ACM 模板

数据结构

ST 表

静态区间最值查询

```
int f[maxn][25];//[i,i+2^j-1]里的数的最大值
int a[maxn],Log[maxn];

void RMQ(){//预处理
    for(int i=1;i<=n;++i)f[i][0]=a[i];
    for(int j=1;(1<<j)<=n;++j)
        for(int i=1;i+(1<<j)-1<=n;++i)
            f[i][j]=max(f[i][j-1],f[i+(1<<(j-1))][j-1]);
    Log[1]=0;
    for(int i=2;i<=n+1;++i)
        Log[i]=Log[i/2]+1;
}

int query(int l,int r){
    int ans=0;
    int k=Log[r-l+1];
    ans=max(f[l][k],f[r-(1<<k)+1][k]);
    return ans;
}
```

并查集

```
struct DS{
    int fa[maxn],rank[maxn];
    void init(){
        for(int i=1;i<=n;++i)
            fa[i]=i,rank[i]=0;
    }
    int find(int x){
        if(x==fa[x])return x;
        return fa[x]=find(fa[x]);
    }
    void merge(int x,int y){
        int fx=find(x),fy=find(y);
        if(fx==fy)return;
        if(rank[fx]<rank[fy])
            fa[fx]=fy;
        else{
            fa[fy]=fx;
            if(rank[fy]==rank[fx])
                rank[fx]++;
        }
    }
}ds;
```

树状数组

```
//单点修改区间查询，区间修改，单点查询，区间修改，区间查询
#define lowbit(x) (x&(-x))
struct BIT{
    int c[maxn],N;
    void init(int n){
        this->N=n;
        memset(c,0,sizeof(c));
    }

    void add(int x,int val){
        while(x<=N){
            c[x]+=val;
            x+=lowbit(x);
        }
    }
```

```
    int query(int x){
        int ans=0;
        while(x){
            ans+=c[x];
            x-=lowbit(x);
        }
        return ans;
    }
}bit;
```

二维树状数组

单点修改，区间查询

```
struct TwoDBIT{      O(log^2 n)
    int c[maxn][maxn],n,m;//n 行 m 列

    void init(int n){
        this->n=n;this->m=m;
        memset(c,0,sizeof(c));
    }

    void add(int x,int y,int val){
        while(x<=n){
            int yy=y;
            while(yy<=m){
                c[x][yy]+=val;yy+=lowbit(yy);
            }
            x+=lowbit(x);
        }
    }

    int ask(int x,int y){
        int ans=0;
        while(x){
            int yy=y;
            while(yy){
                ans+=c[x][yy],yy-=lowbit(yy);
            }
            x-=lowbit(x);
        }
```

```
        return ans;
    }

    int query(int xL,int yL,int xR,int yR){//二维前缀和区间查询
        return ask(xR,yR)-ask(xL-1,yR)-ask(xR,yL-1)+ask(xL-1,yL-1);
    }
}bit;
```

区间修改,单点查询

```
struct  TwoDBIT{//二维差分,c[i][j]=a[i][j]-a[i][j-1]-a[i-1][j]+a[i-1][j-1]
    int c[maxn][maxn],n,m;//n 行 m 列
    void init(int n){
        this->n=n;this->m=m;
        memset(c,0,sizeof(c));
    }

    void add(int x,int y,int val){
        while(x<=n){
            int yy=y;
            while(yy<=m){
                c[x][yy]+=val;yy+=lowbit(yy);
            }
            x+=lowbit(x);
        }
    }

    int ask(int x,int y){
        int ans=0;
        while(x){
            int yy=y;
            while(yy){
                ans+=c[x][yy],yy-=lowbit(yy);
            }
            x-=lowbit(x);
        }
        return ans;
    }

    void realadd(int xL,int yL,int xR,int yR,int val){
        add(xL,yL,val);
        add(xR+1,yL,-val);
        add(xL,yR+1,-val);
```

```
        add(xR+1,yR+1,val);
    }
    int ask(int x,int y){
        int ans=0;
        while(x){
            int yy=y;
            while(yy){
                ans+=c[x][yy],yy-=lowbit(yy);
            }
            x-=lowbit(x);
        }
        return ans;
    }
}bit;
```

区间修改，区间查询

```
struct  TwoDBIT{//二维差分,c[i][j]=a[i][j]-a[i][j-1]-a[i-1][j]+a[i-1][j-1]
    //维护 c[i][j],c[i][j]*i,c[i][j]*j,c[i][j]*i*j
    int c1[maxn][maxn],c2[maxn][maxn],c3[maxn][maxn],c4[maxn][maxn],n,m;
    void init(int n){
        this->n=n;this->m=m;
        memset(c,0,sizeof(c));
    }
    void add(int x,int y,int val){
        while(x<=n){
            int yy=y;
            while(yy<=m){
                c1[x][yy]+=val,c2[x][yy]+=val*x;
                c3[x][yy]+=val*y;c4[x][yy]+=val*x*y;
                yy+=lowbit(yy);
            }
            x+=lowbit(x);
        }
    }
    void realadd(int xL,int yL,int xR,int yR,int val){
        add(xL,yL,val);
        add(xR+1,yL,-val);
        add(xL,yR+1,-val);
        add(xR+1,yR+1,val);
    }
    int ask(int x,int y){
        int ans=0;
```

```
        while(x){
            int yy=y;
            while(yy){
                ans+=(x+1)*(y+1)*c1[x][yy]-(y+1)*c2[x][yy]-
(x+1)*c3[x][yy]+c4[x][yy];
                yy-=lowbit(yy);
            }
            x-=lowbit(x);
        }
        return ans;
    }
    int realask(int xL,int yL,int xR,int yR){
        return ask(xR,yR)-ask(xL-1,yR)-ask(xR,yL-1)+ask(xL-1,yL-1);
    }
}bit;
```

线段树

区间赋值区间和

```
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
struct SegmentTree{
    int sum[maxn],add[maxn];
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void build(int p,int l,int r){
        add[p]=-1;
        if(l==r){
            sum[p]=a[l];return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
        pushUp(p);
    }
    void pushDown(int p,int l,int r){
        if(add[p]!=-1){
            int mid=l+r>>1;
```

```
            sum[ls]=add[p]*(mid-l+1);
            sum[rs]=add[p]*(r-mid);
            add[ls]=add[rs]=add[p];
            add[p]=-1;
        }
    }
    void update(int p,int l,int r,int L,int R,int val){
        if(L<=l&&r<=R){
            sum[p]=(r-l+1)*val;
            add[p]=val;
            return;
        }
        pushDown(p,l,r);
        int mid=l+r>>1;
        if(L<=mid)update(lson,L,R,val);
        if(R>mid)update(rson,L,R,val);
        pushUp(p);
    }
    int query(int p,int l,int r,int L,int R){
        if(R<l||L>r)return 0;
        if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
        int mid=l+r>>1;
        int ans=0;
        if(L<=mid)ans+=query(lson,L,R);
        if(R>mid)ans+=query(rson,L,R);
        return ans;
    }
}tr;
```

扫描线

矩形周长并

```
#include<bits/stdc++.h>//自下而上，横线当前长度减上一次，竖线高度*竖线数量
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
using namespace std;
int n;
const int maxn=2e4+5;
struct Line{
    int xL,xR,flag,h;
```

```
    bool operator<(const Line&a){return h<a.h;}
}line[maxn];

int cnt[maxn<<2],num[maxn<<2],len[maxn<<2];//当前线段是否被覆盖，当前有多少竖线
bool Lf[maxn<<2],Rf[maxn<<2];//当前左右端点是否被覆盖
int a,b,c,d;
void pushUp(int p,int l,int r){
    if(cnt[p]){
        num[p]=2;
        Lf[p]=Rf[p]=1;
        len[p]=r-l+1;
    }else if(l==r){//不被覆盖时候防止越界
        num[p]=len[p]=Lf[p]=Rf[p]=0;
    }else{
        Lf[p]=Lf[ls];Rf[p]=Rf[rs];
        len[p]=len[ls]+len[rs];
        num[p]=num[ls]+num[rs];
        if(Rf[ls]&&Lf[rs])num[p]-=2;//左右都被覆盖就回去
    }
}

void update(int p,int l,int r,int L,int R,int val){
    if(L<=l&&r<=R){
        cnt[p]+=val;
        return pushUp(p,l,r);
    }
    int mid=l+r>>1;
    if(L<=mid)update(lson,L,R,val);
    if(R>mid)update(rson,L,R,val);
    pushUp(p,l,r);
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    while(cin>>n){
        int lmn=20001,rmx=1;
        for(int i=1;i<=n;++i){
            cin>>a>>b>>c>>d;
            a+=10001,c+=10001;
            lmn=min(lmn,a);rmx=max(rmx,c);
            line[(i<<1)-1]={a,c,1,b};line[i<<1]={a,c,-1,d};
        }
```

```
        sort(line+1,line+1+2*n);
        int last=0,ans=0;
        for(int i=1;i<=2*n;++i){
            if(line[i].xL<line[i].xR)
            update(1,1,rmx,line[i].xL,line[i].xR-1,line[i].flag);
            ans+=num[1]*(line[i+1].h-line[i].h);
            ans+=abs(len[1]-last);
            last=len[1];
        }
        cout<<ans<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

矩形 K 次以上面积并

```
//矩形 k 次以上面积并 原题是覆盖整数点右上坐标+1 转化
#include<bits/stdc++.h>
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=3e4+5;
struct Line{
    int xL,xR,flag,h;     //flag-1 表示下，1 为上
    bool operator<(const Line&a){return h<a.h;}
}line[maxn<<1];
int t,n,k,X[maxn<<1];
struct SegmentTree{
    int  len[maxn<<3][11],cnt[maxn<<3];//被覆盖 i 次以上的长度以及当前区间被
覆盖次数
    void pushUp(int p,int l,int r){
        for(int i=0;i<=k;++i)len[p][i]=0;//上一次更新后得清空
        if(cnt[p]>=k){//当前覆盖次数>=k
            len[p][k]=X[r+1]-X[l];
        }else if(l==r){//叶子结点只更新对应次数
            len[p][cnt[p]]=X[r+1]-X[l];
        }else{//覆盖不满的话，得把子结点标记影响上传
            for(int i=0;i<=k;++i)
                len[p][min(k,cnt[p]+i)]+=len[ls][i]+len[rs][i];
        }
```

```
    }
    void build(int p,int l,int r){
        cnt[p]=0;
        for(int i=1;i<=k;++i)len[p][i]=0;
        len[p][0]=X[r+1]-X[l];//初态的时候得赋值 注意扫描线是 X[r+1]-X[l]
        if(l==r)return;
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
    }
    void update(int p,int l,int r,int L,int R,int val){
        if(L<=l&&r<=R){
            cnt[p]+=val;
            return pushUp(p,l,r);
        }
        int mid=l+r>>1;
        if(L<=mid)update(lson,L,R,val);
        if(R>mid)update(rson,L,R,val);
        pushUp(p,l,r);
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>t;
    int T=0;
    while(t--){
        cin>>n>>k;
        int a,b,c,d;
        line[0].h=0;
        for(int i=1;i<=n;++i){
            cin>>a>>b>>c>>d;
            c++;d++;
            line[(i<<1)-1]={a,c,1,b};line[i<<1]={a,c,-1,d};
            X[(i<<1)-1]=a;X[i<<1]=c;
        }
        sort(line+1,line+1+2*n);
        sort(X+1,X+1+2*n);
        int m=unique(X+1,X+1+2*n)-(X+2);//线段数等于端点数-1
        tr.build(1,1,m);
        ll ans=0;
        for(int i=1;i<=2*n;++i){
            ans+=1ll*tr.len[1][k]*(line[i].h-line[i-1].h);
            int l1=lower_bound(X+1,X+2+m,line[i].xL)-X;
```

```
            int r1=lower_bound(X+1,X+2+m,line[i].xR)-X-1;
            tr.update(1,1,m,l1,r1,line[i].flag);
        }
        cout<<"Case "<<++T<<": "<<ans<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

线段树合并

//子树各众数值之和 线段树合并复杂度取决于总点数 $O(nlogn)$

```
#include<bits/stdc++.h>
#define pb push_back
#define ls lc[p]
#define rs rc[p]
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
#define N maxn*36
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=1e5+5;
int n,a[maxn],s,e,mx,rt[maxn];
ll ans[maxn];
vector<int>G[maxn];
struct SegmentTree{
    int lc[N],rc[N],tot,cnt[N];//cnt 区间权值线段树中最大值
    ll sum[N];//各个众数之和
    void pushUp(int p){
        cnt[p]=max(cnt[ls],cnt[rs]);
        if(cnt[ls]==cnt[rs])sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
        else sum[p]=cnt[ls]>cnt[rs]?sum[ls]:sum[rs];
    }
    void update(int &p,int l,int r,int x,int val){
        if(!p)p=++tot;
        if(l==r){
            cnt[p]+=val;sum[p]=l;return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        if(x<=mid)update(lson,x,val);
        else update(rson,x,val);
        pushUp(p);
```

```
    }
    int merge(int p,int q,int l,int r){
        if(!p||!q)return p+q;
        if(l==r){
            cnt[p]+=cnt[q];
            sum[p]=l;return p;
        }
        int mid=l+r>>1;
        ls=merge(ls,lc[q],l,mid);
        rs=merge(rs,rc[q],mid+1,r);
        pushUp(p);
        return p;
    }
}tr;
void dfs(int x,int fa){
    for(auto&v:G[x]){
        if(v==fa)continue;
        dfs(v,x);
        rt[x]=tr.merge(rt[x],rt[v],1,mx);
    }
    tr.update(rt[x],1,mx,a[x],1);
    ans[x]=tr.sum[rt[x]];
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i],mx=max(a[i],mx);
    for(int i=1;i<n;++i){
        cin>>s>>e;
        G[s].pb(e);
        G[e].pb(s);
    }
    dfs(1,-1);
    for(int i=1;i<=n;++i)
        cout<<ans[i]<<" ";
    return 0;
}
```

线段树分裂

```
//线段树分裂 分裂其实可看作区间查询 每次最多增加 O(2logn)结点
//维护多个可重集 合并带内存回收
```

```
//0.p 集合中值从 x 到 y 的放入放入新集合
//1.把 t 合并到 p 中，清空 t(t 以后不出现) 这里用了内存回收 2.p 中加入 x 个 q
//3.查询 p 中 x 到 y 数量      4.查询 p 中第 k 小
#include<bits/stdc++.h>
#define ls lc[p]
#define rs rc[p]
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
using namespace std;
typedef long long ll;
#define N maxn*32
const int maxn=2e5+5;
int n,m,op,cntset=1,a[maxn],rt[maxn];
struct SementTree{
    int lc[N],rc[N],tot,rub[N],cnt=0;
    ll sum[N];
    int New(){//内存回收  分裂合并同时有的时候必须使用
        if(cnt)return rub[cnt--];
        return ++tot;
    }
    void del(int&p){
        ls=rs=sum[p]=0;
        rub[++cnt]=p;
        p=0;
    }
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void build(int&p,int l,int r){
        if(!p)p=New();
        if(l==r){
            sum[p]=a[l];return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
        pushUp(p);
    }
    void update(int&p,int l,int r,int x,int val){
        if(!p)p=New();
        if(l==r){
            sum[p]+=val;return;
        }
        int mid=l+r>>1;
```

```
    if(x<=mid)update(lson,x,val);
    else update(rson,x,val);
    pushUp(p);
}
int merge(int &p,int &q,int l,int r){
    if(!p||!q)return p+q;
    if(l==r){
        sum[p]+=sum[q];
        del(q);
        return p;
    }
    int mid=l+r>>1;
    ls=merge(ls,lc[q],l,mid);
    rs=merge(rs,rc[q],mid+1,r);
    del(q);
    pushUp(p);
    return p;
}
void split(int&p,int&q,int l,int r,int L,int R){
    if(L>r||R<l)return;
    if(!p)return;
    if(L<=l&&r<=R){
        q=p;
        p=0;return;//直接断边接上
    }
    if(!q)q=New();
    int mid=l+r>>1;
    if(L<=mid)split(ls,lc[q],l,mid,L,R);
    if(R>mid)split(rs,rc[q],mid+1,r,L,R);
    pushUp(p);//两颗更新
    pushUp(q);
}
ll query(int p,int l,int r,int L,int R){
    if(!p)return 0;
    if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
    int mid=l+r>>1;
    ll ans=0;
    if(L<=mid)ans+=query(lson,L,R);
    if(R>mid)ans+=query(rson,L,R);
    return ans;
}
int kth(int p,int l,int r,int k){
    if(l==r)return l;
    int mid=l+r>>1;
```

```
        if(sum[ls]>=k)return kth(lson,k);
        else return kth(rson,k-sum[ls]);
    }
}tr;
int main(){
    int x,y,z;
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
    tr.build(rt[1],1,n);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>op;
        if(!op){
            cin>>x>>y>>z;
            tr.split(rt[x],rt[++cntset],1,n,y,z);
        }else if(op==1){
            cin>>x>>y;
            rt[x]=tr.merge(rt[x],rt[y],1,n);
        }else if(op==2){
            cin>>x>>y>>z;
            tr.update(rt[x],1,n,z,y);
        }else if(op==3){
            cin>>x>>y>>z;
            cout<<tr.query(rt[x],1,n,y,z)<<"\n";
        }else if(op==4){
            cin>>x>>y;
            if(tr.sum[rt[x]]<y)cout<<-1<<"\n";
            else cout<<tr.kth(rt[x],1,n,y)<<"\n";
        }
    }
    return 0;
}
```

兔队线段树

1.普通的楼房重建写法

```
#include<bits/stdc++.h>
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
using namespace std;
```

```
using ll=long long;
const int maxn=1e5+10;
int n,m,H[maxn];
struct SegmentTree{//求有多少个位置是前缀最大值
    int sum[maxn<<2],id[maxn<<2];//sum 只考虑当前子树影响的答案
    bool isBig(int id1,int id2){ //is id1 > id2
        if(!id2)return H[id1];
        return (ll)H[id1]*id2>(ll)H[id2]*id1;
    }
    int cal(int p,int l,int r,int mxid){ //p 子树内 考虑了前缀最大值 mxid 后
的答案
         if(l==r)return isBig(l,mxid);
         int mid=l+r>>1;
         if(isBig(id[ls],mxid))return  cal(lson,mxid)+sum[p]-sum[ls];//信
息可减性
         else return 0+cal(rson,mxid);
    }
    void pushUp(int p,int l,int r,int mid){
        id[p]=isBig(id[rs],id[ls])?id[rs]:id[ls];
        sum[p]=sum[ls]+cal(rson,id[ls]);
    }
    void build(int p,int l,int r){
        id[p]=l;sum[p]=1;
        if(l==r)return;
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
    }
    void update(int p,int l,int r,int x){
        if(l==r) return;
        int mid=l+r>>1;
        if(x<=mid)update(lson,x);
        else update(rson,x);
        pushUp(p,l,r,mid);
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    tr.build(1,1,n);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y;
        cin>>x>>y;
```

```
        H[x]=y;
        tr.update(1,1,n,x);
        cout<<tr.cal(1,1,n,0)<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

2.兔队写法

```
#include<bits/stdc++.h>
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
using namespace std;
using ll=long long;
const int maxn=1e5+10;
int n,m,H[maxn];
struct SegmentTree{//求有多少个位置是前缀最大值
    int sum[maxn<<2],id[maxn<<2];//sum 只考虑当前子树影响下 右子树的答案
    bool isBig(int id1,int id2){ //is id1 > id2
        if(!id2)return H[id1];
        return (ll)H[id1]*id2>(ll)H[id2]*id1;
    }
    int cal(int p,int l,int r,int mxid){ //p 子树内 考虑了前缀最大值 mxid 后
的答案
         if(l==r)return isBig(l,mxid);
         int mid=l+r>>1;
         if(isBig(id[ls],mxid))return cal(lson,mxid)+sum[p];//不用信息可减
性
         else return 0+cal(rson,mxid);
    }
    void pushUp(int p,int l,int r,int mid){
        id[p]=isBig(id[rs],id[ls])?id[rs]:id[ls];
        sum[p]=cal(rson,id[ls]);
    }
    void build(int p,int l,int r){
        id[p]=l;sum[p]=1;//叶子节点下 sum 是什么随意
        if(l==r)return;
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
    }
    void update(int p,int l,int r,int x){
        if(l==r) return;
        int mid=l+r>>1;
```

```
        if(x<=mid)update(lson,x);
        else update(rson,x);
        pushUp(p,l,r,mid);
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    tr.build(1,1,n);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y;
        cin>>x>>y;
        H[x]=y;
        tr.update(1,1,n,x);
        cout<<tr.cal(1,1,n,0)<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

SegmentTree beats

区间取 min，区间最大值，区间和

```
#include<bits/stdc++.h>
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
using namespace std;
using ll=long long;
const int maxn=1e6+5;
int n,m,a[maxn];
struct SegmentTreeBeats{
    //分最大，次大,最大数量
    int mx[maxn<<2],se[maxn<<2],tag[maxn<<2],cnt[maxn<<2];
    ll sum[maxn<<2];
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
        mx[p]=max(mx[ls],mx[rs]);
        if(mx[ls]==mx[rs]){
            se[p]=max(se[ls],se[rs]);
            cnt[p]=cnt[ls]+cnt[rs];
        }else if(mx[ls]>mx[rs]){
```

```
        se[p]=max(se[ls],mx[rs]);
        cnt[p]=cnt[ls];
    }else{
        se[p]=max(mx[ls],se[rs]);
        cnt[p]=cnt[rs];
    }
}
void build(int p,int l,int r){
    tag[p]=-1;
    if(l==r){
        mx[p]=sum[p]=a[l];
        se[p]=-1;//初始化严格小于最大值
        cnt[p]=1;
        return;
    }
    int mid=l+r>>1;
    build(lson);
    build(rson);
    pushUp(p);
}
void add_tag(int p,int c){
    if(mx[p]<=c)return;//可能最大值不在该子区间
    sum[p]-=(ll)cnt[p]*(mx[p]-c);
    mx[p]=tag[p]=c;
}
void pushDown(int p){
    add_tag(ls,tag[p]);
    add_tag(rs,tag[p]);
    tag[p]=-1;
}
void update(int p,int l,int r,int L,int R,int val){
    if(mx[p]<=val)return;
    if(L<=l&&r<=R&&val>se[p]){
        add_tag(p,val);
        return;
    }
    if(tag[p]!=-1)
        pushDown(p);
    int mid=l+r>>1;
    if(L<=mid)update(lson,L,R,val);
    if(R>mid)update(rson,L,R,val);
    pushUp(p);
}
int queryMx(int p,int l,int r,int L,int R){
```

```
        if(L<=l&&r<=R)return mx[p];
        if(tag[p]!=-1)
            pushDown(p);
        int mid=l+r>>1,ans=0;
        if(L<=mid)ans=max(ans,queryMx(lson,L,R));
        if(R>mid)ans=max(ans,queryMx(rson,L,R));
        return ans;
    }
    ll querySum(int p,int l,int r,int L,int R){
        if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
        if(tag[p]!=-1)
            pushDown(p);
        int mid=l+r>>1;
        ll ans=0;
        if(L<=mid)ans+=querySum(lson,L,R);
        if(R>mid)ans+=querySum(rson,L,R);
        return ans;
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    int t;
    cin>>t;
    while(t--){
        cin>>n>>m;
        for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
        tr.build(1,1,n);
        int op,x,y,z;
        for(int i=1;i<=m;++i){
            cin>>op>>x>>y;
            if(!op){
                cin>>z;
                tr.update(1,1,n,x,y,z);
            }else if(op==1){
                cout<<tr.queryMx(1,1,n,x,y)<<"\n";
            }else
                cout<<tr.querySum(1,1,n,x,y)<<"\n";
        }
    }
    return 0;
}
```

区间加，区间 max,区间 min，区间和，区间最大最小查询，划分数域

```
#include<bits/stdc++.h>
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
using namespace std;
using ll=long long;
const int maxn=5e5+5;
const ll INF=1e18;
int n,a[maxn],m;
struct SegmentTree{//数域划分 最大 最小 其他值
    ll mx[maxn<<2],mx2[maxn<<2],mxc[maxn<<2];//最大 次大 数量
    ll mn[maxn<<2],mn2[maxn<<2],mnc[maxn<<2];
    ll aMx[maxn<<2],aMn[maxn<<2],aTag[maxn<<2];//对应数域加法标记
    ll sum[maxn<<2];
    int len[maxn<<2];
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
        mx[p]=max(mx[ls],mx[rs]);
        mn[p]=min(mn[ls],mn[rs]);
        if(mx[ls]==mx[rs]){
            mx2[p]=max(mx2[ls],mx2[rs]);
            mxc[p]=mxc[ls]+mxc[rs];
        }else if(mx[ls]>mx[rs]){
            mx2[p]=max(mx2[ls],mx[rs]);
            mxc[p]=mxc[ls];
        }else{
            mx2[p]=max(mx[ls],mx2[rs]);
            mxc[p]=mxc[rs];
        }
        if(mn[ls]==mn[rs]){
            mn2[p]=min(mn2[ls],mn2[rs]);
            mnc[p]=mnc[ls]+mnc[rs];
        }else if(mn[ls]<mn[rs]){
            mn2[p]=min(mn2[ls],mn[rs]);
            mnc[p]=mnc[ls];
        }else{
            mn2[p]=min(mn[ls],mn2[rs]);
            mnc[p]=mnc[rs];
        }
    }
    void build(int p,int l,int r){
        aMx[p]=aMx[p]=aTag[p]=0;
        len[p]=r-l+1;
```

```
        if(l==r){
            mx[p]=mn[p]=sum[p]=a[l];
            mxc[p]=mnc[p]=1;
            mx2[p]=-INF;
            mn2[p]=INF;
            return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
        pushUp(p);
    }
    void pushADD(int p,ll amx,ll amn,ll atag){//多值域加法标记下放
        if(mx[p]==mn[p]){//特判只有一个值
            if(amx==atag)amx=amn;//无最大 就用最少
            else amn=amx;//无最小 最小用最大
            sum[p]+=amx*mxc[p];
        }
        else sum[p]+=amx*mxc[p]+amn*mnc[p]+atag*(len[p]-mxc[p]-mnc[p]);
        //两个值时特判 次大等于最小用最小 否则其他
        if(mx2[p]==mn[p])mx2[p]+=amn;
        else if(mx2[p]!=-INF)mx2[p]+=atag;

        if(mn2[p]==mx[p])mn2[p]+=amx;
        else if(mn2[p]!=INF)mn2[p]+=atag;
        mx[p]+=amx;mn[p]+=amn;
        aMx[p]+=amx;aMn[p]+=amn;aTag[p]+=atag;
    }
    void pushDown(int p){
        ll Mx=max(mx[ls],mx[rs]),Mn=min(mn[ls],mn[rs]);

    pushADD(ls,(mx[ls]==Mx?aMx[p]:aTag[p]),(mn[ls]==Mn?aMn[p]:aTag[p]),a
Tag[p]);

    pushADD(rs,(mx[rs]==Mx?aMx[p]:aTag[p]),(mn[rs]==Mn?aMn[p]:aTag[p]),a
Tag[p]);
        aMx[p]=aMn[p]=aTag[p]=0;
    }
    void ADD(int p,int l,int r,int L,int R,ll val){
        if(L<=l&&r<=R) return pushADD(p,val,val,val);
        pushDown(p);
        int mid=l+r>>1;
        if(L<=mid)ADD(lson,L,R,val);
        if(R>mid)ADD(rson,L,R,val);
```

```
    pushUp(p);
}
void MAX(int p,int l,int r,int L,int R,ll val){
    if(mn[p]>=val)return;
    if(L<=l&&r<=R&&mn2[p]>val)return pushADD(p,0,val-mn[p],0);
    pushDown(p);
    int mid=l+r>>1;
    if(L<=mid)MAX(lson,L,R,val);
    if(R>mid)MAX(rson,L,R,val);
    pushUp(p);
}
void MIN(int p,int l,int r,int L,int R,int val){
    if(mx[p]<=val)return;
    if(L<=l&&r<=R&&mx2[p]<val)return pushADD(p,val-mx[p],0,0);
    pushDown(p);
    int mid=l+r>>1;
    if(L<=mid)MIN(lson,L,R,val);
    if(R>mid)MIN(rson,L,R,val);
    pushUp(p);
}
ll queryMin(int p,int l,int r,int L,int R){
    if(L<=l&&r<=R)return mn[p];
    pushDown(p);
    int mid=l+r>>1;
    ll ans=INF;
    if(L<=mid)ans=min(ans,queryMin(lson,L,R));
    if(R>mid)ans=min(ans,queryMin(rson,L,R));
    return ans;
}
ll queryMx(int p,int l,int r,int L,int R){
    if(L<=l&&r<=R)return mx[p];
    pushDown(p);
    int mid=l+r>>1;
    ll ans=-INF;
    if(L<=mid)ans=max(ans,queryMx(lson,L,R));
    if(R>mid)ans=max(ans,queryMx(rson,L,R));
    return ans;
}
ll querySum(int p,int l,int r,int L,int R){
    if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
    pushDown(p);
    int mid=l+r>>1;
    ll ans=0;
    if(L<=mid)ans+=querySum(lson,L,R);
```

```
        if(R>mid)ans+=querySum(rson,L,R);
        return ans;
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
    cin>>m;
    tr.build(1,1,n);
    int op,l,r,x;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>op>>l>>r;
        if(op==1){
            cin>>x;
            tr.ADD(1,1,n,l,r,x);
        }else if(op==2){
            cin>>x;
            tr.MAX(1,1,n,l,r,x);
        }else if(op==3){
            cin>>x;
            tr.MIN(1,1,n,l,r,x);
        }else if(op==4){
            cout<<tr.querySum(1,1,n,l,r)<<'\n';
        }else if(op==5){
            cout<<tr.queryMx(1,1,n,l,r)<<"\n";
        }else
            cout<<tr.queryMin(1,1,n,l,r)<<"\n";
    }
    return 0;
}


//区间排序后求某点
#include<bits/stdc++.h>
#define ls lc[p]
#define rs rc[p]
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
#define N maxn*54
using namespace std;
typedef set<int>::iterator IT;
const int maxn=1e5+5;
```

```
int n,m,a,L,R,pos;
int op,Op[maxn],rt[maxn];
set<int>s;//存储有序区间的左端点(根结点)方便分裂与合并
struct SegmentTree{
    int lc[N],rc[N],sum[N],rub[N],tot,cnt=0;
     int New(){//内存回收 衡量垃圾桶与点数越界的内存差
        if(cnt)return rub[cnt--];
        return ++tot;
    }
    void del(int&p){
        ls=rs=sum[p]=0;
        rub[++cnt]=p;
        p=0;
    }
    int merge(int p,int&q,int l,int r){
        if(!p||!q)return p+q;
        sum[p]+=sum[q];
        if(l==r){del(q);return p;}
        int mid=l+r>>1;
        ls=merge(ls,lc[q],l,mid);
        rs=merge(rs,rc[q],mid+1,r);
        del(q);
        return p;
    }
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void update(int&p,int l,int r,int x){
        if(!p)p=New();
        if(l==r){
            sum[p]++;return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        if(x<=mid)update(lson,x);
        else update(rson,x);
        pushUp(p);
    }
    int query(int p,int l,int r){
        if(l==r)return l;
        int mid=l+r>>1;
        if(ls)return query(lson);
        else return query(rson);
    }
    void split(int p,int&q,int k,int op){//把 p 分裂成左 p 右 q 的两个区间 给
```

```
p 留指定的 k 个
        if(!p)return;//有重复元素的时候叶子也可以是 k 防空结点
        if(sum[p]==k)return;
        if(!q)q=New();
        sum[q]=sum[p]-k;sum[p]=k;
        if(op){//1 降序找前 k 大
            if(sum[rs]>=k){
                split(rs,rc[q],k,op);
                lc[q]=lc[p];lc[p]=0;//左边直接断给 q
            }else
                split(ls,lc[q],k-sum[rs],op);
        }else{//0 升序找前 k 小
            if(sum[ls]>=k){
                split(ls,lc[q],k,op);
                rc[q]=rc[p];rc[p]=0;
            }else
                split(rs,rc[q],k-sum[ls],op);
        }
    }
}tr;
IT Split(int x){
    auto v=s.lower_bound(x);
    if(*v==x)return v;
    --v;
    Op[x]=Op[*v];//拆分的时候保证前 k 大还是前 k 小选择正确
    tr.split(rt[*v],rt[x],x-*v,Op[x]);
    return s.insert(x).first;//插入分裂的区间的新的左端点
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    s.insert(n+1);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        cin>>a;
        tr.update(rt[i],1,n,a);
        s.insert(i);
    }
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>op>>L>>R;
        auto st=Split(L);
        auto ed=Split(R+1);
        for(auto it=++st;it!=ed;++it){
            rt[L]=tr.merge(rt[L],rt[*it],1,n);
```

```
        }
        Op[L]=op;s.erase(st,ed);//最多 2 个
    }
    cin>>pos;
    Split(pos);Split(pos+1);//分裂成单点 求整个区间每个 i 分裂一次就好了
    cout<<tr.query(rt[pos],1,n)<<"\n";
    return 0;
}
```

可持久化线段树

静态区间第 k 小

```
//可持久化线段树静态区间第 k 大 也可用线段树合并
#include<bits/stdc++.h>
#define ls lc[p]
#define rs rc[p]
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
#define N maxn*36
using namespace std;
const int maxn=2e5+5;
int n,m,a[maxn],b[maxn],cnt,L,R,k,rt[maxn];
struct Persistable_SegmentTree{
    int tot,lc[N],rc[N],sum[N];
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void update(int q,int&p,int l,int r,int x){
        p=++tot;
        ls=lc[q],rs=rc[q],sum[p]=sum[q];
        if(l==r){
            sum[p]++;return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        if(x<=mid)update(lc[q],lson,x);
        else update(rc[q],rson,x);
        pushUp(p);
    }
    int query(int q,int p,int l,int r,int k){
        if(l==r)return l;
```

```
        int mid=l+r>>1,dir=sum[ls]-sum[lc[q]];
        if(dir>=k)return query(lc[q],lson,k);
        else return query(rc[q],rson,k-dir);
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i],b[i]=a[i];
    sort(b+1,b+1+n);
    cnt=unique(b+1,b+1+n)-(b+1);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        a[i]=lower_bound(b+1,b+1+cnt,a[i])-b;
    }
    for(int i=1;i<=n;++i){
        tr.update(rt[i-1],rt[i],1,cnt,a[i]);
    }
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>L>>R>>k;
        cout<<b[tr.query(rt[L-1],rt[R],1,cnt,k)]<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

区间不同数个数

```
//在线求区间不同数个数 和对应位置 1 改为值即可
#include<bits/stdc++.h>
#define N maxn*36
#define ls lc[p]
#define rs rc[p]
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
using namespace std;
const int maxn=3e4+5;
const int maxm=1e6+5;   //每颗线段树上维护的是 pos 上有无值
int rt[maxn],a[maxn],pre[maxm],q,L,R,n,b[maxn];
struct Persistable_SegmentTree{//本质维护[1,i]中数最后一次出现的位置
    int lc[N],rc[N],sum[N],tot;
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void update(int q,int&p,int l,int r,int x,int val){
```

```
        p=++tot;
        ls=lc[q],rs=rc[q],sum[p]=sum[q];
        if(l==r){
            sum[p]+=val;return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        if(x<=mid)update(lc[q],lson,x,val);
        else update(rc[q],rson,x,val);
        pushUp(p);
    }
    int query(int p,int l,int r,int L,int R){
        if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
        int mid=l+r>>1;
        int ans=0;
        if(L<=mid)ans+=query(lson,L,R);
        if(R>mid)ans+=query(rson,L,R);
        return ans;
    }
}tr;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
    cin>>q;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        if(pre[a[i]]){
            tr.update(rt[i-1],rt[i],1,n,pre[a[i]],-1);//可离散化 x
            tr.update(rt[i],rt[i],1,n,i,1);
        }
        else tr.update(rt[i-1],rt[i],1,n,i,1);
        pre[a[i]]=i;
    }
    for(int i=1;i<=q;++i){
        cin>>L>>R;
        cout<<tr.query(rt[R],1,n,L,n)<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

离线树状数组做法

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=1e6+5;
```

```
int n,a[maxn],m,ans[maxn],pre[maxn];
struct Q{
    int l,r,id;
    bool operator<(const Q&a)const{
        return r<a.r;
    }
}q[maxn];
struct BIT{
    int c[maxn];
    #define lowb(x) (x&(-x))
    void add(int x,int val){
        for(int i=x;i<=n;i+=lowb(i))c[i]+=val;
    }
    int ask(int x){
        int ans=0;
        for(int i=x;i;i-=lowb(i))ans+=c[i];
        return ans;
    }
}bit;
int main(){
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<=n;++i)scanf("%d",&a[i]);
    scanf("%d",&m);
    for(int i=1;i<=m;++i)scanf("%d%d",&q[i].l,&q[i].r),q[i].id=i;
    sort(q+1,q+1+m);
    int now=1;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        while(now<=q[i].r){
            if(pre[a[now]])bit.add(pre[a[now]],-
1),pre[a[now]]=now,bit.add(now,1);
            else pre[a[now]]=now,bit.add(now,1);
            now++;
        }
        ans[q[i].id]=bit.ask(q[i].r)-bit.ask(q[i].l-1);
    }
    for(int i=1;i<=m;++i)cout<<ans[i]<<"\n";
    return 0;
}
```

区间修改，标记永久化

```
//标记永久化 区间加区间和
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
```

```
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
#define ls lc[p]
#define rs rc[p]
#define N maxn*32
typedef long long ll;
const int maxn=1e5+5;
int rt[maxn],last[maxn],n,m,L,R,nowtime,d,t;
char s[2];
struct Persistable_SegmentTree{
    int tot,lc[N],rc[N],add[N];
    ll sum[N];
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void update(int q,int&p,int l,int r,int L,int R,int val){
        p=++tot;
        ls=lc[q];rs=rc[q];sum[p]=sum[q];add[p]=add[q];
        sum[p]+=1ll*(min(R,r)-max(L,l)+1)*val;//非完全包含带着标记更新
/pushUp 看情况
        if(L<=l&&r<=R){
            add[p]+=val;//完全包含就标记
            return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        if(L<=mid)update(lc[q],lson,L,R,val);
        if(R>mid)update(rc[q],rson,L,R,val);
    }
    void build(int&p,int l,int r){
        p=++tot;
        add[p]=0;
        if(l==r){
            scanf("%lld",&sum[p]);return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
        pushUp(p);
    }
    ll query(int p,int l,int r,int L,int R){
        if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
        int mid=l+r>>1;
        ll ans=1ll*add[p]*(min(R,r)-max(L,l)+1);//查询的时候累积标记值下查
        if(L<=mid)ans+=query(lson,L,R);
```

```
        if(R>mid)ans+=query(rson,L,R);
        return ans;
    }
}tr;
int main(){
    while(~scanf("%d%d",&n,&m)){
        tr.tot=nowtime=0;
        tr.build(rt[0],1,n);
        for(int i=1;i<=m;++i){
            scanf("%s",s);
            if(s[0]=='C'){//创建新版本
                scanf("%d%d%d",&L,&R,&d);
                nowtime++;
                tr.update(rt[nowtime-1],rt[nowtime],1,n,L,R,d);
            }else if(s[0]=='Q'){//当前版本区间和
                scanf("%d%d",&L,&R);
                cout<<tr.query(rt[nowtime],1,n,L,R)<<"\n";
            }else if(s[0]=='H'){//历史版本区间和
                scanf("%d%d%d",&L,&R,&t);
                cout<<tr.query(rt[t],1,n,L,R)<<"\n";
            }else if(s[0]=='B'){//不用清空 自动覆盖
                scanf("%d",&nowtime);
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

树套树

树状数组套可持久化线段树 区间 k 大修改

```
//树状数组套权值线段树求动态修改区间第 k 大 可以在线
#include<bits/stdc++.h>
#define lowbit(x) (x&(-x))
#define N maxn*300
#define lson lc[p],l,mid
#define rson rc[p],mid+1,r
using namespace std;
const int maxn=2e5+5;
const int maxm=1e5+5;
int n,m,a[maxn],b[maxn],cnt,rt[maxm],jL[22],jR[22],numL,numR;
```

```
struct BitAndSegmentTree{
    int tot,lc[N],rc[N],sum[N];
    void update(int&p,int l,int r,int x,int val){
        if(!p)p=++tot;
        sum[p]+=val;
        if(l==r)return;
        int mid=l+r>>1;
        if(x<=mid)update(lson,x,val);
        else update(rson,x,val);
    }
    int kth(int l,int r,int k){//log 颗一起求 k 大
        if(l==r)return l;
        int mid=l+r>>1,ans=0;
        for(int i=1;i<=numL;++i)ans-=sum[lc[jL[i]]];
        for(int i=1;i<=numR;++i)ans+=sum[lc[jR[i]]];
        if(ans>=k){
            for(int i=1;i<=numL;++i)//一起换根
                jL[i]=lc[jL[i]];
            for(int i=1;i<=numR;++i)
                jR[i]=lc[jR[i]];
            return kth(l,mid,k);
        }else{
            for(int i=1;i<=numL;++i)
                jL[i]=rc[jL[i]];
            for(int i=1;i<=numR;++i)
                jR[i]=rc[jR[i]];
            return kth(mid+1,r,k-ans);
        }
    }
    void add(int x,int y){
        int pos=lower_bound(b+1,b+1+cnt,a[x])-b;
        for(int i=x;i<=n;i+=lowbit(i))update(rt[i],1,cnt,pos,y);
    }
    int query(int l,int r,int k){
        numL=numR=0;
        for(int i=l-1;i;i-=lowbit(i))jL[++numL]=rt[i];//预处理树状数组上要
跳的 log 颗线段树的根
        for(int i=r;i;i-=lowbit(i))jR[++numR]=rt[i];
        return kth(1,cnt,k);
    }
}tr;
struct Q{
    char s[2];
    int x,y,z;
```

```
}qs[maxm];
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i],b[i]=a[i];
    cnt=n;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>qs[i].s;
        if(qs[i].s[0]=='Q'){
            cin>>qs[i].x>>qs[i].y>>qs[i].z;
        }else{
            cin>>qs[i].x>>qs[i].y;
            b[++cnt]=qs[i].y;//修改的值也要离散化 不存的话就暴力在线
        }
    }
    sort(b+1,b+1+cnt);
    cnt=unique(b+1,b+1+cnt)-(b+1);
    for(int i=1;i<=n;++i)tr.add(i,1);//树状数组上建树
    for(int i=1;i<=m;++i){
        if(qs[i].s[0]=='Q'){
            cout<<b[tr.query(qs[i].x,qs[i].y,qs[i].z)]<<"\n";
        }else{
            tr.add(qs[i].x,-1);
            a[qs[i].x]=qs[i].y;
            tr.add(qs[i].x,1);
        }
    }
    return 0;
}
```

分块

区间众数 强制在线

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
```

```
const int maxn=40005;
int cnt[250][maxn],mx[250][250],ans[250][250],tmp[maxn];
int a[maxn],n,m,big,pos[maxn],num,L[250],R[250],b[maxn],id[maxn],c;
void init(){
    big=sqrt(n);
    num=(n-1)/big+1;
    for(int i=1;i<=num;++i){
        L[i]=(i-1)*big+1;
        R[i]=i*big;
    }
    R[num]=n;
    for(int i=1;i<=num;++i)
        for(int j=L[i];j<=R[i];++j)pos[j]=i;
    sort(b+1,b+1+n);
    c=unique(b+1,b+1+n)-(b+1);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        int x=lower_bound(b+1,b+1+c,a[i])-b;
        id[x]=a[i];
        a[i]=x;
    }
    for(int i=1;i<=n;++i){
        cnt[pos[i]][a[i]]++;
    }
    for(int i=2;i<=num;++i){
        for(int j=1;j<=c;++j)
            cnt[i][j]+=cnt[i-1][j];
    }
    for(int i=1;i<=num;++i){
        int x=0,z=0;//mx ans
        for(int j=L[i];j<=n;++j){
            tmp[a[j]]++;
            if(tmp[a[j]]>x)x=tmp[a[j]],z=a[j];
            else if(tmp[a[j]]==x&&z!=a[j]){
                z=min(z,a[j]);
            }
            mx[i][pos[j]]=x;ans[i][pos[j]]=z;
        }
        for(int j=L[i];j<=n;++j)tmp[a[j]]--;
    }
}
int query(int l,int r){
    int pl=pos[l],pr=pos[r];
    if(pl==pr){
        int x=0,z=0;
```

```
        for(int i=l;i<=r;++i){
            tmp[a[i]]++;
            if(tmp[a[i]]>x)x=tmp[a[i]],z=a[i];
            else if(tmp[a[i]]==x&&z!=a[i]){
                z=min(z,a[i]);
            }
        }
        for(int i=l;i<=r;++i)tmp[a[i]]--;
        return z;
    }else{
        int x=mx[pl+1][pr-1],z=ans[pl+1][pr-1];
        for(int  i=l;i<=R[pl];++i)tmp[a[i]]=cnt[pr-1][a[i]]-cnt[pl][a[i]];
        for(int i=l;i<=R[pl];++i){
            tmp[a[i]]++;
            if(tmp[a[i]]>x)x=tmp[a[i]],z=a[i];
            else if(tmp[a[i]]==x&&a[i]!=z)z=min(z,a[i]);
        }
        for(int i=L[pr];i<=r;++i)
            tmp[a[i]]=tmp[a[i]]?tmp[a[i]]:cnt[pr-1][a[i]]-cnt[pl][a[i]];
        for(int i=L[pr];i<=r;++i){
            tmp[a[i]]++;
            if(tmp[a[i]]>x)x=tmp[a[i]],z=a[i];
            else if(tmp[a[i]]==x&&a[i]!=z)z=min(z,a[i]);
        }
        for(int i=l;i<=R[pl];++i)tmp[a[i]]=0;
        for(int i=L[pr];i<=r;++i)tmp[a[i]]=0;
        return z;
    }
}
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;++i)
        scanf("%d",&a[i]),b[i]=a[i];
    init();
    int l,r,anss=0;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        scanf("%d%d",&l,&r);
        l=(l+anss-1)%n+1;r=(r+anss-1)%n+1;
        if(l>r)swap(l,r);
        cout<<(anss=id[query(l,r)])<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

带插入区间 k 大

```
//带单点修 插入区间 k 小值 O(nsqrt(n))
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=70005;
int n,big,num,pos[maxn],st=1,tmpcnt[305],tmpsum[maxn],m;
struct Block{//序列分块
    int l,r,sz;
    int cnt[305],sum[maxn];//序列前 i 块在值域第 j 块出现次数,前 i 块值 j 出现次数
    int a[605];
}b[605];
void init(){
    big=300;
    num=n/big+1;
    for(int  i=0;i<=70000;++i)pos[i]=i/big+1;//这里将值域和序列块大小设为一样 需要卡常要改
    for(int i=1;i<=n;++i){
        int x;
        scanf("%d",&x);
        b[pos[i]].a[++b[pos[i]].sz]=x;
    }
    for(int i=1;i<=num;++i){
        if(i>1)b[i].l=i-1;
        if(i<num)b[i].r=i+1;
        for(int j=1;j<=b[i].sz;++j){
            b[i].cnt[pos[b[i].a[j]]]++;
            b[i].sum[b[i].a[j]]++;
        }
        for(int j=0;j<=70000;++j){
            if(!j||pos[j]!=pos[j-1])b[i].cnt[pos[j]]+=b[i-1].cnt[pos[j]];
            b[i].sum[j]+=b[i-1].sum[j];
        }
    }
}
int kth(int l,int r,int k){
    int now=st,pl,pr;
    while(b[now].sz<l)l-=b[now].sz,now=b[now].r;
    pl=now,now=st;
    while(b[now].sz<r)r-=b[now].sz,now=b[now].r;
    pr=now;//块状链表上找位置
    if(pl==pr){//[1,l][l+1,r][r+1,b.sz]
        for(int
```

```
i=l;i<=r;++i)tmpcnt[pos[b[pl].a[i]]]++,tmpsum[b[pl].a[i]]++;//tmpcnt 临时
值域第 i 块出现次数 tmpsum 某数出现的次数
        now=1;//构建新的值域分块
        while(tmpcnt[now]<k)k-=tmpcnt[now],now++;
        now=(now-1)*big;
        while(tmpsum[now]<k)k-=tmpsum[now],now++;//进入值域树第三层找
        for(int                    i=l;i<=r;++i)tmpcnt[pos[b[pl].a[i]]]-
-,tmpsum[b[pl].a[i]]--;
        return now;
    }else{
        for(int
i=l;i<=b[pl].sz;++i)tmpcnt[pos[b[pl].a[i]]]++,tmpsum[b[pl].a[i]]++;
        for(int
i=1;i<=r;++i)tmpcnt[pos[b[pr].a[i]]]++,tmpsum[b[pr].a[i]]++;
        now=1;//值域分块中找
        while(tmpcnt[now]+b[b[pr].l].cnt[now]-b[pl].cnt[now]<k)k-
=tmpcnt[now]+b[b[pr].l].cnt[now]-b[pl].cnt[now],now++;
        now=(now-1)*big;
        while(tmpsum[now]+b[b[pr].l].sum[now]-b[pl].sum[now]<k)k-
=tmpsum[now]+b[b[pr].l].sum[now]-b[pl].sum[now],now++;
        for(int             i=l;i<=b[pl].sz;++i)tmpcnt[pos[b[pl].a[i]]]-
-,tmpsum[b[pl].a[i]]--;
        for(int                    i=1;i<=r;++i)tmpcnt[pos[b[pr].a[i]]]-
-,tmpsum[b[pr].a[i]]--;
        return now;
    }
}
void update(int x,int y){
    int now=st;
    while(b[now].sz<x)x-=b[now].sz,now=b[now].r;
    int fi=b[now].a[x];
    if(fi==y)return;
    b[now].a[x]=y;
    while(now){//维护值域分块
        b[now].cnt[pos[fi]]--;
        b[now].cnt[pos[y]]++;
        b[now].sum[fi]--;
        b[now].sum[y]++;
        now=b[now].r;
    }
}
void split(int x){//直接分裂
    int newP=++num;
    b[newP].r=b[x].r;b[b[x].r].l=newP;b[x].r=newP;b[newP].l=x;
```

```
    b[newP].sz=b[x].sz/2;
    int del=b[x].sz-b[newP].sz;
    memcpy(b[newP].cnt,b[x].cnt,sizeof(b[x].cnt));
    memcpy(b[newP].sum,b[x].sum,sizeof(b[x].sum));
    for(int i=del+1;i<=b[x].sz;++i){
        b[newP].a[i-del]=b[x].a[i];
        b[x].cnt[pos[b[x].a[i]]]--;b[x].sum[b[x].a[i]]--;
        b[x].a[i]=0;
    }
    b[x].sz=del;
}
void ins(int x,int val){
    int now=st;
    while(b[now].sz<x){
        if(b[now].r)x-=b[now].sz,now=b[now].r;
        else break;
    }
    for(int i=b[now].sz;i>=x;--i)b[now].a[i+1]=b[now].a[i];
    b[now].a[x]=val;b[now].sz++;
    int on=now;
    while(now){//维护值域分块
        b[now].cnt[pos[val]]++;
        b[now].sum[val]++;
        now=b[now].r;
    }
    if(b[on].sz>=big*2)split(on);
}
int main(){
    scanf("%d",&n);
    init();
    scanf("%d",&m);
    int op,ans=0,x,y,k;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        char s[2];
        scanf("%s",s);
        if(s[0]=='Q'){
            scanf("%d%d%d",&x,&y,&k);
            x^=ans;y^=ans;k^=ans;
            cout<<(ans=kth(x,y,k))<<"\n";
        }
        else if(s[0]=='M'){
            scanf("%d%d",&x,&y);
            x^=ans;y^=ans;
            update(x,y);
```

```
        }
        else{
            scanf("%d%d",&x,&y);
            x^=ans;y^=ans;
            ins(x,y);
        }
    }
    return 0;
}
```

莫队

静态莫队

```
#include<bits/stdc++.h>// O(nsqrt(m)) 在块大小等于 n/sqrt(m)最优
using namespace std;
const int maxn=1e5+5;
int pos[maxn],big,a[maxn],n,m,cnt[maxn],pl,pr,ans[maxn],nowans;
struct Q{
    int L,R,id;
    bool operator<(const Q&a){
        if(pos[L]!=pos[a.L])return pos[L]<pos[a.L];
        if(pos[L]&1)return R>a.R;
        return R<a.R;
    }
}q[maxn];
void init(){
    big=n/sqrt(m);
    for(int i=1;i<=n;++i)pos[i]=(i-1)/big+1;
}
void add(int x){
    if((++cnt[a[x]])==1)nowans++;
}
void del(int x){
    if((--cnt[a[x]])==0)nowans--;
}
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;++i)scanf("%d",&a[i]);
    init();
    for(int i=1;i<=m;++i)scanf("%d%d",&q[i].L,&q[i].R),q[i].id=i;
    sort(q+1,q+1+m);
```

```
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int l=q[i].L,r=q[i].R;
        while(pl<l)del(pl++);
        while(pl>l)add(--pl);
        while(pr<r)add(++pr);
        while(pr>r)del(pr--);
        if(nowans==(r-l+1))ans[q[i].id]=1;
    }
    for(int i=1;i<=m;++i)
        puts(ans[i]?"Yes":"No");
    return 0;
}
```

回滚莫队

应用于删除或插入某种操作难以实现时，只删除或只插入
按左端点所属块排序，枚举块，左右端点同块的时候暴力，否则右端点单调，左端点回滚
O(msqrt(n)+nsqrt(n))

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=1e5+5;
const int mod=998244353;
int
a[maxn],pos[maxn],L[maxn],R[maxn],big,n,m,num,pre[maxn],nxt[maxn],cnt[m
axn],ans[maxn],tot,Tong[maxn];
struct Q{
    int l,r,k,id;
    bool operator<(const Q&x)const{
        return (pos[l]^pos[x.l])?(pos[l]<pos[x.l]):r<x.r;
    }
}q[maxn];
void init(){
    big=sqrt(n);
    num=(n-1)/big+1;
    for(int i=1;i<=num;++i){
        L[i]=R[i-1]+1;
        R[i]=i*big;
    }
    R[num]=n;
    for(int i=1;i<=num;++i)
        for(int j=L[i];j<=R[i];++j)
            pos[j]=i;
}
```

```
void add(int x,int&ans){
    cnt[x]++;
    if(cnt[x]==1){
        pre[x]=nxt[x]=x;
        if(cnt[x-1])pre[x]=pre[x-1];
        if(cnt[x+1])nxt[x]=nxt[x+1];
        if(pre[x])nxt[pre[x]]=nxt[x];
        if(nxt[x])pre[nxt[x]]=pre[x];
        ans=max(ans,nxt[x]-pre[x]+1);
    }
}
void del(int x){
    cnt[x]--;
    if(!cnt[x]){
        pre[x]=nxt[x]=0;//保证链的端点对就好了
        if(pre[x-1])
            nxt[pre[x-1]]=nxt[x-1]=x-1;
        if(nxt[x+1])
            pre[nxt[x+1]]=pre[x+1]=x+1;
    }
}
void Clear(int x){
    cnt[x]=pre[x]=nxt[x]=0;
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    init();
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>q[i].l>>q[i].r>>q[i].k;
        q[i].id=i;
    }
    sort(q+1,q+1+m);
    for(int i=1,now=1;i<=num;++i){ //枚举块
        int pl=R[i]+1,pr=R[i];//
        for(int i=1;i<=n;++i)cnt[i]=pre[i]=nxt[i]=0;
        int nowans=0;
        for(;pos[q[now].l]==i;now++){
            if(pos[q[now].l]==pos[q[now].r]){  //同块暴力
                int tmpans=0,sum=0;
                int k=q[now].k;
                for(int j=q[now].l;j<=q[now].r;++j){
```

```
                    add(a[j],tmpans);
                    Tong[++tot]=a[j];
                }
                sum+=tmpans;
                int tmpL=q[now].l,tmpR=q[now].r;
                for(int j=1,f=(n+1);j<=k-1;++j,f=(ll)f*(n+1)%mod){
                    add(a[tmpL-j],tmpans);
                    add(a[tmpR+j],tmpans);
                    Tong[++tot]=a[tmpL-j],Tong[++tot]=a[tmpR+j];
                    sum=(sum+(ll)tmpans*f)%mod;
                }
                while(tot)del(Tong[tot--]);
               // for(int j=tmpL-(k-1);j<=tmpR+(k-1);++j)
                 //   Clear(a[j]);
                ans[q[now].id]=sum;
            }else{ //不同块右端点单调，左端点回滚
                int sum=0,k=q[now].k;
                while(pr<q[now].r)
                    add(a[++pr],nowans);
                int tmp=nowans,tmpL=pl;
                while(pl>q[now].l){
                    add(a[--pl],nowans),Tong[++tot]=a[pl];
                }
                sum+=nowans;
                sum%=mod;
                for(int j=1,f=(n+1);j<=k-1;++j,f=(ll)f*(n+1)%mod){
                    add(a[pl-j],nowans);
                    add(a[pr+j],nowans);
                    Tong[++tot]=a[pl-j],Tong[++tot]=a[pr+j];
                    sum=(sum+(ll)nowans*f)%mod;
                }
                ans[q[now].id]=sum;
                if(pos[q[now+1].l]==i){  //注意回滚的时候是当前块全部回滚还是
只回滚一个询问
                    while(tot)del(Tong[tot--]);
                }else{
                    for(int j=pl-(k-1);j<=pr+(k-1);++j)Clear(a[j]);
                    tot=0;
                }
                pl=tmpL,nowans=tmp;
            }
        }
    }
    for(int i=1;i<=m;++i)cout<<ans[i]<<"\n";
```

```
    return 0;
}
```

可删堆

```
struct EraseHeap{//两个堆维护可删堆
    priority_queue<int>a,b;//a 存所有状态,b 存无用状态
    void push(int x){
        a.push(x);
    }
    void erase(int x){
        b.push(x);
    }
    void pop(){
        while(!b.empty()&&a.top()==b.top())
            a.pop(),b.pop();
        a.pop();
    }
    int top(){//最大
        while(!b.empty()&&a.top()==b.top())
            a.pop(),b.pop();
        return a.empty()?0:a.top();
    }
    int size(){
        return a.size()-b.size();
    }
    int stop(){//次大
        if(size()<2)return 0;
        int x=top();pop();
        int y=top();push(x);
        return y;
    }
};
```

可并堆

```
struct EraseHeap{//两个堆维护可删堆
    priority_queue<int>a,b;//a 存所有状态,b 存无用状态
    void push(int x){
        a.push(x);
    }
    void erase(int x){
```

```
        b.push(x);
    }
    void pop(){
        while(!b.empty()&&a.top()==b.top())
            a.pop(),b.pop();
        a.pop();
    }
    int top(){//最大
        while(!b.empty()&&a.top()==b.top())
            a.pop(),b.pop();
        return a.empty()?0:a.top();
    }
    int size(){
        return a.size()-b.size();
    }
    int stop(){//次大
        if(size()<2)return 0;
        int x=top();pop();
        int y=top();push(x);
        return y;
    }
};
```

左偏树

```
//1.pushUp 删除任意结点才需，只是根直接 merge
//2.假如有 find 操作，pop 删除的时候根要指清楚
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=100010;
int n,m,op,x,y,tot;
int fa[maxn];
bool tf[maxn];
struct Node{
    int val,lc,rc,dis,id;
    bool operator<(Node x)const{ return val==x.val?id<x.id:val<x.val;}
}tr[maxn];
int find(int x){
    if(x==fa[x])return x;
    return fa[x]=find(fa[x]);
}
void pushUp(int x){ //删除任意结点时用  O(logn)
    if(!x)return;
    if(tr[x].dis!=tr[tr[x].rc].dis+1){
```

```
        tr[x].dis=tr[tr[x].rc].dis+1;
        pushUp(fa[x]);
    }
}
int merge(int x,int y){
    if(!x||!y)return x+y;
    if(tr[x].val>tr[y].val)swap(x,y);
    tr[x].rc=merge(tr[x].rc,y);
    fa[tr[x].rc]=x;//删除任意结点 若只是根不需要
    if(tr[tr[x].lc].dis<tr[tr[x].rc].dis)swap(tr[x].lc,tr[x].rc);
    tr[x].dis=tr[tr[x].rc].dis+1;
    pushUp(x);//删除任意结点时只需直接 merge 左右儿子即可 若只是根则不需要
    return x;
}
int build() {//O(n)建树
    queue<int> q;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        q.push(i);
    while (!q.empty()) {
        if (q.size() == 1) break;
        else {
            int x = q.front(); q.pop();
            int y = q.front(); q.pop();
            q.push(merge(x, y));
        }
    }
    int finally = q.front(); q.pop();
    return finally;
}
void init(int x){
    for(int i=0;i<=x;++i){
        tr[i].lc=tr[i].rc=tr[i].dis=0;
        fa[i]=i;
    }
}
int add(int val,int x){
    tr[tot].lc=tr[tot].rc=tr[tot].dis=0;
    tr[tot++].val=val;
    return merge(tot-1,x);
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
```

```
    init(n);
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>tr[i].val;
    while(m--){
        cin>>op>>x;
        if(op==1){ //合并第 x 个数和第 y 个数的小根堆
            cin>>y;
            if(tf[x]||tf[y])continue;
            x=find(x);y=find(y);
            if(x!=y)fa[x]=fa[y]=merge(x,y);//这一步必须有
        }
        if(op==2){ //输出第 x 个数所在堆最小数并删除
            if(tf[x]){ cout<<-1<<"\n";continue;}
            x=find(x);
            cout<<tr[x].val<<"\n";
            tf[x]=1;
            fa[tr[x].lc]=fa[tr[x].rc]=fa[x]=merge(tr[x].lc,tr[x].rc);//删
除根结点 并查集找根必须有 fa 的维护 否则 pushUp 就好了
            tr[x].lc=tr[x].rc=tr[x].dis=0;//pop
        }
    }
}
```

整体二分

区间带修第 k 小

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=1e5+10;
int n,m,a[maxn*3],val[maxn*3],b[maxn*3],tot,cnt;//数组大小注意到底是几倍
struct BIT{
    #define lowb(i) (i&(-i))
    int c[maxn];
    void add(int x,int val){
        for(int i=x;i<=n;i+=lowb(i))
            c[i]+=val;
    }
    int ask(int x){
        int ans=0;
        for(int i=x;i;i-=lowb(i))
            ans+=c[i];
        return ans;
```

```
    }
}bit;
struct Opt {
  int x, y, k, type, id;
  // 对于询问, type = 1, x, y 表示区间左右边界, k 表示询问第 k 小
  // 对于修改, type = 0, x 表示修改位置, y 表示修改后的值,
  // k 表示当前操作是插入(1)还是擦除(-1), 更新树状数组时使用.
  // id 记录每个操作原先的编号, 因二分过程中操作顺序会被打散
}q[maxn*3],q1[maxn*3],q2[maxn*3];
int ans[maxn];
void solve(int l,int r,int ql,int qr){
    if(l>r||ql>qr)return;
    if(l==r){
        for(int i=ql;i<=qr;++i){
            if(q[i].type==1)ans[q[i].id]=l;
        }
        return;
    }
    int cnt1=0,cnt2=0,mid=l+r>>1;
    for(int i=ql;i<=qr;++i){
        if(q[i].type==1){
            int x=bit.ask(q[i].y)-bit.ask(q[i].x-1);
            if(q[i].k<=x)
                q1[++cnt1]=q[i];
            else{
                q[i].k-=x;
                q2[++cnt2]=q[i];
            }
        }else{
            if(q[i].y<=mid){
                bit.add(q[i].x,q[i].k);//贡献给>mid
                q1[++cnt1]=q[i];
            }else{
                q2[++cnt2]=q[i];
            }
        }
    }
    for(int i=1;i<=cnt1;++i){//roll back
        if(!q1[i].type)
            bit.add(q1[i].x,-q1[i].k);
    }
    for(int i=1;i<=cnt1;++i)q[i+ql-1]=q1[i];
    for(int i=1;i<=cnt2;++i)q[ql+i+cnt1-1]=q2[i];
    solve(l,mid,ql,ql+cnt1-1);
```

```
    solve(mid+1,r,ql+cnt1,qr);
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i],b[++cnt]=a[i];
    for(int i=1;i<=n;++i){//初始化看成插入
        q[++tot]={i,a[i],1,0,0};
    }
    char s[2];
    int l,r,k;
    for(int i=1;i<=m;++i)ans[i]=-1;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>s;
        if(s[0]=='Q'){
            cin>>l>>r>>k;
            q[++tot]={l,r,k,1,i};
        }else{//a_l 改为 k
            cin>>l>>k;
            b[++cnt]=k;
            q[++tot]={l,a[l],-1,0,i};
            a[l]=k;
            q[++tot]={l,k,1,0,i};
        }
    }
    //离散化
    sort(b+1,b+1+cnt);
    cnt=unique(b+1,b+1+cnt)-(b+1);
    for(int i=1;i<=cnt;++i){
        val[i]=b[i];
    }
    for(int i=1;i<=tot;++i){
        if(q[i].type==0)
            q[i].y=lower_bound(b+1,b+1+cnt,q[i].y)-b;
    }

    solve(1,cnt,1,tot);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        if(ans[i]!=-1)cout<<val[ans[i]]<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

树论

dfs 序与欧拉序

浅谈树序与欧拉序与结合的相关问题
在本文章中，序指 dfs 中点的入栈顺序，而出栈顺序表示该点子树的结尾区间

```
void dfs(int x,int fa){
in[x]=++ti;
   ....
    out[x]=ti;
}
```

欧拉序长为,且一般记录对应位置的符号

```
void dfs(int x,int fa){
    in[x]=++ti;f[ti]=1;
   ...
    out[x]=++ti;f[ti]=-1
}
```

两者都可将子树线性化，只是面对不同问题，代码复杂度与维护难度稍有不同，基本上 dfs 序能做的，欧拉序都能做，有些问题我会列举出来，有些不会

诚然，里面很多问题树剖都可以替代 dfs 序和欧拉序，但是还是希望大家在遇到**子树线性化与某点到根的链计算**维护的时候可以先思考这两者，再考虑树剖，复杂的树链问题当然就使用树剖了

下面先给出关于这两者的 7 个经典问题及其解法

1.树上单点加，子树点权和

dfs序后每个位置维护每个点的权值，所以树状数组单点加，区间查询

2.$x->y$树上链加，单点查询

离线树上差分，$x++,y++,LCA[(x,y)]--,fat[LCA(x,y)]--$，子树和查询，只是这里在线，所以$dfs$序转化后，相等于1问题，链加变单点加，单点查询变区间查询，树状数组维护即可

3.x->y树上链加，子树和查询

dfs序后，修改同2，考虑修改A，查询B，当A是B的子树时，才有$(dep[A]-dep[B]+1)*w$,所以两个树状数组分别维护

$(dep[x]+1)*w,w$,答案为$Sum(out[B])-Sum(in[B]-1)-(Sum1(out[B])-Sum1(in[B]-1))*dep[B]$

4.单点加，x->y路径点权查询

两种方法：路径点权转化为$+x->rt,+y->rt,-(LCA(x,y)->rt),-(fat[LCA(x,y)]->rt)$

（1）欧拉序后，点到根路径和等价于$Sum(in[x])$,修改就在$in[x]$位置$+=val$,$out[x]$位置$-=w$就好了，树状数组维护，$O(ln(2n))$(更快更好写)

(2)dfs序后，每个位置直接保留$x->rt$的答案，则操作变成$[in[x],out[x]]$区间加，单点查询，线段树维护，$O(logn)$,

5.子树加，单点查询

dfs序后线段树$[in[x],out[x]]$区间修改，单点查询

6.子树加，子树查询

同6差不多，dfs序后区间加，区间和，线段树即可

7.子树加，链权值查询

链权值查询转为4个点到根查询，dfs序后每个位置直接保留$x->rt$的权值和，子树加对于x的子树中y点来说，$+=(1-dep[x])*val+val*dep[y]$，两个树状数组分别维护$(1-dep[x])*val$和$val$，区间修改单点查询差分转单点修改区间前缀和查询即可

答案就是$Sum1(in[x])+Sum2(in[x])*dep[x]$

8.链路径加，单点查询，子树查询

比3多了个查询，直接在维护的其中一个树状数组上查就好了

9.单点加，子树加，链权值查询

同7,多个单点加，只是在$Sum1$这个树状数组内一样做个差分修改即可

我们可以发现对于树上的基本操作，**单点加，单点查询，子树加，子树查询，链加，链查询**，基本上只要查询或者修改只有一种操作，就可以用dfs序来维护，不用写树剖,而一般更为常见于子树问题，当然我觉得很多问题**线段树合并**都可以暴力做x

LCA

//**倍增**　nlogn – logn

```
const int maxn=5e5+5;
int f[maxn][21],t,n,m,d[maxn],tot=0,lg[maxn],s;
int head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1];
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
void dfs(int x,int fa){
    d[x]=d[fa]+1;//d[1]=1 必须
    f[x][0]=fa;
```

```
    for(int i=1;i<=lg[d[x]];++i)
        f[x][i]=f[f[x][i-1]][i-1];
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int v=ver[i];
        if(v==fa)continue;
        dfs(v,x);
    }
}
int lca(int x,int y){
    if(d[x]<d[y])swap(x,y);
    while(d[x]>d[y])
        x=f[x][lg[d[x]-d[y]]-1];
    if(x==y)return x;
    for(int i=lg[d[y]]-1;i>=0;--i)
        if(f[x][i]!=f[y][i])x=f[x][i],y=f[y][i];
    return f[x][0];
}
void init(){
    for(int i=1;i<=n;++i)     //预处理 log2(n)+1
        lg[i]=lg[i-1]+(1<<lg[i-1]==i);
}
```

RMQ

```
int dfn[maxn],d[maxn],st[maxn<<1][21],lg[maxn<<1],ti; O(nlogn)-O(1)
void dfs(int x,int f){
    dfn[x]=++ti;d[x]=d[f]+1;st[ti][0]=x;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f)continue;
        dfs(y,x);
        st[++ti][0]=x;
    }
}
void RMQ(){
    for(int i=2;i<=ti;++i)lg[i]=lg[i>>1]+1;
    for(int j=1;j<=lg[ti];++j)
        for(int i=1;(i+(1<<j)-1)<=ti;++i){
            int r=i+(1<<(j-1));
            st[i][j]=d[st[i][j-1]]<d[st[r][j-1]]?st[i][j-1]:st[r][j-1];
        }
}
int query(int l,int r){
```

```
    if(l>r)swap(l,r);
    int k=lg[r-l+1];
    return d[st[l][k]]<d[st[r-(1<<k)+1][k]]?st[l][k]:st[r-(1<<k)+1][k];
}
void init(int rt){
    dfs(rt,0);
    RMQ();
}
int LCA(int x,int y){
    return query(dfn[x],dfn[y]);
}
```

树剖详见重剖板子

O(nlogn)-O(log) 常数小

Kruskal 重构树

```
//常用于解决从图上某点出发经过边权不超过 x 能到达的点
struct Edge{
    int u,v,w;
    bool operator<(const Edge&a){
        return w<a.w;//升序最大边权最小 降序最小边权最大 (u,v)上答案=LCA(u,v)
    }
}edge[M];
vector<int>G[M];//M 大小开两倍 树上 2*n-1 个点
int cnt,fa[M],f[M][22],col[M],Q,d[M],rt[M],ans[M],n,m,lg[M],val[M],t;
int find(int x){
    if(x==fa[x])return x;
    return fa[x]=find(fa[x]);
}
void exKruskal(){
    cnt=n;
    for(int i=1;i<(n<<1);++i)fa[i]=i;
    sort(edge+1,edge+1+m);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int xx=find(edge[i].u),yy=find(edge[i].v);
        if(xx==yy)continue;
        val[++cnt]=edge[i].w;
        fa[xx]=fa[yy]=cnt;
        G[xx].pb(cnt);G[cnt].pb(xx);
        G[yy].pb(cnt);G[cnt].pb(yy);
```

```
    }
    dfs(cnt,0);//处理生成树信息
}
```

重链剖分

```
//树剖模板点权链加、链和查询、子树加、子树和、lca、换根
#include<bits/stdc++.h>
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=1e5+5;
int
head[maxn],next1[maxn<<1],ver[maxn<<1],tot,n,m,a[maxn],op,u,v,rt,nval[m
axn],ti;
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
struct SegmentTree{
    ll sum[maxn<<2],add[maxn<<2];
    void pushUp(int p){
        sum[p]=sum[ls]+sum[rs];
    }
    void pushDown(int p,int l,int r){
        int mid=l+r>>1;
        sum[ls]+=1ll*(mid-l+1)*add[p];
        sum[rs]+=1ll*(r-mid)*add[p];
        add[ls]+=add[p];add[rs]+=add[p];
        add[p]=0;
    }
    void build(int p,int l,int r){
        add[p]=0;
        if(l==r){
            sum[p]=nval[l];
            return;
        }
        int mid=l+r>>1;
        build(lson);
        build(rson);
        pushUp(p);
    }
```

```
    ll query(int p,int l,int r,int L,int R){
        if(L<=l&&r<=R)return sum[p];
        if(add[p])
            pushDown(p,l,r);
        int mid=l+r>>1;
        ll ans=0;
        if(L<=mid)ans+=query(lson,L,R);
        if(R>mid)ans+=query(rson,L,R);
        return ans;
    }
    void update(int p,int l,int r,int L,int R,int val){
        if(L<=l&&r<=R){
            sum[p]+=1ll*(r-l+1)*val;
            add[p]+=val;return;
        }
        if(add[p])
            pushDown(p,l,r);
        int mid=l+r>>1;
        if(L<=mid)update(lson,L,R,val);
        if(R>mid)update(rson,L,R,val);
        pushUp(p);
    }
}tr;
struct HCD{
    int fa[maxn],son[maxn],dep[maxn],sz[maxn],top[maxn],in[maxn];
    //树剖部分
    void dfs1(int x,int f){//第一遍处理父亲、深度、重儿子、子树大小
        fa[x]=f;sz[x]=1;
        dep[x]=dep[f]+1;
        int mxson=-1;
        for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
            int y=ver[i];
            if(y==f)continue;
            dfs1(y,x);
            sz[x]+=sz[y];
            if(sz[y]>mxson)son[x]=y,mxson=sz[y];//记录重儿子
        }
    }

    void dfs2(int x,int t){//重新标号赋值、记录链顶端
        in[x]=++ti;
        nval[ti]=a[x];
        top[x]=t;
        if(!son[x])return;//叶子
```

```
    dfs2(son[x],t);//先重后轻
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==fa[x]||y==son[x])continue;
        dfs2(y,y);//轻边自己开始
    }
}

void init(int x){
    dfs1(x,0);dfs2(x,x);
}

//求 lca
int lca(int x,int y){
    while(top[x]!=top[y]){
        if(dep[top[x]]<dep[top[y]])swap(x,y);
        x=fa[top[x]];
    }
    if(dep[x]>dep[y])swap(x,y);
    return x;
}
//链查询
ll Pquery(int x,int y){//顶端深度深的跳，直到相同，修改同理
    ll ans=0;
    while(top[x]!=top[y]){
        if(dep[top[x]]<dep[top[y]])swap(x,y);
        ans+=tr.query(1,1,ti,in[top[x]],in[x]);
        x=fa[top[x]];
    }
    if(dep[x]<dep[y])swap(x,y);
    ans+=tr.query(1,1,ti,in[y],in[x]);
    return ans;
}
//链修改
void Pupdate(int x,int y,int val){
    while(top[x]!=top[y]){
        if(dep[top[x]]<dep[top[y]])swap(x,y);
        tr.update(1,1,ti,in[top[x]],in[x],val);
        x=fa[top[x]];
    }
    if(dep[x]<dep[y])swap(x,y);
    tr.update(1,1,ti,in[y],in[x],val);
}
//找 y 的祖先中 x 的儿子
```

```
    int findson(int x,int y){
        while(top[x]!=top[y]){
            if(fa[top[y]]==x)
                return top[y];
            y=fa[top[y]];
        }
        return son[x];
    }
    //可判断换根子树修改
    void Sonupdate(int x,int val){
        if(lca(x,rt)!=x)//新根在 x 子树外，无影响
            tr.update(1,1,ti,in[x],in[x]+sz[x]-1,val);
        else if(x==rt)//本身一颗
            tr.update(1,1,ti,1,ti,val);
        else{//整颗减去新根的祖先中 x 为根的子树
            int s=findson(x,rt);
            tr.update(1,1,ti,1,in[s]-1,val);
            if(in[s]+sz[s]<=n)
                tr.update(1,1,ti,in[s]+sz[s],ti,val);
        }
    }
    //可判断换根子树查询
    ll Sonquery(int x){
        if(lca(x,rt)!=x)
            return tr.query(1,1,ti,in[x],in[x]+sz[x]-1);
        else if(x==rt)
            return tr.sum[1];
        else{
            int s=findson(x,rt);
            ll ans=0;
            ans+=tr.query(1,1,ti,1,in[s]-1);
            if(in[s]+sz[s]<=n)
                ans+=tr.query(1,1,ti,in[s]+sz[s],ti);
            return ans;
        }
    }
}hcd;
int main(){
    rt=1;
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<=n;++i)scanf("%d",&a[i]);
    int x;
    for(int i=1;i<=n-1;++i){
        scanf("%d",&x);
```

```
        add(i+1,x);
        add(x,i+1);
    }
    hcd.init(1);
    tr.build(1,1,ti);
    scanf("%d",&m);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        scanf("%d",&op);
        if(op==1){//换根
            scanf("%d",&rt);
        }else if(op==2){//链修改
            scanf("%d%d%d",&u,&v,&x);
            hcd.Pupdate(u,v,x);
        }else if(op==3){//子树修改
            scanf("%d%d",&u,&x);
            hcd.Sonupdate(u,x);
        }else if(op==4){//链查询
            scanf("%d%d",&u,&v);
            cout<<hcd.Pquery(u,v)<<"\n";
        }else{//子树查询
            scanf("%d",&u);
            cout<<hcd.Sonquery(u)<<"\n";
        }
    }
    return 0;
}
```

长链剖分

树上 k 级祖先

```
//树上 k 级祖先 O(nlogn)~O(1)
#include<bits/stdc++.h>
#define pb push_back
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=5e5+5;
int
f[maxn][20],n,u,v,len[maxn],head[maxn],next1[maxn<<1],ver[maxn<<1],tot,
hbit[maxn],m,lg[maxn];
vector<int>U[maxn],D[maxn];
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
```

```
}
struct LCD{
    int  fa[maxn],dep[maxn],md[maxn],hson[maxn],top[maxn];//md[x]表示该点
子树的最深深度
    void dfs1(int x,int fat){
        f[x][0]=fa[x]=fat;
        md[x]=dep[x]=dep[fat]+1;
        for(int i=1;i<=lg[dep[x]];++i)
            f[x][i]=f[f[x][i-1]][i-1];
        for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
            int y=ver[i];
            if(y==fat)continue;
            dfs1(y,x);
            if(md[y]>md[hson[x]])hson[x]=y,md[x]=md[y];
        }
    }
    void dfs2(int x,int t){
        top[x]=t;
        len[x]=md[x]-dep[top[x]];//链长
        if(!hson[x])return;
        dfs2(hson[x],t);
        for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
            int y=ver[i];
            if(y==fa[x]||y==hson[x])continue;
            dfs2(y,y);
        }
    }
    void init(int x){
        dfs1(x,0);dfs2(x,x);
    }
    int query(int x,int k){//x 的 k 级祖先
        if(k>dep[x])return 0;
        if(!k)return x;
        x=f[x][hbit[k]];k^=(1<<hbit[k]);
        if(dep[x]-dep[top[x]]==k)return top[x];
        if(dep[x]-dep[top[x]]>k)return  D[top[x]][dep[x]-dep[top[x]]-k-1];
        return U[top[x]][k-(dep[x]-dep[top[x]])-1];
    }
}lcd;
int main(){
    for(int i=1;i<=n;++i)
        lg[i]=lg[i-1]+(1<<lg[i-1]==i);
    lcd.init(rt);
    for(int i=1;i<=n;++i){
```

```
        if(i==lcd.top[i]){
            int l=0,x=i;
            while(l<len[i]&&x)x=f[x][0],++l,U[i].pb(x);
            l=0,x=i;
            while(l<len[i])x=lcd.hson[x],++l,D[i].pb(x);
        }
    }
    int mx=1;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        if((i>>mx)&1)++mx;
        hbit[i]=mx-1;
    }
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>u>>k;
        cout<<lcd.query(u,k)<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

长链剖分优化 DP 模板

```
//f[i][j]表示 i 子树中距 i 为 j 的方案数，g[i][j]表示 i 子树中(x,y)->lca(x,y)距离为 d,lca(x,y)->i 距离为 d-j 方案数
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=1e5+5;
ll *f[maxn],*g[maxn],tmp[maxn*3],*id=tmp,ans;
int md[maxn],dep[maxn],hson[maxn],head[maxn],next1[maxn<<1],ver[maxn<<1],tot,n;
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
void dfs1(int x,int f){
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f)continue;
        dfs1(y,x);
        if(md[y]>md[hson[x]])hson[x]=y;
    }
    md[x]=md[hson[x]]+1;//md 表示 x 的高度 叶子为 1
}
void dfs(int x,int fa){
```

```
    if(hson[x])
        f[hson[x]]=f[x]+1,g[hson[x]]=g[x]-1,dfs(hson[x],x);
    f[x][0]=1;ans+=g[x][0];//重儿子统计
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==fa||y==hson[x])continue;
        f[y]=id;id+=md[y]<<1;g[y]=id;id+=md[y];
        dfs(y,x);
        for(int j=0;j<md[y];++j){
            if(j)
            ans+=f[x][j-1]*g[y][j];//轻儿子在此统计了 g[y][1]即对 g[x][0]的
贡献
            ans+=g[x][j+1]*f[y][j];//最多到 md[y]-1
        }
        for(int j=0;j<md[y];++j){
            g[x][j+1]+=f[x][j+1]*f[y][j];
            if(j)g[x][j-1]+=g[y][j];
            f[x][j+1]+=f[y][j];//最多可以更新到 md[y]
        }
    }
}
int main(){
    scanf("%d",&n);
    int a,b;
    for(int i=1;i<n;++i){
        scanf("%d%d",&a,&b);
        add(a,b);add(b,a);
    }
    dfs1(1,0);
    f[1]=id;id+=md[1]<<1;
    g[1]=id;id+=md[1];
    dfs(1,0);
    cout<<ans<<"\n";
    return 0;
}
```

长链剖分+后缀和套路

```
//<=k 限制常转>=k
#include<bits/stdc++.h>
#define pb push_back
#define fi first
#define se second
using namespace std;
```

```
typedef long long ll;
const int maxn=3e5+5;
ll *dp[maxn],tmp[maxn],*id=tmp,ans[maxn];
int
sz[maxn],head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],n,q,hson[maxn],md[maxn]
,dep[maxn],tot;
typedef  pair<int,int>P;//dp[i][j]以 i 为根子树距离 i>=j 下,ab 为 c 祖先，bc 在
a 子树下的数量
vector<P>Q[maxn];
void dfs1(int x,int f){
    dep[x]=dep[f]+1;sz[x]=1;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f)continue;
        dfs1(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
        if(md[y]>md[hson[x]])hson[x]=y;
    }
    md[x]=md[hson[x]]+1;
}
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
void dfs(int x,int f){
    dp[x][0]=sz[x]-1;
    if(hson[x]){//指针，长链直接赋值不用+=
        dp[hson[x]]=dp[x]+1;dfs(hson[x],x);dp[x][0]+=dp[hson[x]][0];//
但>=0 没统计
    }
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||y==hson[x])continue;
        dp[y]=id;id+=md[y];
        dfs(y,x);
        dp[x][0]+=dp[y][0];
        for(int j=0;j<md[y];++j)//后缀和维护
            dp[x][j+1]+=dp[y][j];
    }
    for(auto&v:Q[x]){//统计答案的时候减法获取需要答案即可
        ans[v.fi]+=1ll*(sz[x]-1)*min(dep[x]-1,v.se);
        if(v.se<md[x]-1)ans[v.fi]+=dp[x][0]-dp[x][v.se+1]-(sz[x]-1);
        else ans[v.fi]+=dp[x][0]-(sz[x]-1);
    }
}
```

```
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&q);
    int u,v;
    for(int i=1;i<n;++i){
        scanf("%d%d",&u,&v);
        add(u,v);add(v,u);
    }
    dfs1(1,0);
    dp[1]=id;id+=md[1];
    for(int i=1;i<=q;++i){
        scanf("%d%d",&u,&v);
        Q[u].pb({i,v});
    }
    dfs(1,0);
    for(int i=1;i<=q;++i)cout<<ans[i]<<"\n";
    return 0;
}
```

点分治

容斥

```
#include<iostream>//路径权值和<=k 数量
#include<cstdio>
#include<cstring>
#include<algorithm>
using namespace std;
const int maxn=1e4+5;
const int INF=2e9;
int
head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],mxson[maxn],sz[maxn],d[maxn],cnt
,q[maxn],rt,S,ans,tot,n,k,edge[maxn<<1];
bool v[maxn];
void add(int x,int y,int z){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],edge[tot]=z,head[x]=tot;
}
void getRoot(int x,int f){//求重心
    sz[x]=1;mxson[x]=0;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||v[y])continue;
        getRoot(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
```

```
        mxson[x]=max(mxson[x],sz[y]);
    }
    mxson[x]=max(mxson[x],S-sz[x]);
    if(mxson[x]<mxson[rt])rt=x;
}
void getQue(int x,int f){
    q[++cnt]=d[x];
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||v[y])continue;
        d[y]=d[x]+edge[i];
        getQue(y,x);
    }
}
int cal(int x,int cost){
    d[x]=cost;cnt=0;
    getQue(x,0);        //获取离当前点的距离
    sort(q+1,q+1+cnt);
    int l=1,r=cnt,sum=0;
    while(l<r){
        if(q[l]+q[r]<=k){
            sum+=r-l;l++;
        }else r--;
    }
    return sum;
}
void init(int x){
    S=sz[x];
    rt=0;
    getRoot(x,0);
}
void dfz(int x){
    ans+=cal(x,0);
    v[x]=1;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        ans-=cal(y,edge[i]);
        init(y);
        dfz(rt);
    }
}
int main(){
    while(~scanf("%d%d",&n,&k)&&n&&k){
```

```
        int a,b,c;
        tot=rt=ans=0;
        for(int i=1;i<=n;++i)v[i]=head[i]=0;
        for(int i=1;i<n;++i){
            scanf("%d%d%d",&a,&b,&c);
            add(a,b,c);add(b,a,c);
        }
        mxson[0]=INF;S=n;
        getRoot(1,0);
        dfz(rt);
        cout<<ans<<"\n";
    }
}
```

枚举子树

```
#include<bits/stdc++.h>//路径权值和恰好为 k 且边数量最少
#define fi first
#define se second
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=2e5+5;
const int M=1e6+5;
int
n,k,head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],edge[maxn<<1],tot,sz[maxn],m
xson[maxn],rt,S,d[maxn],judge[M],cnttmp,a,b,c,ans=maxn;
pair<int,int>tmp[maxn];
int val[maxn];
bool v[maxn];
void add(int x,int y,int z){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],edge[tot]=z,head[x]=tot;
}
void getRoot(int x,int f){
    sz[x]=1;mxson[x]=0;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||v[y])continue;
        getRoot(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
        mxson[x]=max(mxson[x],sz[y]);
    }
    mxson[x]=max(mxson[x],S-mxson[x]);
    if(mxson[x]<mxson[rt])rt=x;
}
```

```
void init(int x){
    S=sz[x];
    mxson[rt=0]=maxn;
    getRoot(x,0);
}
void getQue(int x,int f,int dd){
    if(d[x]>k)return;
    tmp[++cnttmp]={d[x],dd};
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y]||y==f)continue;
        d[y]=d[x]+edge[i];
        getQue(y,x,dd+1);
    }
}
void cal(int x){
    int num=0;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        d[y]=edge[i];
        cnttmp=0;
        getQue(y,x,1);
        for(int j=cnttmp;j;--j)
            if(judge[k-tmp[j].fi]!=maxn)
                ans=min(ans,judge[k-tmp[j].fi]+tmp[j].se);
        for(int j=cnttmp;j;--j)

val[++num]=tmp[j].fi,judge[tmp[j].fi]=min(judge[tmp[j].fi],tmp[j].se);
    }
    for(int i=num;i;--i)
        judge[val[i]]=maxn;
}
void dfz(int x){
    v[x]=1;judge[0]=0;
    cal(x);
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        init(y);
        dfz(rt);//点分治一定是跳根!!
    }
}
int main(){
```

```
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>n>>k;
    for(int i=1;i<n;++i){
        cin>>a>>b>>c;
        a++;b++;
        add(a,b,c);add(b,a,c);
    }
    S=n;
    mxson[rt=0]=maxn;
    for(int i=1;i<M;++i)judge[i]=maxn;
    getRoot(1,0);
    dfz(rt);
    if(ans==maxn)cout<<"-1"<<"\n";
    else cout<<ans<<"\n";
    return 0;
}
```

点分+dfs 序上 dp

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int mod=1e9+7;
const int maxn=1005;
int
dp[1005][1026],head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],tot,ans[1026],a[m
axn],sz1[maxn],sz2[maxn],mxson[maxn],S,rt,ti=0,dfn[maxn],m,n;
bool v[maxn];
void add_edge(int x,int y){//连通块点权异或和为 0~k 的方案数
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
void add(int&x,int y){
    x+=y;
    if(x>=mod)x-=mod;
}
void init1(){
    tot=0;
    for(int i=1;i<=n;++i)head[i]=0;
    for(int i=0;i<m;++i)ans[i]=0;
}
void getRoot(int x,int f){
    sz1[x]=1;mxson[x]=0;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
```

```
        if(y==f||v[y])continue;
        getRoot(y,x);
        sz1[x]+=sz1[y];
        mxson[x]=max(mxson[x],sz1[y]);
    }
    mxson[x]=max(mxson[x],S-mxson[x]);
    if(mxson[x]<mxson[rt])rt=x;
}
void init(int x){
    S=sz1[x];
    mxson[rt=0]=maxn;
    getRoot(x,0);
}
void dfs(int x,int f){
    sz2[x]=1;dfn[++ti]=x;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||v[y])continue;
        dfs(y,x);
        sz2[x]+=sz2[y];
    }
}
void cal(int x){//重心必选
    ti=0;
    dfs(x,0);
    for(int i=1;i<=ti;++i)
        for(int j=0;j<m;++j)dp[i][j]=0;
    dp[1][a[x]]=1;
    for(int i=1;i<ti;++i)
        for(int j=0;j<m;++j){
            add(dp[i+1][j^a[dfn[i+1]]],dp[i][j]);
            add(dp[i+sz2[dfn[i+1]]][j],dp[i][j]);
        }
    for(int i=0;i<m;++i)add(ans[i],dp[ti][i]);
}
void dfz(int x){
    v[x]=1;
    cal(x);
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        init(y);
        dfz(rt);
    }
```

```
    v[x]=0;
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    int t;
    cin>>t;
    while(t--){
        cin>>n>>m;
        for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
        init1();
        int x,y;
        for(int i=1;i<n;++i){
            cin>>x>>y;
            add_edge(x,y);add_edge(y,x);
        }
        mxson[rt=0]=maxn;
        S=n;
        getRoot(1,0);
        dfz(rt);
        for(int i=0;i<m-1;++i){
            cout<<ans[i]<<" ";
        }
        cout<<ans[m-1]<<"\n";
    }
    return 0;
}
```

点分+FFT 统计树上所有路径条数

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
typedef double db;
const db Pi=acos(-1.0);
const int maxn=1e5+5;
const int mod=1e9+7;
int
head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],tot,sz[maxn],mxson[maxn],S,rt,n,
tmp[maxn],cnttmp;//cnt[i]表示长度为 i 的路径条数 边权都为 1
ll a[maxn*2],cnt[maxn*2];
bool v[maxn];
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
```

```
}
struct FFT{
    struct CP{
        CP(db xx=0,db yy=0){x=xx,y=yy;}
        db x,y;
        CP operator+(CP const&B)const{return CP(x+B.x,y+B.y);}
        CP operator-(CP const&B)const{return CP(x-B.x,y-B.y);}
        CP operator*(CP const&B)const{return CP(x*B.x-y*B.y,x*B.y+y*B.x);}
    }f[maxn*4];
    int n,m,tr[maxn*4];
    void fft(CP*f,bool flag){
        for(int i=0;i<n;++i)
            if(i<tr[i])swap(f[i],f[tr[i]]);
        for(int p=2;p<=n;p<<=1){
            int len=p>>1;
            CP tG(cos(2*Pi/p),sin(2*Pi/p));
            if(!flag)tG.y*=-1;
            for(int k=0;k<n;k+=p){
                CP buf(1,0);
                for(int l=k;l<k+len;l++){
                    CP tt=buf*f[len+l];
                    f[len+l]=f[l]-tt;
                    f[l]=f[l]+tt;
                    buf=buf*tG;
                }
            }
        }
    }
    void init(int nn,int mm,ll aa[]){
        n=nn;m=mm;
        int len;
        for(len=1;len<=n+m;len<<=1);
        for(int i=0;i<len;++i)f[i]={0,0};
        for(int i=0;i<=n;++i)f[i]={aa[i],0};
        for(m+=n,n=1;n<=m;n<<=1);
        for(int i=0;i<n;++i)
            tr[i]=(tr[i>>1]>>1)|((i&1)?n>>1:0);

    }
    void work(ll c[]){
        fft(f,1);
        for(int i=0;i<n;++i)f[i]=f[i]*f[i];
        fft(f,0);
        for(int i=0;i<=m;++i)c[i]=(ll)((f[i].x)/n+0.5);
```

```
    }
}fft;
void getRoot(int x,int f){
    sz[x]=1;mxson[x]=0;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y]||y==f)continue;
        getRoot(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
        mxson[x]=max(mxson[x],sz[y]);
    }
    mxson[x]=max(mxson[x],S-mxson[x]);
    if(mxson[x]<mxson[rt])rt=x;
}
void init(int x){
    mxson[rt=0]=maxn;
    S=sz[x];
    getRoot(x,0);
}
void getQue(int x,int f,int d){
    tmp[++cnttmp]=d;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||v[y])continue;
        getQue(y,x,d+1);
    }
}
void cal(int x,int flag,int d){
    cnttmp=0;
    getQue(x,0,d);
    int mx=*max_element(tmp+1,tmp+1+cnttmp);
    for(int i=0;i<=mx;++i)a[i]=0;
    for(int i=1;i<=cnttmp;++i)a[tmp[i]]++;
    fft.init(mx,mx,a);
    fft.work(a);
    for(int i=0;i<=min(n,2*mx);++i)cnt[i]+=flag*a[i];
}
void dfz(int x){
    v[x]=1;
    cal(x,1,0);
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        cal(y,-1,1);
```

```
        init(y);
        dfz(rt);
    }
    v[x]=0;
}
int main(){
    int u,v;
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<n;++i){
        scanf("%d%d",&u,&v);
        add(u,v);add(v,u);
    }
    mxson[rt=0]=maxn;
    S=n;
    getRoot(1,0);
    dfz(rt);
    return 0;
}
```

点分树

```
#include<bits/stdc++.h>//1.查询距离 x 点为 k 的点的权值和
//2.单点修改第 x 个点的权值
using namespace std;
const int maxn=1e5+5;
int
head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],tot,dfn[maxn],d[maxn],st[maxn<<1
][21],lg[maxn<<1],ti,sz[maxn],mxson[maxn],rt,S,mxdep,maxdep[maxn],newS;
int n,m,val[maxn],fa[maxn];
bool v[maxn];
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
struct BIT{
    #define lowb(x) (x&(-x))
    vector<int>c;
    int N;
    void init(int x){
        N=x-1;
        c.resize(x);
    }
    void add(int x,int val){
        for(int i=x;i<=N;i+=lowb(i))c[i]+=val;
    }
```

```
    int ask(int x){
        int ans=0;
        for(int i=x;i;i-=lowb(i))ans+=c[i];
        return ans;
    }
}bit1[maxn],bit2[maxn];//bit1 维护自己到自己，bit2 维护自己到父亲
void dfs(int x,int f){
    dfn[x]=++ti;d[x]=d[f]+1;st[ti][0]=x;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f)continue;
        dfs(y,x);
        st[++ti][0]=x;
    }
}
void RMQ(){
    for(int i=2;i<=ti;++i)lg[i]=lg[i>>1]+1;
    for(int j=1;j<=lg[n];++j)
        for(int i=1;(i+(1<<j)-1)<=ti;++i){
            int r=i+(1<<(j-1));
            st[i][j]=d[st[i][j-1]]<d[st[r][j-1]]?st[i][j-1]:st[r][j-1];
        }
}
int query(int l,int r){
    if(l>r)swap(l,r);
    int k=lg[r-l+1];
    return d[st[l][k]]<d[st[r-(1<<k)+1][k]]?st[l][k]:st[r-(1<<k)+1][k];
}
int LCA(int x,int y){
    return query(dfn[x],dfn[y]);
}
void getRoot(int x,int f){
    sz[x]=1;mxson[x]=0;
    newS++;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||v[y])continue;
        getRoot(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
        mxson[x]=max(mxson[x],sz[y]);
    }
    mxson[x]=max(mxson[x],S-mxson[x]);
    if(mxson[x]<mxson[rt])rt=x;
}
```

```
void init(int x){
    mxson[rt=0]=maxn;
    S=sz[x];
    getRoot(x,0);
}
void dfz(int x){
    v[x]=1;
    sz[x]=newS+1;//用上一层分治重心的大小更新当前分治节点的 sz 用于询问的时候防止越界（或者直接取.size())
    bit1[x].init(newS+2);
    bit2[x].init(newS+2);
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        newS=0;//用于初始化树状数组
        init(y);
        fa[rt]=x;
        dfz(rt);
    }
}
int Q(int x,int k,bool flag){
    k=min(k+1,sz[x]);                //+1 因为 vector 的偏移
    int ans=0;
    ans+=(flag)?bit1[x].ask(k):bit2[x].ask(k);
    return ans;
}
int getDis(int x,int y){
    int lca=LCA(x,y);
    return d[x]+d[y]-2*d[lca];
}
void update(int x,int y){
    for(int i=x;i;i=fa[i])bit1[i].add(getDis(x,i)+1,y);
    for(int i=x;fa[i];i=fa[i])bit2[i].add(getDis(x,fa[i])+1,y);
}
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;++i)scanf("%d",&val[i]);
    int x,y,op;
    for(int i=1;i<n;++i){
        scanf("%d%d",&x,&y);
        add(x,y);add(y,x);
    }
    dfs(1,0);//预处理 LCA
    RMQ();
```

```
    mxson[rt=0]=maxn;
    S=n;
    getRoot(1,0);
    fa[rt]=0;
    dfz(rt);
    for(int i=1;i<=n;++i)update(i,val[i]);
    int ans=0;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        scanf("%d%d%d",&op,&x,&y);
        x^=ans;y^=ans;
        if(!op){
            ans=0;
            ans+=Q(x,y,1);//x 子树内距离 x<=k 的贡献
            for(int f=x;fa[f];f=fa[f]){
                int dd=getDis(x,fa[f]);
                if(y-dd>=0){
                    ans+=Q(fa[f],y-dd,1)-Q(f,y-dd,0);//减去对当前对父亲加上
父亲对自己
                }
            }
            cout<<ans<<"\n";
        }else
            update(x,y-val[x]),val[x]=y;
    }
    return 0;
}

//树上全为黑点，每次取反，问最远黑点距离
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=1e5+5;
struct EraseHeap{//两个堆维护可删堆
    priority_queue<int>a,b;//a 存所有状态,b 存无用状态
    void push(int x){
        a.push(x);
    }
    void erase(int x){
        b.push(x);
    }
    void pop(){
        while(!b.empty()&&a.top()==b.top())
            a.pop(),b.pop();
        a.pop();
    }
```

```
    int top(){//最大
        while(!b.empty()&&a.top()==b.top())
            a.pop(),b.pop();
        return a.empty()?0:a.top();
    }
    int size(){
        return a.size()-b.size();
    }
    int stop(){//次大
        if(size()<2)return 0;
        int x=top();pop();
        int y=top();push(x);
        return y;
    }
}a[maxn],b[maxn],ans;//a 维护子树节点到其点分树父亲的距离,b 维护 x 儿子的 a 的
最大值(堆顶)
int
fa[maxn],mxson[maxn],sz[maxn],rt,S,dfn[maxn],d[maxn],st[maxn<<1][21],lg
[maxn<<1],ti;
bool v[maxn],col[maxn];
int n,head[maxn],ver[maxn<<1],next1[maxn<<1],tot,num,m;//num 存黑点数量
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
void dfs(int x,int f){
    dfn[x]=++ti;d[x]=d[f]+1;st[ti][0]=x;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f)continue;
        dfs(y,x);
        st[++ti][0]=x;
    }
}
void RMQ(){
    for(int i=2;i<=ti;++i)lg[i]=lg[i>>1]+1;
    for(int j=1;j<=lg[ti];++j)
        for(int i=1;(i+(1<<j)-1)<=ti;++i){
            int r=i+(1<<(j-1));
            st[i][j]=d[st[i][j-1]]<d[st[r][j-1]]?st[i][j-1]:st[r][j-1];
        }
}
inline int LCA(int l,int r){
    if(l>r)swap(l,r);
    int k=lg[r-l+1];
```

```
    return d[st[l][k]]<d[st[r-(1<<k)+1][k]]?st[l][k]:st[r-(1<<k)+1][k];
}
int dis(int x,int y){
    int lca=LCA(dfn[x],dfn[y]);
    return d[x]+d[y]-2*d[lca];
}
void getRoot(int x,int f){
    sz[x]=1;mxson[x]=0;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y]||y==f)continue;
        getRoot(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
        mxson[x]=max(mxson[x],sz[y]);
    }
    mxson[x]=max(mxson[x],S-mxson[x]);
    if(mxson[x]<mxson[rt])rt=x;
}
void init(int x){
    mxson[rt=0]=maxn;
    S=sz[x];
    getRoot(x,0);
}
void dfz(int x){
    v[x]=1;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(v[y])continue;
        init(y);
        fa[rt]=x;
        dfz(rt);
    }
}
void OFF(int x){//考虑 x->i->fa[i]讨论
    b[x].push(0);//自己当端点
    if(b[x].size()==2)ans.push(b[x].top());//自己当端点的情况一条链
    for(int i=x;fa[i];i=fa[i]){//更新
        int f=fa[i];
        int dd=dis(f,x),tmp=a[i].top();
        a[i].push(dd);//更新自己到父亲
        if(dd>tmp){
            int mx=b[f].top()+b[f].stop(),size=b[f].size();
            if(tmp)b[f].erase(tmp);//tmp 不在堆顶了
            b[f].push(dd);
```

```
            int now=b[f].top()+b[f].stop();
            if(now>mx){
                if(size>=2)ans.erase(mx);//mx 原来在里面
                if(b[f].size()>=2)ans.push(now);
            }
        }
    }
}
void ON(int x){
    if(b[x].size()==2)ans.erase(b[x].top());//只剩自己当端点的链删掉
    b[x].erase(0);
    for(int i=x;fa[i];i=fa[i]){
        int f=fa[i];
        int dd=dis(f,x),tmp=a[i].top();
        a[i].erase(dd);
        if(dd==tmp){//可能删的就是堆顶
            int mx=b[f].top()+b[f].stop(),size=b[f].size();
            b[f].erase(dd);
            if(a[i].top())b[f].push(a[i].top());//删除后看看有没有必要更新
堆顶
            int now=b[f].top()+b[f].stop();
            if(now<mx){
                if(size>=2)ans.erase(mx);
                if(b[f].size()>=2)ans.push(now);
            }
        }
    }
}
int main(){
    scanf("%d",&n);
    int u,v;
    for(int i=1;i<n;++i){
        scanf("%d%d",&u,&v);
        add(u,v);add(v,u);
    }
    dfs(1,0);
    RMQ();
    S=n;
    mxson[rt=0]=maxn;
    getRoot(1,0);
    dfz(rt);
    scanf("%d",&m);
    for(int i=1;i<=n;++i)col[i]=1;//黑点
    char s[2];
```

```
    for(int i=1;i<=n;++i){
        OFF(i);
        num++;
    }
    for(int i=1;i<=m;++i){
        scanf("%s",s);
        if(s[0]=='G'){
            if(num<=1)cout<<num-1<<"\n";
            else cout<<ans.top()<<"\n";
        }else{
            scanf("%d",&u);
            if(col[u])ON(u),num--;
            else OFF(u),num++;
            col[u]^=1;
        }
    }
    return 0;
}
```

Dsu on Tree

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;.//子树众数和
typedef long long ll;
const int maxn=3e5+5;
int
sz[maxn],son[maxn],hs,tot,head[maxn],next1[maxn<<1],ver[maxn<<1],cnt[ma
xn],a[maxn],n,mx;
ll ans[maxn],nowans;
void add(int x,int y){
    ver[++tot]=y,next1[tot]=head[x],head[x]=tot;
}
void dfs(int x,int f){
    sz[x]=1;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f)continue;
        dfs(y,x);
        sz[x]+=sz[y];
        if(sz[y]>sz[son[x]])son[x]=y;
    }
}
void cal(int x,int f,int val){
```

```
    if(val==1){
        cnt[a[x]]++;
        if(cnt[a[x]]>mx)mx=cnt[a[x]],nowans=a[x];
        else if(cnt[a[x]]==mx)nowans+=a[x];
    }else cnt[a[x]]--;
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||y==hs)continue;
        cal(y,x,val);
    }
}
void dsu(int x,int f,bool op){
    for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(y==f||y==son[x])continue;
        dsu(y,x,0);//先统计完轻儿子的问题
    }
    if(son[x])dsu(son[x],x,1),hs=son[x];//统计重儿子的贡献不消除影响
    cal(x,f,1);//加上轻儿子的贡献
    ans[x]=nowans;//更新答案
    hs=0;
    if(!op)cal(x,f,-1),mx=nowans=0;//到轻边时删掉贡献
}
int main(){
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<=n;++i)scanf("%d",&a[i]);
    for(int i=1;i<n;++i){
        int x,y;
        scanf("%d%d",&x,&y);
        add(x,y);add(y,x);
    }
    dfs(1,0);
    dsu(1,0,0);
    for(int i=1;i<=n;++i)
        cout<<ans[i]<<" ";
    return 0;
}
```

图论

二分图

二分图最大匹配

匈牙利

```
//O(NM) N左M右
bool vis[N];
int match[N];
bool dfs(int x){
   for(int i=head[x];i;i=next1[i]){
      int y=ver[i];
      if(!vis[y]){
         vis[y]=1;
         if(!match[y]||dfs(match[y])){ //假如没匹配过或者有增广路
            match[y]=x;return true; //找增广路
         }
      }
   }
   return false;
}
int main(){
   int ans=0;
   for(i=1;i<=n;++i){
      memset(vis,0,sizeof(vis));
      if(dfs(i))ans++;
   }
}
```

HK算法

```
#include<bits/stdc++.h> //根号NM
#define INF 0x3f3f3f3f
using namespace std;
const int MAXN = 100+5;
const int MAXM = 300+5;
int p, n;
int a[MAXN][MAXM];
```

```
int dis;
int cx[MAXN], cy[MAXM];
int dx[MAXN], dy[MAXM];
bool vis[MAXM];

bool bfs_findPath() {
    queue<int> q;
    memset(dx, -1, sizeof(dx));
    memset(dy, -1, sizeof(dy));
    // 使用 BFS 遍历对图的点进行分层，从 X 中找出一个未匹配点 v
    // (所有 v)组成第一层，接下来的层都是这样形成——每次查找
    // 匹配点(增广路性质)，直到在 Y 中找到未匹配点才停止查找，
    // 对 X 其他未匹配点同样进行查找增广路径(BFS 只分层不标记
    // 是否匹配点)
    // 找出 X 中的所有未匹配点组成 BFS 的第一层
    dis = INF;
    for(int i = 1; i <= p; ++i) {
        if(cx[i] == -1) {
            q.push(i);
            dx[i] = 0;
        }
    }
    while(!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        if(dx[u] > dis) break;// 该路径长度大于 dis，等待下一次 BFS 扩充
        for(int v = 1; v <= n; ++v) {
            if(a[u][v] && dy[v] == -1) {// (u,v)之间有边且 v 还没有分层
                dy[v] = dx[u] + 1;
                if(cy[v] == -1) dis = dy[v];// v 是未匹配点，停止延伸（查找），
得到本次 BFS 的最大遍历层次
                else {// v 是已匹配点，继续延伸
                    dx[cy[v]] = dy[v] + 1;
                    q.push(cy[v]);
                }
            }
        }
    }
    return dis != INF;// 若 dis 为 INF 说明 Y 中没有未匹配点，也就是没有增广路径
了
}

bool dfs(int u) {
    for(int v = 1; v <= n; ++v) {
```

```
        if(!vis[v] && a[u][v] && dy[v] == dx[u] + 1) {
            vis[v] = 1;
            // 层次（也就是增广路径的长度）大于本次查找的 dis
            // 是 bfs 中被 break 的情况，也就是还不确定是否是增广路
            // 只有等再次调用 bfs 再判断(每次只找最小增广路集)
            if(cy[v] != -1 && dy[v] == dis) continue;
            if(cy[v] == -1 || dfs(cy[v])) {// 是增广路径，更新匹配集
                cy[v] = u;
                cx[u] = v;
                return true;
            }
        }
    }
    return false;
}

int HK() {
    int ans = 0;
    memset(cx, -1, sizeof(cx));
    memset(cy, -1, sizeof(cy));
    while(bfs_findPath()) {// 有增广路
        memset(vis, 0, sizeof(vis));
        for(int i = 1; i <= p; ++i) {
            // 用 DFS 查找增广路径，增广路径一定从未匹配点开始
            // 如果查找到一个增广路径，匹配数加一
            if(cx[i] == -1 && dfs(i)) ++ans;
        }
    }
    return ans;
}

int main() {
    int T;
    scanf("%d", &T);
    while(T--) {
        scanf("%d%d", &p, &n);
        memset(a, 0, sizeof(a));

        for(int i = 1; i <= p; ++i) {
            int nm, x;
            scanf("%d", &nm);
            for(int j = 0; j != nm; ++j) {
                scanf("%d", &x);
                a[i][x] = 1;
```

```
            }
        }
        printf("%s\n", HK() == p ? "YES" : "NO");
    }
    return 0;
}
```

二分图最大权匹配

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define LL long long
const int inf = 0x3f3f3f3f;
const LL INF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3f;
const int N = 210;
int val[N][N];
int lx[N],ly[N];
int linky[N];
int pre[N];
bool vis[N];
bool visx[N],visy[N];
int slack[N];
int n;
void bfs(int k) {
    int px, py = 0,yy = 0;
    LL d;
    memset(pre, 0, sizeof(pre));
    memset(slack, inf, sizeof(slack));
    linky[py]=k;
    do {
        px = linky[py],d = INF, vis[py] = 1;
        for(int i = 1; i <= n; i++) {
            if(!vis[i]) {
                if(slack[i] > lx[px] + ly[i] - val[px][i])
                    slack[i] = lx[px] + ly[i] - val[px][i], pre[i] = py;
                if(slack[i] < d)
                    d = slack[i], yy = i;
            }
        }
        for(int i = 0; i <= n; i++) {
            if(vis[i])
                lx[linky[i]] -= d, ly[i] += d;
            else
```

```
                slack[i] -= d;
            }
            py = yy;
        } while(linky[py]);
        while(py) {
            linky[py] = linky[pre[py]], py=pre[py];
        }
    }
    LL KM() {
        memset(lx, 0, sizeof(lx));
        memset(ly, 0, sizeof(ly));
        memset(linky, 0, sizeof(linky));
        for(int i = 1; i <= n; i++){
            memset(vis, 0, sizeof(vis));
            bfs(i);
        }
        LL ans = 0;
        for (int i = 1;i <= n; i++) {
            ans += val[linky[i]][i];
        }
        return ans;
    }
    int main() {
        int T;
        scanf("%d", &T);
        for(int _i = 1; _i <= T; _i++) {
            scanf("%d", &n);
            for(int i = 1; i <= n; i++) {
                for(int j = 1; j <= n; j++) {
                    scanf("%d", &val[i][j]);
                    val[i][j] = -val[i][j];
                }
            }
            printf("Case #%d: %I64d\n", _i, -KM());
        }
        return 0;
    }
```

字符串

Kmp

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=1e6+5;
char s1[maxn],s2[maxn];
int nxt[maxn],len1,len2,f[maxn];
void getKmp(){
    nxt[1]=0;
    for(int i=2,j=0;i<=len2;++i){
        while(j&&s2[i]!=s2[j+1])j=nxt[j];
        if(s2[i]==s2[j+1])j++;
        nxt[i]=j;
    }
    for(int i=1,j=0;i<=len1;++i){
        while(j&&(j==len2||s1[i]!=s2[j+1]))j=nxt[j];
        if(s1[i]==s2[j+1])j++;
        f[i]=j;
    }
}
int main(){
    scanf("%s",s1+1);
    scanf("%s",s2+1);
    len1=strlen(s1+1);
    len2=strlen(s2+1);
    getKmp();
    for(int i=1;i<=len1;++i){
        if(f[i]==len2)cout<<i-len2+1<<"\n";
    }
    for(int i=1;i<len2;++i){
        cout<<nxt[i]<<" ";
    }
    cout<<nxt[len2]<<"\n";
    return 0;
}
```

Exkmp

```
//求与某个后缀的 LCP
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
using ll=long long;
const int maxn=2e7+10;
char s1[maxn],s2[maxn];
int  z[maxn],ext[maxn];  //z[i]  s2[i,n]与 s2[1,n]的 LCP  ext[i]是 s1[i,n]与
s2[1,n]的 LCP
void getZ(int len){
    z[1]=len;
    int now=1;
    while(now<len&&s2[now]==s2[now+1])now++;
    z[2]=now-1;
    int p=2;
    for(int i=3;i<=len;++i){
        if(z[i-p+1]+i-1<p+z[p]-1)z[i]=z[i-p+1];
        else{
            now=p+z[p]-i;
            if(now<0)now=0;
            while(s2[now+1]==s2[i+now]&&i+now<=len)now++;
            z[i]=now;
            p=i;
        }
    }
}
void exkmp(int len,int len2){
    int now=0;
    while(now<len&&now<len2&&s2[now+1]==s1[now+1])now++;
    ext[1]=now;
    int p=1;
    for(int i=2;i<=len;++i){
        if(z[i-p+1]+i-1<p+ext[p]-1)ext[i]=z[i-p+1];
        else{
            now=p+ext[p]-i;
            if(now<0)now=0;
            while(s2[now+1]==s1[i+now]&&i+now<=len&&now<len2)now++;
            ext[i]=now;
            p=i;
        }
    }
}
```

```
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin>>(s1+1)>>(s2+1);
    int len1=strlen(s1+1);
    int len2=strlen(s2+1);
    getZ(len2);
    exkmp(len1,len2);
    ll ans0=0,ans1=0;
    for(int i=1;i<=len2;++i){
        ans0^=(ll)i*(z[i]+1);
    }
    for(int i=1;i<=len1;++i){
        ans1^=(ll)i*(ext[i]+1);
    }
    cout<<ans0<<"\n"<<ans1<<"\n";
    return 0;
}
```

Trie

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=5e5+5;
const int maxm=1e4+5;
char s[60];
int n,m;
struct Trie{
    int nxt[maxn][26],cnt=1,st[maxn];
    void insert(char*s){
        int len=strlen(s+1),p=1;
        for(int i=1;i<=len;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!nxt[p][c])nxt[p][c]=++cnt;
            p=nxt[p][c];
        }
    }
    int find(char*s){
        int len=strlen(s+1),p=1;
        for(int i=1;i<=len;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!nxt[p][c])return 0;
            p=nxt[p][c];
        }
```

```
        if(!st[p]){
            st[p]=1;return 1;
        }
        return 2;
    }
}trie;
int main(){
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        scanf("%s",s+1);
        trie.insert(s);
    }
    scanf("%d",&m);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        scanf("%s",s+1);
        int b=trie.find(s);
        if(!b)puts("WRONG");
        else if(b==1)puts("OK");
        else puts("REPEAT");
    }
    return 0;
}
```

序列自动机

```
    Nxt[i][j]表示 i 后面第一个为 j 字母的位置
    for(int i=n;i>=1;--i){
            for(int j=0;j<26;++j){
                nxt[i-1][j]=nxt[i][j];
            }
            nxt[i-1][s1[i]-'a']=i;
        }
```

Ac 自动机

```
#include<bits/stdc++.h>
#define pb push_back
using namespace std;
const int maxn=2e5+5;
const int maxm=2e6+5;
char s[maxm];
vector<int>G[maxn];
int ans[maxn];
```

```
struct AC{
    int tr[maxn][26],fail[maxn],cnt,ed[maxn],sz[maxn];
    void insert(char*s,int pos){
        int now=0,len=strlen(s+1);
        for(int i=1;i<=len;++i){
            int ch=s[i]-'a';
            if(!tr[now][ch])tr[now][ch]=++cnt;
            now=tr[now][ch];
        }
        ed[pos]=now;
    }
    queue<int>q;
    void build(){
        for(int i=0;i<26;++i){
            if(tr[0][i])q.push(tr[0][i]);
        }
        while(!q.empty()){
            int x=q.front();q.pop();
            for(int i=0;i<26;++i){
                if(tr[x][i])//依情况看 tr[x][i]是否受 fail[tr[x][i]]影响
                    fail[tr[x][i]]=tr[fail[x]][i],q.push(tr[x][i]);
                else tr[x][i]=tr[fail[x]][i];
            }
        }
    }
    void query(char *s){
        int now=0,len=strlen(s+1);
        for(int i=1;i<=len;++i){
            int ch=s[i]-'a';
            now=tr[now][ch];
            sz[now]++;
        }
        for(int i=1;i<=cnt;++i)G[fail[i]].pb(i);
    }
    void dfs(int x){
        for(auto&v:G[x]){
            dfs(v);
            sz[x]+=sz[v];
        }
    }
}ac;
int main(){
    int n;
    scanf("%d",&n);
```

```
    for(int i=1;i<=n;++i)scanf("%s",s+1),ac.insert(s,i);
    ac.build();
    scanf("%s",s+1);
    ac.query(s);
    ac.dfs(0);
    for(int i=1;i<=n;++i)cout<<ac.sz[ac.ed[i]]<<"\n";
    return 0;
}
```

后缀数组

倍增 O(nlogn)

```
struct SA{
    char s[maxn];
    int
n,m,a[maxn],sa[maxn],rk[maxn],ht[maxn],tax[maxn],tp[maxn],H[maxn];
    //rk[i] [i,n]后缀排名 第一关键字 tp[i]第二关键字中,排名为 i 的数的位置
    //sa[i] 排名为 i 的后缀的位置
    //ht[i] 排名为 i 和 i-1 的后缀的 LCP
    //tax[i](基数排序辅助,多少个排名 i)
    //H[i]=ht[rk[i]] [i,n]和它前一名的 LCP
    int cmp(int*f,int x,int y,int w){
        return f[x]==f[y]&&f[x+w]==f[y+w];
    }
    void rsort(){
        for(int i=0;i<=m;++i)tax[i]=0;
        for(int i=1;i<=n;++i)tax[rk[tp[i]]]++;
        for(int i=1;i<=m;++i)tax[i]+=tax[i-1];
        for(int i=n;i>=1;--i)sa[tax[rk[tp[i]]]--]=tp[i];
    }
    void Suffix(){
        for(int i=1;i<=n;++i)a[i]=s[i];
        for(int i=1;i<=n;++i)rk[i]=a[i],tp[i]=i;
        rsort();
        for(int w=1,p=1,i;p<n;w+=w,m=p){
            for(p=0,i=n-w+1;i<=n;++i)tp[++p]=i;
            for(i=1;i<=n;++i)if(sa[i]>w)tp[++p]=sa[i]-w;
            rsort(),swap(rk,tp),rk[sa[1]]=p=1;
            for(int i=2;i<=n;++i)
                rk[sa[i]]=cmp(tp,sa[i],sa[i-1],w)?p:++p;
        }
    }
    void getht(){
```

```
        int j,k=0;
        for(int i=1;i<=n;ht[rk[i++]]=k)
            for(k=k?k-1:k,j=sa[rk[i]-1];a[i+k]==a[j+k];++k);
        for(int i=1;i<=n;++i)H[i]=ht[rk[i]];
    }
    void init(){
        scanf("%s",s+1);
        n=strlen(s+1);//小心多组数据结束符 此时直接赋值
        m=(int)'z';//最大字符 ASCII 码
        Suffix();
        getht();
    }
}sa;

SAIS O(n)
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=1e6+5;
struct SA{
    int
s[(maxn<<1)+5],sa[maxn+5],rk[maxn+5],c[maxn+5],p[maxn+5],tmp[maxn+5],n,
m,ht[maxn];
    char str[maxn+5]; bool t[(maxn<<1)+5];
#define Ar(x,a) sa[p[s[x]]a]=x
    void IS(int*s,int*s1,int n1,int n,int m,bool*t){
        memset(sa+1,0,n<<2);memset(c+1,0,m<<2);
        for(int i=1;i<=n;++c[s[i++]]);
        for(int i=2;i<=m;i++) c[i]+=c[i-1];
        memcpy(p+1,c+1,m<<2);
        for(int i=n1;i;Ar(s1[i],--),i--);
        for(int i=1;i<=m;i++) p[i]=c[i-1]+1;
        for(int i=1;i<=n;sa[i]>1&&t[sa[i]-1]?Ar(sa[i]-1,++):0,i++);
        memcpy(p+1,c+1,m<<2);
        for(int i=n;i;sa[i]>1&&!t[sa[i]-1]?Ar(sa[i]-1,--):0,i--);
    }
    void SAIS(int s[], bool t[], int tmp[], int n, int m){
        int n1=0,m1=rk[1]=0,*s1=s+n;t[n]=0;
        for(int i=n-1;i;t[i]=s[i]^s[i+1]?s[i]>s[i+1]:t[i+1],i--);
        for(int i=2;i<=n;rk[i]=t[i-1]&&!t[i]?tmp[++n1]=i,n1:0,i++);
        IS(s,tmp,n1,n,m,t);
        for(int i=1,x,y=0;i<=n;i++) if(x=rk[sa[i]]){
            if(m1<=1||tmp[x+1]-tmp[x]!=tmp[y+1]-tmp[y]) ++m1;
            else for(int a=tmp[x],b=tmp[y];a<=tmp[x+1];a++,b++)
                if((s[a]<<1|t[a])^(s[b]<<1|t[b])){++m1;break;}
```

```
            s1[y=x]=m1;
        }
        if(m1<n1) SAIS(s1,t+n,tmp+n1,n1,m1);
        else for(int i=1;i<=n1;sa[s1[i]]=i,i++);
        for(int i=1;i<=n1;s1[i]=tmp[sa[i]],i++);
        IS(s,s1,n1,n,m,t);
    }
    void MakeSA(){
        --n;
        for(int i=1;i<=n;i++) sa[i]=sa[i+1],rk[sa[i]]=i;
    }
    void getHt(){
        for(int i=1,k=0;i<=n;ht[rk[i]]=k,i++,k&&--k)
            for(int j=sa[rk[i]-1];s[i+k]==s[j+k];k++);
    }
    void init(){
        scanf("%s",str+1); n=strlen(str+1);
        for(int i=1;i<=n;i++) s[i]=str[i];
        s[++n]=1; //保证 1 可以当最小字符集 即便加上偏移
        SAIS(s,t,tmp,n,'z'+1); //最大字符集+1
        MakeSA();
        //getHt();
    }
}sa;
int main(){
    sa.init();
    for(int i=1;i<=sa.n;i++) cout<<sa.sa[i]<<" ";
}
```

一些套路

一.单字符串

1.最长公共前缀

题意： 给定一个字符串，询问某两个后缀的最长公共前缀。

思路：求出height数组后，线段树或st表排序即可

2.可重叠最长重复子串

题意： 给定一个字符串，求最长重复子串，这两个子串可以重叠。

思路：$height$的最大值

3.不可重叠最长重复子串

题意：给定一个字符串，求最长不可重复子串，这两个子串不可以重叠。

思路：二分+height分组，只要存在$max(sa[i]) - min(sa[i]) >= len$即可

4.可重叠的k次最长重复子串

题意：给定一个字符串，求至少出现 k 次的最长重复子串，这 k 个子串可以重叠

思路：单调队列求连续$k-1$个$height$的最小值的最大值 or 二分加$height$分组判数量

5.不相同的子串个数

题意: 给定一个字符串，求不相同的子串个数。

思路：子串表现形式为后缀的前缀，每个字符串的贡献即为$n+1-sa[i]-height[i]$,

6.连续重复子串

题意：给定一个字符串 L，已知这个字符串是由某个字符串 S 重复 R 次得到的，求 R 的最大值。

思路：kmp就是判断i是否能整除$i-nxt[i]$，重复次数$i/(i-nxt[i])$

后缀数组就是len模$(len-height[rk[1]])$

7.重复次数最多的连续重复子串

题意：给定一个字符串 L，在该字符串的所有子串中找到一个重复度最多的子串，重复度相同则输出字典序最小。重复度即上题定义的重复次数，例如 "$ababab$" 重复次数为 3，"$abcd$" 重复次数为 1。

思路：我们枚举 len，去求解长度为 len 下最大的重复度 R，即有无一个子串由 R 个长度为 len 的子串连续拼接而成。

因此我们将字符串 L 分段，0、len、$2*len$、$3*len$、$\ldots$、$k*len$，对于 $suffix[i*len]$ 与 $suffix[(i+1)*len]$ 求出最长公共前缀 x，但$len/x+1$不一定是最优解，有可能还能往前一个补足，所以 $pos=i*len-(len-x\%len)$，求 $suffix[pos]$ 与 $suffix[pos+len]$ 的最长公共前缀，然后更新答案。

二.双字符串问题

8.最长公共子串

题意：给定两个字符串 A 和 B，求最长公共子串。

思路：将两个串拼接在一起，求出后缀数组之后，枚举 $height$ 数组，判断 $height$ 数组中相邻的两个后缀是否来自不同的串，是的话对答案有贡献

9.长度不小于k的公共子串数

题意：给定两个字符串 A 和 B，求长度不小于 k 的公共子串的个数，即询问有多少个三元组 (i,j,len) 表示 $A[i]\sim A[i+len-1]$ 与 $B[j]\sim B[j+len-1]$ 相同，且 $len\geq k$。

思路：

对其中一个串建sam，另一个跑匹配同时算自己的，把对父亲的贡献标记打上，再算父亲的就好了

三.n字符串问题

10.至少在k个字符串中出现的最长子串

题意：给定 n 个字符串，求出现在不少于 k 个字符串中的最长子串。

思路：将 n 个字符串拼接在一起，再二分答案进行 $height$ 分组，然后查看每一组中出现了多少个不同的字符串，如果大于等于 k 则符合题意。

11.每个字符串至少出现两次且不重叠的最长子串

题意： 给定 n 个字符串，求在每个字符串中至少出现两次且不重叠的最长子串。

思路：将n个字符串拼接，二分答案$height$分组，每组内每种种类至少出现两次且出现最大位置之差>=len

后缀自动机

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct SAM{//maxn 开 2 倍字符串
    int len[maxn],link[maxn],ch[maxn][26],last,tot,sz[maxn];//len 指状态内最长长度
    int tax[maxn],rk[maxn];
    ll sum[maxn];
    SAM(){ //link 指向状态内最长字符串的最长的一个在另一个 endpos 类的后缀
        tot=last=1;//sz endpos 大小
    }
    void extend(int c){
        int cur=++tot,p=last;last=cur;sz[cur]=1;
        len[cur]=len[p]+1;
        for(;p&&!ch[p][c];p=link[p])ch[p][c]=cur;
        if(!p)link[cur]=1;
        else{
            int q=ch[p][c];
            if(len[p]+1==len[q])link[cur]=q;
            else{
                int clone=++tot;//==len[p]+1 的复制出来
                memcpy(ch[clone],ch[q],sizeof(ch[q]));
                len[clone]=len[p]+1;
                link[clone]=link[q];link[q]=link[cur]=clone;
                for(;p&&ch[p][c]==q;p=link[p])ch[p][c]=clone;
            }
```

```
        }
    }
    int query(char *s){ //两串匹配 此处求的是最长公共子串
        int ans=0,p=1,nowlen=0,L=strlen(s+1);
        for(int i=1;i<=L;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(ch[p][c])nowlen++,p=ch[p][c];
            else{
                while(p&&!ch[p][c])p=link[p];
                if(!p)nowlen=0,p=1;
                else{
                    nowlen=len[p]+1,p=ch[p][c];
                }
            }
            ans=max(ans,nowlen);
        }
        return ans;
    }
    void calSZ(int x){
        for(int i=1;i<=tot;++i)tax[len[i]]++;
        for(int i=1;i<=x;++i)tax[i]+=tax[i-1];
        for(int i=1;i<=tot;++i)rk[tax[len[i]]--]=i;
        for(int i=tot;i;--i){
            int now=rk[i];
            sz[link[now]]+=sz[now];
        }
        sz[1]=0;
    }
    void calSum(){//sum[i] sam 上经过从某字符出发 经过 i 结点的子串数量
        //看题意 initsum
        for(int i=2;i<=tot;++i)sum[i]=sz[i];
        for(int i=tot;i>=1;--i)
            for(int j=0;j<26;++j){
                int now=rk[i];//记得 calSZ 先算 rk
                if(ch[now][j])sum[now]+=sum[ch[now][j]];
            }
    }
}sam;
```

广义后缀自动机

```
//离线
struct Trie{
```

```
    int cnt,tr[N][26],fa[N],ch[N];
    Trie(){ cnt=1;}
    void insert(char*s){
        int p=1,L=strlen(s+1);
        for(int i=1;i<=L;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!tr[p][c])tr[p][c]=++cnt,fa[cnt]=p,ch[cnt]=c;
            p=tr[p][c];
        }
    }
}trie;
struct GSAM{
    int tot,pos[maxn],link[maxn],len[maxn],ch[maxn][26];
    queue<int>q;
    GSAM(){ tot=1;}
    int insert(int c,int last){
        int cur=++tot,p=last;
        len[cur]=len[p]+1;
        while(p&&!ch[p][c])ch[p][c]=cur,p=link[p];
        if(!p)link[cur]=1;
        else{
            int q=ch[p][c];
            if(len[p]+1==len[q])link[cur]=q;
            else{
                int clone=++tot;
                memcpy(ch[clone],ch[q],sizeof(ch[q]));
                len[clone]=len[p]+1;
                while(p&&ch[p][c]==q)ch[p][c]=clone,p=link[p];
                link[clone]=link[q];link[q]=link[cur]=clone;
            }
        }
        return cur;
    }
    void build(){
        for(int i=0;i<26;++i)
            if(trie.tr[1][i])q.push(trie.tr[1][i]);
        pos[1]=1;
        while(!q.empty()){
            int x=q.front();q.pop();
            pos[x]=insert(trie.ch[x],pos[trie.fa[x]]);
            for(int i=0;i<26;++i)
                if(trie.tr[x][i])q.push(trie.tr[x][i]);
        }
    }
```

```
}gsam;

//多模式串一个个插入
struct GSAM{
    int link[maxn],ch[maxn][26],tot,len[maxn];
    GSAM(){ tot=1;}
    int extend(int c,int last){
        if(ch[last][c]){
            int p=last,q=ch[p][c];
            if(len[p]+1==len[q])return q;
            else{
                int clone=++tot;
                len[clone]=len[p]+1;
                memcpy(ch[clone],ch[q],sizeof(ch[q]));
                while(p&&ch[p][c]==q)ch[p][c]=clone,p=link[p];
                link[clone]=link[q];link[q]=clone;
                return clone;
            }
        }
        int cur=++tot,p=last;
        len[cur]=len[p]+1;
        while(p&&!ch[p][c])ch[p][c]=cur,p=link[p];
        if(!p)link[cur]=1;
        else{
            int q=ch[p][c];
            if(len[q]==len[p]+1)link[cur]=q;
            else{
                int clone=++tot;
                len[clone]=len[p]+1;
                memcpy(ch[clone],ch[q],sizeof(ch[q]));
                while(p&&ch[p][c]==q)ch[p][c]=clone,p=link[p];
                link[clone]=link[q];link[q]=link[cur]=clone;
            }
        }
        return cur;
    }
    void dfs(int x,int fa,int fap){//在线 与 dfs 或 bfs 无关
        int xfa=extend(col[x],fap);
        for(auto&v:G[x]){
            if(v==fa)continue;
            dfs(v,x,xfa);
        }
    }
}gsam;
```

SAM的性质以及应用

1.SAM是个dag

2.每个结点状态是某段前缀的连续后缀

3.$parent$树上，往前面加字符，到儿子，删字符到父亲

4.从起始节点沿着转移边走，每条**路径**都对应着**一个子串**，即将走过的边上的字符首尾相连得到的子串（显然多条路径会到达同一个节点上）。

5.可以通过对len计数排序得到前缀树和dag的拓扑序

应用

查找某个子串位于哪个节点

> 给定一个字符串，每次查询某个子串在哪个节点
> 以 $[l,r]$ 表示子串

对前缀r直接倍增往上跳到len[]合适的地方

最长可重叠重复子串

> 找一个子串，使得至少出现两次，可以重叠，求最长子串长度

显然就是right集合大于等于2的那些节点的最大的len

最长不可重叠重复子串

> 找一个子串，使得至少出现两次，不可重叠，求最长子串长度

不光要使得right集合大于等于2，而且还需要考虑最靠右的那个位置和最靠左的那个位置之间的距离

```
if(sz[u] >= 2) ans = max(ans, min(len[u], r[u] - l[u]));//l和r在拓扑序上维护即可
```

最长可重叠k次重复子串

> 找一个子串，使得至少出现k次，可以重叠，求最长子串长度

显然就是right集合大于等于k的那些节点的最大的len

最长不可重叠k次重复子串

> 找一个子串，使得至少出现k次，不可重叠，求最长子串长度

由于right集合直接求的话时空复杂度会爆炸，不妨先二分一下答案

设当前二分最长子串长度为x，那么只需要将 $len[pre[u]] < x \leq len[u]$ 的那些u找出来，并分别计算一下它们的right集合，然后把这些位置从小到大排序之后扫一遍并贪心的放入选入集合即可（即当前这个位置能放就放，放不了（即会与之前选择的子串重叠）就不放）

两个字符串的最长公共子串

> 给定两个字符串，求它们的最长公共子串有多长

对于其中一个字符串建立sam，然后拿另外一个在上面匹配，同时更新最长匹配长度

多个字符串的最长公共子串

- 对第一个串建SAM，然后剩下的串都在上面匹配，维护每个串在每个状态能匹配的最大值，注意得在Parents树上把对祖先的影响也算进去，最后取所有串在每个状态的最小值的最大值即可

字典序第k小子串

题意：

长度为n的字符串，求第k小子串是什么（分本质不同与本质相同

思路：
$sum[i]$表示经过从某字符出发 经过i结点的子串数量 ，通过拓扑序dp即可求得，$t=0/1$只是决定了$sum[i]$的初始值，以及每个点要减去的大小而已。

在sam上dfs，从小到大枚举要转移的点，假如小于k就不转移减掉即可。一旦当前$k <= sz[x]$就表明找到了

动态规划

数位 DP

```
typedef long long ll;
int a[20];
ll dp[20][state];//不同题目状态不同
ll dfs(int pos,/*state 变量*/,bool lead/*前导零*/,bool limit/*数位上界变量*/){
    if(pos==-1) return 1
    if(!limit && !lead && dp[pos][state]!=-1) return dp[pos][state];
    int  up=limit?a[pos]:9;//根据 limit 判断枚举的上界 up;这个的例子前面用 213 讲过了
    ll ans=0;
    for(int i=0;i<=up;i++)
    {
        if() ...
        else if()...
        ans+=dfs(pos-1,/*状态转移*/,lead && i==0,limit && i==up);//保证合法
    }
    if(!limit && !lead) dp[pos][state]=ans;
    return ans;
}
ll solve(ll x){
    memset(dp,-1,sizeof(dp));
    int pos=0;
    while(x)//把数位都分解出来
    {
        a[pos++]=x%10;//个人老是喜欢编号为[0,pos),看不惯的就按自己习惯来，反正注意数位边界就行
        x/=10;
    }
    return  dfs(pos-1/*从最高位开始枚举*/,/*一系列状态  */,true,true);//刚开始最高位都是有限制并且有前导零的，显然比最高位还要高的一位视为 0 嘛
}
```

线性代数

矩阵快速幂

```
//m 阶递推式子的转移矩阵一般是 m*m
//复杂度 O(m^3 logn)
struct Matrix{
    int mat[maxn][maxn];
    Matrix(){memset(mat,0,sizeof(mat));}
    Matrix operator*(Matrix const &b)const{
        Matrix res;
        memset(res.mat,0,sizeof(res.mat));
        for(int i=1;i<maxn;++i)
            for(int j=1;j<maxn;++j)
                for(int k=1;k<maxn;++k)

res.mat[i][j]=(res.mat[i][j]+this->mat[i][k]*b.mat[k][j])%mod;
        return res;
    }
}
Matrix mypow(Matrix a,int b){
    Matrix res;
    memset(res.mat,0,sizeof(res.mat));
    for(int i=1;i<maxn;++i)
        res.mat[i][i]=1;
    while(b){
        if(b&1)res=res*a;
        a=a*a;
        b>>=1;
    }
    return res;
}
```

2.【带常数项 k】

递推方程：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+k$。

求：$f(n)$。

常数项不可忽略，应当专门加一维来计算常数。**常数项的递推式**是最简单的：$k_n=k_{n-1}+0$。

$$F(n)=|\,f(n)\quad f(n-1)\quad k\,|,\ base=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{vmatrix}。$$

3.【带未知数项 n】

递推方程：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+n$。

求：$f(n)$。

先将**未知项的递推式**写出来：$(n)=(n-1)+1$，虽然 $f(n)$ 的转移只有四项，但需要加一维来辅助未知项 n 的递推。

$$F(n)=|\,f(n)\quad f(n-1)\quad n\quad 1\,|,\ base=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{vmatrix}。$$

4.【求和】

递推方程：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$。

求：$S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$。

暴力计算 n 次得出 $f(i)$ 数组肯定是不行的，但可以尝试将 $S(n)$ 放入矩阵跟随着 $f(n)$ 一起递推。

先将**前缀和的递推式**写出来：$S(n)=S(n-1)+f(n)$。

$$F(n)=|\,f(n)\quad f(n-1)\quad S(n-1)\,|,\ base=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}。$$

线性 BM 递推

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define PB push_back
typedef long long ll;
using namespace std;
const int mod=1000000007; //按实际改
ll powmod(ll a,ll b){ //快速幂
    ll res=1;a%=mod;
    assert(b>=0);
```

```
    while(b){
        if(b&1) res=res*a%mod; a=a*a%mod; b>>=1;
    }
    return res;
}
namespace linear_seq {
    const int N=10010; //不需改
    ll res[N],base[N],_c[N],_md[N];
    vector<ll> Md;
    void mul(ll *a,ll *b,int k) {
        for(int i=0;i<k+k;i++) _c[i]=0;
        for(int i=0;i<k;i++) if (a[i])
            for(int j=0;j<k;j++) _c[i+j]=(_c[i+j]+a[i]*b[j])%mod;
        for (ll i=k+k-1;i>=k;i--) if (_c[i])
                for(int j=0;j<Md.size();j++)
                    _c[i-k+Md[j]]=(_c[i-k+Md[j]]-_c[i]*_md[Md[j]])%mod;
        for(int i=0;i<k;i++) a[i]=_c[i];
    }
    int solve(ll n,vector<ll> a,vector<ll> b) {
    // a 系数 b 初值 b[n+1]=a[0]*b[n]+...
    //求出的是第 n+1 项
        ll ans=0,pnt=0;
        ll k=a.size();
        assert(a.size()==b.size());
        for(int i=0;i<k;i++) _md[k-1-i]=-a[i];_md[k]=1;
        Md.clear();
        for(int i=0;i<k;i++) if (_md[i]!=0) Md.push_back(i);
        for(int i=0;i<k;i++) res[i]=base[i]=0;
        res[0]=1;
        while ((1ll<<pnt)<=n) pnt++;
        for (ll p=pnt;p>=0;p--) {
            mul(res,res,k);
            if ((n>>p)&1) {
                for (ll i=k-1;i>=0;i--) res[i+1]=res[i];res[0]=0;
                for(int    j=0;j<Md.size();j++)    res[Md[j]]=(res[Md[j]]-
res[k]*_md[Md[j]])%mod;
            }
        }
        for(int i=0;i<k;i++) ans=(ans+res[i]*b[i])%mod;
        if (ans<0) ans+=mod;
        return ans;
    }
    vector<ll> BM(vector<ll> s) {
        vector<ll> C(1,1),B(1,1);
```

```
        int L=0,m=1,b=1;
        for(int n=0;n<s.size();n++) {
            ll d=0;
            for(int i=0;i<L+1;i++) d=(d+(ll)C[i]*s[n-i])%mod;
            if (d==0) ++m;
            else if (2*L<=n) {
                vector<ll> T=C;
                ll c=mod-d*powmod(b,mod-2)%mod;
                while (C.size()<B.size()+m) C.PB(0);
                for(int i=0;i<B.size();i++) C[i+m]=(C[i+m]+c*B[i])%mod;
                L=n+1-L; B=T; b=d; m=1;
            } else {
                ll c=mod-d*powmod(b,mod-2)%mod;
                while (C.size()<B.size()+m) C.PB(0);
                for(int i=0;i<B.size();i++) C[i+m]=(C[i+m]+c*B[i])%mod;
                ++m;
            }
        }
        return C;
    }
    int gao(vector<ll> a,ll n) {
        vector<ll> c=BM(a);
        c.erase(c.begin());
        for(int i=0;i<c.size();i++) c[i]=(mod-c[i])%mod;
        return solve(n,c,vector<ll>(a.begin(),a.begin()+c.size()));
    }
};
 //用的时候只用改 mod 的值和前几项的数值
int main(){
    ll n;
    while(~scanf ("%lld", &n)){ //求第 n 项 //一般放入前 8 项

printf("%lld\n",linear_seq::gao(vector<ll>{1,5,11,36,95,281,781,2245},n
-1));
    }
}
```

高斯消元

```
struct Guass{
    int solve(){//n*n 正常消元 枚举列初等行变消阶梯型,再回代得出答案
        int r,c;//当前最左列最上行
        for(c=1,r=1;c<=n;++c){
            int t=r;
            for(int i=r+1;i<=n;++i){
                if(fabs(a[i][c])>fabs(a[t][c]))
                    t=i;//找最大值的行
            }
            if(fabs(a[t][c])<eps)continue;
            for(int i=c;i<=n+1;++i)swap(a[t][i],a[r][i]);//丢到最上面的行
            for(int i=n+1;i>=c;--i)a[r][i]/=a[r][c];//第一个数变 1
            for(int i=r+1;i<=n;++i)
                if(fabs(a[i][c])>eps)
                    for(int j=n+1;j>=c;--j)//下面行清零
                        a[i][j]-=a[r][j]*a[i][c];
            r++;
        }
        if(r<=n){
            for(int i=r;i<=n;++i)
                if(fabs(a[i][n+1])>eps)return -1;//非 0 无解
            return 1;//无穷解
        }//回代求解
        for(int i=n;i>=1;--i)
            for(int j=i+1;j<=n+1;++j)
                a[i][n+1]-=a[j][n+1]*a[i][j];
        return 0;//唯一解 看情况 return row 统计个数
    }

    int  xorSolve(bitset<maxn>a[],int  n,int  m){//n*m  a11x1^a12x2...a1m-
1^xm-1=b1
        int r=0,c=0,mx;//注意 bitset 读进来的顺序 bitset 最右方为 0
        for(;c<m;++c){//行列从 0 读入
            for(mx=r;mx<n;++mx){
                if(a[mx][c])break;//每列找按一个不为 0 的数丢最上面
            }
            if(mx==n)continue;
            if(!a[mx][c])continue;
            swap(a[mx],a[r]);
            for(int i=r+1;i<n;++i)
                if(a[i][c])
```

```
                a[i]^=a[r];//下面全都消成 0
        r++;
    }
    if(r<n){
        for(int i=r;i<n;++i)
            if(a[i][m])
                return -1;//无解
        return 1;//无穷解
    }
    for(int i=n-1;i>=0;--i){//回代
        for(int j=i+1;j<m;++j)
            a[i][m]=a[i][m]^(a[j][m]*a[i][j]);
    }
    return 0;//唯一解 a[i][m]
}

//解线性同余方程组
int a[N][N],x[N];//解集
bool freeX[N];//标记是否为自由变元
int gcd(int a, int b) {return !b ? a : gcd(b, a % b);}
int LCM(int a, int b) {return a / gcd(a, b) * b;}
int solveMod(int equ, int var) { //返回自由变元个数
    /*初始化*/
    for (int i = 0; i <= var; i++) {
        x[i] = 0;
        freeX[i] = true;
    }
    /*转换为阶梯阵*/
    int r,c = 0; //当前处理的行、列
    for (r = 0; r < equ && c < var; r++, c++) { //枚举当前处理的行
        int mxr = r; //当前列绝对值最大的行
        for (int i = r + 1; i < equ; i++) //寻找当前列绝对值最大的行
            if (abs(a[i][c]) > abs(a[mxr][c]))
                mxr = i;
        if (mxr != r) //与第 r 行交换
            for (int j = r; j < var + 1; j++)
                swap(a[r][j], a[mxr][j]);
        if (a[r][c] == 0) { //c 列第 r 行以下全是 0，处理当前行的下一列
            r--;
            continue;
        }
        for (int i = r + 1; i < equ; i++) //枚举要删去的行
            if (a[i][c] != 0) {
                int lcm = LCM(abs(a[i][c]), abs(a[r][c]));
```

```
                int ta = lcm / abs(a[i][c]);
                int tb = lcm / abs(a[r][c]);
                if (a[i][c]*a[r][c] < 0) //异号情况相加
                    tb = -tb;
                for (int j = c; j < var + 1; j++)
                    a[i][j] = ((a[i][j] * ta - a[r][j] * tb) % MOD +
MOD) % MOD;
            }
        }
        //无解：化简的增广阵中存在(0,0,...,a)这样的行，且 a!=0
        for (int i = r; i < equ; i++)
            if (a[i][c] != 0)
                return -1;
        //无穷解：在 var*(var+1)的增广阵中出现(0,0,...,0)这样的行
        int temp = var - r; //自由变元有 var-r 个
        if (r < var) //返回自由变元数
            return temp;
        //唯一解：在 var*(var+1)的增广阵中形成严格的上三角阵
        for (int i = var - 1; i >= 0; i--) { //计算解集
            int temp = a[i][var];
            for (int j = i + 1; j < var; j++) {
                if (a[i][j] != 0)
                    temp -= a[i][j] * x[j];
                temp = (temp % MOD + MOD) % MOD; //取模
            }
            while (temp % a[i][i] != 0)
             //外层每次循环都是求 a[i][i]，它是每个方程中唯一一个未知的变量
                temp += MOD; //a[i][i]必须为整数，加上周期 MOD
                x[i] = (temp / a[i][i]) % MOD; //取模
        }
        return 0;
    }
}gauss;
```

矩阵求逆与行列式值 O(n^3)

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fp(i, a, b) for(int i = a, i##_ = (b) + 1; i < i##_; ++i)
using namespace std;
const int P = 1e9 + 7;
```

```
using ll = uint64_t;
/*-------------------------------------------------------------------
------*/
//int P;
int POW(ll a, int b = P - 2, ll x = 1) { for (; b >= 1; b >>= 1, a = a *
a % P)if (b & 1)x = x * a % P; return x; }
namespace Matrix{
    using Mat = vector<vector<int>>;
    Mat matrix(int n, int m) { return Mat(n, vector<int>(m)); }
    Mat I(int n) {
        Mat a = matrix(n, n);
        fp(i, 0, n - 1) a[i][i] = 1;
        return a;
    }
    Mat operator*(const Mat &a, const Mat &b) {
//        assert(a[0].size() == b.size());
        const int n = a.size(), o = a[0].size(), m = b[0].size();
        Mat c = matrix(n, m);
        fp(k, 0, o - 1) fp(i, 0, n - 1) if (a[i][k]) fp(j, 0, m - 1)
            c[i][j] = (c[i][j] + 1ll * a[i][k] * b[k][j]) % P;
        return c;
    }
    Mat operator^(Mat a, int b) {
//        assert(a.size() == a[0].size());
        Mat x = I(a.size());
        for (; b; b >>= 1, a = a * a)
            if (b & 1) x = x * a;
        return x;
    }
#ifndef prime
    int det(Mat a){ // P no limit
//        assert(a.size() == a[0].size());
        int d = 1, n = a.size();
        fp(i, 0, n - 1) {
            auto x = a[0].end(), y = x;
            fp(j, i, n - 1) if (a[j][i] && (x == y || a[j][i] < x[i])) x
= a[j].begin();
            if (x == y) return 0;
            fp(j, i, n - 1) if (a[j].begin() != x && a[j][i])
                for (y = a[j].begin();; swap(x, y)) {
                    int w = P - y[i] / x[i];
                    fp(k, i, n - 1) y[k] = (y[k] + (ll) x[k] * w) % P;
                    if (!y[i]) break;
                }
```

```
            if (x != a[i].begin()){
                d ^= 1;
                fp(k, i, n - 1) swap(x[k], a[i][k]);
            }
        }
        if (!d) d = P - 1;
        fp(i, 0, n - 1) d = (ll) d * a[i][i] % P;
        return d;
    }
#else
    int det(Mat a){
//       assert(a.size() == a[0].size());
        int d = 1, n = a.size(), inv, w;
        fp(i, 0, n - 1) {
            if (!a[i][i]) fp(j, i, n - 1) if (a[j][i]) { swap(a[i], a[j]),
d ^= 1; break; }
            if (!a[i][i]) return 0;
            inv = P - POW(a[i][i]);
            fp(j, i + 1, n - 1){
                w = (ll) a[j][i] * inv % P;
                fp(k, i, n - 1) a[j][k] = (a[j][k] + (ll) a[i][k] * w) %
P;
            }
        }
        if (!d) d = P - 1;
        fp(i, 0, n - 1) d = (ll) d * a[i][i] % P;
        return d;
    }
#endif
    int Inv(Mat &a) { // P is a prime number
//       assert(a.size() == a[0].size());
        const int n = a.size();
        vector<int> R(n);
        fp(k, 0, n - 1) {
            fp(i, k, n - 1) if (a[i][k]) { swap(a[k], a[R[k] = i]); break; }
            if (!a[k][k]) return 0;
            a[k][k] = POW(a[k][k]);
            for (auto &r: a) if (&r != &a[k]) {
                r[k] = P - (ll) r[k] * a[k][k] % P;
                fp(j, 0, n - 1) if(j != k) r[j] = (r[j] + (ll) r[k] *
a[k][j]) % P;
            }
            for (auto &x: a[k]) if (&x != &a[k][k]) x = (ll) x * a[k][k] %
P;
```

```
        }
        for (int k = n - 1; ~k; --k) swap(a[k], a[R[k]]);
        return 1;
    }
}
/*-------------------------------------------------------------------
------*/
using namespace Matrix;
int n;
void P4783() {
    scanf("%d", &n);
    Mat a = matrix(n, n);
    fp(i, 0, n - 1) fp(j, 0, n - 1) scanf("%d", &a[i][j]);
    if (!Inv(a)) return puts("No Solution"), void();
    for (auto &r: a) fp(j, 0, n - 1) printf("%d%c", r[j], " \n"[j == n -
1]);
}
void P7112(){
    scanf("%d%d", &n, &P);
    Mat a = matrix(n, n);
    fp(i, 0, n - 1) fp(j, 0, n - 1) scanf("%d", &a[i][j]), a[i][j] %= P;
    printf("%d\n", det(a));
}
int main() {
#ifdef LOCAL
    freopen("s.in", "r", stdin);
//    freopen("s.out", "w", stdout);
#endif
    P4783();
    return 0;
}
```

线性基

1.原序列里面的任意一个数都可以由线性基里面的一些数异或得到
2.线性基里面的任意一些数异或起来都不能得到 0
3.线性基里面的数的个数唯一，并且在保持性质一的前提下，数的个数是最少的

一.线性基构造

int d[i]中的第 i 位必定为 1 且最高位为 1(0 开始)
d[i]不为 0 说明高斯消元对应的第 i 位为主元

```
void add(ll x){
```

```
    for(int i=60;i>=0;--i){
        if(x&(1ll<<i)){//i>31 必须 ll
            if(d[i])x^=d[i];
            else{
                d[i]=x;
                break;
            }
        }
    }
}
//判断某个数能否插入线性基
bool check(ll x){
    for(int i=60;i>=0;--i){
        if(x&(1ll<<i)){
            if(!d[i])return false;
            else x^=d[i];
        }
    }
    return true;
}
```

二.求异或最大值 贪心

```
ll get_max(){
    ll ans=0;
    for(int i=60;i>=0;--i)
        if((ans^d[i])>ans)ans^=d[i];
    return ans;
}
```

三.求最小值(线性基能异或的最小值)就是最小的 d[i]

若求原序列异或的最小值,看看有没有元素无法插入，假如有，最小值 0，否则仍为 min(d[i])

```
ll get_min(){
    if(zero)return 0;
    for(int i=0;i<=64;++i)
        if(d[i])return d[i];
}
```

四、查询第 k 小值 n 个元素的线性基最多只能构建出 2^n-1 的元素

```
//重构线性基
void rebuild(){
    cnt=0;top=0;
```

```
    for(int i=64;i>=0;--i)
        for(int j=i-1;j>=0;--j)
            if(d[i]&(1ll<<j))d[i]^=d[j];
    for(int i=0;i<=64;++i)
            if(d[i])p[cnt++]=d[i];
            else zero=1;
}
ll get_kth(int k){
    if(k>=(1ll<<cnt))return -1;
    ll ans=0;
    for(int i=64;i>=0;--i)
        if(k&(1ll<<i))ans^=p[i];//多组数组初始化 d[i],p[i],cnt
    return ans;
}
if(cnt<n)k--;//特判 0 才能求第 k 小
```

五、求x在不去重异或集合中的排名（下标）从1开始...
不去重异或集合是去重异或集合中2^{cnt}个整数各重复2^{n-cnt}次形成的
不在基底中的2^{n-cnt}种取法，代表2^{n-cnt}个0，0与x异或得到x
设异或出来比他小的有rk钟类，答案就是$(rk*2^{n-cnt}+1)$

```
    for(int i=0;i<=30;++i){
        if(d[i])p[top++]=i;
    }
    ll rk=0;
    for(int i=0;i<top;++i){//枚举最高的被删去的位 前面的位随便选
        if((1<<p[i])&ask)rk+=(1<<i);
    }
    cout<<(rk*mypow(2,n-top)+1)%mod;
```

六.查询连通图上 1 到 n 的最大异或和

```
void dfs(int now,ll x){
    val[now]=x;v[now]=1;
    for(int i=head[now];i;i=next1[i]){
        int y=ver[i];
        if(!v[y])dfs(y,x^edge[i]);
        else insert(x^edge[i]^val[y]);
    }
}
dfs(1,0);
cout<<get_max(val[n]);
```

六.线性空间下的线性基 本质其实只是一个高斯消元 下面是洛谷 P3265 贪心下的线性基

```
for(int i=1;i<=n;++i){
```

```
        for(int j=1;j<=m;++j){
            if(fabs(node[i].a[j])>esp){
                if(!d[j]){//枚举行，每一行直接找第一个变元
                   d[j]=i;++cnt;sum+=node[i].cost;
                   break;
                }else{
                    double t=node[i].a[j]/node[d[j]].a[j];
                    for(int k=j;k<=m;++k)
                        node[i].a[k]-=t*node[d[j]].a[k];
                }
            }
        }
    }
```

七.线性基求交

```
    //封装成线性基结构体的时候适当改写
    int*merge(int *a,int *b){//合并基 a 和 b
        int A[64],tmp[64],ans[64];
        memset(A,0,sizeof(A));
        memset(tmp,0,sizeof(tmp));
        memset(ans,0,sizeof(ans));
        for(int i=0;i<=63;++i)
            A[i]=tmp[i]=a[i]; //tmp 不断构建 A+(B\ans)
        ll cur,d;
        for(int i=0;i<=32;++i){//从低到高，使得不存在一个基底可以仅由(tmp\A)
表示
            if(b[i]){//b 中有这个基底
                cur=0;d=b[i];
                for(int j=i;j>=0;--j){
                    if((d>>j)&1){
                        if(tmp[j]){
                            d^=tmp[j],cur^=A[j];
                            if(d)continue;
                            ans[i]=cur;//cur 的第 i 位不为 0
                        }
                        else tmp[j]=d,A[j]=cur;
                        break;//如果不能被表示， A 的赋值是为了让高位中含有 j 这
位的基底下放到 A 中 j 的位置
                    }
                }
            }
        }
        return ans;
    }
```

八、线段树维护线性基合并

```
//线段树维护线性基交 O(qlogn(log^2max))
//本题求区间异或后|k 的最大值
#include<bits/stdc++.h>
#define lson p<<1,l,mid
#define rson p<<1|1,mid+1,r
#define ls p<<1
#define rs p<<1|1
using namespace std;
const int maxn=1e4+5;
int T,a[maxn],q,k,L,R,n;
struct LB{
    int cnt;
    int d[33],p[33];
    LB(){}
    void init(){
        memset(d,0,sizeof(d));
    }
    void insert(int x){
        for(int i=29;i>=0;--i){
            if(x&(1<<i)){
                if(d[i])x^=d[i];
                else{
                    d[i]=x;break;
                }
            }
        }
    }
    int getMax(){
        int ans=0;
        for(int i=29;i>=0;--i){
            if((ans^d[i])>ans)ans^=d[i];
        }
        return ans;
    }
    LB merge(LB m){
        LB ret;
        for(int i=0;i<=29;i++){ret.d[i]=d[i];}
        for(int i=0;i<=29;i++){
            for(int j=i;j>=0;j--){
                if(m.d[i]&(1<<j)){
                    if(ret.d[j]) m.d[i]^=ret.d[j];
                    else {ret.d[j]=m.d[i];break;}
```

```
                }
            }
        }
        return ret;
    }
}tr[maxn<<2],A,tmp;
void pushUp(int p){
    tr[p]=tr[ls].merge(tr[rs]);
}
void build(int p,int l,int r){
    if(l==r){
        tr[p].init();
        tr[p].insert(a[l]);
        return;
    }
    int mid=l+r>>1;
    build(lson);
    build(rson);
    pushUp(p);
}
LB query(int p,int l,int r,int L,int R){
    if(L<=l&&r<=R)return tr[p];
    int mid=l+r>>1;
    if(R<=mid)return query(lson,L,R);
    else if(L>mid)return query(rson,L,R);
    else return query(lson,L,R).merge(query(rson,L,R));
}
int main(){
    cin>>T;
    while(T--){
        cin>>n>>q>>k;
        k=~k;
        for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i],a[i]&=k;
        k=~k;
        build(1,1,n);
        for(int i=1;i<=q;++i){
            cin>>L>>R;
            cout<<(query(1,1,n,L,R).getMax()|k)<<"\n";
        }
    }
    return 0;
}
```

数论

质数

n 以内的质数个数　lehmer_pi O(n^(2/3))

```
//一组 1e11 150ms
//一组 1e12 830ms
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define LL long long
const int N = 5e6 + 2;
bool np[N];
int prime[N], pi[N];
int getprime()  {
    int cnt = 0;
    np[0] = np[1] = true;
    pi[0] = pi[1] = 0;
    for(int i = 2; i < N; ++i)
    {
        if(!np[i]) prime[++cnt] = i;
        pi[i] = cnt;
        for(int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] < N; ++j)
        {
            np[i * prime[j]] = true;
            if(i % prime[j] == 0)   break;
        }
    }
    return cnt;
}
const int M = 7;
const int PM = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17;
int phi[PM + 1][M + 1], sz[M + 1];
void init()  {
    getprime();
    sz[0] = 1;
    for(int i = 0; i <= PM; ++i)  phi[i][0] = i;
    for(int i = 1; i <= M; ++i)
    {
        sz[i] = prime[i] * sz[i - 1];
        for(int j = 1; j <= PM; ++j) phi[j][i] = phi[j][i - 1] - phi[j /
```

```
prime[i]][i - 1];
    }
}
int sqrt2(LL x)  {
    LL r = (LL)sqrt(x - 0.1);
    while(r * r <= x)   ++r;
    return int(r - 1);
}
int sqrt3(LL x)  {
    LL r = (LL)cbrt(x - 0.1);
    while(r * r * r <= x)   ++r;
    return int(r - 1);
}
LL getphi(LL x, int s)  {
    if(s == 0)  return x;
    if(s <= M)  return phi[x % sz[s]][s] + (x / sz[s]) * phi[sz[s]][s];
    if(x <= prime[s]*prime[s])   return pi[x] - s + 1;
    if(x <= prime[s]*prime[s]*prime[s] && x < N)
    {
        int s2x = pi[sqrt2(x)];
        LL ans = pi[x] - (s2x + s - 2) * (s2x - s + 1) / 2;
        for(int i = s + 1; i <= s2x; ++i) ans += pi[x / prime[i]];
        return ans;
    }
    return getphi(x, s - 1) - getphi(x / prime[s], s - 1);
}
LL getpi(LL x)  {
    if(x < N)   return pi[x];
    LL ans = getphi(x, pi[sqrt3(x)]) + pi[sqrt3(x)] - 1;
    for(int i = pi[sqrt3(x)] + 1, ed = pi[sqrt2(x)]; i <= ed; ++i) ans -
= getpi(x / prime[i]) - i + 1;
    return ans;
}
LL lehmer_pi(LL x)  {
    if(x < N)   return pi[x];
    int a = (int)lehmer_pi(sqrt2(sqrt2(x)));
    int b = (int)lehmer_pi(sqrt2(x));
    int c = (int)lehmer_pi(sqrt3(x));
    LL sum = getphi(x, a) +(LL)(b + a - 2) * (b - a + 1) / 2;
    for (int i = a + 1; i <= b; i++)
    {
        LL w = x / prime[i];
        sum -= lehmer_pi(w);
        if (i > c) continue;
```

```
        LL lim = lehmer_pi(sqrt2(w));
        for (int j = i; j <= lim; j++) sum -= lehmer_pi(w / prime[j]) -
(j - 1);
    }
    return sum;
}
int main()  {
    init();
    LL n;
    while(~scanf("%lld",&n))  {
        printf("%lld\n",lehmer_pi(n));
    }
    return 0;
}
```

反素数

Miller Robin and pollard_rho

```
    #include<bits/stdc++.h>
    using namespace std;
    #define fi first
    #define se second
    typedef long long ll;
    typedef pair<int,int> pii;
    typedef pair<ll,ll> pll;
    namespace pollard_rho {
        const int C=2307;
        const int S=10;
        typedef pair<ll,int> pli;
        mt19937 rd(time(0));
        vector<ll>ve;
        ll gcd(ll a,ll b){return b?gcd(b,a%b):a;}
        ll mul(ll a,ll b,ll mod){return (__int128)a*b%mod;}
        //miller_rabin klogn
        //考虑O(1)快速乘
        ll power(ll a,ll b,ll mod){
            ll res=1;a%=mod;
            while(b){
                if(b&1)res=mul(res,a,mod);
                a=mul(a,a,mod);
                b>>=1;
            }
```

```
    return res;
}
bool check(ll a,ll n){
    ll m=n-1,x,y;
    int j=0;
    while(!(m&1))m>>=1,j++;
    x=power(a,m,n);
    for(int i=1;i<=j;x=y,i++){
        y=mul(x,x,n);
        if(y==1&&x!=1&&x!=n-1)return 1;
    }
    return y!=1;
}
bool miller_rabin(ll n){O(klogn)
    ll a;
    if(n==1)return 0;
    if(n==2)return 1;
    if(!(n&1))return 0;
    for(int i=0;i<S;i++)if(check(rd()%(n-1)+1,n))return 0;
    return 1;
}
ll pollard_rho(ll n,int c){
    ll i=1,k=2,x=rd()%n,y=x,d;
    while(1){
        i++;x=(mul(x,x,n)+c)%n,d=gcd(y-x,n);
        if(d>1&&d<n)return d;
        if(y==x)return n;
        if(i==k)y=x,k<<=1;
    }
}
void findfac(ll n,int c){
    if(n==1)return ;
    if(miller_rabin(n)){
        ve.push_back(n);
        return ;
    }
    ll m=n;
    while(m==n)m=pollard_rho(n,c--);
    findfac(m,c);
    findfac(n/m,c);
}
vector<pli> solve(ll n){//返回大数分解的质因子及其次数
    vector<pli>res;//n^(1/4) 实际上是最小的 p 的 sqrt(p)
    ve.clear();
```

```
            findfac(n,C);
            sort(ve.begin(),ve.end());
            for(auto x:ve){
                if(res.empty()||res.back().fi!=x)res.push_back({x,1});
                else res.back().se++;
            }
            return res;
        }
    }
    using namespace pollard_rho;
    int main(){
        return 0;
    }
```

筛法

质数线性筛法及常见函数筛

```
bool is_prime(int n)      {
    if(n<2)return false;  //0,1 非质数非合数
    for(int i=2;i*i<=n;++i)
        if(n%i==0)return false;
    return true;
}
//埃筛
const int maxn=1e6;
int vis[maxn];//是否被筛
void is_prime(){
    memset(vis,0,sizeof(v));//先都标记为质数
    vis[1]=vis[0]=1;//如果有需要特判 1、0 不是质数
    for(int i=2;i<=maxn;++i){
        if(!vis[i]){
            prime[++cnt]=i;
            for(int j=2*i;j<=maxn;j+=i)
                vis[j]=1;//合数标记
        }
    }
}


//O(N)线性筛
const int maxn=1e6;
```

```
bool v[MAX_N];int prime[MAX_N],cnt=0;//prime 存储质数，v 为 0 表示质数
void init(){
    for(int i=2;i<=maxn;++i){
        if(!v[i])prime[++cnt]=i;
            for(int j=1;j<=cnt&&prime[j]*i<=maxn;+ +j){
                v[prime[j]*i]=1;//  prime 里面纪录的素数，升序来当做要消去合数
的最小素因子。
                    if(i%prime[j]==0)break;
            }
    }
}

 //数组 v 存储最小质因子
void init(){
    memset(v,0,sizeof(v));
    int cnt=0;
    for(int i=2;i<=n;++i){
       if(!v[i])v[i]=i,prime[++cnt]=i;
       for(int j=1;j<=cnt&&prime[j]*i<=n;++j){
          if(prime[j]>v[i])break;
          v[i*prime[j]]=prime[j];
       }
    }
}

//线性筛欧拉函数
void get_phi(){
    v[1]=v[0]=1;phi[1]=1;
    for(int i=2;i<maxn;++i){
        if(!v[i])prime[++cnt]=i,phi[i]=i-1;
        for(int j=1;j<=cnt&&prime[j]*i<maxn;++j){
            v[prime[j]*i]=1;
            if(i%prime[j]==0){
                phi[prime[j]*i]=phi[i]*prime[j];
                break;
            }else
                phi[i*prime[j]]=phi[prime[j]]*phi[i];
        }
    }
}


//线性筛莫比乌斯
void get_mu(){
```

```
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<maxn;++i){
       if(!v[i]){
           prime[++cnt]=i;
           mu[i]=-1;
       }
       for(int j=1;j<=cnt&&prime[j]*i<maxn;++j){
          v[prime[j]*i]=1;
          if(i%prime[j]==0){
              mu[i*prime[j]]=0;break;
          }
          else mu[i*prime[j]]=-mu[i];
       }
    }
}
int mu(int n)//求单个数的莫比乌斯{
    if(n==1)return 1;
    int sq=0;
    for(int i=2;i*i<maxn;++i){
       if(n%i==0){
          sq++;
          int cnt=0;
          while(n%i==0)n/=i,cnt++;
          if(cnt>=2)return 0;
       }
    }
    if(n>1)sq++;
    return (sq&1)?-1:1;
}

//线性筛约数个数
//a[i]表示 i 的最小质因子的指数
int N, prime[MAXN], vis[MAXN], D[MAXN], a[MAXN], tot;
void GetD(int N) {
    vis[1] = D[1] = a[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= N; i++) {
        if(!vis[i]) prime[++cnt] = i, D[i] = 2, a[i] = 1;
        for(int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] <= N; j++) {
            vis[i * prime[j]] = 1;
            if(i % prime[j]==0) {
                D[i * prime[j]] = D[i] / (a[i] + 1) * (a[i] + 2);
                a[i * prime[j]] = a[i] + 1;
                break;
            }
```

```
            D[i * prime[j]] = D[i] * D[prime[j]];
            a[i * prime[j]] = 1;
        }
    }
}
```

//线性筛约数和

```
int N, prime[MAXN], vis[MAXN], SD[MAXN], sum[MAXN], low[MAXN], tot;
void GetSumD(int N) {//low[i]表示 i 最小质因子 p1^a1 sum[i]=最小质因子 p 的∑(i=0 到 ai)p^i 求和
    vis[1] = SD[1] = low[1] = sum[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= N; i++) {
        if(!vis[i]) prime[++tot] = i, sum[i] = SD[i] = i + 1, low[i] = i;
        for(int j = 1; j <= tot && i * prime[j] <= N; j++) {
            vis[i * prime[j]] = 1;
            if(i % prime[j]==0) {
                low[i * prime[j]] = low[i] * prime[j];
                sum[i * prime[j]] = sum[i] + low[i * prime[j]];
                SD[i * prime[j]] = SD[i] / sum[i] * sum[i * prime[j]];
                break;
            }
            low[i * prime[j]] = prime[j];
            sum[i * prime[j]] = prime[j] + 1;
            //这里 low 和 sum 不是积性函数
            SD[i * prime[j]] = SD[i] * SD[prime[j]];
        }
    }
}
```

//利用最小质因子线性筛筛一般函数

```
vis[1] = low[1] = 1; H[1] = 初始化
for(int i = 2; i <= N; i++) {
    if(!vis[i]) prime[++tot] = i, mu[i] = -1, H[i] = 质数的情况, low[i] = i;
    for(int j = 1; j <= tot && i * prime[j] <= N; j++) {
        vis[i * prime[j]] = 1;
        if(!(i % prime[j])) {
            low[i * prime[j]] = (low[i] * prime[j]);
            if(low[i] == i) H[i * prime[j]] = 特殊判断;//由 f(p^k)到 f(p^(k+1))
            else H[i * prime[j]] = H[i / low[i]] * H[prime[j] * low[i]];
            break;
        }
        H[i * prime[j]] = H[i] * H[prime[j]];
```

```
            low[i * prime[j]] = prime[j];
        }
    }
```

Min25 筛

前置筛：g(n)表示 p 的 k 次方的单项式前缀和，通过多个单项式组成 f(p)
g(n,j)：所有质数+最小质因子>pj 的所有数，做了 j 次埃筛
S(n,j)表示最小质因子>pk 的 f 的前缀和

$$g(n,i)=\begin{cases} g(n,i-1)(\mathbb{P}_{i-1}{}^2>n) \\ g(n,i-1)-\mathbb{P}_i{}^k(g(\lfloor\frac{n}{\mathbb{P}_i}\rfloor,i-1)-g(\mathbb{P}_{i-1},i-1)) \end{cases}$$

$$S(n,i)=g(n,|\mathbb{P}|)-\sum_{x=1}^{i-1}f(\mathbb{P}_x)+\sum_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}{}^x\le n\wedge k>i}f(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}{}^x)(S(\lfloor\frac{n}{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}{}^x}\rfloor,k)+[x>1])$$

步骤：

（1） 筛根号 n 内质数，以及对应质数次方前缀和

（2） 记录和初始化 g 分块里面的第 k 个数，用两个 id 数组记录 x，n/x 相应下标，初始化的值是对应次方前缀和-1（枚举从 2 开始，不算 1）

（3） 滚动 dp 处理出 g(n)，多个 g'组成

（4） 枚举 pk 及其次数递归求 S(n,0)

1. 递推 pk^3 的时候，一定开 LL

2. Id1,id2 数组为根号 n 以内，但 g1,g2 和 w 数组是由分块得来，很可能大于根号 n

下面板子处理的是$f(p^k)=p^k(p^k-1)$

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=1e5+5;//根号 n
const int maxm=2e6+5;
const int mod=1e9+7;
int cnt,id1[maxn],id2[maxn],sqr;
ll sum1[maxn],sum2[maxn],n,w[maxm],g1[maxm],g2[maxm],inv6;//sum1 表示 p 的前缀和,sum2 表示 p^2 的前缀和
ll prime[maxn],inv2,m=0;//注意 g1 g2 w 等根号分块的数组大小很可能大于根号 N!!
bool v[maxn];
void init(){
    v[1]=1;
    for(int i=2;i<maxn;++i){
        if(!v[i])prime[++cnt]=i;
```

```
        for(int j=1;j<=cnt&&prime[j]*i<maxn;++j){
            v[i*prime[j]]=1;
            if(i%prime[j]==0)break;
        }
    }
    for(int i=1;i<=cnt;++i){//预处理 f(p)中几个单项式的和
        sum1[i]=(sum1[i-1]+prime[i])%mod;
        sum2[i]=(sum2[i-1]+prime[i]*prime[i]%mod)%mod;
    }
}
ll mypow(ll a,ll b){
    ll ans=1;
    while(b){
        if(b&1)ans=ans*a%mod;
        a=a*a%mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
ll S(ll x,int j){//递归求 S  从 2 开始 不算 S(1)
    if(prime[j]>=x)return 0;
    int t=((x<=sqr)?id1[x]:id2[n/x]);
    ll ans=((g2[t]-g1[t])+mod-(sum2[j]-sum1[j])+mod)%mod;//质数部分
    for(int i=j+1;i<=cnt&&prime[i]*prime[i]<=x;++i){
        ll sp=prime[i];
        for(int e=1;sp<=x;sp*=prime[i],++e){
            int tmp=sp%mod;
            ans=(ans+1ll*tmp*(tmp-1)%mod*(S(x/sp,i)+(e>1)))%mod;
        }
    }
    return ans;
}
int main(){
    init();
    inv2=mypow(2,mod-2);
    inv6=mypow(6,mod-2);
    scanf("%lld",&n);
    sqr=sqrt(n+0.5);
    for(ll i=1,j;i<=n;i=j+1){//初始化 g 以及记录分块下要处理的数及其对应下标
        j=(n/(n/i));
        w[++m]=n/i;
        g1[m]=w[m]%mod;//g1  g2 分别为对应要处理的 p^k 的前缀和  g1 先当中间变量
w[m]为传进去处理的前缀和
        g2[m]=(g1[m]*(g1[m]+1)%mod*(2*g1[m]+1)%mod*inv6)%mod;
```

```
        g2[m]--;//前缀和得减去 1
        g1[m]=(g1[m]*(g1[m]+1)%mod*inv2)%mod;
        g1[m]--;
        if(w[m]<=sqr)id1[w[m]]=m;
        else id2[n/w[m]]=m;
    }
    //dp 处理出 g(n)，质数处 f(p)前缀和
    for(int i=1;i<=cnt;++i){
        ll pr=prime[i]*prime[i];
        for(int j=1;j<=m&&pr<=w[j];++j){
            ll x=w[j]/prime[i];
            x=((x<=sqr)?id1[x]:id2[n/x]);
            g1[j]=(g1[j]-prime[i]*(g1[x]-sum1[i-1])%mod+mod)%mod;//如果要卡常必要可以删去此处所有模数，因子数*根号 n*K 会不会炸 但用 g 的时候必须保证加回正数,最好只在有一个 g 的时候用
            g2[j]=(g2[j]-prime[i]*prime[i]%mod*(g2[x]-sum2[i-1]+mod)%mod+mod)%mod;
        }
    }
    printf("%d\n",(S(n,0)+1)%mod);
}
```

杜教筛

【杜教筛】

【基本性质、定理】

$g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{d=2}^{n}g(d)S\left(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\right)$ (其中 $S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$)

【推导结论】

$S_{\mu(x)}(n)=1-\sum_{d=2}^{n}S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$【模板】
$S_{\varphi(x)}(n)=\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{d=2}^{n}S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$【模板】
$S_{(n^2\varphi(n))}=\sum_{i=1}^{n}i^3-\sum_{d=2}^{n}d^2S\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)$【例题】

```
//杜教筛 O(n^(2/3))
//g(1)S(n)=∑(f*g)(i)(i 属于 1 到 n)-∑g(d)S(n/d)  (d 属于 2 到 n)
#include<iostream>
#include<algorithm>
#include<cstdio>
#include<cstring>
#include<cmath>
#include<unordered_map>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int maxn=2e6+5;
```

```
int prime[maxn],cnt=0,N,t;
bool visphi[1300],v[maxn],vismu[1300];
ll phi[maxn],mu[maxn];
ll phiS2[1300],muS2[maxn];
unordered_map<int,ll>ansphi;
unordered_map<int,int>ansmu;
void init(){
    mu[1]=phi[1]=1;
    for(int i=2;i<=maxn-5;++i){
        if(!v[i])prime[++cnt]=i,phi[i]=i-1,mu[i]=-1;
        for(int j=1;j<=cnt&&prime[j]*i<=maxn-5;++j){
            v[i*prime[j]]=1;
            if(i%prime[j]==0){
                phi[i*prime[j]]=phi[i]*prime[j];
                break;
            }
            mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            phi[i*prime[j]]=phi[i]*(prime[j]-1);
        }
    }
    for(int i=2;i<=maxn-5;++i)
        phi[i]+=phi[i-1],mu[i]+=mu[i-1];
}
ll phiS(int n){
    if(n<=maxn-5)return phi[n];
    if(ansphi[n])return ansphi[n];
    /*int x=N/n;// 卡常用  原理易得 注意清空
    if(visphi[x])return phiS2[x];
    visphi[x]=1;
    ll&ans=phiS2[x];*/
    ll ans=1ll*(n+1)*n/2;
    for(int i=2,j;i<=n;i=j+1){
        j=n/(n/i);
        ans-=1ll*(j-i+1)*phiS(n/i);
    }
    return ansphi[n]=ans;
}
ll muS(int n){
    if(n<=maxn-5)return mu[n];
    if(ansmu[n])return ansmu[n];
    /*int x=N/n;
    if(vismu[x])return muS2[x];
    vismu[x]=1;
    ll&ans=muS2[x];*/
```

```
        ll ans=1ll;
        for(int i=2,j;i<=n;i=j+1){
            j=n/(n/i);
            ans-=1ll*(j-i+1)*muS(n/i);
        }
        return ansmu[n]=ans;
    }
    int main(){
        init();
        scanf("%d",&t);
        while(t--){
            scanf("%d",&N);
            /*for(int i=1;i<=1295;++i)vismu[i]=visphi[i]=0;*/
            printf("%lld %lld\n",phiS(N),muS(N));
        }
        return 0;
    }
```

Dirichlet 前缀和

给定一个长度为 n 的数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 。

现在你要求出一个长度为 n 的数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ，满足

$$b_d = \sum_{i|d} a_i$$

```
for(int i = 1; i <= cnt && primes[i] <= n; ++ i)
       for(int j = 1; j * primes[i] <= n; ++ j)
           a[j * primes[i]] += a[j];
```

//Dirichlet 后缀和

$$b[i] = \sum_{i|d} a[d]$$

```
for(int i = 1; i <= cnt && primes[i] <= n; ++ i)
       for(int j = n / primes[i]; j ; -- j)
           a[j] += a[j * primes[i]];
```

$$b[i] = \sum_{d|i} a[d]$$

倒推 Dirichlet 前缀和

```
 for(int i = cnt; i ; -- i)
```

```
        for(int j = n / primes[i]; j ; -- j)
            a[j * primes[i]] -= a[j];
```

$$b[i] = \sum_{i|d} a[d]$$

倒推 Dirichlet 后缀和

```
    for(int i = cnt; i ; -- i)
        for(int j = 1; j * primes[i] <= n; ++ j)
            a[j] -= a[j * primes[i]];
```

常用 Dirichlet 卷积

所有积性函数和 ε 的卷积都为其本身

由定义可以直接得到

μ 与 I 的卷积为 ε

由定义可以直接得到

I 与 I 的卷积为 σ_0

$$(\boldsymbol{I} * \boldsymbol{I})(n) = \sum_{d|n} \boldsymbol{I}(d) \cdot \boldsymbol{I}(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} 1 \cdot 1 = \sum_{d|n} 1 = \boldsymbol{\sigma}_0(n)$$

I 与 id^k 的卷积为 σ_k

$$(\boldsymbol{I} * \boldsymbol{id}^k)(n) = \sum_{d|n} \boldsymbol{I}(\frac{n}{d}) \cdot \boldsymbol{id}^k(d) = \sum_{d|n} 1 \cdot d^k = \sum_{d|n} d^k = \boldsymbol{\sigma}_k(n)$$

σ_k 与 μ 的卷积为 id^k

$$\boldsymbol{\sigma}_k * \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{id}^k * \boldsymbol{I} * \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{id}^k * \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{id}^k$$

φ 与 I 的卷积为 id

id 与 μ 的卷积为 φ

$$id * \mu = \varphi * I * \mu = \varphi * \varepsilon = \varphi$$

---

id 与 id 的卷积为 $id \cdot \sigma_0$

$$(id * id)(n) = \sum_{d|n} id(d) \cdot id(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} d \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d|n} n = n \cdot \sum_{d|n} 1 = (id \cdot \sigma_0)(n)$$

---

id^k 与 id^k 的卷积为 $id^k \cdot \sigma_0$

$$(id^k * id^k)(n) = \sum_{d|n} id^k(d) \cdot id^k(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} d^k \cdot (\frac{n}{d})^k = \sum_{d|n} n^k = n^k \cdot \sum_{d|n} 1 = (id^k \cdot \sigma_0)(n)$$

---

id^k 与 $id^t (t \geq k)$ 的卷积为 $id^k \cdot \sigma_{t-k}$

$$(id^k * id^t)(n) = \sum_{d|n} id^k(\frac{n}{d}) \cdot id^t(d) = \sum_{d|n} (\frac{n}{d})^k \cdot d^t = \sum_{d|n} n^k \cdot d^{t-k} = n^k \cdot \sum_{d|n} d^{t-k} = (id^k \cdot \sigma_{t-k})(n)$$

任意完全积性函数 g 与积性函数 $f \cdot g$ 的卷积为 $(f * I) \cdot g$

$$(g * (f \cdot g))(n) = \sum_{d|n} g(\frac{n}{d}) \cdot f(d) \cdot g(d) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g(n) = g(n) \cdot \sum_{d|n} f(d) = g(n) \cdot \sum_{d|n} f(d) \cdot I(\frac{n}{d})$$

$$= ((f * I) \cdot g)(n)$$

这个性质有一个弱化版：若对于积性函数 g 满足 $g(\frac{n}{d}) \cdot g(d) = h(n), d \mid n$ 则 $g * (f \cdot g) = (f * I) \cdot h$

约数

约数处理

试除法 $O(\sqrt{n})$

```
int fac[2000],m=0;
for(int i=1;i*i<=n;++i){
    if(n%i==0){
        fac[++m]=i;
        if(i!=n/i)fac[++m]n/i;
    }
}
```

1~N 每个数正约数集合-倍数法

```
vector<int>fac[500010];
for(int i=1;i<=n;++i)
    for(int j=1;j<=n/i;++j)
        fac[i*j].pb(i);
```

GCD 与 LCM

```
    int gcd(int a,int b){ return b?gcd(b,a%b):a;}
    int lcm(int a,int b){ return a/gcd(a,b)*b;}
```

同余

快速幂与乘求模

```
//快速幂与乘求模
ll mypow(ll a,ll b,ll mod){
    ll ans=1;
    while(b){
       if(b&1)ans=ans*a%mod;
       a=a*a%mod;
       b>>=1;
    }
    return ans;
}

//64 位整数乘法 a*b%p 1e18 O(logb)
ll mul(ll a,ll b,ll mod){
    ll ans=0;
    while(b){
        if(b&1)ans=(ans+a)%mod;
        a=(a+a)%mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}

//O(1)快速乘
ll mul(ll a,ll b,ll p){
    if(p<=1000000000)return a*b%p;
    else                                        if(p<=100000000000ll)return
(((a*(b>>20)%p)<<20)+(a*(b&((1<<20)-1))))p;//小于 1e12 加法分配率
    else{
        ll d=(ll)floor(a*(ld)b/p+0.5);
        ll ret=(a*b-d*p)%p;
        if(ret<0)ret+=p;
        return ret;
    }
}
```

逆元相关

```
//费马小定理 O(logmod)
//a,p 互质下
ll mypow(ll a,ll b,ll mod){
    ll ans=1;
    while(b){
       if(b&1)ans=ans*a%mod;
       a=a*a%mod;
       b>>=1;
    }
    return ans;
}
ll getInv(int a,ll mod){ return mypow(a,mod-2,mod);}

//线性递推求逆元
//调用前预处理 调用时候对除数取模 适用 Lucas
ll inv[maxn];
void init(){
    inv[1]=1;
    for(int i=2;i<maxn;++i)
        inv[i]=(mod-mod/i)*inv[mod%i]%mod;
}
//线性递推求阶乘逆元
void init(){
    fac[1]=fac[0]=1;
    for(int i=2;i<maxn;++i)fac[i]=1ll*fac[i-1]*i%mod;
    facinv[maxn]=mypow(fac[maxn],mod-2);
    for(int i=maxn-1;i>=0;--i)
        facinv[i]=1ll*facinv[i+1]*(i+1)%mod;
}
ll inv(ll i){ //i 和 mod 互质 i<mod
    if(i==1)return 1;
    return (mod-mod/i)*inv(mod%i)%mod;
}
```

Exgcd

```
//ax+by=c (gcd(a,b)|c)才有解
int exgcd(int a,int b,int&x,int&y){ //gcd(a,b)
    if(!b){ x=1,y=0;return a;}
```

```
    int d=exgcd(b,a%b,x,y);
    int z=x;x=y;y=z-y*(a/b);
    return d;
}
//xy 乘(c/d)得一组特解
//最小非负整数解
//b=b/gcd(a,b) a=a/gcd(a,b)
//x=(x%b+b)%b y=(y%a+a)%a
```

类欧几里德

```
int f(int a,int b,int c,int n){//只求 f
    if(a==0)return((b/c)*(n+1));
    if(a>=c||b>=c)return f(a%c,b%c,c,n)+(a/c)*n*(n+1)/2+(b/c)*(n+1);
    int m=(a*n+b)/c;
    return n*m-f(c,c-b-1,a,m-1);
}
```

给定 n, a, b, c，分别求 $\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$，$\sum_{i=0}^{n}\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor^2$，$\sum_{i=0}^{n}i\lfloor\frac{ai+b}{c}\rfloor$，答案对 998244353 取模。

```
typedef long long ll;
const ll mod = 998244353, inv2 = 499122177, inv6 = 166374059;

struct query {
    ll f, g, h;
};

il ll S1(ll n) {return n * (n + 1) / 2 % mod;}
il ll S2(ll n) {return n * (n + 1) % mod * (2 * n + 1) % mod * inv6 %
mod;}

query calc(ll a, ll b, ll c, ll n) {
    query ret;
    ll s1, s2, ac, bc;
    ll m;
    ac = a / c, bc = b / c, s1 = S1(n), s2 = S2(n), m = (a * n + b) / c;
    if (a == 0) {
        ret.f = bc * (n + 1) % mod;
        ret.g = bc * s1 % mod;
        ret.h = bc * bc % mod * (n + 1) % mod;
    } else if (a >= c || b >= c) {
        auto pre = calc(a % c, b % c, c, n);
```

```
        ret.f = (s1 * ac % mod + (n + 1) * bc % mod + pre.f) % mod;
        ret.g = (ac * s2 % mod + bc * s1 % mod + pre.g) % mod;
        ret.h = (ac * ac % mod * s2 + 2 * s1 * ac % mod * bc % mod + (n +
1) * bc % mod * bc % mod + 2 * ac * pre.g % mod + 2 * bc * pre.f % mod +
pre.h) % mod;
    } else {
        auto pre = calc(c, c - b - 1, a, m - 1);
        ret.f = (n * m % mod + mod - pre.f) % mod;
        ret.g = (m * n % mod * (n + 1) % mod + mod - pre.h + mod - pre.f) %
mod * inv2 % mod;
        ret.h = (n * m % mod * (m + 1) % mod + mod - 2 * pre.g % mod + mod
- 2 * pre.f % mod + mod - ret.f) % mod;
    }
    return ret;
}
```

CRT

```
//CRT，用于求解 x 同余多个 ai(mod mi)  mi 互质
//M=m1*m2..mn Mi=M/mi Miti 同余 1(mod mi)
//则可以构造 x=∑(aiMiti)
//任意解为 x+kM 下面给出的是求最小正整数解 (x+kM)%M、
ll n,m[maxn],a[maxn],M,Mi[maxn];
void exgcd(ll a,ll b,ll &x,ll &y){
    if(b==0){x=1,y=0;return;}
    exgcd(b,a%b,x,y);
    int z=x;x=y;y=z-y*(a/b);
}
ll CRT(){
    ll M=1,d,ans=0;
    for(int i=1;i<=n;++i)M*=m[i];
    for(int i=1;i<=n;++i){
        ll x=0,y=0;
        Mi[i]=M/m[i];
        exgcd(Mi[i],m[i],x,y);
        ans=(ans+a[i]*Mi[i]*x)%M;
    }
    return (ans+M)%M;
}
```

EXCRT

```
//EXCRT 求解 x 同余 ai(mod mi) mi 不互质
```

```
ll mi[maxn],ai[maxn];
ll mul(ll a,ll b){//快速乘防爆 ll
    ll ans=0;
    while(b){
        if(b&1)ans=(ans+a)%mod;
        a=(a+a)%mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
ll exgcd(ll a,ll b,ll &x,ll &y){
    if(!b){x=1,y=0;return a;}
    ll gcd=exgcd(b,a%b,x,y);
    ll z=x;x=y;y=z-y*(a/b);
    return gcd;
}
ll excrt(){
    ll x,y,k;
    ll M=mi[1],ans=ai[1];//特判只有一个方程的解
    for(int i=2;i<=n;++i){
        ll a=M,b=mi[i],c=((ai[i]-ans)%b+b)%b;//ax 同余 c(mod b)
        ll gcd=exgcd(a,b,x,y),bg=b/gcd;
        if(c%gcd!=0)return -1;//判断是否有解
        x=mul(x,c/gcd,bg);//exgcd 求出 x 的解
        ans+=x*M;         //加法更新前 k 个的答案
        M*=bg;             //前 k 个的 lcm
        ans=(ans%M+M)%M;
    }
    return ans;
}
```

阶与原根

阶

定义

对于一个正整数 a ，求满足 $ax \equiv 1(mopd)$的最小正整数 x 。保证 a, p 互质。这个最小正整数 x称作 a 在对 p 取模意义下的阶，记做 $ord_p(a)$ ，在 p的值十分明确的时候，可以记做 $ord(a)$ 。

性质

1. $a^n \equiv 1(mopp)$充要条件是 $ord_p(a)|n$ 。推论： $ord_p(a)|\varphi(p)$ 。
2. 若 $a \equiv b(modp)$ ，则 $ord_p(a) = ordp(b)$ 。
3. 若 $a_n \equiv a_i(mopd)$，则 $n \equiv i(modord_p(a))$
4. 令 $n = ord_p(a)$ ，则 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$对 p取模两两不同。

原根

定义

若 g是模 p意义下的原根，则 g 满足 $ord_p(g) = \varphi(p)$。

性质

1. 模 p意义下存在原根，当且仅当 p 是如下形式的数： $2, 4, x^a, 2x^a$ 。（x 为奇素数,a 为正整数
2. 当 p为奇素数时，模 p 意义下的原根个数为 $\varphi(\varphi(p))$
3. 若p是一个奇素数，g是模p的一个原根，则g和$g+p$是模p^2的原根；若g是模p的一个原根，则g是模p^a的原根
4. 对于质数 p， $\varphi(p) = p-1$ ，将 $p-1$分解质因数，得到 $p-1 = \prod p_i^{q_i}$ ，则正整数 g 是模 p 意义下的原根的充分必要条件是：对于所有 i ，$g^{\frac{p-1}{p_i}} \not\equiv 1(modp)$ 。证明：充分性很显然。必要性：首先考虑阶的第 1 点性质，可以得知 $ord_p(g)|p-1$ ，那么，如果这个值比$p-1$ 小，必然可以找到一个 i ，使得 $ordp(g)|\frac{p-1}{p_i}$，那么 $g^{\frac{p-1}{p_i}} \equiv 1(modp)$，故 g 不是原根，否则，说明 $ordp(m) = p-1 = \varphi(p)$，$g$是原根。

```
const int N = 1000005;
int cnt, tot, p;
int vis[N], prime[N], fac[N];
//质数筛
void Factor(int x) {
    tot = 0;
    int t = (int) sqrt(x + 0.5);
    for(int i = 1; prime[i] <= t; i++) {
        if(x % prime[i] == 0) {
            fac[tot++] = prime[i];
            while(x % prime[i] == 0) x /= prime[i];
        }
    }
    if(x > 1) fac[tot++] = x;
```

```
}
int mypow(int a, int b, int mod) {
    int ans = 1;
    while(b) {
        if(b & 1) ans = 1ll*ans*a% mod;
        a = 1ll*a * a % mod;
        b>>= 1;
    }
    return ans;
}
init();
int solve(int _p) {
    p=_p;
    Factor(p - 1);
    for(int g = 2; g < p; g++) {
        bool flag = true;
        for(int i = 0; i < tot; i++) {
            int t = (p - 1) / fac[i];
            if(quick_pow(g, t, p) == 1) {
                flag = false;
                break;
            }
        }
        if(flag) {return g;break;}
    }
}
```

BSGS and EXBSGS

求解最小正整数x,满足$A^x \equiv B, 1 \leq A, B, p \leq 10^9$,$gcd(A,p) = 1$ ↓
取$M = \sqrt{p}, x$表示为$aM - b$，转为求解 ↓
$A^{aM} \equiv B \times A^b (mod p)$ ↓
所以我们枚举b，把对应的$B \times A^b$扔到hash或者unordered_map里面，枚举左侧a，查询
满足上述条件的b即可，$O(\sqrt{p})$ ↓
$0 \leq a, b \leq M$

bsgs

```
//手写 hash
const int HashMod=sqrt(1e9+10);
struct HashTable
{
    struct Line{int u,v,next;}e[1000000];
    int h[HashMod],cnt;
    void Add(int u,int v,int w){e[++cnt]=(Line){w,v,h[u]};h[u]=cnt;}
    void Clear(){memset(h,0,sizeof(h));cnt=0;}
    void Hash(int x,int k){
```

```
        int s=x%HashMod;
        Add(s,k,x);
    }
    int Query(int x){
        int s=x%HashMod;
        for(int i=h[s];i;i=e[i].next)
            if(e[i].u==x)return e[i].v;
        return -1;
    }
}Hash;
ll mypow(ll a,ll b,ll p){
    ll ans=1;
    while(b){
        if(b&1)ans=ans*a%p;
        a=a*a%p;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int BSGS(int A,int B,int p)
{
    if(A%p==0){return -1;//无解}
    A%=p;B%=p;
    if(B==1){return 0;}
    int m=sqrt(p)+1;
    Hash.Clear();
    for(int i=0,t=B;i<m;++i,t=1ll*t*A%p)Hash.Hash(t,i);
    for(int i=1,tt=mypow(A,m,p),t=tt;i<=m+1;++i,t=1ll*t*tt%p){
        int k=Hash.Query(t);if(k==-1){continue; };
        return i*m-k;
    }
    return -1;//无解
}

//unorder_map 版本
unordered_map<ll,ll>Map;
ll BSGS(ll A,ll B){
    Map.clear();
    ll m=sqrt(p)+1,tmp=0;
    if(A%p==0&&B==0)return 1;
    if(A%p==0&&B!=0)return -1;
    for(int i=0;i<=m;++i){
        if(!i){ tmp=B%p;Map[tmp]=i;continue;}
        tmp=(tmp*A)%p;
```

```
        Map[tmp]=i;
    }
    tmp=1;ll t=mypow(A,m);
    for(int i=1;i*i<=p;++i){
        tmp=(tmp*t)%p;
        if(Map[tmp]){
            ll ans=i*m-Map[tmp];
            return ans;
        }
    }
    return -1;//-1 无解
}
```

Exbsgs

求解$A^x \equiv B(mod p)$ 的最小正整数,p 不为质数， 设$D = gcd(A,p)$,假如D不能整除B并且$B \neq 1$,则无解，所以 ↓

$$\frac{A^{x-1}A}{G} \equiv \frac{B}{G}(mod\frac{p}{G})$$,p'显然小于p不断换元递归，到p'变成质数的时候BSGS即可

```
int gcd(int a,int b){ return b?gcd(b,a%b):a;}
const int HashMod=123456;//质数
struct HashTable
{
    struct Line{int u,v,next;}e[1000000];
    int h[HashMod],cnt;
    void Add(int u,int v,int w){e[++cnt]=(Line){w,v,h[u]};h[u]=cnt;}
    void clear(){memset(h,0,sizeof(h));cnt=0;}
    void Hash(int x,int k){
        int s=x%HashMod;
        Add(s,k,x);
    }
    int Query(int x){
        int s=x%HashMod;
        for(int i=h[s];i;i=e[i].next)
            if(e[i].u==x)return e[i].v;
        return -1;
    }
}Hash;
int mypow(int a,int b,int mod){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)ans=1ll*ans*a%mod;
        a=1ll*a*a%mod;b>>=1;
    }
```

```
    return ans;
}
int exbsgs(int A,int B,int p){
    if(B==1){return 0; }
    int k=0,a=1;
    while(1){
        int d=gcd(A,p);
        if(d==1)break;
        if(B%d){ return -1;}//无解
        B/=d;p/=d;++k;
        a=1ll*a*A/d%p;
        if(B==a)return k;
    }
    Hash.clear();
    int m=sqrt(p)+1;
    for(int i=0,t=B;i<m;++i,t=1ll*t*A%p)Hash.Hash(t,i);
    for(int i=1,tt=mypow(A,m,p),t=1ll*a*tt%p;i<=m;++i,t=1ll*t*tt%p){
        int x=Hash.Query(t);
        if(x==-1){continue; };
        return i*m-x+k;
    }
    return -1;//无解
}
```

多项式

拉格朗日插值

拉格朗日插值总结

- $n+1$个x不同的点可以确定一个n次多项式

$$f(k)=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{i\neq j}\frac{k-x[j]}{x[i]-x[j]}$$

- x不连续的时候的时候直接$O(n^2)$计算
- x取值连续的时候的做法$(x_i=i)$ $O(n)$

  $$pre[i+1]=\prod_{j=0}^{i}k-j \qquad suf[i]=\prod_{j=i}^{up}k-j$$

  $$pre[0]=suf[up+1]=1$$

$$f[k]=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{pre[i]*suf[i+1]}{(-1)^{n-i}fac[n]fac[n-i]}$$

- 重心拉格朗日插值

  $$h=\prod_{i=0}^{n}x-x_i \qquad t_i=\prod_{j\neq i}\frac{y_i}{x_i-x_j}$$

  $$f(x)=h\sum_{i=0}^{n}\frac{t_i}{x-x_i}$$

  每次加入一个新点，$O(n)$计算t_i和更新别的点的t_i，$O(n)$求h，$O(n)$求$\sum$得出$f(x)$
- 求多项式系数 $O(n^2)$长乘法求系数 $O(n)$求$f(k)$

  $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

常用套路是n次多项式前缀和转为$n+1$次多项式，多插一个点再求和

```
struct Lglr{
    void init(){
        fac[1]=fac[0]=1;
        for(int i=2;i<maxn;++i)fac[i]=fac[i-1]*i%mod;
        facinv[maxn-1]=mypow(fac[maxn-1],mod-2);
        for(int i=maxn-2;i>=0;--i)
            facinv[i]=facinv[i+1]*(i+1)%mod;
    }
    //给定(0,f0)...(up,fup)求 up 次多项式 f(x)的值 O(n)
    ll cal(ll x,ll*a,int up){//pre 往偏移一位
```

```
        if(x<=up)return a[x];
        pre[0]=1;suf[up+1]=1;
        for(int i=0;i<=up;++i)pre[i+1]=(x-i)%mod*pre[i]%mod;
        for(int i=up;i>=0;--i)suf[i]=(x-i)%mod*suf[i+1]%mod;
        ll ans=0;
        for(int i=0;i<=up;++i){
            ll    f=a[i]*pre[i]%mod*suf[i+1]%mod*facinv[i]%mod*facinv[up-
i]%mod;
            if((up-i)&1)ans=(ans-f+mod)%mod;
            else ans=(ans+f)%mod;
        }
        return ans;
    }
    //给定 n+1 个点，求 n 次多项式 f(k)的值 O(n^2)
    ll inv(int x){return mypow(x,mod-2);}
    ll cal2(ll k,ll*x,ll*y){
        for(int i=0;i<=n;++i)cin>>x[i]>>y[i];
        ll ans=0;
        for(int i=0;i<=n;++i){
            ll zi=y[i],mu=1;
            for(int j=0;j<=n;++j){
                if(i!=j){
                    zi=zi*(k-x[j])%mod;
                    mu=mu*(x[i]-x[j])%mod;
                }
            }
            ans=(ans+zi*inv(mu)%mod)%mod;
        }
        return (ans+mod)%mod;
    }

     //O(n^2)求多项式 O(n)单点求 f(k)
    ll a[maxn], b[maxn], c[maxn], temp[maxn];
    ll x[maxn], y[maxn];
    int n;
    void mul(ll *f, int len, ll t) { //len 为多项式的次数+1，函数让多项式 f
变成 f*(x+t)
        for (int i = len; i > 0; --i)
            temp[i] = f[i], f[i] = f[i - 1];
        temp[0] = f[0], f[0] = 0;
        for (int i = 0; i <= len; ++i)
            f[i] = (f[i] + t * temp[i]) % mod;
    }
    void dev(ll *f, ll *r, ll t) { //f 是被除多项式的系数，r 保存 f 除以 x+t 的
```

结果

```
        for (int i = 0; i <= n; ++i)
            temp[i] = f[i];
        for (int i = n; i > 0; --i) {
            r[i - 1] = temp[i];
            temp[i - 1] = (temp[i - 1] - t * temp[i]) % mod;
        }
    }
    void lglr() {
        memset(a, 0, sizeof a);
        b[1] = 1, b[0] = -x[1];
        for (int i = 2; i <= n; ++i) {
            mul(b, i, -x[i]);
        }//预处理(x-x1)*(x-x2)...*(x-xn)
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            ll fz = 1;
            for (int j = 1; j <= n; ++j) {
                if (j == i)
                    continue;
                fz = fz * (x[i] - x[j]) % mod;
            }
            fz = qpow(fz, mod - 2);
            fz = fz * y[i] % mod; //得到多项式系数
            dev(b, c, -x[i]);//得到多项式，保存在 c 数组
            for (int j = 0; j < n; ++j)
                a[j] = (a[j] + fz * c[j]) % mod;
        }
    }
    ll sum(){//n 点 n-1 次多项式
        cin >> n >> k;
        for (int i = 1; i <= n; ++i)
        scanf("%lld%lld", &x[i], &y[i]);
        lglr();
        ll ans = 0,res=1;
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            ans = (ans + res * a[i]) % mod;
            res = res * k % mod;
        }
        return (ans+mod)%mod;
    }
}lglr;
```

FFT or NTT

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
using ll=long long;
using db=double;
const int maxn=4e6+5;
namespace Poly{
    const db PI=acos(-1.0);
    int rev[maxn];
    struct cp{
        db x,y;
        friend cp operator+(const cp&a,const cp&b){
            return cp{ a.x+b.x,a.y+b.y};
        }
        friend cp operator-(const cp&a,const cp&b){
            return cp{ a.x-b.x,a.y-b.y};
        }
        friend cp operator*(const cp&a,const cp&b){
            return cp{ a.x*b.x-a.y*b.y,a.x*b.y+a.y*b.x};
        }
    }A[maxn],B[maxn],C[maxn];//大小(n+m)<<1
    void fft(cp A[],int lim,int op){
        for(int i=0;i<lim;++i)if(i<rev[i])swap(A[i],A[rev[i]]);
        for(int i=2;i<=lim;i<<=1){
            cp wn={ cos(2*PI/i),sin(2*PI/i)};
            int d=i>>1;
            for(int j=0;j<lim;j+=i){
                cp wk={ 1,0};
                for(int k=j;k<j+d;++k,wk=wk*wn){
                    cp x=A[k],y=wk*A[k+d];
                    A[k]=x+y,A[k+d]=x-y;
                }
            }
        }
        if(op==-1){
            reverse(A+1,A+lim);
            for(int i=0;i<lim;++i)A[i].x/=lim;
        }
    }
    void workFFT(int a[],int n,int b[],int m,int c[]){
        int lim=1;
        while(lim<=n+m)lim<<=1;
```

```
    for(int i=0;i<lim;++i){
        rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)*(lim>>1));
    }
    for(int i=0;i<lim;++i){
        A[i]=i<=n?cp{ a[i],0}:cp{ 0,0};//输入 a 0~n 次系数
        B[i]=i<=m?cp{ b[i],0}:cp{ 0,0};//输入 b 0~n 次系数
    }
    fft(A,lim,1),fft(B,lim,1);
    for(int i=0;i<lim;++i)C[i]=A[i]*B[i];
    fft(C,lim,-1);
    for(int i=0;i<=n+m;++i)c[i]=(int)(C[i].x+0.5);
}

//NTT
int f[maxn],g[maxn],lim,pre[maxn],c[maxn],n,m,rev[maxn];
const int mod=998244353,G=3,invG=332748118;
int mypow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)ans=(ll)ans*a%mod;
        a=(ll)a*a%mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int Add(int x,int y){
    x+=y;
    if(x>=mod)x-=mod;
    return x;
}
int Sub(int x,int y){
    x-=y;
    if(x<0)x+=mod;
    return x;
}
int mul(int x,int y){ return (ll)x*y%mod;}
int inv(int x){ return mypow(x,mod-2);}
void getlim(int x){
    lim=1;
    while(lim<x)lim<<=1;
}
void initrev(){
     for(int i=0;i<lim;++i){
        rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)*(lim>>1));
```

```
        }
    }
    void initpre(){
        for(int i=1;i<lim;i<<=1){ //一半长度
            int w = mypow(3, (mod - 1) / (i << 1));//g^((p-1)/(n))
            pre[i] = 1;
            for (int j = 1; j < i; j++) pre[i + j] = mul(pre[i + j - 1],
w);
        }
    }
    void ntt(int*a,bool tp){
        for (int i = 0; i < lim; i++) if (i < rev[i]) swap(a[i], a[rev[i]]);
        for (int mid = 1, cnt = 0; mid < lim; mid <<= 1, cnt++)
            for (int j = 0, len = mid << 1; j < lim; j += len)
                for (int k = 0; k < mid; k++) {
                    int x = a[j + k], y = mul(pre[mid + k], a[j + k + mid]);
                    a[j + k] = Add(x, y);
                    a[j + k + mid] = Sub(x, y);
                }
        if (tp) return;
        int invlim = inv(lim);
        for (int i = 0; i < lim; i++) a[i] = mul(a[i], invlim);
        reverse(a + 1, a + lim);
    }
    void getmul(int n,int m,int*a,int*b){
        getlim(n+m+2);
        initpre();
        initrev();
        ntt(a,1);ntt(b,1);
        for(int i=0;i<lim;++i)c[i]=mul(a[i],b[i]);
        ntt(c,0);
    }
    void solve(){
        cin>>n>>m;
        for(int i=0;i<=n;++i)cin>>f[i];
        for(int i=0;i<=m;++i)cin>>g[i];
        getmul(n,m,f,g);
        //[0,n+m]对应系数
    }

}
using namespace Poly;
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);
```

```
    solve();
    for(int i=0;i<=n+m;++i)cout<<c[i]<<" ";
    return 0;
}
```

分治 FFT

分治FFT小结

分治FFT本质上是分治+FFT

暂时两种套路

1.$f_i=\sum_{j=1}^{i}f_{i-j}g_j$ *or* $f_i=\sum_{j=0}^{i-1}f_jg_{i-j}$ 即前面对自己转移

直接卷积枚举每个点卷积的复杂度是$O(n^2logn)$

考虑CDQ分治，先处理$f(l,mid)$,考虑$f(l,mid)$对$f(mid+1,r)$的贡献，再递归$f(mid+1,r)$计算

具体来说，$f(l,mid)$对$f(mid+1,r)$的贡献实质是$f(l,mid)$卷$g(1,r-l)$

$h(x)=\sum_{i=l}^{mid}f[i]g[x-i]$ 此时把$f(mid+1,r)$看成是0则可以拓展为$h(x)=\sum_{i=l}^{x-1}f[i]g[x-i]$

$h(x)=\sum_{i=0}^{x-1-l}f[i+l]g[x-l-i]$，令$a[i]=f[i+l],b[i-1]=g[i]$

则$h(x)=\sum^{x-1-l}a[i]b[x-l-1-i]$，$fft$即可

```
 void cdq(int l,int r){ //一般 ntt 模板 给 f[0] g[1~n-1]算 f[1~n-1]
    if(l==r)return;
    int mid=l+r>>1,length=r-l+1;
    cdq(l,mid);//先做完左边
    getlim(length+1);//r-l+2
    initrev();
    initpre();
    for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=b[i]=0;
    for(int i=l;i<=mid;++i)a[i-l]=f[i];//考虑贡献到[mid+1,r]即为
    for(int i=1;i<length;++i)b[i-1]=g[i];//f[l,mid]卷 g[1,r-l]
    ntt(a,1);ntt(b,1);
    for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=mul(a[i],b[i]);
    ntt(a,0);
    for(int i=mid+1;i<=r;++i){
        f[i]+=a[i-1-l];
        if(f[i]>=mod)f[i]-=mod;
        if(f[i]<0)f[i]+=mod;
    }
    cdq(mid+1,r);
 }
```

当然也可多项式求逆

设$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}f_ix^i,G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}g_ix^i \quad g_0=0$

$$F(x)G(x)\equiv\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}f_{i-j}g_jx^i\equiv F(x)-f(0)x^0,modx^n \quad F(X)\equiv(1-G(x))^{-1}(modx^n)$$

2.$\prod(a_ix+b_i)$ 即可以看成两个集合选指定个数的数连乘之和，最裸的分治FFT了

```
poly solve(int l,int r){
    if(l==r) return poly{b_i,a_i};
    int mid=l+r>>1;
    return solve(l,mid)*solve(mid+1,r);
}
```

3.卷积的时候与值域大小比较相关，此时可以考虑对值域分治，按照值域限制贡献

Vector 全家桶板子

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
using ull=unsigned long long;
using ll=long long;
const int mod=998244353,G=3;//原根
const int maxn=2e5+5;
template<typename T>
void read(T &f){
    f=0;T fu=1;char c=getchar();
    while(c<'0'||c>'9'){ if(c=='-')fu=-1;c=getchar();}
    while(c>='0'&&c<='9'){ f=(f<<3)+(f<<1)+(c&15);c=getchar();}
    f*=fu;
}

template<typename T>
void print(T x){
    if(x<0)putchar('-'),x=-x;
    if(x<10)putchar(x+48);
    else print(x/10),putchar(x%10+48);
}

template <typename T>
void print(T x, char t) {
```

```
    print(x); putchar(t);
}


inline int Add(int x,int y){
    x+=y;
    if(x>=mod)x-=mod;
    return x;
}

inline int Sub(int x,int y){
    x-=y;
    if(x<0)x+=mod;
    return x;
}

inline int mul(int x,int y){ return 1ll*x*y%mod;}

int mypow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)ans=mul(ans,a);
        a=mul(a,a);
        b>>=1;
    }
    return ans;
}

namespace Poly{
    typedef vector<int>poly;
    poly roots,rev;
    void getRevRoot(int base){
        int lim=1<<base;
        if((int)roots.size()==lim)return;
        roots.resize(lim);rev.resize(lim);
        for(int i=1;i<lim;++i)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(base-1));
        for(int mid=1;mid<lim;mid<<=1){
            int wn=mypow(G,(mod-1)/(mid<<1));
            roots[mid]=1;
            for(int i=1;i<mid;++i)roots[mid+i]=mul(roots[mid+i-1],wn);
        }
    }

    void ntt(poly&a,int base){
```

```
    int lim=1<<base;
    for(int i=0;i<lim;++i)if(i<rev[i])swap(a[i],a[rev[i]]);
    for(int mid=1;mid<lim;mid<<=1){
        for(int i=0;i<lim;i+=(mid<<1)){
            for(int j=0;j<mid;++j){
                int x=a[i+j],y=mul(a[i+j+mid],roots[j+mid]);
                a[i+j]=Add(x,y);
                a[i+j+mid]=Sub(x,y);
            }
        }
    }
}

poly operator*(poly a,poly b){
    int lim=(int)a.size()+(int)b.size()-1,base=0;
    while((1<<base)<lim)++base;
    a.resize(1<<base);b.resize(1<<base);
    getRevRoot(base);
    ntt(a,base);ntt(b,base);
    for(int i=0;i<(1<<base);++i)a[i]=mul(a[i],b[i]);
    ntt(a,base);
    reverse(a.begin()+1,a.end());
    a.resize(lim);
    int inv=mypow(1<<base,mod-2);
    for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=mul(a[i],inv);
    return a;
}
poly polyInv(poly f,int base){
    int lim=1<<base;
    f.resize(lim);
    if(lim==1){
        poly ans(1,mypow(f[0],mod-2));
        return ans;
    }
    poly g(1<<base,0),g0=polyInv(f,base-1),tmp=g0*g0*f;
    for(int i=0;i<(1<<(base-1));++i)g[i]=Add(g0[i],g0[i]);
    for(int i=0;i<(1<<base);++i)g[i]=Sub(g[i],tmp[i]);
    return g;
}
poly polyInv(poly f){
    int lim=(int)f.size(),base=0;
    while((1<<base)<lim)++base;
    f=polyInv(f,base);f.resize(lim);
    return f;
```

```
    }

    poly operator+(const poly&a,const poly&b){
        poly c=a;
        c.resize(max(a.size(),b.size()));
        int lim=(int)b.size();
        for(int i=0;i<lim;++i)c[i]=Add(c[i],b[i]);
        return c;
    }

    poly operator-(const poly&a,const poly&b){
        poly c=a;
        c.resize(max(a.size(),b.size()));
        int lim=(int)b.size();
        for(int i=0;i<lim;++i)c[i]=Sub(c[i],b[i]);
        return c;
    }

    poly operator*(const int&b,const poly&a){
        poly c=a;
        int lim=(int)a.size();
        for(int i=0;i<lim;++i)c[i]=mul(b,c[i]);
        return c;
    }

    int inv[maxn<<2];//未知
    void initInv(){
        inv[1]=1;
        for(int  i=2;i<maxn;++i)inv[i]=mul(inv[mod%i],(mod-mod/i));//跑 2
倍
    }
    //多项式求导
    poly deri(poly a){
        int lim=(int)a.size()-1;
        for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=mul(a[i+1],i+1);
        a.resize(lim);
        return a;
    }
    //多项式积分
    poly inte(poly a){ //!!记得 init inv
        int lim=(int)a.size()+1;
        a.resize(lim);
        for(int i=lim-1;i>=1;--i)a[i]=mul(a[i-1],inv[i]);
        a[0]=0;//原 a_0=1 才可以用于求 ln ln(a_0)=0
```

```
    return a;
}

poly polyLn(poly a){
    int lim=(int)a.size();//
   // a=inte(deri(a)*polyInv(a));//n+m 大小 逆元开第一个二次幂
    a=deri(a)*polyInv(a);//mod (x^n)下 [0,n-1]用
    a.resize(lim-1);
    a=inte(a);
  //  a.resize(lim);
    return a;
}

poly polySqr(poly a,int base){
    int lim=1<<base;
    a.resize(lim);
    if(lim==1){
        poly ans(1,1);//a[0]=1
        return ans;
    }
    poly g0=polySqr(a,base-1);g0.resize(lim);
    a=a*polyInv(g0)+g0;
    a.resize(lim);
    for(int i=0;i<lim;++i){
        if(a[i]&1)a[i]=(a[i]+mod)>>1;
        else a[i]=a[i]>>1;
    }
    return a;
}

poly polySqr(poly f){
    int lim=(int)f.size(),base=0;
    while((1<<base)<lim)++base;
    f=polySqr(f,base);f.resize(lim);
    return f;
}

poly polyExp(poly f,int base){
    int lim=1<<base;f.resize(lim);
    if(lim==1){
        poly ans(1,1);
        return ans;
    }
    poly g0=polyExp(f,base-1),g(1,1);
```

```
        g0.resize(lim);//同样%x^n 下,所以要两倍
        g=g0*(g-polyLn(g0)+f);
        return g;
    }

    poly polyExp(poly f){
        int lim=(int)f.size(),base=0;
        while((1<<base)<lim)++base;
        f=polyExp(f,base);f.resize(lim);
        return f;
    }

    poly polyPow(poly a,int k){ //a_0=1 多项式系数 mod 998244353 下算
        return polyExp(k*polyLn(a));
    }

   poly polyPow(poly a){
        int n,c,k=0;
        scanf("%d",&n);
        a.resize(n);
        c=getchar();while(isspace(c))c=getchar();//k 是 int 直接读
        for(;isdigit(c);c=getchar())k=(k*10ll+(c^'0'))%mod;
        for(int i=0;i<n;++i)scanf("%d",&a[i]);
        return polyPow(a,k);
    }
    int norm(int n){return 1<<(32-__builtin_clz(n-1));}
    void norm(poly &a){
        if(!a.empty()){
            a.resize(norm(a.size()),0);
        }else
            a={0};
    }
    poly polyPow2(poly a,int b1,int b2){//b1=b%P,b2=b%phi(P) and b>=n iff
a[0]>0
        int n=a.size(),d=0,k;
        while(d<n&&!a[d])++d;
        if((ll)d*b1>=n)return poly(n,0);
        a.erase(a.begin(),a.begin()+d);
        k=mypow(a[0],mod-2);
        a=k*a;
        norm(a);
        a=mypow(k,mod-1-b2)*polyPow(a,b1);
        a.resize(n);d*=b1;
        for(int i=n-1;i>=0;--i)a[i]=i>=d?a[i-d]:0;
```

```
        return a;
    }
    void P5273(){//A(x)^s 次方 s 是大数
        int n;
        int k1 = 0, k2 = 0, big = 0; string s;
        cin >> n >> s;
        poly a(n,0);
        for(auto c: s){
            k1 = (10ll * k1 + c - '0') % mod,
            k2 = (10ll * k2 + c - '0') % (mod - 1), big = big || k1 >= n;
        }
        for (auto &x: a)
            cin >> x;
        a = big && !a[0] ? poly(n,0) : polyPow2(a, k1, k2);
        for (auto x : a)
            cout<<x<<" ";
    }
}
```

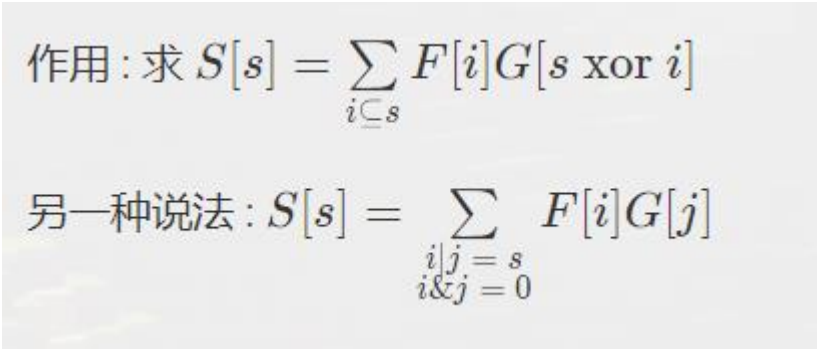
FWT 与子集卷积

```
   //FWT
    void FWT_OR(poly&a,bool f){
        int n=a.size();
        for(int l=2,m=1;l<=n;l<<=1,m<<=1){
            for(int j=0;j<n;j+=l)
                for(int i=0;i<m;++i){
                    if(!f)
                        a[i+j+m]=Add(a[i+j+m],a[i+j]);
                    else
                        a[i+j+m]=Sub(a[i+j+m],a[i+j]);
                }
        }
    }
    void FWT_AND(poly&a,bool f){
        int n=a.size();
        for(int l=2,m=1;l<=n;l<<=1,m<<=1){
            for(int j=0;j<n;j+=l)
                for(int i=0;i<m;++i){
                    if(!f)
                        a[i+j]=Add(a[i+j],a[i+j+m]);
                    else
                        a[i+j]=Sub(a[i+j],a[i+j+m]);
```

```
            }
        }
    }
    void FWT_XOR(poly&a,bool f){
        int n=a.size(),inv2=(mod+1)>>1;
        for(int l=2,m=1;l<=n;l<<=1,m<<=1){
            for(int j=0;j<n;j+=l)
                for(int i=0;i<m;++i){
                    int x=a[i+j],y=a[i+j+m];//换 LL 时候也要换
                    if(!f){
                        a[i+j]=Add(x,y);
                        a[i+j+m]=Sub(x,y);
                    }else{
                        a[i+j]=mul(Add(x,y),inv2);
                        a[i+j+m]=mul(Sub(x,y),inv2);
                    }
                }
        }
    }
    int getlim(int x){ //传的是(1<<max) 不是 bit
        int lim=1;
        while(lim<x)lim<<=1;
        return lim;
    }
    poly OR(poly a,poly b){
        int n=max(a.size(),b.size());
        int lim=getlim(n);
        a.resize(lim);b.resize(lim);
        FWT_OR(a,0);
        FWT_OR(b,0);
        for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=mul(a[i],b[i]);
        FWT_OR(a,1);
        return a;
    }
    poly AND(poly a,poly b){
        int n=max(a.size(),b.size());
        int lim=getlim(n);
        a.resize(lim);b.resize(lim);
        FWT_AND(a,0);
        FWT_AND(b,0);
        for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=mul(a[i],b[i]);
        FWT_AND(a,1);
        return a;
    }
```

```
poly XOR(poly a,poly b){
    int n=max(a.size(),b.size());
    int lim=getlim(n);
    a.resize(lim);b.resize(lim);
    FWT_XOR(a,0);
    FWT_XOR(b,0);
    for(int i=0;i<lim;++i)a[i]=mul(a[i],b[i]);
    FWT_XOR(a,1);
    return a;
}
```

子集卷积



多开一位，f(i,s)表示集合 s 的子集中所有位数为 i 的值的和

```
#include<bits/stdc++.h>
#define cbit(x) __builtin_popcount(x)
using namespace std;
using ll=long long;
const int maxn=(1<<20)+100;
const int mod=1e9+9;
int a[22][maxn],b[22][maxn],c[22][maxn];
inline int mul(int x,int y){ return (ll)x*y%mod;}
inline int Add(int x,int y){
    x+=y;
    if(x>=mod)x-=mod;
    return x;
}
inline int Sub(int x,int y){
    x-=y;
    if(x<0)x+=mod;
    return x;
}
void fwt(int a[],bool f,int lim){
    for(int l=2,m=1;l<=lim;l<<=1,m<<=1){
        for(int j=0;j<lim;j+=l){
```

```
            for(int i=0;i<m;++i){
                if(!f)a[i+j+m]=Add(a[i+j+m],a[i+j]);
                else a[i+j+m]=Sub(a[i+j+m],a[i+j]);
            }
        }
    }
}
int getlim(int x){
    int lim=1;
    while(lim<x)lim<<=1;
    return lim;
}
int main(){
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    int n;
    cin>>n;
    int lim=(1<<n);
    for(int i=0;i<lim;++i)cin>>a[cbit(i)][i];
    for(int i=0;i<lim;++i)cin>>b[cbit(i)][i];
    for(int i=0;i<=n;++i)fwt(a[i],0,lim);
    for(int i=0;i<=n;++i)fwt(b[i],0,lim);
    for(int i=0;i<=n;++i){
        for(int j=0;i+j<=n;++j){
            for(int k=0;k<lim;++k)
                c[i+j][k]=Add(c[i+j][k],mul(a[i][k],b[j][k]));
        }
    }
    for(int i=0;i<=n;++i)fwt(c[i],1,lim);
    for(int i=0;i<((1<<n)-1);++i)cout<<c[cbit(i)][i]<<" ";
    cout<<c[n][(1<<n)-1];
    return 0;
}
```

特殊数计算

两类斯特林数

```
const int N=3e5+5;
int fac[N],facinv[N];
void init(int n){
    fac[0]=1;
```

```
    for(int i=1;i<=n;++i)fac[i]=mul(fac[i-1],i);
    facinv[n]=mypow(fac[n],mod-2);
    for(int i=n-1;i>=0;--i)facinv[i]=mul(facinv[i+1],i+1);
}
using namespace Poly;
namespace Stiring{

    namespace Stiring1{
        poly Offset(poly f,int c){ //f(x)->f(x+c)
            poly g(c+1),h(c+1);
            for(int i=0,j=1;i<=c;++i,j=(ll)j*c%mod){
                h[i]=mul(j,facinv[i]);
                g[i]=mul(f[c-i],fac[c-i]);
            }
            g=g*h;
            for(int i=0;i<=c;++i)h[i]=mul(g[c-i],facinv[i]);
            return h;
        }
        poly Solve(int n){//x^(up n)
            if(!n)return { 1};
            int m=n/2;
            poly f=Solve(m),g=Offset(f,m);
            f=f*g;
            f.resize(n+1);
            if(n&1){//乘上(x+n-1)
                for(int i=n;i>=0;--i){
                    f[i]=mul(f[i],n-1);
                    if(i>0)
                        f[i]=Add(f[i],f[i-1]);
                }
            }
            return f;
        }
        poly Stiring1_row(int n){
            init(n+1);
            return Solve(n);
        }
        poly Stiring1_line(int n,int k){
            poly f(n+1);
            int fack=1;
            for(int i=1;i<=k;++i)fack=(ll)fack*i%mod;
            fack=mypow(fack,mod-2);
            for(int i=0;i<=n;++i)f[i]=inv[i];//记得 initInv()
            f=polyPow2(f,k,k);
```

```
            for(int
i=0,fac=1;i<=n;++i,fac=(ll)fac*i%mod)f[i]=(ll)f[i]*fack%mod*fac%mod;
            f.resize(n+1);
            return f;
        }
        vector<vector<int>> Stiring1All(int n,int m){//n 行,m 列
            vector<vector<int>>dp(n+1,vector<int>(m+1,0));
            dp[0][0]=1;
            for(int i=1;i<=n;++i)
                for(int j=1;j<=m;++j)
                    dp[i][j]=(dp[i-1][j-1]+(ll)(i-1)*dp[i-1][j])%mod;
            return dp;
        }
    }
    namespace Stiring2{
        poly Stiring2_row(int n,int m){//第 n 行的[0,m]列
            poly f(m+1),g(m+1);
            init(m+1);
            for(int i=0;i<=m;++i)f[i]=mul(mypow(-1,i),facinv[i]);
            for(int i=0;i<=m;++i)g[i]=mul(mypow(i,n),facinv[i]);
            f=f*g;
            f.resize(m+1);
            return f;
        }
        poly Stiring2_line(int n,int k){//第 k 列 [0,n]
            poly f(n+1,0);
            init(n+1);
            for(int i=1;i<=n;++i)f[i]=facinv[i];//f[0]=0;
            f=polyPow2(f,k,k);
            for(int i=0;i<=n;++i)f[i]=(ll)f[i]*facinv[k]%mod*fac[i]%mod;
            f.resize(n+1);
            return f;
        }
        vector<vector<int>> Stiring2All(int n,int m){//n 行,m 列
            vector<vector<int>>dp(n+1,vector<int>(m+1,0));
            dp[0][0]=1;
            for(int i=1;i<=n;++i)
                for(int j=1;j<=m;++j)
                    dp[i][j]=(dp[i-1][j-1]+(ll)j*dp[i-1][j])%mod;
            return dp;
        }
    }
}
```

```
using namespace Stiring;
using namespace Stiring1;
using namespace Stiring2;
```

贝尔数

```
namespace Bell{
    //cal B[1,n]
    poly BellAll(int n){
        init(n+1);
        poly ans(n+1,0);
        for(int i=1;i<=n;++i)ans[i]=facinv[i];
        return polyExp(ans);
    }

} using namespace Bell;
```

计算几何

点相关

```
#include<bits/stdc++.h>
#define cha(p1,p2,p3) (sign(det(p2-p1,p3-p1)))//p2-p1 叉 p3-p1
using namespace std;
typedef double db;
const db eps=1e-8;

int sign(db a){ //符号正负
    return a<-eps?-1:a>eps;
}

int dcmp(db a,db b){ //两数大小
    return sign(a-b);
}

db dAbs(db a){return a*sign(a);}

struct P{ //点向量类
    db x,y;
    P(db _x=0,db _y=0):x(_x),y(_y){ }
    P operator+(P p){return P(x+p.x,y+p.y);}//左操作数
```

```
    P operator-(P p){ return P(x-p.x,y-p.y);}
    P operator*(db d){return P(x*d,y*d);}
    P operator/(db d){ return P(x/d,y/d);}
    bool operator<(P p)const{//点按 x 排序后按 y 排序
        int c=dcmp(x,p.x);
        if(c)return c==-1;
        return dcmp(y,p.y)==-1;
    }
    db len2(){ return x*x+y*y;}//能用 ll 就 ll，精度
    db len(){  return sqrt(len2());}
};

bool operator==(P a,P b){return !dcmp(a.x,b.x)&&!dcmp(a.y,b.y);}

int dis(P a,P b){
    return (a.x-b.x)*(a.x-b.x)+(a.y-b.y)*(a.y-b.y);
}

db dot(P a,P b){//内积
    return a.x*b.x+a.y*b.y;
}
db det(P a,P b){//叉积
    return a.x*b.y-a.y*b.x;
}
//点积运用

db Angle(P a,P b){//(2)两向量夹角
    return acos(dot(a,b)/len(a)/len(b));
}

db AngleSign(P a,P b){//(3)两夹角钝锐直
    return sign(dot(a,b));
}

P proj(P p1,P p2,P p){//(4)求 p 投影到 p1,p2 直线的点
    P a=p2-p1;
    return p1+a*(dot(p-p1,a)/a.len2());
}

P reflect(P p1,P p2,P p){//(5) p 关于 p1,p2 直线对称的点
    return proj(p1,p2,p)*2-p;
}

P Unit(const P&a){//(4)求单位向量
```

```
    double L=len(a);
    return P(a.x/L,a.y/L);
}

db Area2(P a,P b,P c){//两向量平行四边形有向面积
    return det(b-a,c-a);
}

P RotateL(const P&a,const double&rad){//逆时针旋转
    return P(a.x*cos(rad)-a.y*sin(rad),a.y*cos(rad)+a.x*sin(rad));
}

P RotateR(const P&a,const double&rad){//顺时针旋转
    return P(a.x*cos(rad)+a.y*sin(rad),a.y*cos(rad)-a.x*sin(rad));
}

P RotateL90(const P&a){//向量逆时针旋转 90 度
    return P(-a.y,a.x);
}

P RotateR90(const P&a){//顺时针旋转 90 度
    return P(a.y,-a.x);
}
```

线相关

```
struct L{//ps[0]->ps[1]
    P ps[2];
    P &operator[](int i){return ps[i];}
    P dir(){return ps[1]-ps[0];}//直线方向向量
    L(P X=P(),P Y=P()){ps[0]=X,ps[1]=Y;}
};

bool thesameLine(L x1,L x2){//两直线是否重合
    P a=x2.ps[1]-x1.ps[1];
    return (sign(det(x1.dir(),x2.dir()))==0&&sign(det(x2.dir(),a))==0);
}

bool parallel(L x1,L x2){//判两直线是否平行
    P a=x2.ps[1]-x1.ps[1];
    return sign(det(x1.dir(),x2.dir())==0&&sign(det(x2.dir(),a))!=0);
}
```

```
bool Orthogonal(L x1,L x2){//判两直线是否垂直
    return sign(dot(x1.dir(),x2.dir()))==0;
}

bool onLine(L l1,P a){//点在直线上
    return sign(det(l1.dir(),a-l1.ps[0]))==0;
}

bool LineInterset(L l1,L l2){//直线是否相交
    return !parallel(l1,l2);
}

db PLinedis(L l1,P a){//平行四边形面积求点到直线距离
    return dAbs(det(a-l1.ps[0],l1.dir())/l1.dir().len());
}

P LineInter(L l1,L l2){ //两直线交点 不平行的时候用
    P a=l1.ps[0],b=l1.ps[1],c=l2.ps[0],d=l2.ps[1];
    db t=det(a-c,c-d)/det(a-b,c-d);
    return P(a.x+(b.x-a.x)*t,a.y+(b.y-a.y)*t);
}
```

线段相关

```
bool onSeg(P c,P a,P b){//判断 c 是否在线段 ab 上
    return sign(det(c-a,b-a))==0&&sign(dot(c-a,c-b))<=0;
}

db PdisSeg(P c,P a,P b){//点 c 到线段 ab 的距离
    if(a==b)return (c-a).len();
    P x=c-a,y=c-b,z=b-a;
    if(AngleSign(x,z)<0)return x.len();//c 离 a 更近
    if(AngleSign(y,z)>0)return y.len();//c 离 b 更近
    return dAbs(det(x,z)/z.len());
}

bool LineInSeg(L c,P a,P b){//直线 C 与线段 ab 是否交
    if(c.ps[0]==c.ps[1])return false;//看情况特判直线是否是重点
    return sign(det(c.dir(),a-c.ps[0]))*sign(det(c.dir(),b-c.ps[0]))<=0;
}

bool recInter(db l1,db r1,db l2,db r2){//矩形相交 快速排斥
    if(l1>r1)swap(l1,r1);if(l2>r2)swap(l2,r2);
    return !(dcmp(r1,l2)==-1||dcmp(r2,l1)==-1);
```

```
}

bool isSegInter(P p1,P p2,P q1,P q2){//判 线段 p1p2 与 q1q2 是否相交 端点算交重点无关
    return
recInter(p1.x,p2.x,q1.x,q2.x)&&recInter(p1.y,p2.y,q1.y,q2.y)&&
    cha(p1,p2,q1)*cha(p1,p2,q2)<=0&&cha(q1,q2,p1)*cha(q1,q2,p2)<=0;
}

bool isSegInter(P p1,P p2,P q1,P q2){//判 线段 p1p2 与 q1q2 是否相交 端点不算交
    return cha(p1,p2,q1)*cha(p1,p2,q2)<0&&cha(q1,q2,p1)*cha(q1,q2,p2)<0;
}

db SSdis(P p1,P p2,P q1,P q2){//线段 p1p2 到线段 q1q2 的最短路径
    if(isSegInter(p1,p2,q1,q2))return 0;
    return
min(min(PdisSeg(p1,q1,q2),PdisSeg(p2,q1,q2)),min(PdisSeg(q1,p1,p2),PdisSeg(q2,p1,p2)));
}
```

三角形相关

```
//三角形
//重心 到三角形三顶点距离平方和最小的点
//到三角形三边距离之积最大的点
P gravity(P a,P b,P c){
    db x=(a.x+b.x+c.x)/3;
    db y=(a.y+b.y+c.y)/3;
    return P(x,y);
}

P Incenter(P a,P b,P c){//内心 到三边距离相等
    #define diss(a,b) sqrt(dis(a,b))
    db A=diss(b,c),B=diss(a,c),C=diss(a,b);
    db S=A+B+C;
    db x=(A*a.x+B*b.x+C*c.x)/S;
    db y=(A*a.y+B*b.y+C*c.y)/S;
    return P(x,y);
}

P circumcenter(P a,P b,P c){//外心 到三顶点距离相等
    db X1=a.x,Y1=a.y,X2=b.x,Y2=b.y,X3=c.x,Y3=c.y;
```

```
    db a1=2*(X2-X1),b1=2*(Y2-Y1);
    db c1=X2*X2+Y2*Y2-X1*X1-Y1*Y1;
    db a2=2*(X3-X2),b2=2*(Y3-Y2);
    db c2=X3*X3+Y3*Y3-X2*X2-Y2*Y2;
    db x=(c1*b2-c2*b1)/(a1*b2-a2*b1);
    db y=(a1*c2-a2*c1)/(a1*b2-a2*b1);
    return P(x,y);
}

P perpencenter(P a,P b,P c){//垂心
    db A1=b.x-c.x,B1=b.y-c.y;
    db C1=A1*a.y-B1*a.x;
    db A2=a.x-c.x,B2=a.y-c.y;
    db C2=A2*b.y-B2*b.x;
    db x=(A1*C2-A2*C1)/(A2*B1-A1*B2);
    db y=(B1*C2-B2*C1)/(A2*B1-A1*B2);
    return P(x,y);
}

P feiPoint(P a,P b,P c){//三角形费马点 到三顶点距离之和最小的点
    #define diss(a,b) sqrt(dis(a,b))
    P u=gravity(a,b,c),v;
    db step=fabs(a.x)+fabs(b.x)+fabs(c.x)+fabs(a.y)+fabs(b.y)+fabs(c.y);
    int i,j,k;
    while(step>1e-10){
        for(k=0;k<10;step/=2,k++)
            for(i=-1;i<=1;++i)
                for(j=-1;j<=1;++j){
                    v.x=u.x+step*i;
                    v.y=u.y+step*j;

if(dcmp(diss(u,a)+diss(u,b)+diss(u,c),diss(v,a)+diss(v,b)+diss(v,c))>0)
                        u=v;
                }
    }
    return u;
}
```

多边形相关

```
db area(vector<P>p){//任意多边形面积 顺逆都可
    db ans=0;
    int sz=p.size();
    for(int i=0;i<sz-1;++i)ans+=det(p[i],p[i+1]);
```

```
    ans+=det(p[sz-1],p[0]);
    return dAbs(ans/2);
}

//O(n)点在任意多边形内 点数为 1 或 2 也可
int contain(P ps[],P p,int n){//2:onSeg 1:inside 0: outside
    int flag=0,cnt=0;
        db tmp;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        int j=i<n?i+1:1;
        if(onSeg(p,ps[i],ps[j]))return 2;//点在多边形上
        if(p.y>=min(ps[i].y,ps[j].y)&&p.y<max(ps[i].y,ps[j].y))
            tmp=ps[i].x+(p.y-ps[i].y)/(ps[j].y-ps[i].y)*(ps[j].x-
ps[i].x),cnt+=(sign(tmp-p.x)>0);
    }
    return cnt&1;
}

int TuContain(P p[],int n,P a){//二分法判断 a 是否在凸多边形以内 必须是凸多边
形
    if(n==1)if(p[1]==a)return 2;else return 0;               //特判非凸包
看情况加
    else if(n==2)if(onSeg(a,p[1],p[2]))return 2;else return 0;
    else{
    //点必须按逆时针给 顺时针>改<即可
        if(cha(p[1],a,p[2])>0||cha(p[1],p[n],a)>0)return 0;//P[1,2]或[1,n]
外
        if(onSeg(a,p[1],p[2])||onSeg(a,p[1],p[n]))return  2;//[1,2]/[1,n]
上
        int l=2,r=n-1;
        while(l<r){
            int mid=l+r+1>>1;
            if(cha(p[1],p[mid],a)>0)l=mid;//使得 a 被 mid,mid+1 到 1 夹住
            else r=mid-1;
        }
        if(cha(p[l],a,p[l+1])>0)return 0;
        if(onSeg(a,p[l],p[l+1]))return 2;
        return 1;
    }
}

//线与多边形
//(1). 判断线段 AB 是否在任意多边形 Poly 以内：不相交且两端点 A,B 均在多边形
以内。
```

```
//(2). 判断线段 AB 是否在凸多边形 Poly 以内：两端点 A,B 均在多边形以内。

//判两多边形是否相离 O(n^2logn)
int PPLI(P a[],P b[],int num1,int num2){//先求两凸包
    for(int i1=1;i1<=num1;++i1){
        int j1=i1<num1?i1+1:1;
        for(int i2=1;i2<=num2;++i2){
            int j2=i2<num2?i2+1:1;
            if(isSegInter(a[i1],a[j1],b[i2],b[j2]))return 0;//线段相交不相
离
            if(TuContain(b,num2,a[i1])||TuContain(a,num1,b[i2]))return
0;//点在多边形内不相离
        }
    }
    return 1;
}
```

圆相关

```
#include<bits/stdc++.h>
#define diss(a,b) sqrt(dis(a,b))
#define pb push_back
using namespace std;
typedef long double db;
const db eps=1e-8;
const db PI=acos(-1.0);
int q;
int sign(db a){ //符号正负
    return a<-eps?-1:a>eps;
}
int dcmp(db a,db b){ //两数大小
    return sign(a-b);
}
struct P{ //点向量类
    db x,y;
    P(db _x=0,db _y=0):x(_x),y(_y){ }
    P operator+(P p){return P(x+p.x,y+p.y);}//左操作数
    P operator-(P p){ return P(x-p.x,y-p.y);}
    P operator*(db d){return P(x*d,y*d);}
    P operator/(db d){ return P(x/d,y/d);}
    db len2(){ return x*x+y*y;}//能用 ll 就 ll，精度
    db len(){  return sqrt(len2());}
```

```
     bool operator<(P p)const{//点按 x 排序后按 y 排序
        int c=dcmp(x,p.x);
        if(c)return c==-1;
        return dcmp(y,p.y)==-1;
    }
};
db dis(P a,P b){
    return (a.x-b.x)*(a.x-b.x)+(a.y-b.y)*(a.y-b.y);
}
struct L{//ps[0]->ps[1]
    P ps[2];
    P &operator[](int i){return ps[i];}
    P dir(){return ps[1]-ps[0];}//直线方向向量
    L(P X=P(),P Y=P()){ps[0]=X,ps[1]=Y;}
};
struct Cir{
    db r;
    P c;
    Cir(P _c=P(),db _r=0):c(_c),r(_r){}
    P GP(db b){//圆上过一点知道角度和距离
        return P(c.x+cos(b)*r,c.y+sin(b)*r);
    }
};
db dot(P a,P b){
    return a.x*b.x+a.y*b.y;
}
db det(P a,P b){//叉积
    return a.x*b.y-a.y*b.x;
}
db PLinedis(L l1,P a){//平行四边形面积求点到直线距离
    return fabs(det(a-l1.ps[0],l1.dir())/l1.dir().len());
}
P LineInter(L l1,L l2){ //两直线交点 不平行的时候用
    P a=l1.ps[0],b=l1.ps[1],c=l2.ps[0],d=l2.ps[1];
    db t=det(a-c,c-d)/det(a-b,c-d);
    return P(a.x+(b.x-a.x)*t,a.y+(b.y-a.y)*t);
}
//圆与直线交点
//线段就直接求判点是否在线段上
vector<P> getCircleLineSec(P c,db r,P p1,P p2){//返回空 or 1 or 2 交点
    vector<P>ans;
    db dd=PLinedis(L(p1,p2),c);
    if(dcmp(dd,r)>0)return ans;//离
    P p=c;
```

```
    db t;
    p.x+=p1.y-p2.y;
    p.y+=p2.x-p1.x;
    p=LineInter(L(p,c),L(p1,p2));
    t=sqrt(r*r-diss(p,c)*diss(p,c))/diss(p1,p2);
    P x1,x2;
    x1={p.x+(p2.x-p1.x)*t,p.y+(p2.y-p1.y)*t};
    x2={p.x-(p2.x-p1.x)*t,p.y-(p2.y-p1.y)*t};
    ans.pb(x1);
    if(dcmp(dd,r)==0)//切
        return ans;
    else
        ans.pb(x2);
    return ans;
}

Cir read_cir(){
    Cir C;
    cin>>C.c.x>>C.c.y>>C.r;
    return C;
}

P RotateL90(const P&a){
    return P(-a.y,a.x);
}

vector<P>getCircelIntersec(P a,db r,P b,db R){ //圆与圆交点
    vector<P>ret;
    db d=diss(a,b);
    if (dcmp(d,r+R)>0||dcmp(d+min(r,R),max(r,R))<0) return ret;
    db x = (d*d-R*R+r*r)/(2*d);
    db y = sqrt(r*r-x*x);
    P v = (b-a)/d;
    ret.push_back(a+v*x + RotateL90(v)*y);
    if (sign(y)>0) ret.push_back(a+v*x - RotateL90(v)*y);
    return ret;
}

P RotateL(const P&a,const double&rad){//逆时针旋转
    return P(a.x*cos(rad)-a.y*sin(rad),a.y*cos(rad)+a.x*sin(rad));
}

//点 p1 到圆 c 的两条切线对应的切点
int getPCir_tangents(P c,db r,P p1,vector<P>&ans){
```

```
    P u=c-p1;
    db dist=diss(p1,c);
    if(dcmp(dist,r)<0)return 0;//内含
    else if(dcmp(dist,r)==0){//1 条
        P x=RotateL(u,PI/2);
        ans.pb(p1);
        ans.pb(p1);
        return 1;
    }else{//2 条切线
        db ang=asin(r/dist);
        u=u*sqrt(dis(p1,c)-r*r)/dist;
        P x1=RotateL(u,ang),x2=RotateL(u,-ang);
        ans.pb(x1+p1);
        ans.pb(x2+p1);
        return 2;
    }
}
//4 相离 3 外切 2 两点交 1 内切 0 内含
int relationCir(Cir x,Cir y){
    db d=sqrt(dis(x.c,y.c));
    int f1=sign(d-x.r-y.r);
    if(f1>0)return 4;
    if(f1==0)return 3;
    db l=fabs(x.r-y.r);
    int f2=sign(d-l);
    if(f1<0&&f2>0)return 2;
    if(f2==0)return 1;
    if(f2<0)return 0;
}

// 圆的公切线条数 a,b 分别表示第 i 条切线在圆 c1,c2 上切点
// 重合-无数条 内含-无 内切-一条外公切线 相交-两条外公切线
// 外切 3 条公切线 一条内公切线,两条外公切线
// 相离 4 条公切线 内公切线 2 条 外公切线 2 条
int getPCir_tangents(Cir c1,Cir c2,P*a,P*b){//点集在[0,cnt-1]上
    int cnt=0;
    if(dcmp(c1.r,c2.r)<0)swap(c1,c2),swap(a,b);//对应点集仍不变
    int f=relationCir(c1,c2);
    if(!f)return 0;//内含
    P p1=c1.c,p2=c2.c;
    db r1=c1.r,r2=c2.r;
    if(dcmp(dis(p1,p2),0)==0&&dcmp(r1,r2)==0)return -1;//无数条切线
    db base=atan2(p2.y-p1.y,p2.x-p1.x);
    if(f==1){//内切一条
```

```
        a[cnt]=c1.GP(base);
        b[cnt]=c2.GP(base);cnt++;
        return 1;
    }
    //2 条外公切线
    db ang=acos((r1-r2)/diss(p1,p2));
    a[cnt]=c1.GP(base+ang);b[cnt]=c2.GP(base+ang);cnt++;
    a[cnt]=c1.GP(base-ang);b[cnt]=c2.GP(base-ang);cnt++;
    if(f==3){//一条内
        a[cnt]=c1.GP(base);b[cnt]=c2.GP(PI+base);cnt++;
    }else if(f==4){//两条内
        db ang=acos((r1+r2)/diss(p1,p2));
        a[cnt]=c1.GP(base+ang);b[cnt]=c2.GP(PI+base+ang);cnt++;
        a[cnt]=c1.GP(base-ang);b[cnt]=c2.GP(PI+base-ang);cnt++;
    }
    return cnt;
}

db Cirarea(P a,db r1,P b,db r2){//两圆面积交  很可能要开 long double 精度不
够
    db d = sqrt((a.x-b.x)*(a.x-b.x) + (a.y-b.y)*(a.y-b.y));
    if (dcmp(d,r1+r2)>=0)return 0;//相离相切
    if (dcmp(r1,r2)>0)swap(r1,r2);
    if(dcmp(r2-r1,d)>=0)//内含
        return PI*r1*r1;
    db ang1=acos((r1*r1+d*d-r2*r2)/(2*r1*d));
    db ang2=acos((r2*r2+d*d-r1*r1)/(2*r2*d));
    return ang1*r1*r1 + ang2*r2*r2 - r1*d*sin(ang1);
}

//判某条线段能否被若干圆完全覆盖
bool direct(L x){
    vector<pair<P,int>>sec;
    P a=x.ps[0],b=x.ps[1];
    if(a<b)swap(a,b);
    sec.push_back({a,-2});
    sec.push_back({b,2});
    for(auto&u:cir){
        auto tmpjiao=getCircleLineSec(u.c,u.r,x.ps[0],x.ps[1]);
        if(tmpjiao.size()==2){
            if(tmpjiao[0]<tmpjiao[1])swap(tmpjiao[0],tmpjiao[1]);
            sec.push_back({tmpjiao[0],0});
            sec.push_back({tmpjiao[1],1});
        }
```

```
    }
    sort(sec.begin(),sec.end());
    bool ret = true, counting = false;
    int inside = 0;
    for(int i=0; i < sec.size(); i++) {
        if(abs(sec[i].se) == 2) counting = !counting;
        else sec[i].se ? inside-- : inside++;
        if(counting and !inside) ret = false;
    }
    return ret;
}


//求多个圆与线段的交的长度
using PDD = pair<double, double>;
#define sqr(x) ((x) * (x))
db coverLen(L a, Cir c[], int n) {//[1,n]是圆
  db Cos = ((a.ps[1].x - a.ps[0].x) / a.len()), Sin = ((a.ps[1].y -
a.ps[0].y) / a.dir().len());
  db dx = a.ps[0].x, dy = a.ps[0].y;
  vector<PDD> mat;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    db A = 1;
    db B = -2 * (Cos * (c[i].c.x - dx) + Sin * (c[i].c.y - dy));
    db C = pow2(c[i].c.x - dx) + pow2(c[i].c.y - dy) - c[i].r * c[i].r;
    db D = B * B - 4 * A * C;
    if (sign(D) < 0) continue;
    D = sign(D) ? sqrt(D) : 0;  // 清误差
    db L = max(0.0, min(a.dir().len(), (-B - D) / (2 * A)));
    db R = max(0.0, min(a.dir().len(), (-B + D) / (2 * A)));
    mat.eb(mp(L, R));
  }
  sort(all(mat));
  db las = 0, tot = 0;
  for (int i = 0; i < mat.size(); i++) {
    if (dcmp(las,mat[i].fi)<0) las = mat[i].fi;
    if (dcmp(las,mat[i].se)<0) tot += mat[i].se - las, las = mat[i].se;
  }
  return tot;
}


db TriCirInterction(Cir c,P a,P b){ //三角剖分求圆与多边形面积交
    P oa=a-c.c,ob=b-c.c;//逆时针
```

```
    P ba=a-b,bc=c.c-b;
    P ab=b-a,ac=c.c-a;
    db doa=oa.len(),dob=ob.len(),dab=ab.len(),r=c.r;
    if(dcmp(det(oa,ob),0)==0)return 0;//三点一线 无三角形
    if(dcmp(doa,r)<0&&dcmp(dob,r)<0)return 0.5*det(oa,ob);//三点内部
    else if(dcmp(dob,r)<0&&dcmp(doa,r)>=0){
        db x=(dot(ba,bc)+sqrt(r*r*dab*dab-det(ba,bc)*det(ba,bc)))/dab;
        db TS=det(oa,ob)*0.5;
        return asin(TS*(1-x/dab)*2/r/doa)*r*r*0.5+TS*x/dab;
    }else if(dcmp(dob,r)>=0&&dcmp(doa,r)<0){
        db y=(dot(ab,ac)+sqrt(r*r*dab*dab-det(ab,ac)*det(ab,ac)))/dab;
        db TS=det(oa,ob)*0.5;
        return asin(TS*(1-y/dab)*2/r/dob)*r*r*0.5+TS*y/dab;
    }else
if(fabs(det(oa,ob))>=r*dab||dcmp(dot(ab,ac),0)<=0||(dcmp(dot(ba,bc),0)<
=0)){//两点外 单扇形
        db ang=acos(dot(oa,ob)/doa/dob);
        return sign(det(oa,ob))*ang*r*r*0.5;
    }else{
        db x=(dot(ba,bc)+sqrt(r*r*dab*dab-det(ba,bc)*det(ba,bc)))/dab;
        db y=(dot(ab,ac)+sqrt(r*r*dab*dab-det(ab,ac)*det(ab,ac)))/dab;
        db TS=det(oa,ob)*0.5;
        return                    (asin(TS*(1-x/dab)*2/r/doa)+asin(TS*(1-
y/dab)*2/r/dob))*r*r*0.5+TS*((x+y)/dab-1);
    }
}
int n;
db PolyonCirArea(Cir c,vector<P>&p){ //圆与多边形面积交
    db ans=0;
    for(int i=0;i<n;++i){
        ans+=TriCirInterction(c,p[i],p[i+1]);
    }
    return fabs(ans);
}

vector<P>p(100005);
int main(){
    db x,y,h,x1,y1,t,r,ans=0;
    cin>>n>>r;
    Cir c;
    c.c=P(0,0);c.r=r;
    for(int i=0;i<n;++i)cin>>p[i].x>>p[i].y;
    p[n]=p[0];
    printf("%.12f\n",PolyonCirArea(c,p));
```

```
    return 0;
}
```

极角排序

```
bool cmp1(P a,P b){
    if(dcmp(atan2(a.y,a.x),atan2(b.y,b.x))!=0)
        return dcmp(atan2(a.y,a.x),atan2(b.y,b.x))<0;
    else return dcmp(a.x,b.x)<0;
}

//极角排序，按某点排序
int Qua(P a){
    if(a.x>0&&a.y>=0)return 1;
    if(a.x<=0&&a.y>0)return 2;
    if(a.x<0&&a.y<=0)return 3;
    if(a.x>=0&&a.y<0)return 4;
}
bool cmp2(P a,P b){ //一般是对 a-c,b-c 排
    int f1=Qua(a),f2=Qua(b);
    if(f1==f2){
        ll tmp=det(a,b);
        if(tmp>0)return 1;
        else if(!tmp&&a.len2()<b.len2())return 1;
        return 0;
    }
    return f1<f2;
}
```

凸包

```
int Andrew(P p[],P ch[]){//求凸包
    sort(p+1,p+n+1);//重载的排序
    int m = 0;
    for(int i = 1; i <=n; i++){
        while(m > 1 && cha(ch[m-2],ch[m-1],p[i]) <= 0) m--;//<=不需要共线
```

```
        ch[m++] = p[i];
    }
    int k = m;
    for(int i = n-1; i >= 1; i--){
        while(m > k && cha(ch[m-2],ch[m-1],p[i]) <= 0) m--;
        ch[m++] = p[i];
    }
    if(n > 1) m--;
    return m;
}
```

旋转卡壳

```
int rotate_calipers(){//旋转卡壳凸包直径平方 直径相应改 db 和 cha
    Andrew();
    int j=1,ans=0;//j 上一次做完的点
    for(int i=0;i<m;++i){

while(cha(ch[i],ch[i+1],ch[j])<cha(ch[i],ch[i+1],ch[j+1]))j=(j+1)%m;
        ans=max(ans,max(dis(ch[i],ch[j]),dis(ch[i+1],ch[j])));
    }
    return ans;
}
```

半平面交

逆时针向量，极角排序，双端队列维护半平面，弹出所有在当前右侧的点，最后判头尾合法

```
//求多边形核的面积，用到点类，线类模板
bool cmp(L l1,L l2){
    P a=l1.dir(),b=l2.dir();
    int f1=Qua(a),f2=Qua(b);
    if(f1==f2){
        db tmp=det(a,b);
        return tmp>=0;
    }
    return f1<f2;
}
db area(vector<P>p){//任意多边形面积 顺逆都可
    db ans=0;
    int sz=p.size();
    if(!sz)return ans;
    for(int i=0;i<sz-1;++i)ans+=det(p[i],p[i+1]);
```

```
    ans+=det(p[sz-1],p[0]);
    return fabs(ans/2);
}
P LineInter(L l1,L l2){ //两直线交点 不平行的时候用
    P a=l1.ps[0],b=l1.ps[1],c=l2.ps[0],d=l2.ps[1];
    db t=det(a-c,c-d)/det(a-b,c-d);
    return P(a.x+(b.x-a.x)*t,a.y+(b.y-a.y)*t);
}
bool onRight(P a,L x){
    return sign(det(x.dir(),a-x.ps[0]))<=0;
}
int HalfPlaneInter(vector<L>line,vector<P>&sol){
    int n=line.size(),h,t;
    sort(line.begin(),line.end(),cmp);
    q[h=t=0]=line[0];
    for(int i=1;i<=n-1;++i){
        while(h<t&&onRight(p[t-1],line[i]))t--;
        while(h<t&&onRight(p[h],line[i]))h++;
        q[++t]=line[i];
        if(sign(det(q[t].dir(),q[t-1].dir()))==0){
            t--;//共线保留靠左
            if(!onRight(line[i].ps[0],q[t]))q[t]=line[i];
        }
        if(h<t)p[t-1]=LineInter(q[t],q[t-1]);
    }
    while(h<t&&onRight(p[t-1],q[h]))t--;
    if(t-h<=1)return 0;
    sol.clear();p[t]=LineInter(q[h],q[t]);
    for(int i=h;i<=t;++i)sol.eb(p[i]);
    return 1;
}
vector<P>a,hpi;//多边形、半平面
vector<L>line;
int main(){
    int t,n;
    cin>>t;
    while(t--){
        cin>>n;
        a=vector<P>(n+1);
        for(int i=0;i<n;++i)cin>>a[i].x>>a[i].y;
        a[n]=a[0];
        for(int i=0;i<n;++i)line.eb(L(a[i],a[i+1]));
    }
    HalfPlaneInter(line,hpi);
```

```
    printf("%.3lf",area(hpi));
    return 0;
}
```

三维几何

```
const db EPS=1e-8;
typedef struct P3D {
    db x, y, z;
    P3D(db xx = 0, db yy = 0, db zz = 0): x(xx), y(yy), z(zz) {}
    bool operator == (const P3D& A) const {
        return x==A.x && y==A.y && z==A.z;
    }
}V3D;

P3D read_Point_3D() {
    db x,y,z;
    scanf("%lf%lf%lf",&x,&y,&z);
    return P3D(x,y,z);
}

V3D operator + (const V3D & A, const V3D & B) {
    return V3D(A.x + B.x, A.y + B.y, A.z + B.z);
}

V3D operator - (const P3D & A, const P3D & B) {
    return V3D(A.x - B.x, A.y - B.y, A.z - B.z);
}

V3D operator * (const V3D & A, db p) {
    return V3D(A.x * p, A.y * p, A.z * p);
}

V3D operator / (const V3D & A, db p) {
    return V3D(A.x / p, A.y / p, A.z / p);
}

db pow2(db a){
    return a*a;
}

db dis(const P3D&A,const P3D&B){
    return sqrt(pow2(A.x-B.x)+pow2(A.y-B.y)+pow2(A.z-B.z));
```

```
}

db Dot(const V3D & A, const V3D & B) {
    return A.x * B.x + A.y * B.y + A.z * B.z;
}

db Length(const V3D & A) {
    return sqrt(Dot(A, A));
}

db Angle(const V3D & A, const V3D & B) {
    return acos(Dot(A, B) / Length(A) / Length(B));
}

V3D Cross(const V3D & A, const V3D & B) {
    return V3D(A.y * B.z - A.z * B.y, A.z * B.x - A.x * B.z, A.x * B.y -
A.y * B.x);
}

db Area2(const P3D & A, const P3D & B, const P3D & C) {
    return Length(Cross(B - A, C - A));
}

db Volume6(const P3D & A, const P3D & B, const P3D & C, const P3D & D) {
    return Dot(D - A, Cross(B - A, C - A));
}

// 四面体的重心
P3D Centroid(const P3D & A, const P3D & B, const P3D & C, const P3D & D)
{
    return (A + B + C + D) / 4.0;
}

/************点线面*************/
// 点 p 到平面 p0-n 的距离。n 必须为单位向量
db DistanceToPlane(const P3D & p, const P3D & p0, const V3D & n){
    return fabs(Dot(p - p0, n)); // 如果不取绝对值，得到的是有向距离
}

// 点 p 在平面 p0-n 上的投影。n 必须为单位向量
P3D GetPlaneProjection(const P3D & p, const P3D & p0, const V3D & n){
    return p - n * Dot(p - p0, n);
}
```

```
//直线 p1-p2 与平面 p0-n 的交点
P3D LinePlaneIntersection(P3D p1, P3D p2, P3D p0, V3D n){
    V3D v= p2 - p1;
    db t = (Dot(n, p0 - p1) / Dot(n, p2 - p1)); //分母为 0，直线与平面平行或在平面上
    return p1 + v * t; //如果是线段 判断 t 是否在 0~1 之间
}

// 点 P 到直线 AB 的距离
db DistanceToLine(const P3D & P, const P3D & A, const P3D & B){
    V3D v1 = B - A, v2 = P - A;
    return Length(Cross(v1, v2)) / Length(v1);
}

//点到线段的距离
db DistanceToSeg(P3D p, P3D a, P3D b){
    if(a == b){
        return Length(p - a);
    }
    V3D v1 = b - a, v2 = p - a, v3 = p - b;
    if(Dot(v1, v2) + EPS < 0){
        return Length(v2);
    }
    else{
        if(Dot(v1, v3) - EPS > 0){
            return Length(v3);
        }
        else{
            return Length(Cross(v1, v2)) / Length(v1);
        }
    }
}

//求异面直线 p1+s*u 与 p2+t*v 的公垂线对应的 s 如果平行|重合，返回 false
bool LineDistance3D(P3D p1, V3D u, P3D p2, V3D v, db & s){
    db b = Dot(u, u) * Dot(v, v) - Dot(u, v) * Dot(u, v);
    if(abs(b) <= EPS){return false;}
    db a = Dot(u, v) * Dot(v, p1 - p2) - Dot(v, v) * Dot(u, p1 - p2);
    s = a / b;
    return true;
}

// p1 和 p2 是否在线段 a-b 的同侧
bool SameSide(const P3D & p1, const P3D & p2, const P3D & a, const P3D &
```

```
b){
    return Dot(Cross(b - a, p1 - a), Cross(b - a, p2 - a)) - EPS >= 0;
}

// 点 P 在三角形 P0, P1, P2 中
bool PointInTri(const P3D & P, const P3D & P0, const P3D & P1, const P3D
& P2){
    return SameSide(P, P0, P1, P2) && SameSide(P, P1, P0, P2) && SameSide(P,
P2, P0, P1);
}

// 三角形 P0P1P2 是否和线段 AB 相交
bool TriSegIntersection(const P3D & P0, const P3D & P1, const P3D & P2,
const P3D & A, const P3D & B, P3D & P){
    V3D n = Cross(P1 - P0, P2 - P0);
    if(abs(Dot(n, B - A)) <= EPS){
        return false;    // 线段 A-B 和平面 P0P1P2 平行或共面
    }
    else{    // 平面 A 和直线 P1-P2 有惟一交点
        db t = Dot(n, P0 - A) / Dot(n, B - A);
        if(t + EPS < 0 || t - 1 - EPS > 0){
            return false;    // 不在线段 AB 上
        }
        P = A + (B - A) * t; // 交点
        return PointInTri(P, P0, P1, P2);
    }
}

//三维旋转 old 绕 vx 逆时针旋转 theta
P get(double oldx, double oldy, double oldz, double vx, double vy, double
vz, double theta){
    double r = theta * PI / 180;
    double c = cos(r);
    double s = sin(r);
    double nx = (vx*vx*(1 - c) + c) * oldx + (vx*vy*(1 - c) - vz*s) * oldy
+ (vx*vz*(1 - c) + vy*s) * oldz;
    double ny = (vy*vx*(1 - c) + vz*s) * oldx + (vy*vy*(1 - c) + c) * oldy
+ (vy*vz*(1 - c) - vx*s) * oldz;
    double nz = (vx*vz*(1 - c) - vy*s) * oldx + (vy*vz*(1 - c) + vx*s) *
oldy + (vz*vz*(1 - c) + c) * oldz;
    return P(nx, ny, nz);
}

//空间两三角形是否相交
```

```
bool TriTriIntersection(P3D * T1, P3D * T2){
    P3D P;
    for(int i = 0; i < 3; i++){
        if(TriSegIntersection(T1[0], T1[1], T1[2], T2[i], T2[(i + 1) % 3],
P)){return true;}
        if(TriSegIntersection(T2[0], T2[1], T2[2], T1[i], T1[(i + 1) % 3],
P)){return true;}
    }
    return false;
}

//空间两直线上最近点对 返回最近距离 点对保存在 ans1 ans2 中
db SegSegDistance(P3D a1, P3D b1, P3D a2, P3D b2, P3D& ans1, P3D& ans2){
    V3D v1 = (a1 - b1), v2 = (a2 - b2);
    V3D N = Cross(v1, v2);
    V3D ab = (a1 - a2);
    db ans = Dot(N, ab) / Length(N);
    P3D p1 = a1, p2 = a2;
    V3D d1 = b1 - a1, d2 = b2 - a2;
    db t1, t2;
    t1 = Dot((Cross(p2 - p1, d2)), Cross(d1, d2));
    t2 = Dot((Cross(p2 - p1, d1)), Cross(d1, d2));
    db dd = Length((Cross(d1, d2)));
    t1 /= dd * dd;
    t2 /= dd * dd;
    ans1 = (a1 + (b1 - a1) * t1);
    ans2 = (a2 + (b2 - a2) * t2);
    return fabs(ans);
}

// 判断 P 是否在三角形 A, B, C 中，并且到三条边的距离都至少为 mindist。保证 P, A,
B, C 共面
bool InsideWithMinDistance(const P3D & P, const P3D & A, const P3D & B,
const P3D & C, db mindist){
    if(!PointInTri(P, A, B, C))return 0;
    if(DistanceToLine(P, A, B) < mindist)return 0;
    if(DistanceToLine(P, B, C) < mindist)return 0;
    if(DistanceToLine(P, C, A) < mindist)return 0;
    return 1;
}

// 判断 P 是否在凸四边形 ABCD（顺时针或逆时针）中，并且到四条边的距离都至少为
mindist。保证 P, A, B, C, D 共面
bool InsideWithMinDistance(const P3D & P, const P3D & A, const P3D & B,
```

```
const P3D & C, const P3D & D, db mindist){
    if(!PointInTri(P, A, B, C))return 0;
    if(!PointInTri(P, C, D, A))return 0;
    if(DistanceToLine(P, A, B) < mindist)return 0;
    if(DistanceToLine(P, B, C) < mindist)return 0;
    if(DistanceToLine(P, C, D) < mindist)return 0;
    if(DistanceToLine(P, D, A) < mindist)return 0;
    return 1;
}
/*************凸包相关问题******************/
//加干扰
db rand01(){
    return rand() / (db)RAND_MAX;
}
db randeps(){
    return (rand01() - 0.5) * EPS;
}
P3D add_noise(const P3D & p){
    return P3D(p.x + randeps(), p.y + randeps(), p.z + randeps());
}

struct Face{
    int v[3];//顶点下标
    Face(int a, int b, int c){ v[0]=a;v[1]=b;v[2]=c;}
    V3D Normal(const vector<P3D> & P) const{//面的法线
        return Cross(P[v[1]] - P[v[0]], P[v[2]] - P[v[0]]);
    }
    // P[i]是否能看到面
    int CanSee(const vector<P3D> & P, int i) const{
        return Dot(P[i] - P[v[0]], Normal(P)) > 0;
    }
};

// 增量法求三维凸包
// 注意：没有考虑各种特殊情况（如四点共面）。实践中，请在调用前对输入点进行微小扰
动
vector<Face> CH3D(const vector<P3D> & P){
    int n = P.size();
    vector<vector<int> > vis(n);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        vis[i].resize(n);
    }
    vector<Face> cur;
    cur.push_back(Face(0, 1, 2)); // 由于已经进行扰动，前三个点不共线
```

```
    cur.push_back(Face(2, 1, 0));
    for(int i = 3; i < n; i++){
        vector<Face> next;
        // 计算每条边的“左面”的可见性
        for(int j = 0; j < cur.size(); j++) {
            Face & f = cur[j];
            int res = f.CanSee(P, i);
            if(!res){
                next.push_back(f);
            }
            for(int k = 0; k < 3; k++){
                vis[f.v[k]][f.v[(k + 1) % 3]] = res;
            }
        }

        for(int j = 0; j < cur.size(); j++)
            for(int k = 0; k < 3; k++){
                int a = cur[j].v[k], b = cur[j].v[(k + 1) % 3];
                if(vis[a][b] != vis[b][a] && vis[a][b]){  // (a,b)是分界线,
左边对 P[i]可见
                    next.push_back(Face(a, b, i));
                }
            }
        cur = next;
    }
    return cur;
}

struct ConvexPolyhedron{
    int n;
    vector<P3D> P, P2;
    vector<Face> faces;
    bool read(){
        if(scanf("%d", &n) != 1){
            return false;
        }
        P.resize(n);
        P2.resize(n);
        for(int i = 0; i < n; i++){
            P[i] = read_Point_3D();
            P2[i] = add_noise(P[i]);
        }
        faces = CH3D(P2);
        return true;
```

```
    }
    //三维凸包重心
    P3D centroid(){
        P3D C = P[0];
        db totv = 0;
        P3D tot(0, 0, 0);
        for(int i = 0; i < faces.size(); i++){
            P3D  p1  =  P[faces[i].v[0]],  p2  =  P[faces[i].v[1]],  p3  =
P[faces[i].v[2]];
            db v = -Volume6(p1, p2, p3, C);
            totv += v;
            tot = tot + Centroid(p1, p2, p3, C) * v;
        }
        return tot / totv;
    }
    //凸包重心到表面最近距离
    db mindist(P3D C){
        db ans = 1e30;
        for(int i = 0; i < faces.size(); i++){
            P3D  p1  =  P[faces[i].v[0]],  p2  =  P[faces[i].v[1]],  p3  =
P[faces[i].v[2]];
            ans = min(ans, fabs(-Volume6(p1, p2, p3, C) / Area2(p1, p2,
p3)));
        }
        return ans;
    }
};
//两球体积交
```

球的体积交与并

```
db cap(db r,db h){return pi*(r*3-h)*h*h/3;}

//2 球体积交
db sphere_intersect(db x1,db y1,db z1,db r1,db x2,db y2,db z2,db r2){
    db d=dis(x1,y1,z1,x2,y2,z2);
    //相离
    if(d>=pow2(r1+r2))return 0;
    //包含
    if(d<=pow2(r1-r2))return pow3(min(r1,r2))*4*pi/3;
    //相交
    db h1=r1-r1*cos(r2,r1,sqrt(d)),h2=r2-r2*cos(r1,r2,sqrt(d));
    return cap(r1,h1)+cap(r2,h2);
}
```

```
//2 球体积并
db sphere_union(db x1,db y1,db z1,db r1,db x2,db y2,db z2,db r2){
    db d=dis(x1,y1,z1,x2,y2,z2);
    //相离
    if(d>=pow2(r1+r2))return (pow3(r1)+pow3(r2))*4*pi/3;
    //包含
    if(d<=pow2(r1-r2))return pow3(max(r1,r2))*4*pi/3;
    //相交
    db h1=r1+r1*cos(r2,r1,sqrt(d)),h2=r2+r2*cos(r1,r2,sqrt(d));
    return cap(r1,h1)+cap(r2,h2);
}
```

其他题

Hdu6219 最大空凸包

```
//O(n^3)最大空凸包面积模板
#include<bits/stdc++.h>
#define cha(p1,p2,p3) (sign(det(p2-p1,p3-p1)))//p2-p1 叉 p3-p1
#define cha1(p1,p2,p3) det(p2-p1,p3-p1)
using namespace std;
typedef double db;
const int maxn=55;
const db PI=acos(-1.0);
const db eps=1e-8;

struct P{
    db x,y;
    P():x(0),y(0){}
    P(db x,db y):x(x),y(y){}
    P operator-(P p){ return P(x-p.x,y-p.y);}
}a[maxn],p[maxn],O;
int T,n,cnt;
db ans,dp[maxn][maxn];//以三角形 Oij 为凸包最后一块三角形的面积

int sign(db a){ //符号正负
    return a<-eps?-1:a>eps;
}

int dcmp(db a,db b){ //两数大小
    return sign(a-b);
}
```

```
db det(P a,P b){//叉积
    return a.x*b.y-a.y*b.x;
}

db dis(P p1,P p2){
    return (p2.x-p1.x)*(p2.x-p1.x)+(p2.y-p1.y)*(p2.y-p1.y);
}
//极角排序函数，角度相同则距离小的在前面
bool cmp(P p1,P p2){
    db tmp=cha(O,p1,p2);
    if(tmp>0) return 1;
    else if(tmp==0&&dis(O,p1)<dis(O,p2)) return 1;
    return 0;
}


void solve(){
    for(int i=0;i<n;++i)
        for(int j=0;j<n;++j)
            dp[i][j]=0.0;
    for(int i=1;i<=cnt;++i){
        int j=i-1;
        while(j&&!cha(O,p[i],p[j])) --j;//找到第一个不共线的
        int flag=(j==i-1);//oi 上有点
        while(j){
            int k=j-1;
            while(k&&cha(p[i],p[j],p[k])>0) --k;//
            db area=fabs(cha1(O,p[i],p[j]))/2.0;
            if(k) area+=dp[j][k];
            if(flag)  dp[i][j]=area;//Oi 上没点才能更新 dp,否则下个点回算进内
点
            ans=max(ans,area);
            j=k;
        }
        if(flag)   for(int   j=1;j<i;++j)   dp[i][j]=max(dp[i][j],dp[i][j-
1]);//前缀最大值优化
    }
}

int main(){
    scanf("%d",&T);
    while(T--){
        scanf("%d",&n);
```

```
        ans=0.0;
        for(int i=0;i<n;++i)
            scanf("%lf%lf",&a[i].x,&a[i].y);
        for(int i=0;i<n;++i){
            O=a[i];
            cnt=0;
            for(int j=0;j<n;++j)

if(dcmp(a[j].y,a[i].y)>0||dcmp(a[j].y,a[i].y)==0&&dcmp(a[j].x,a[i].x)>0)
p[++cnt]=a[j];
            sort(p+1,p+cnt+1,cmp);
            solve();
        }
        printf("%.1lf\n",ans);
    }
    return 0;
}
```

平面最近点对

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
struct P{int x,y;}a[2000000],tmp[2000000];
int n,b[2000000];
const ll inf=5e18;
ll sqr(int x){return (ll)x*x;}
ll dis(int l,int r){return sqr(a[l].x-a[r].x)+sqr(a[l].y-a[r].y);}
int cmp(const P &a,const P &b){return a.x==b.x?a.y<b.y:a.x<b.x;}
void merge(int l,int r){
    int mid=(l+r)>>1,i=l,j=mid+1;//归并
    for(int k=l;k<=r;k++){
        if(i<=mid&&(j>r||a[i].y<a[j].y))tmp[k]=a[i++];
        else tmp[k]=a[j++];
    }
    for(int i=l;i<=r;i++)a[i]=tmp[i];
}
ll solve(int l,int r){
    if(l>=r)return inf;
    if(l+1==r){if(a[l].y>a[r].y)swap(a[l],a[r]);return dis(l,r);}
    int mid=(l+r)>>1,t=a[mid].x,cnt=0;//重新排序后中位数就乱了，需要记下来
    ll d=min(solve(l,mid),solve(mid+1,r));
    merge(l,r);
```

```
    for(int i=l;i<=r;i++)
        if(sqr(a[i].x-t)<d)//两边平方的技巧
            b[++cnt]=i;//区间内的拉出来处理
    for(int i=1;i<=cnt;i++)
        for(int j=i+1;j<=cnt&&sqr(a[b[j]].y-a[b[i]].y)<d;j++)
            d=min(d,dis(b[j],b[i]));
    return d;
}
int main(){
    scanf("%d",&n);
    for(int i=1;i<=n;i++)scanf("%d%d",&a[i].x,&a[i].y);
    sort(a+1,a+n+1,cmp);
    printf("%.4lf",sqrt(solve(1,n)));
}
```

杂项

快速读入

```
inline int read(){
    char c = getchar();int x = 0,s = 1;
    while(c < '0' || c > '9') {if(c == '-') s = -1;c = getchar();}//是符
号
    while(c >= '0' && c <= '9') {x = x*10 + c -'0';c = getchar();}//是数
字
    return x*s;
}
inline void in(int&x){
    x=read();
}
```

_int128

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
inline __int128 read(){
    __int128 x=0,f=1;
    char ch=getchar();
    while(ch<'0'||ch>'9'){
```

```
        if(ch=='-')
            f=-1;
        ch=getchar();
    }
    while(ch>='0'&&ch<='9'){
        x=x*10+ch-'0';
        ch=getchar();
    }
    return x*f;
}

inline void print(__int128 x){
    if(x<0){
        putchar('-');
        x=-x;
    }
    if(x>9)
        print(x/10);
    putchar(x%10+'0');
}

int main(void){
    __int128 a = read();
    __int128 b = read();
    __int128 m =read();
    print((a + b)%m);
    cout<<endl;
    return 0;
}
```

常用 STL

map 的 Upperbound

```
map<int,int>::iterator se = mp.upper_bound(mid);
```

返回迭代器

优先队列

```
priority_queue<int>Q;//采用默认优先级构造队列
priority_queue<int,vector<int>,cmp2>que2;//最大值优先
Q.push(x);
int x = Q.top(); Q.pop();
```

multiset

```
begin()        返回指向第一个元素的迭代器
clear()        清除所有元素
count()        返回某个值元素的个数
empty()        如果集合为空，返回 true
end()          返回指向最后一个元素的迭代器
erase()        删除集合中的元素 ( 参数是一个元素值，或者迭代器)
find()         返回一个指向被查找到元素的迭代器
insert()       在集合中插入元素
size()         集合中元素的数目
lower_bound()  返回指向大于（或等于）某值的第一个元素的迭代器
upper_bound()  返回大于某个值元素的迭代器
equal_range()  返回集合中与给定值相等的上下限的两个迭代器
multiset <point> po;
multiset <point>::iterator L, R, it;
离散化 lower_lound
lower_bound 第一个出现的值大于等于 val 的位置

upper_bound 最后一个大于等于 val 的位置，也是有一个新元素 val 进来时的插入位置

sort(a + 1, a + A+1);
A = unique(a + 1, a + A+1) - (a + 1);
for (int i = 1; i <= n; i++){ // segtree
    int L = lower_bound(a+1, a+A+1, l[i]) - a;
    int R = lower_bound(a+1, a+A+1, r[i]) - a;
    T.update(L, R, i, 1, T.M+1,1);
}
------------use in ChairTree-------------------
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    scanf("%d", &arr[i]);
    Rank[i] = arr[i];
}
sort(Rank + 1, Rank + n+1);//Rank 存储原值
int m = unique(Rank + 1, Rank + n +1) - (Rank + 1);//这个 m 很重要，WA 一天
系列
for (int i = 1; i <= n; i++) {//离散化后的数组，仅仅用来更新
    arr[i] = lower_bound(Rank + 1, Rank + m+1, arr[i]) - Rank;
}
```

vector 的插入删除

```
// erase the 6th element
myvector.erase (myvector.begin()+5);
// erase the first 3 elements:
myvector.erase (myvector.begin(),myvector.begin()+3);
// ------------inserting into a vector-----------
```

```
#include <iostream>
#include <vector>
int main (){
  std::vector<int> myvector (3,100);
  std::vector<int>::iterator it;
  it = myvector.begin();
  it = myvector.insert ( it , 200 );
  myvector.insert (it,2,300);
  // "it" no longer valid, get a new one:
  it = myvector.begin();
  std::vector<int> anothervector (2,400);
  myvector.insert (it+2,anothervector.begin(),anothervector.end());
  int myarray [] = { 501,502,503 };
  myvector.insert (myvector.begin(), myarray, myarray+3);
  std::cout << "myvector contains:";
  for (it=myvector.begin(); it<myvector.end(); it++) std::cout << ' ' <<
*it;
  std::cout << '\n';
  return 0;
}
```

bitset

构造函数

bitset<n> b;

b 有 n 位，每位都为 0.参数 n 可以为一个表达式.

如 bitset<5> b0;则"b0"为"00000";

bitset<n> b(unsigned long u);

b 有 n 位,并用 u 赋值;如果 u 超过 n 位,则顶端被截除

如:bitset<5>b0(5);则"b0"为"00101";

bitset<n> b(string s);

b 是 string 对象 s 中含有的位串的副本

string bitval ("10011");

bitset<5> b0 (bitval4);

则"b0"为"10011";

bitset<n> b(s, pos);

b 是 s 中从位置 pos 开始位的副本,前面的多余位自动填充 0;

string bitval ("01011010");

bitset<10> b0 (bitval5, 3);

则"b0" 为 "0000011010";

bitset<n> b(s, pos, num);
b 是 s 中从位置 pos 开始的 num 个位的副本,如果 num<n,则前面的空位自动填充 0;
string bitval ("11110011011");
bitset<6> b0 (bitval5, 3, 6);
则"b0" 为 "100110";

bool any()　　是否存在置为 1 的二进制位？和 none()相反
bool none()　　是否不存在置为 1 的二进制位,即全部为 0？和 any()相反.
size_t count()　二进制位为 1 的个数.
size_t size()　二进制位的个数
flip()　　把所有二进制位逐位取反
flip(size_t pos)把在 pos 处的二进制位取反
bool operator[](size_type _Pos)获取在 pos 处的二进制位
set()　　把所有二进制位都置为 1
set(pos)　　把在 pos 处的二进制位置为 1
reset()　　把所有二进制位都置为 0
reset(pos)　　把在 pos 处的二进制位置为 0
test(size_t pos)在 pos 处的二进制位是否为 1？
unsigned long to_ulong( )用同样的二进制位返回一个 unsigned long 值
string to_string ()返回对应的字符串.