM）】

【基本性质、定理】

- $\gcd(a,b) = \gcd(b, a-b)\ (a > b)$
- $\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b)$
- $\gcd(a,b)\operatorname{lcm}(a,b) = ab$

【推导结论】

- $k \mid \gcd(a,b) \iff k \mid a$ 且 $k \mid b$
- $\gcd(k, ab) = 1 \iff \gcd(k,a) = 1$ 且 $\gcd(k,b) = 1$
- $(a+b) \mid ab \Longrightarrow \gcd(a,b) \neq 1$ 【例题】
- 在 $Fibonacc$ 数列中求相邻两项的 gcd 时，**辗转相减**次数等于**辗转相除**次数。
- $\gcd(fib_n, fib_m) = fib_{\gcd(n,m)}$【证明】

3.【裴蜀（Bézout）定理】

【基本性质、定理】

- 设 a,b 是不全为零的整数，则存在整数 x,y，使得 $ax+by=\gcd(a,b)$
- $\gcd(a,b)|d \iff \exists x,y\in\mathbb{Z},ax+by=d$

【推导结论】

- 设不定方程 $ax+by=\gcd(a,b)$ 的一组特解为 $\begin{cases}x=x_0\\y=y_0\end{cases}$，则 $ax+by=c\ (\gcd(a,b)|c)$ 的通解为 $\begin{cases}x=\frac{c}{\gcd(a,b)}x_0+k\frac{b}{\gcd(a,b)}\\y=\frac{c}{\gcd(a,b)}y_0-k\frac{a}{\gcd(a,b)}\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$。【模板】
- $\forall a,b,z\in\mathbb{N}^*,\gcd(a,b)=1,\exists x,y\in\mathbb{N},ax+by=ab-a-b+z$【例题】

4.【欧拉函数】

【基本性质、定理】

- $\varphi(x)=x\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{p_i})$，其中 p_i 为 x 的质因子，n 为 x 的质因子个数
- $\gcd(a,b)=1\implies\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$（欧拉函数是积性函数）

【推导结论】

- $p>2\implies[\varphi(p)\mod 2=0]$
- $p\in\{Prime\}\implies\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$
- $\sum_{i=1}^{n}i[gcd(i,n)=1]=\frac{n\varphi(n)+[n=1]}{2}$【例题】
- $f(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,k)=1]=\frac{n}{k}\varphi(k)+f(n\mod k)$

5.【同余运算】

【基本性质、定理】

- $\begin{cases}a\equiv b(\mod m)\\c\equiv d(\mod m)\end{cases}\implies a+c\equiv b+d(\mod m)$
- $\begin{cases}a\equiv b(\mod m)\\c\equiv d(\mod m)\end{cases}\implies a-c\equiv b-d(\mod m)$
- $a\equiv b(\mod m)\implies ak\equiv bk(\mod m)$
- $ka\equiv kb(\mod m),\gcd(k,m)=1\implies a\equiv b(\mod m)$

6.【费马小定理及其扩展】

【基本性质、定理】

- $P\in\{Prime\},P\nmid a\implies a^{P-1}=1(\mod P)$

【推导结论】

- 对于任意多项式 $F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$（$a_i$ 对一个质数 P 取模），若满足 $a_0\equiv 1(\mod P)$，则 $\forall n\leqslant P,F^P(x)\equiv 1(\mod x^n)$。【例题】

7.【欧拉定理及其扩展】

【基本性质、定理】

- $\gcd(a,m)=1 \Longrightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$
- $\gcd(a,m)=1 \Longrightarrow a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(m)}(\bmod m)$
- $b>\varphi(m) \Longrightarrow a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(m)+\varphi(m)}(\bmod m)$ 【例题】

【推导结论】

- $\exists x \in N^*, a^x=1(\bmod m) \iff \gcd(a,m)=1$ 【证明】【例题】

8.【孙子定理/中国剩余定理（CRT）及其扩展】

【基本性质、定理】

- 若 $m_1, m_2 \dots m_k$ 两两互素，则同余方程组 $\begin{cases} x \equiv a_1(\bmod m_1) \\ x \equiv a_2(\bmod m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_k(\bmod m_k) \end{cases}$ 有唯一解为：$x=\sum_{i=1}^{k} a_i M_i M_i^{-1}$, 其中 $M_i=\prod_{j \neq i} m_j$。【模板】

9.【佩尔（Pell）方程】

【基本性质、定理】

- 形如 $x^2-Dy^2=1$ ($D \in \mathbb{N}^*$且为非平方数) 的方程被称为第一类佩尔方程。设它的一组最小正整数解为 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$, 则其第 n 个解满足：$x_n+\sqrt{D}y_n=(x_0+\sqrt{D}y_0)^{n+1}$, 递推式为 $\begin{cases} x_n=x_0x_{n-1}+Dy_0y_{n-1} \\ y_n=x_0y_{n-1}+y_0x_{n-1} \end{cases}$。【例题】
- 形如 $x^2-Dy^2=-1$ ($D \in \mathbb{N}^*$且为非平方数) 的方程被称为第二类佩尔方程。设它的一组最小正整数解为 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$, 则其第 n 个解满足：$x_n+\sqrt{D}y_n=(x_0+\sqrt{D}y_0)^{2n+1}$。递推式略。

10.【勾股方程/勾股数组】

【基本性质、定理】

- 方程 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数通解为 $\begin{cases} x=k(u^2-v^2) \\ y=2kuv \\ z=k(u^2+v^2) \end{cases}$ $(u,v \in \{Prime\}, k \in \mathbb{N}^*)$, 且均满足 $\gcd(x,y,z)=k$。

二：【组合数学】

1.【排列与组合数】

【基本性质、定理】

- $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$【排列】
- $C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$【组合】
- $C_n^m=C_n^{n-m}$【对称公式】
- $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$【加法公式】
- $C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$【吸收公式】
- $C_n^m=(-1)^mC_{m-n-1}^m$【上指标反转】
- $\sum_{i=0}^m C_{n+i}^i=C_{n+m+1}^m$【平移求和】
- $\sum_{i=0}^k C_n^iC_m^{k-i}=C_{n+m}^k$【范德蒙德卷积】
- $C_n^kC_k^m=C_n^mC_{n-m}^{k-m}$

【推导结论】

- $ij=C_{i+j}^2-C_i^2-C_j^2$
- $\sum_{i=0}^n C_{n-i}^i=fib_{n+1}$
- $\sum_{i=0}^n C_i^m=C_{n+1}^{m+1}$（平移求和）
- $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2=C_{2n}^n$（范德蒙德卷积）
- $\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i}C_n^iC_i^m=[m=n]$（可用其证明二项式反演）
- $\sum_{i=0}^n (-1)^{i-m}C_n^iC_i^m=[m=n]$（可用其证明二项式反演）

2.【卢卡斯定理】

【基本性质、定理】

- $C_n^m=C_{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}^{\lfloor\frac{m}{p}\rfloor}C_{n \bmod p}^{m \bmod p}(p\in\{Prime\})$【模板】

3.【库默尔定理】

【基本性质、定理】

- $\forall m,n\in\{\mathbb{Z}\},P\in\{Prime\},C_{m+n}^m$含 P 的幂次等于 $m+n$ 在 P 进制下的进位次数。【例题】

4.【牛顿二项式定理】

【基本性质、定理】

- $(x+y)^n=\sum_{i=0}^n C_n^ix^{n-i}y^i$

【推导结论】

- $\sum_{i=0}^n C_n^i=2^n$
- $\sum_{i=0}^n iC_n^i=n2^{n-1}$
- $\sum_{i=0}^n i^2C_n^i=n(n+1)2^{n-1}$

5.【广义牛顿二项式定理】

【基本性质、定理】

- $C_r^n=\begin{cases}0 & n<0,r\in\mathbb{R}\\ 1 & n=0,r\in\mathbb{R}\\ \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} & n>0,r\in\mathbb{R}\end{cases}$
- $(1+x)^{-n}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{-n}^i x^i=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i C_{n+i-1}^i x^i$
- $(x+y)^{\alpha}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{\alpha}^i x^{\alpha-i}y^i\ (x,y,\alpha\in\mathbb{R}\text{ 且 }|\frac{x}{y}|<1)$ 【证明】

6.【卡特兰数（Catalan）】

【基本性质、定理】

TAT

- $cat_n=\begin{cases}1 & n=0\\ \sum_{i=0}^{n-1}cat_i cat_{n-i-1} & n>0\end{cases}$ 【模板1】【模板2】

【推导结论】

- $cat_n=C_{2n}^n-C_{2n}^{n+1}=\frac{C_{2n}^n}{n+1}$ 【感性理解】【生成函数严格证明】

7.【斯特林数（Stirling）】

【基本性质、定理】

- $s_n^m=s_{n-1}^{m-1}+(n-1)s_{n-1}^m(s_n^n=1,s_n^0=0^n)$【第一类斯特林数】
- $S_n^m=S_{n-1}^{m-1}+mS_{n-1}^m(S_n^n=1,S_n^0=0^n)$【第二类斯特林数】【模板】【例题】
- $S_n^m=\frac{\sum_{i=0}^m(-1)^{m-i}C_m^i i^n}{m!}=\sum_{i=0}^m\frac{(-1)^{m-i}}{(m-i)!}\frac{i^n}{i!}$ 【模板】

【推导结论】

- $n!=\sum_{i=0}^n s_n^i$
- $x^{\overline{n}}=\sum_{i=0}^n s_n^i x^i$
- $x^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^n s_n^i x^i(-1)^{n-i}$
- $x^n=\sum_{i=0}^{x,n}S_n^i x^{\underline{i}}$
- $x^n=\sum_{i=0}^{x,n}S_n^i x^{\overline{i}}(-1)^{n-i}$
- $\sum_{i=1}^n S_n^i s_i^m=\sum_{i=0}^n s_n^i S_i^m$
- $\sum_{i=0}^n i^k=\sum_{j=0}^n j!S_k^j C_{n+1}^{j+1}$
- $\sum_{i=1}^n C_n^i i^k=\sum_{j=0}^k S_k^j 2^{n-j}\frac{n!}{(n-j)!}$ 【例题】

8.【贝尔数（Bell）】

【基本性质、定理】

- $B_n=\sum_{i=1}^n S_n^i\ (B_0=1)$ 【模板】
- $B_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i B_i$ 【模板】

9.【$\mathcal{Polya}$ 定理】

【基本性质、定理】

- $ans=\frac{\sum_{i=1}^{n}m^{k_i}}{n}$ 【理解】

10.【经典容斥原理】

【推导结论】

- $f(i)=\sum\limits_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}C_j^i g(j)=g(i)-\sum\limits_{j=i+1}C_j^i f(j)$（$f(i)$ 为恰好 i 个满足"balabala"的方案数，$g(i)$ 为钦定 i 个满足"balabala“其他随意的方案数）【例题】【例题】【例题】【例题】

二项式反演

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\times g_i \Longleftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\times C_n^i\times f_i$$

设f_i表示恰好的方案数，g_i表示至多的方案数，则有

$$g_n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\times f_i$$

根据二项式反演有

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\times C_n^i\times g_i$$

11.【生成函数】

【推导结论】

(1).【常用普通生成函数(OGF)收敛性式】

- $\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}a^ix^i=\frac{1}{1-ax}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i=\frac{1}{(1-x)^2}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}C_n^ix^i=(1+x)^n$
- $\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i-1}^ix^i=\frac{1}{(1-x)^n}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}fib_ix^i=\frac{x}{1-x-x^2}$ (斐波那契数)
- $\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{i}fib_j)x^i=\frac{x}{(1-x)(1-x-x^2)}$(斐波那契数列前缀和)
- $\sum_{i=0}^{\infty}cat_ix^i=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ (卡特兰数)

(2).【常用指数生成函数(EGF)收敛性式】

- $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$
- $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i}}{(2i)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}B_i\frac{x_i}{i!}=e^{e^x-1}$ (贝尔数)

三：【各种反演】

1.【欧拉反演】

【基本性质、定理】

- $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$（即 $\varphi*1=\mathrm{id}$） 【证明】

【推导结论】

- $\gcd(i,j)=\sum_{d|i,d|j}\varphi(d)$
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)=\sum_{d=1}^{n}d\left(2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\varphi(i)-1\right)$ 【例题（9 倍经验）】
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,j)=\sum_{d=1}^{n}\varphi(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$ 【例题】
- $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{lcm}(i,j)}{\gcd(i,j)}\right)=\frac{(n!)^{2n}}{\left(\prod_{d=1}^{n}d^{\left(2S_{\varphi}(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)-1\right)}\right)^{2}}$ 【例题】

2.【狄利克雷卷积（Dirichlet）与莫比乌斯反演（Mobius）】

【基本性质、定理】

- $(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})=$
- $\sum_{d|n}\mu(d)=\epsilon(n)$（即 $\mu*1=\epsilon$）
- $f(n)=\sum_{d|n}g(d)\Longrightarrow g(n)=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})f(d)$（即 $f=g*1\Longrightarrow g=f*\mu$）
- $f(n)=\sum_{n|d}g(d)\Longrightarrow g(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})f(d)$
- $f(k)=\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}g(dk)\Longrightarrow g(k)=\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\mu(d)f(dk)$

【推导结论】

(1).【GCD 和 LCM】

- $[\gcd(i,j)=1]=\sum_{d|i,d|j}\mu(d)$
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}[\gcd(i,j)=k]=\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\mu(d)\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor\lfloor\frac{m}{dk}\rfloor$ 【例题】
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}[\gcd(i,j)\in\{Prime\}]=\sum_{d=1}^{n}\left(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor\sum_{p|d\ \&\ p\in\{Prime\}}\mu(\frac{d}{p})\right)$ 【例题】
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{lcm}(i,j)=\sum_{d=1}^{n}d\left(\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}x^2\mu(x)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor}i\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor}j\right)$ 【例题】

(2).【除数函数】

- $\sigma_k=\sum_{d|n}d^k$（即 $\sigma_k=\text{id}_k*1$）
- $\sigma_0(xy)=\sum_{i|x}\sum_{j|y}[\gcd(i,j)=1]$（其中 $\sigma_0(x)$ 表示 x 的约数个数）
- $\sum_{i=1}^{n}\sigma_0(i)=\sum_{i=1}^{n}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$ 【例题】
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma_0(ij)=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\lfloor\frac{n}{ik}\rfloor\right)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor}\lfloor\frac{m}{ik}\rfloor\right)$ 【例题】
- $\sigma_1(xy)=\sum_{i|x}\sum_{j|y}\frac{iy}{j}[\gcd(i,j)=1]$（其中 $\sigma_0(x)$ 表示 x 的约数和）
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(ij)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)d\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sigma_1(i)\right)^2$ 【例题】
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma_1(\gcd(i,j))=\sum_{d=1}^{n}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor\left(\sum_{i|d}\mu(\frac{d}{i})\sigma_1(i)\right)$ 【例题】

(3).【莫比乌斯函数】

- $\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)=\sum_{d=1}^{\sqrt{n}}\mu(d)\lfloor\frac{n}{d^2}\rfloor$ 【例题】
- $\sum_{i=1}^{n}\mu^2(i)\sqrt{\frac{n}{i}}=n$ 【证明】

3.【二项式反演】

【基本性质、定理】

- $f(n)=\sum_{i=0}^{n}C_n^ig(i)\iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^if(i)$
- $f(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^ig(i)\iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^if(i)$
- $f(n)=\sum_{i=n}^{?}C_i^ng(i)\iff g(n)=\sum_{i=n}^{?}(-1)^{i-n}C_i^nf(i)$ 【例题】 【例题】
- $f(n)=\sum_{i=n}^{?}(-1)^iC_i^ng(i)\iff g(n)=\sum_{i=n}^{?}(-1)^iC_i^nf(i)$
- $f(n,m)=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}C_n^iC_m^jg(i,j)\iff g(n,m)=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{n+m-i-j}C_n^iC_m^jf(i,j)$
- $f(n,m)=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}C_n^iC_m^jg(i,j)\iff g(n,m)=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}C_n^iC_m^jf(i,j)$
- $f(n,m)=\sum\limits_{i=n}^{?}\sum\limits_{j=m}^{?}C_i^nC_j^mg(i,j)\iff g(n,m)=\sum\limits_{i=n}^{?}\sum\limits_{j=m}^{?}(-1)^{i+j-n-m}C_i^nC_j^mf(i,j)$ 【例题】 【例题】
- $f(n,m)=\sum\limits_{i=n}^{?}\sum\limits_{j=m}^{?}(-1)^{i+j}C_i^nC_j^mg(i,j)\iff g(n,m)=\sum\limits_{i=n}^{?}\sum\limits_{j=m}^{?}(-1)^{i+j}C_i^nC_j^mf(i,j)$

4.【斯特林反演】

【基本性质、定理】

- $f(n)=\sum_{i=0}^{n}S_n^ig(i)\iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}s_n^ig(i)$
- $f(n)=\sum_{i=0}^{n}s_n^ig(i)\iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}S_n^if(i)$
- $f(n)=\sum_{i=n}^{?}S_i^ng(i)\iff g(n)=\sum_{i=n}^{?}(-1)^{i-n}s_i^ng(i)$
- $f(n)=\sum_{i=n}^{?}s_i^ng(i)\iff g(n)=\sum_{i=n}^{?}(-1)^{i-n}S_i^nf(i)$

6.【子集反演】

【基本性质、定理】

- $f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T) \iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$ 【模板】
- $f(S)=\sum_{T\supseteq S}g(T) \iff g(S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$
- $f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T) \iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}\mu(|S|-|T|)f(T)$ （$\mu(S)$ 在 S 有重复元素时为 0，否则为 $(-1)^{|S|}$）
- $f(S)=\sum_{T\supseteq S}g(T) \iff g(S)=\sum_{T\supseteq S}\mu(|T|-|S|)f(T)$ （$\mu(S)$ 在 S 有重复元素时为 0，否则为 $(-1)^{|S|}$）

四：【数论筛法】

1.【杜教筛】

【基本性质、定理】

- $g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{d=2}^{n}g(d)S\left(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\right)$ （其中 $S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$）

【推导结论】

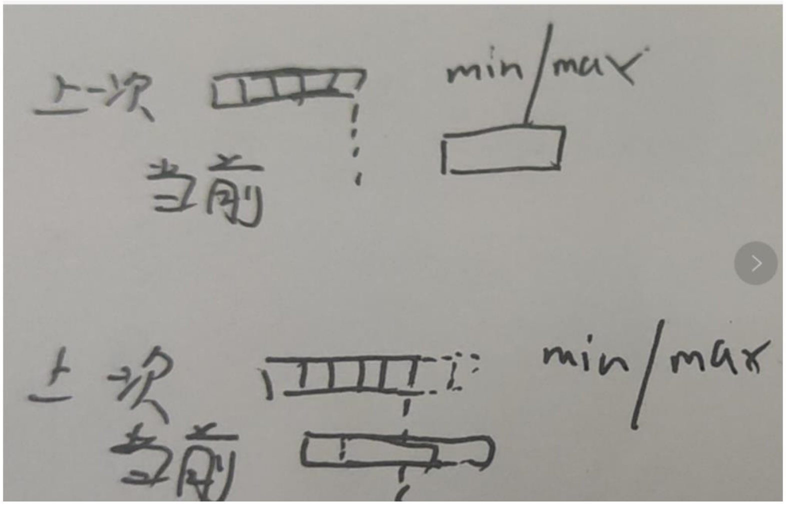
- $S_{\mu(x)}(n)=1-\sum_{d=2}^{n}S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$ 【模板】
- $S_{\varphi(x)}(n)=\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{d=2}^{n}S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$ 【模板】
- $S_{(n^2\varphi(n))}=\sum_{i=1}^{n}i^3-\sum_{d=2}^{n}d^2S\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)$ 【例题】

【基本积分公式】

- $\int k\,\mathrm{d}x=kx+C$ (C 为常数)
- $\int x^a\,\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\ (a\neq -1)$
- $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$
- $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$
- $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=arctan(x)+C$
- $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=arcsin(x)+C$
- $\int cos(x)\,\mathrm{d}x=sin(x)+C$
- $\int sin(x)\,\mathrm{d}x=-cos(x)+C$
- $\int\frac{\mathrm{d}x}{cos^2(x)}\mathrm{d}x=\int sec^2(x)\,\mathrm{d}x=tan(x)+$
- $\int\frac{\mathrm{d}x}{sin^2(x)}\mathrm{d}x=\int csc^2(x)\,\mathrm{d}x=-cot(x)$
- $\int sec(x)tan(x)\,\mathrm{d}x=sec(x)+C$
- $\int csc(x)cot(x)\,\mathrm{d}x=-csc(x)+C$

- 遇到当前决策受未来影响的时候，我们可以通过多记录状态预知未来的状态，从而把影响一直传递
- 区间DP中合并与未来有关的时候，可以多记录一维表示未来的状态，如$dp[i][j][k]$表示未来j和右边k个一起消除
- 1D/1D dp模型形如当前转移点是下面上方不相交的这种，取min/max的时候，常可以考虑维护前后缀最值

下方有相交的，若能拆开两个变量，则考虑单调队列优化



- dp计数中，未来的贡献未知但对当前决策有影响，这时候我们可以通过提前增加维度记录未来贡献的办法使得dp合理
- 树上(u,v)不互为祖先说明在树中dfs序不相交，树上dfs序区间要么内含，要么不交
- $1D/1D$的dp可以尝试对方程转化，$dp[i]$由$dp[i-1]$转移过来做不了的时候，可以观察由前面某个j转移过来是否等价且能做
  形如$dp[i][j]$由$dp[k][j-1]$转移过来的时候，可以尝试先枚举第二维递推阶段，然后下面一维变成正常的线性转移尝试优化
- 枚举最后一个xxx来划分dp
- 形如$dp[i]=dp[j]+xx\ j<i$的时候，可以尝试枚举前面顺序转移到后面
- 需要枚举子集时，如果是单位贡献的转移，可以考虑$SOSDP$ 优化到$O(n2^n)$
- 插入或删除其中之一难以完成，另一个很简单可以考虑回滚莫队只删或只增，注意回滚顺序最好用栈序
- 问某个被匹配子串是否在某串的区间中，可以SAM parent树上线段树合并维护$Endpos$查询
- 平面点的锐钝角的总数 可以用极角排序+尺取解决
- 对反串建SAM, 可以重建parent树，通过遍历SAM parents树，相当于对于子串字典序排序（前缀和数组上二分）
- 线性dp中，状态就是阶段，在状态的推导中阶段自然随着递推
- 考虑先往一个维度加再减的线性dp，可以考虑先减再加，同时考虑，覆盖过的位置只用更新一次的问题，这样可以贪心加。
- 一棵点权非负且总和为正的树的所有带权重心位于一条链上，而其中深度最小的点是满足子树和严格大于总和一半取这棵树的一个 DFS 序，因为其子树和大于一半，因此 DFS 序的带权中位数一定在子树内。找到这个点（>=sum/2+1的第一个位置)后在链上倍增即可。
- 高斯消元取模判行列式正负

错误

- 字符串匹配的时候，注意多组数据在字符串长度以内的才考虑，剩余的要记得清零
- FWT没有模数的时候，即便答案没有爆int，也要考虑要不要开long long,因为变换后的乘积可能爆。即FWT中间的过程也全部弄成long long保险